Zkouškové předměty a okruhy otázek
ke státním závěrečným zkouškám na katedře matematiky

Bakalářské studium

Obsah

1 Studijní programy akreditované od AR 2020/2021

1.1 Matematické inženýrství

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza a lineární algebra

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Základy numerické matematiky
2. Obecná algebra a její aplikace
3. Analytická mechanika

Matematická analýza a lineární algebra

1. Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce.
2. Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě.
3. Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnávání řad, součin řad.
4. Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.
5. Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, gradient, věty o přírůstku funkce, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu a soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.
6. Lebesgueův integrál – definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace).
7. Derivace v komplexním oboru, holomorfní a analytické funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta.

8. Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.
9. Hermitovské a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti.
10. Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory.

Základy numerické matematiky

1. Finitní a iterační metody řešení pro soustavy lineárních algebraických rovnic a inverzní matice.
2. Řešení částečného a úplného problému vlastních čísel.
3. Řešení nelineárních algebraických a transcendentních rovnic a jejich soustav.
4. Lagrangeova interpolace, numerický výpočet derivace, a numerický výpočet integrálu.
5. Metody řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice založené na převodu na počáteční úlohy.
6. Metoda sítí a řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice.
7. Vlastnosti diferenčních schémat a metody jejich vyšetřování, Laxova věta.
8. Diferenční metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu typu.
9. Diferenční metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu.
10. Diferenciální a integrální podoba hyperbolických zákonů zachování a základy jejich numerického řešení.

Obecná algebra a její aplikace

1. Relace, ekvivalence, uspořádání.
2. Grupy, normální podgrupy, faktorgrupy.
3. Okruhy, ideály.
4. Dělitelnost v oborech integrity.
5. Tělesa, charakteristika tělesa, prvotěleso.
6. Konečná tělesa.
7. Lineární kódy, informační znaky, systematické kódy, Hammingova mez, standardní dekódování.
8. Levensteinova věta, Hadamardovy matice a optimální kódy .
9. Cyklické kódy, generující a kontrolní polynomy.
10. Hammingovy kódy, BCH kódy.

Analytická mechanika

1. Lagrangeův formalismus: Lagrangeovy rovnice prvního a druhého druhu v klasické mechanice, klasifikace vazeb, obecné souřadnice, konfigurační prostor.
2. Diferenciální principy mechaniky: d'Alembertův princip, princip virtuálních posunutí a statická rovnováha mechanických soustav s vazbami, virtuální práce.

3. Úloha dvou těles: redukce úlohy o izolované soustavě 2 hmotných bodů pomocí 10 základních zákonů zachování; Keplerova úloha.

4. Úlohy mechaniky: Malé kmity soustav hmotných bodů, módy, normální souřadnice; Tuhé těleso, vektor úhlové rychlosti otáčení, Eulerovy rovnice, bezsilový setrvačník.

5. Integrální principy mechaniky: základy variačního počtu, Hamiltonův princip v klasické mechanice, Jacobiho variační princip v klasické mechanice jako analog Fermatova principu v geometrické optice.

6. Hamiltonův formalismus: Hamiltonovy pohybové rovnice, Legendreova duální transformace, Poissonova závorka a integrály pohybu.

7. Pohyb nabité částice v elektromagnetickém poli v Lagrangeově a Hamiltonově formalismu, kalibrační invariance příslušných Lagrangeových pohybových rovnic.

8. Teorém Noetherové v Lagrangeově a Hamiltonově formalismu, zachovávající se veličiny jako generátory symetrií Hamiltoniánu.

9. Kanonické transformace a jejich invarianty, Liouvilleova věta statistické mechaniky, Hamiltonova-Jacobiho rovnice.

10. Speciální teorie relativity: Lorentzovy transformace, Minkowského prostoročas a Lorentzova grupa, světelný kužel, čtyřrychlost, čtyřhybnost, čtyřsíla, relativistický výraz pro Lorentzovu sílu, pohybová rovnice hmotného bodu v Minkowského prostoročase, pohyb nabité relativistické částice v elektromagnetickém poli.

1.2 Aplikovaná informatika

Předmět obecného základu

1. Základy teoretické informatiky

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Programovací jazyky a operační systémy
2. Počítačová grafika

Základy teoretické informatiky

1. Datové struktury – binární stromy.
2. Datové struktury – vyvážené stromy.
3. Třídění.
4. Konečné automaty a regulární jazyky.
5. Zásobníkové automaty a bezkontextové jazyky.
6. Turingovy stroje a rozhodnutelnost.
7. Stromy, lesy, kostry.
8. Eulerovy cykly a Hamiltonovy kružnice.
9. Párování v grafu.

10. Barevnost grafu.

Programovací jazyky a operační systémy

1. Datové typy (výčtové typy, číselné typy, pole, struktury).
2. Příkazy v programovacích jazycích (podmíněný příkaz, příkazy cyklu).
3. Předávání parametrů.
4. Ukazatele a dynamické datové struktury.
5. Objektově orientované typy.
6. Virtuální metody, tabulka virtuálních metod.
7. Práce se soubory (identifikační čísla souborů, otvírání souborů, čtení a zápis dat).
8. Přidělování procesoru, procesy, vlákna.
9. Přidělování paměti, stránkování.
10. Synchronizace procesů, semafory.

Počítačová grafika

1. Zobrazovací zařízení, vnímání barev a reprodukce barevného obrazu. Barevné prostory, počítačová reprezentace barevné informace.
2. Rastrové algoritmy: vykreslování, ořezávání, vyplňování, antialiasing. Transformace rastrového obrazu: interpolace, dopředné a zpětné mapování, příklady transformací.
3. Ukládání a komprese obrazu: kódování, algoritmy bezztrátové komprese. Formát JPEG a další formáty pro ukládání obrazu.
4. Výpočetní geometrie: datové struktury a jednoduché algoritmy. Robustnost a složitost těchto algoritmů.
5. Grafická uživatelská rozhraní: programování GUI, softwarová koncepce grafického desktopu, vzdálená plocha. Uživatelská rozhraní v mobilních zařízeních.
6. Modelování křivek a ploch: parametrické křivky a povrchy, definice pomocí kontrolních bodů. Implicitní povrchy, dělicí schémata pro křivky a povrchy.
7. Modelování a reprezentace pevných těles, procedurální modelování objektů a textur, fraktály, systémy částic.
8. Geometrické transformace v homogenních souřadnicích a jejich maticová reprezentace, skládání transformací, středové a rovnoběžné promítání, řešení viditelnosti.
9. Osvětlování a stínování: Phongova osvětlovací rovnice, modely stínování. Mapování textur, aplikace textur.
10. Fyzikálně založené zobrazovací metody: raytracing, distribuovaný raytracing, metoda fotonových map, metoda radiozity, globální osvětlení.

1.3 Aplikované matematicko-stochastické metody

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza

Předmět odborného zaměření studijního programu

1. Pravděpodobnost a matematická statistika

Matematická analýza

1. Diferenciální počet – derivace, parciální derivace, směrová derivace, gradient, Jacobiho matice, věta o derivaci složené funkce, limita, spojitost, vzájemné vztahy.
2. Číselné a mocninné řady – kritéria konvergence, charakteristiky oboru konvergence, stejnoměrná konvergence, základní věta teorie mocninných řad, operace s mocninnou řadou.
3. Totální diferenciál a Taylorova řada – diferenciál a jeho koeficienty, diferenciály vyšších řádů, Hessova matice, Taylorova řada, Taylorův polynom, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.
4. Lineární algebra v teorii diferenciálních rovnic – elementární pojmy lineární algebry, diferenciální operátor, lineární diferenciální rovnice, vlastnosti množin všech řešení, lineární nezávislost funkcí, fundamentální systém, testování nezávislosti.
5. Lineární diferenciální rovnice – Cauchyova úloha, integrační faktor, metoda snížení řádu, rovnice s konstantními koeficienty, Eulerova diferenciální rovnice, metody pro hledání partikulárních řešení.
6. Kvadratické formy – bilineární a kvadratická forma, vlastnosti, kanonický a normální tvar, zákon setrvačnosti, spektrum matice, typologie a kritéria definitnosti, skalární součin a příklady.
7. Extrémy funkce – lokální, globální a vázané extrémy, nutné a postačující podmínky, vztah k Hessově matici, věta o Lagrangeových multiplikátorech, věta o globálních extrémech.
8. Lebesgueův integrál – míra a její elementární vlastnosti, měřitelný prostor, měřitelná funkce, tři konstrukční etapy, ekvivalentní funkce.
9. Vlastnosti Lebesgueova integrálu – základní vlastnosti, Fubiniova věta, Lebesgueova věta, věta o substituci, vztah k jiným typům integrálů, limita a derivace integrálu s parametrem.
10. Konvoluce a integrální transformace – hustota, konvoluce, věta o konvoluci, momenty, Laplaceova a Fourierova transformace, Schwartzův prostor, prostor funkcí nejvýše exponenciálního růstu, transformační desatera, věty o inverzi, Lerchův teorém, aplikace transformací při výpočtech konvolucí.

Pravděpodobnost a matematická statistika

1. Definice pravděpodobnosti, rozšíření míry, součinová míra, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost jevů.
2. Náhodné veličiny, jejich nezávislost, rozdělení, distribuční funkce, diskrétní rozdělení.
3. Spojité náhodné veličiny, vlastnosti hustoty, transformace náhodných veličin, příklady.
4. L^p-prostory, střední hodnota a rozptyl, korelace a kovariance, charakteristická funkce.
5. Konvergence L^p, skoro jistá, podle pravděpodobností, zákony velkých čísel, jejich použití.
6. Slabá konvergence, centrální limitní věty, jejich použití, n-rozměrné Gaussovo rozdělení.

7. Kritéria optimality bodových odhadů, neparametrické odhady, statistický funkcionál, odhad α-kvantilu.
8. Metoda UMVUE, momentů a maximální věrohodnosti, vlastnosti těchto odhadů.
9. Stejnoměrně nejsilnější testy hypotéz, LRT testy, p-hodnota, t-test, F-test.
10. Konfidenční intervaly, metody jejich konstrukce, neparametrické testy dobré shody.

1.4 Aplikovaná algebra a analýza

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza a lineární algebra

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Základy funkcionální analýzy
2. Pravděpodobnost a matematická statistika

Matematická analýza a lineární algebra

1. Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce.
2. Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě.
3. Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnávání řad, součin řad.
4. Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.
5. Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, gradient, věty o přírůstku funkce, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy. Lineární diferencální rovnice n-tého řádu a soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.
6. Lebesgueův integrál – definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace).
7. Derivace v komplexním oboru, holomorfní a analytické funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta.
8. Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.
9. Hermitovské a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti.
10. Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory.

Základy funkcionální analýzy

1. Topologické a normované vektorové prostory, Banachovy prostory, věta o zúplnění, prostory omezených operátorů, věta o spojitém prodloužení omezeného operátoru.
2. Hahnova-Banachova věta a její důsledky.
3. L^p prostory, Minkowského nerovnost, Hölderova nerovnost.

4. Hilbertovy prostory, věta o ortogonální projekci, ortonormální soubory a báze, Rieszova věta o reprezentaci funkcionálu, sdružený operátor.

5. Bairova věta, princip stejnoměrné omezenosti, věta o otevřeném zobrazení, věta o uzavřeném grafu.

6. Uzavřené a uzavíratelné operátory, spektrum uzavřeného operátoru, vlastnosti rezolventy, spektrální poloměr.

7. Normální a samosdružené omezené operátory, Weylovo kritérium, spektrální vlastnosti samosdružených omezených operátorů.

8. Věta o konvergenci omezené monotónní posloupnosti operátorů, odmocnina z pozitivního operátoru, spektrální rozklad samosdružených omezených operátorů.

9. Typy konvergence na Banachových prostorech a prostorech operátorů, věta Arzela-Ascoli, kompaktní operátory a jejich základní vlastnosti.

10. Hilbertovy-Schmidtovy operátory.

Pravděpodobnost a matematická statistika

1. Definice pravděpodobnosti, rozšíření míry, součinová míra, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost jevů.

2. Náhodné veličiny, jejich nezávislost, rozdělení, distribuční funkce, diskrétní rozdělení.

3. Spojité náhodné veličiny, vlastnosti hustoty, transformace náhodných veličin, příklady.

4. L^p-prostory, střední hodnota a rozptyl, korelace a kovariance, charakteristická funkce.

5. Konvergence L^p, skoro jistá, podle pravděpodobností, zákony velkých čísel, jejich použití.

6. Slabá konvergence, centrální limitní věty, jejich použití, n-rozměrné Gaussovo rozdělení.

7. Kritéria optimality bodových odhadů, neparametrické odhady, statistický funkcionál, odhad α-kvantilu.

8. Metoda UMVUE, momentů a maximální věrohodnosti, vlastnosti těchto odhadů.

9. Stejnoměrně nejsilnější testy hypotéz, LRT testy, p-hodnota, t-test, F-test.

10. Konfidenční intervaly, metody jejich konstrukce, neparametrické testy dobré shody.

Poslední úprava: 15. května 2023
Otázky a podněty zasílejte na: `pavel.strachota@fjfi.cvut.cz`