Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze	
jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor

Matematické inženýrství

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \, \mathrm{d}(x,y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right)x^n$?

7 (4 body) Nechť X je lineární normovaný prostor a $f : X \to \mathcal{R}$ je zobrazení určené vztahem $f(x) = \|x\|$, $x \in X$. Dokažte jeho spojitost.

8 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$2xy - 2x + (x^2 + 3)y' = 0$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor

Aplikovaná algebra a analýza

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right)x^n$?

7 (5 bodů) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f definované na $\mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ 4 - x, & 3 \le x \le 4, \\ 0 & x < 2 \text{ nebo } x > 4. \end{cases}$$

8 (5 bodů) Najděte řešení rovnice vedení tepla s okrajovými podmínkami:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = x^2 - 1.$$

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze	
jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor

Matematická informatika

❶ (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

❷ (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

❸ (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

❹ (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \, \mathrm{d}(x, y)$.

❺ (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

❻ (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right)x^n$?

❼ (5 bodů) Je daná množina $G = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ a } \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 1\right\}$. Ověřte, že G spolu s obvyklým násobením matic tvoří grupu. Co lze říci o vlastních číslech matice M, je-li její řád jako prvku v grupě G roven $k \in \mathbb{N}$. Nalezněte v grupě G (pokud existuje) prvek řádu 2, prvek řádu 4 a prvek řádu $+\infty$.

❽ (5 bodů) Mějme okruh $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, kde i je imaginární jednotka a operace $+$ a $\times$ jsou definovány stejně jako v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$. Položme $\beta = i - 1 \in \mathbb{Z}[i]$. Řekneme, že $x \in \mathbb{Z}[i]$ je v relaci s $y \in \mathbb{Z}[i]$ a zapisujeme $x \sim y$, pokud existuje $w \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že $x - y = \beta w$. Ověřte, že $\sim$ je ekvivalence na $\mathbb{Z}[i]$. Rozhodněte, zda platí $2i \sim 2 + i$.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze	
jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor

Aplikované matematicko-stochastické metody

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^{x}$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right)x^n$?

7 (5 bodů) Vypočítejte směrodatnou odchylku náhodné veličiny, jejíž hustotou pravděpodobnosti je funkce $g(x) = 16\Theta(x)x\mathrm{e}^{-4x}$, kde $\Theta(x)$ je Heavisideova funkce zavedená předpisem

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

8 (5 bodů) Nalezněte hustotu pravděpodobnosti dvou stejně rozdělených náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ tak, aby součet $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ těchto veličin měl exponenciální rozdělení popsané hustotou $4\Theta(x)\mathrm{e}^{-4x}$. Nápomocna vám bude Laplaceopva transformace.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

Přijímací zkouška z fyziky do navazujícího magisterského studia

VZOR TESTU s výsledky

Studijní směry: Matematická fyzika, Jaderná a částicová fyzika, Kvantové technologie

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň 20 bodů (tedy 50% z maximálního počtu bodů).

1. Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at$, $y = bt$, kde a, b jsou konstanty.

   (4 body)

   Výsledek: $v_r = \dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$

2. Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna. Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.

   (4 body)

   Výsledek: $F = mg(3 - 2\cos\varphi_0)$, $v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)}$

3. Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

   (5 bodů)

   Výsledek: $a = \frac{F}{M - \mu t}$, $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{M}{M - \mu t}$

4. Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $v_1 = 0.8c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $v_2 = 0.6c$ vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je $l_0 = 10m$. Jaká je délka této rakety z hlediska pozorovatele v lodi a z hlediska pozorovatele na Zemi?

   (4 body)

   Výsledek: $l_{v_1} = 8m$, $l_{v_2} = 3.24m$

5. Určete velikost intenzity elektrického pole E ve středu kulové slupky poloměru R, je-li jedna její polovina nabita s plošnou hustotou σ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

6. Určete svodový odpor kulového kondenzátoru o poloměrech $R_1 < R_2$, je-li prostor mezi elektrodami zaplněn olejem o měrném odporu ϱ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $R = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

7. Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém poli tak, že vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$ tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\vec{F} = \vec{0}$

8. Nalezněte úhlovou frekvenci podélných kmitů hmotného bodu na přímce, upevněného mezi dvěma pružinami o stejné tuhosti k.

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

9. Napište Lagrangeovu funkci $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ a odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla, jehož délka l roste podle zákona $l(t) = l_0(1 + kt)$, kde l_0 a k jsou konstanty.

   (5 bodů)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\varphi$, $(1 + kt)\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \frac{g}{l_0}\sin\varphi = 0$

Přijímací zkouška z fyziky do navazujícího magisterského studia

VZOR TESTU s výsledky

Studijní směry: Fyzikální elektronika, Jaderné inženýrství, Inženýrství pevných látek, Fyzikální inženýrství materiálů, Fyzika plazmatu a termojaderné fúze

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň 20 bodů (tedy 50% z maximálního počtu bodů).

1. Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at$, $y = bt$, kde a, b jsou konstanty.

   (4 body)

   Výsledek: $v_r = \dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$

2. Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna. Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.

   (4 body)

   Výsledek: $F = mg(3 - 2\cos\varphi_0)$, $v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)}$

3. Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

   (5 bodů)

   Výsledek: $a = \frac{F}{M-\mu t}$, $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{M}{M-\mu t}$

4. Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $v_1 = 0.8c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $v_2 = 0.6c$ vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je $l_0 = 10m$. Jaká je délka této rakety z hlediska pozorovatele v lodi a z hlediska pozorovatele na Zemi?

   (4 body)

   Výsledek: $l_{v_1} = 8m$, $l_{v_2} = 3.24m$

5. Určete velikost intenzity elektrického pole E ve středu kulové slupky poloměru R, je-li jedna její polovina nabita s plošnou hustotou σ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

6. Určete svodový odpor kulového kondenzátoru o poloměrech $R_1 < R_2$, je-li prostor mezi elektrodami zaplněn olejem o měrném odporu ϱ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $R = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

7. Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém poli tak, že vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$ tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\vec{F} = \vec{0}$

8. Nalezněte úhlovou frekvenci podélných kmitů hmotného bodu na přímce, upevněného mezi dvěma pružinami o stejné tuhosti k.

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

9. Vypočtěte střední hodnotu velikosti rychlosti $\langle v \rangle$ pro Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí.

   (5 bodů)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

Přijímací zkouška z fyziky do navazujícího magisterského studia

VZOR TESTU s výsledky

Studijní směry: Radiologická fyzika

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň 20 bodů (tedy 50% z maximálního počtu bodů).

1. Určete rychlost a zrychlení částice v polárních souřadnicích, je-li pohyb zadán parametricky jako $x = at$, $y = bt$, kde a, b jsou konstanty.

   (4 body)

   Výsledek: $v_r = \dot{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = 0$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$

2. Houpačka hmotnosti m na závěsu délky l byla vychýlena o úhel φ_0 a puštěna. Určete maximální namáhání závěsu a rychlost houpačky v dolní poloze.

   (4 body)

   Výsledek: $F = mg(3 - 2\cos\varphi_0)$, $v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)}$

3. Stanovte zrychlení a rychlost vozíku, působí-li na něj stálá vodorovná síla velikosti F, a je-li na vozíku písek, který vypadává otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

   (5 bodů)

   Výsledek: $a = \frac{F}{M-\mu t}$, $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{M}{M-\mu t}$

4. Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $v_1 = 0.8c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $v_2 = 0.6c$ vzhledem k lodi. Vlastní délka rakety je $l_0 = 10m$. Jaká je délka této rakety z hlediska pozorovatele v lodi a z hlediska pozorovatele na Zemi?

   (4 body)

   Výsledek: $l_{v_1} = 8m$, $l_{v_2} = 3.24m$

5. Určete velikost intenzity elektrického pole E ve středu kulové slupky poloměru R, je-li jedna její polovina nabita s plošnou hustotou σ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

6. Určete svodový odpor kulového kondenzátoru o poloměrech $R_1 < R_2$, je-li prostor mezi elektrodami zaplněn olejem o měrném odporu ϱ.

   (5 bodů)

   Výsledek: $R = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

7. Jaká výsledná síla působí na nabitou částici pohybující se rychlostí $v = E/B$ ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém poli tak, že vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$ tvoří pravoúhlou pravotočivou soustavu?

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\vec{F} = \vec{0}$

8. Rovnostranný trojúhelník je sletován z homogenního drátu. Ke dvěma vrcholům trojúhelníka je přiloženo elektromotorické napětí. Jaká bude magnetická indukce ve středu trojúhelníka?

   (4 body)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\vec{B} = \vec{0}$

9. Čtvercová smyčka o straně a rotuje v homogenním magnetickém poli $\vec{B}$ kolem osy rovnoběžné s rovinou čtverce a kolmé k poli s konstantní úhlovou rychlostí ω. V okamžiku $t = 0$ leží smyčka v rovině kolmé k poli. Určete závislost indukovaného elektromotorického napětí $\mathcal{E}$ na čase.

   (5 bodů)

   $\boxed{\text{Výsledek:}}$ $\mathcal{E} = Ba^2\omega \sin \omega t$

Vzor zadání pro program
Aplikovaná informatika v přírodních vědách

Bez použití počítače napište algoritmy (v jazyce C++, C#, Java nebo Pascal)

8 příkladů, 40 bodů, k úspěšnému složení zkoušky je potřeba získat 20 bodů

1) [3 body] Napište algoritmus pro vymazání položky na konci jednosměrného seznamu.

2) [3 body] Napište algoritmus pro vyhledání položky v binárním stromu.

3) [7 bodů] Napište algoritmus pro vymazání položky z binárního stromu.

4) [7 bodů] Napište algoritmus pro třídění haldou (heapsort).

5) [6 bodů] Napište algoritmus pro vyhledání nejkratší cesty jezdcem na šachovnici (stačí délka cesty).

6) [6 bodů] Napište algoritmus pro nalezení alespoň jednoho řešení osmi dam na šachovnici.

7) [6 bodů] Napište algoritmus znázorňující přenos disků Hanojských věží.

8) [2 body] Slovy popište význam následující deklarace: float (* f) (int , int);

Pro ilustraci další příklady :

Napište algoritmus pro vložení hodnoty do vyváženého (AVL) stromu.

Napište algoritmus pro vložení hodnoty do B-stromu.

Řešení:

```
/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Vymazání položky na konci jednosměrného seznamu. */

class Node
{
     public:
        int key;
        Node * next;
};

Node * head;

void delete_last ()
{
      Node * p = head;
      while (p != NULL && p->next != NULL) p = p->next;
      if (p != NULL) delete p;

      if (head != NULL &&  head->next == NULL) head = NULL;
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD vyhledání položky v binárním stromu. */

class Node
{
     public:
        int key;
        Node * left, * right;
};

Node * root;

Node * search (int value)
{
      Node * p = root;
      while (p != NULL && p->key != value)
      {
            if (p->key < value) p = p->left; else p = p->right;
      }
      return p; // NULL pokud hodnota nebyla nalezena nebo ukazatel na nalezenou polozku
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Vymazání položky z binárního stromu. */

#include <iostream>
using namespace std;

struct Item
{
    int key;
    Item * left;
    Item * right;

    Item () { key = 0; left = nullptr; right = nullptr; }
};

Item* findAndUnlink (Item * & u)
{
    if (u->right == nullptr)
```

```
    {
        Item* w = u;
        u = w->left;
        w->left = nullptr;
        return w;
    }
    else
    {
        return findAndUnlink (u->right);
    }
}

void remove (Item * & p, int value)
{
    if (p == nullptr)
    {
    }
    else if (value < p->key)
    {
       remove (p->left, value);
    }
    else if (p->key < value)
    {
       remove (p->right, value);
    }
    else
    {
        // nasli jsme
        Item* t = p; // t ... k vymazani
        if (p->left == nullptr)
        {
            p = t->right;
            delete t;
        }
        else if (p->right == nullptr)
        {
            p = t->left;
            delete t;
        }
        else
        {
            // dva podstromy
            Item* u = findAndUnlink (t->left);
            u->left = t->left;
            u->right = t->right;
            p = u;
            delete t;
        }
    }
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD heapsort */

const int N = 1000;
int a [N+1]; /* a[0] nepouzivam */

inline void swap (int i, int k)
{
    int t = a [i];
    a [i] = a [k];
    a [k] = t;
}
```

```
void heapify (int i, int k)
{
    while (2*i <= k) // dokud existuje levy
    {
        int v = 2*i; // index leveho
        if (v+1 <= k) // pokud pravy existuje
        {
            if (a [v+1] > a [v]) // pokud pravy je vetsi nez levy
                v = v + 1; // index vetsiho
        }

        if (a [i] < a [v]) // nahore je mensi
        {
            // prohodit a[i] <-> a[v]
            swap (i, v);
            i = v; // pokracovat spodnim prvkem
        }
        else
        {
            i = k+1; // konec
        }
    }
}

void heapSort ()
{
    for (int k = N; k >= 1; k--)
    {
        heapify (k, N);
    }

    swap (1, N); // a[1] <-> a[N], v a[N] je ulozeno maximum

    for (int k = N-1; k > 1; k--)
    {
        heapify (1, k);
        swap (1, k);
    }
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Vyhledání nejkratší cesty jezdcem na šachovnici (stačí délka cesty) */

#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 8;
int p [N+1] [N+1]; // mapa vzdalenosti, radek a sloupec 0 nepouzivame

void tisk ()
{
        /* tisk muzete vynechat */

        for (int i = 1; i <= N; i++)
        {
            for (int k = 1; k <= N; k++)
            {
                int v = p[i][k];
                if (v >= 0)
                   cout << v;
                else
                   cout << ".";
```

```
                cout << " ";
            }
            cout << endl;
        }
}

void jump (int i, int k, int v = 0)
{
    if (i >= 1 && i <= N && k >= 1 && k <= N)
    {
        if (p [i][k] == -1 || p[i][k] > v)
        {
            p [i][k] = v;

            jump (i+2, k+1, v+1);
            jump (i+2, k-1, v+1);
            jump (i-2, k+1, v+1);
            jump (i-2, k-1, v+1);

            jump (i+1, k+2, v+1);
            jump (i+1, k-2, v+1);
            jump (i-1, k+2, v+1);
            jump (i-1, k-2, v+1);
        }
    }
}

int main ()
{
    for (int i = 0; i <= N; i++)
        for (int k = 0; k <= N; k++)
            p[i][k] = -1; // -1 ... nenavstivena policka

    jump (1, 1);
    tisk ();
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Rozmístění osmi dam na šachovnici */

#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 8;

int a [N+1]; // a[0] nepouzivam

int cnt = 0;

void tisk ()
{
    cnt ++;
    /* tisk muzete vynechat */
}

void umisti (int s)
{
    for (int r = 1; r <= N; r++)
    {
        bool ok = true;
        for (int k = 1; k < s; k++)
            if (a[s-k] == r || a[s-k] == r-k || a[s-k] == r+k)
                ok = false;
```

```
        if (ok)
        {
            a [s] = r; // umisti damu v ramci sloupce 's' na radku 'r'
            if (s < N)
                umisti (s+1);
            else
                tisk ();
        }
    }
}

int main()
{
    for (int i = 0; i <= N; i++) a [i] = 0;
    umisti (1);
    cout << "cnt = " << cnt << endl;
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Hanojské věže */

#include <iostream>
#include <cassert>
using namespace std;

const int N = 5; // pocet disku

struct Vez
{
    int v;      // vyska veze
    int p [N];  // velikosti disku, p[0] je dole, p[v-1] je vrchol
};

Vez A, B, C;

void nuluj (Vez & X)
{
   X.v = 0; // nulova vyska

   for (int i = 0; i<N; i++)
        X.p [i] = 0; // pro ladeni - vse vynulujeme
}

void init (Vez & X)
{
    X.v = N; // N disku
    for (int i = 0; i<N; i++)
        X.p [i] = N-i; // dole p[0] = N, ..., nahore p[N-1] = 1
}

void zobraz (Vez & X)
{
    for (int i = 0; i < X.v; i++)
        cout << X.p[i];
    for (int i = X.v; i <= N; i++)
        cout << ' '; // dopln mezerami
}

void tiskni (Vez & X, Vez & Y, Vez & Z)
{
    zobraz (X);
    cout << " : ";
```

```
    zobraz (Y);
    cout << " : ";
    zobraz (Z);
    cout << endl;
}

void krok (Vez & X, Vez & Y) // presun disku z veze X na nez Y
{
    int h;
    assert (X.v > 0); // zkontroluj zda je vez neprazdna

    h = X.p [X.v-1]; // cislo disku z vrcholu veze X
    X.p [X.v-1] = 0; // pro ladeni - vynulujeme
    X.v = X.v - 1;  // zmensime vysku veze X

    assert (Y.v < N); // zkontroluj zda vez neni prilis vysoka
    if (Y.v > 0)
    {
        assert (h < Y.p [Y.v-1]); // zda h je mensi nez soucasny vrchol
    }

    Y.v = Y.v + 1; // zvysime vez Y
    Y.p [Y.v-1] = h; // na vrchol pridame disk h
}

void hraj (Vez & X, Vez & Y, Vez & Z, int k)
// presun z veze X na vez Z, vez Y bude pomocna vez
// preneseme k disku z vrcholu veze X
{
    if (k > 1) hraj (X, Z, Y, k-1); // k-1 disku, X --> Y, Z je pomocna vez
    krok (X, Z); // 1 disk, X --> Z
    tiskni (A, B, C); // vytiskneme jeden krok
    if (k > 1) hraj (Y, X, Z, k-1); // k-1 disku, Y --> Z, X je pomocna vez
}

int main (int argc, char * argv [])
{
    init (A); // vez A - N disku
    nuluj (B); // veze B a C jsou prazdne
    nuluj (C);

    tiskni (A, B, C); // pocatecni stav
    hraj (A, B, C, N); // A --> C, B je pomocna vez, preneseme N disku

    cout << "O.K." << endl;
    return 0;
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Slovy popište význam následující deklarace:
      float (* f) ( int , int );
*/

   Proměnná f je ukazatel na funkci.
   Funkce vrací výsledek typu float.
   Funkce má dva parametry typu int.

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD Vložení hodnoty do vyváženého (AVL) stromu */

#include <string>
#include <iostream>
```

```
using namespace std;

struct Item
{
    int key;
    int height;
    Item * left;
    Item * right;
    Item () : key (0), height(1), left (nullptr), right (nullptr) { }
};

inline int h (Item * p)
{
    if (p == nullptr)
        return 0;
    else
        return p->height;
}

inline void update (Item * p)
{
    int L = h (p->left);
    int R = h (p->right);
    if (L > R)
        p->height = L + 1;
    else
        p->height = R + 1;
}

void enter (Item * & root, int val)
{
    if (root == nullptr)
    {
        root = new Item;
        root->key = val;
    }
    else if (val < root->key) enter (root->left, val);
    else if (val > root->key) enter (root->right, val);
    else { }

    update (root);
    int L = h(root->left);
    int R = h(root->right);
    Item * a = root;
    if (L > R + 1)
    {
        Item * b = a->left;
        int LL = h(b->left);
        int RR = h(b->right);
        if (LL > RR)
        {
            Item * c = b->left;
            //     a
            //   b
            // c
            Item * t = b->right; // podstrom
            root = b; // novy koren
            //     b
            //  c     a
            b->right = a;
            a->left = t;
            update (a);
            update (b); // jako posledni
        }
```

```
        else
        {
            Item * c = b->right;
            //         a
            //   b
            //      c
            Item * t = c->left; // podstrom
            Item * u = c->right; // podstrom
            root = c; // novy koren
            //     c
            //  b     a
            c->left = b;
            c->right = a;
            b->right = t;
            a->left = u;
            update(a);
            update(b);
            update(c); // jako posledni
        }
    }
    else if (R > L + 1)
    {
        Item * b = a->right;
        int LL = h(b->right);
        int RR = h(b->left);
        if (LL > RR)
        {
            Item * c = b->right;
            //  a
            //     b
            //        c
            Item * t = b->left; // podstrom
            root = b; // novy koren
            //     b
            //  a     c
            b->left = a;
            a->right = t;
            update(a);
            update(b); // jako posledni
        }
        else
        {
            Item * c = b->left;
            //  a
            //        b
            //     c
            Item * t = c->right; // podstrom
            Item * u = c->left; // podstrom
            root = c; // novy koren
            //     c
            //  a     b
            c->right = b;
            c->left = a;
            b->left = t;
            a->right = u;
            update(a);
            update(b);
            update(c); // jako posledni
        }
    }
}

int main()
{
```

```
    Item * root = nullptr;
    enter (root, 10);
    enter (root, 5);
    enter (root, 1);
    cout << "vyska stromu je " << h (root) << endl;
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */

/* PRIKLAD B-strom */

#include <iostream>
using namespace std;

const int Max = 4;

struct Item
{
    int cnt; // pocet klicu
    int key [Max+1]; // key[0], ... key[cnt-1], a jeden navic
    Item * ref [Max+2]; // ptr [0], ... ptr [cnt], a jeden navic
    Item();
};

Item::Item()
{
    cnt = 0;
    for (int i = 0; i < Max + 1; i++) key[i] = -1;
    for (int i = 0; i < Max + 2; i++) ref [i] = nullptr;
}

void enter0 (Item * p, int val)
{
    int i = 0;
    while (i < p->cnt && p->key[i] < val) i++;
    // i == p->cnt , vsechny byly mensi, pridat
    // i < p->cnt, p->key[i] >= val
    if (i < p->cnt && p->key[i] == val) {  }
    else {
        Item * t = p->ref[i];
        if (t == nullptr)
        {
            for (int k = p->cnt - 1; k >= i; k--) p->key[k + 1] = p->key[k];
            for (int k = p->cnt; k >= i; k--) p->ref[k + 1] = p->ref[k];
            p->key[i] = val;
            p->ref[i] = nullptr;
            p->cnt++;
        }
        else
        {
            enter0 (t, val);
            if (t->cnt == Max + 1)
            {
                int a = Max / 2; // a klicu zustane v t
                int b = t->cnt - a - 1; // b klicu do noveho bloku
                int d = t->key[a]; // delici bod

                Item * n = new Item;
                n->cnt = b;
                for (int k = a + 1; k < t->cnt; k++) n->key[k-a-1] = t->key[k];
                for (int k = a + 1; k < t->cnt+1; k++) n->ref[k-a-1] = t->ref[k];

                for (int k = a + 1; k < t->cnt; k++) t->key[k] = -1;
                for (int k = a + 1; k < t->cnt + 1; k++) t->ref[k] = nullptr;
```

```cpp
                t->cnt = a;

                for (int k = p->cnt - 1; k >= i; k--) p->key[k+1] = p->key[k];
                for (int k = p->cnt; k > i; k--) p->ref[k+1] = p->ref[k];
                p->key[i] = d;
                p->ref[i+1] = n;
                p->cnt++;
            }
        }
    }
}

void enter (Item * & p, int val)
{
    if (p == nullptr)
    {
        p = new Item;
        p->cnt = 1;
        p->key[0] = val;
        p->ref[0] = nullptr;
        p->ref[1] = nullptr;
    }
    else
    {
        enter0 (p, val);
        Item * t = p;
        if (t->cnt == Max + 1)
        {
            int a = Max / 2; // a klicu zustane v t
            int b = t->cnt - a - 1; // b klicu do noveho bloku
            int d = t->key[a]; // delici bod

            Item * n = new Item;
            n->cnt = b;
            for (int k = a + 1; k < t->cnt; k++) n->key[k-a-1] = t->key[k];
            for (int k = a + 1; k < t->cnt + 1; k++) n->ref[k-a-1] = t->ref[k];

            for (int k = a + 1; k < t->cnt; k++) t->key[k] = -1;
            for (int k = a + 1; k < t->cnt + 1; k++) t->ref[k] = nullptr;
            t->cnt = a;

            p = new Item;
            p->cnt = 1;
            p->ref[0] = t;
            p->key[0] = d;
            p->ref[1] = n;
        }
    }
}

void print (Item * p)
// vytiskneme hodnoty v rostoucim poradi
{
    if (p != nullptr)
    {
        for (int i = 0; i < p->cnt; i++)
        {
            print (p->ref[i]);
            cout << p->key[i] << endl;
        }
        print (p->ref[p->cnt]);
    }
}
```

```
int main ()
{
    Item * root = nullptr;
    enter (root, 30);
    enter (root, 20);
    enter (root, 10);
    enter (root, 40);
    enter (root, 50);

    for (int k = 21; k <= 29; k++) enter (root, k);

    for (int k = 51; k <= 800; k++) enter (root, k);

    print (root);
}

/* ---------------------------------------------------------------------- */
```

Přijímací zkouška z chemie do navazujícího magisterského studia

Vzor testu s výsledky

Studijní směr: Jaderná chemie

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň 20 bodů (tedy 50 % z maximálního počtu bodů).

1. Hustota přirozené izotopické směsi neznámého plynu při teplotě 293,15 K a tlaku 101325 Pa činí ρ = 1330,1 g.m^{-3}. O jaký plyn se jedná? Předpokládejte ideální chování plynu.
   (4 body)
   Výsledek: Jedná se o kyslík.

2. Důležitým produktem chemického zpracování uranových rud je nerozpustný diuranan diamonný, který se sráží z roztoku síranu uranylu roztokem amoniaku. Napište stechiometrickou rovnici reakce. Pro účely stechiometrie lze na vodný roztok amoniaku pohlížet jako na „hydroxid amonný“.
   (4 body)
   Výsledek: $2\ (UO_2)SO_4 + 6\ NH_4OH \rightarrow (NH_4)_2U_2O_7 + 2\ (NH_4)_2SO_4 + 3\ H_2O$

3. V rovnicích doplňte chybějící látku označenou otazníkem a určete stechiometrické koeficienty.
   a) $Ag + O_2 + KCN + H_2O \rightarrow K[Ag(CN)_2] + KOH$
   b) $Cr_2O_3 + NaNO_3 + Na_2CO_3 \rightarrow Na_2CrO_4 + NaNO_2 + CO_2$
   c) $MnO_2 + KClO_3 + KOH \rightarrow K_2MnO_4 + KCl + ?$
   d) $Fe_2O_3 + KNO_3 + KOH \rightarrow K_2FeO_4 + KNO_2 + H_2O$
   (4 body)
   Výsledek:
   a) $4\ Ag + O_2 + 8\ KCN + 2\ H_2O \rightarrow 4\ K[Ag(CN)_2] + 4\ KOH$
   b) $Cr_2O_3 + 3\ NaNO_3 + 2\ Na_2CO_3 \rightarrow 2\ Na_2CrO_4 + 3\ NaNO_2 + 2\ CO_2$
   c) $3\ MnO_2 + KClO_3 + 6\ KOH \rightarrow 3\ K_2MnO_4 + KCl + 3\ H_2O$
   d) $Fe_2O_3 + 3\ KNO_3 + 4\ KOH \rightarrow 2\ K_2FeO_4 + 3\ KNO_2 + 2\ H_2O$

4. V roztoku je rozpuštěna látka A o neznámé molární koncentraci c_1. 2 ml tohoto roztoku byly doplněny destilovanou vodou na celkový objem V = 100 ml. K analýze byl odebrán vzorek o objemu 500 μl ze zředěného roztoku, který byl v 10ml odměrné nádobce doplněn destilovanou vodou po rysku. Koncentrace látky A v takto připraveném vzorku byla C_3 = 3,8.10^{-4} mol.l^{-1}. Jaká byla koncentrace látky c_1 ve výchozím roztoku?
   (4 body)
   Výsledek: C_1 = 0,38 mol.l^{-1}

5. Oxidace mědi kyselinou dusičnou probíhá dle následující rovnice:
   $3\ Cu + 8\ HNO_3 \rightarrow 3\ Cu(NO_3)_2 + 2\ NO + 4\ H_2O$
   Jaká musí být hmotnost mědi zavedené do reakce, má-li být množství $Cu(NO_3)_2$ rovno 0,75 mol? Jaký objem roztoku HNO_3 o hustotě 1376,9 g.l^{-1} a hmotnostním zlomku 0,62 je třeba použít?Jaký bude za normálních podmínek (T = 273,15 K, P = 101325 Pa) objem vzniklého NO?
   (4 body)
   Výsledek: 47,7 g; 148 ml; 11,2 dm^3

6. Standardní spalné teplo methanu při vzniku kapalné vody je rovno -891 kJ.mol^{-1}. Předpokládejme, že jsme v přebytku kyslíku spálili *a)* 1 g methanu, *b)* takové množství methanu, jehož objem je při teplotě 25 °C a tlaku 0,0987 MPa právě 1,00.10^{-3} dm^3. Vypočtěte,

kolik tepla ΔH odevzdá reakční soustava v obou případech do okolí.
(5 bodů)
Výsledek: *a)* -55,5 kJ; *b)* -0,035 kJ

7. Rovnovážnému stupni přeměny ethanu v reakci C_2H_6 (g) ↔ C_2H_4 (g) + H_2 (g) náležela při teplotě 1000 K hodnota α = 0,485. Rovnovážný tlak soustavy byl roven standardnímu tlaku. Do reakce byl zaváděn čistý ethan a reakční směs se chovala ideálně. Vypočtěte hodnotu rovnovážné konstanty K_a při dané teplotě a molární zlomky složek v rovnovážné směsi.
(5 bodů)
Výsledek: K_a = 0,308; $x(C_2H_6)$ = 0,341; $x(C_2H_4) = x(H_2)$ = 0,327

8. Vypočítejte pH těchto vodných roztoků: *a)* roztok KOH o celkové (analytické) koncentraci $5{,}0.10^{-4}$ mol.l^{-1}; *b)* roztok HCl o celkové koncentraci $2{,}0.10^{-8}$ mol.l^{-1}. Lze aktivitní koeficienty považovat za jednotkové? Použijte hodnotu iontového součinu vody $K_v = 1{,}01.10^{-14}$.
(5 bodů)
Výsledek: pH(KCl) = 10,69; pH(HCl) = 6,96

9. Reakci 2 HI → H_2 + I_2 náleží při teplotách 629 K A 700 K rychlostní konstanta $3{,}0.10^{-5}$ a $1{,}2.10^{-3}$ l.mol^{-1}.s^{-1}. Vypočítejte hodnotu aktivační energie a frekvenčního faktoru.
(5 bodů)
Výsledek: E_a = 190,2 kJ.mol^{-1}; A = $1{,}9.10^{11}$ l.mol^{-1}.s^{-1}