Zkouškové předměty a formulace otázek
ke státním závěrečným zkouškám na katedře matematiky

Bakalářské studium

Obsah

1 Studijní programy akreditované od AR 2020/2021 . . . 1
1.1 Matematické inženýrství . . . 1
1.1.1 Matematická analýza a lineární algebra . . . 1
1.1.2 Základy numerické matematiky . . . 3
1.1.3 Obecná algebra a její aplikace . . . 5
1.1.4 Analytická mechanika . . . 5
1.2 Aplikovaná informatika . . . 7
1.2.1 Základy teoretické informatiky . . . 7
1.2.2 Programovací jazyky a operační systémy . . . 9
1.2.3 Počítačová grafika . . . 10
1.3 Aplikované matematicko-stochastické metody . . . 13
1.3.1 Matematická analýza . . . 13
1.3.2 Pravděpodobnost a matematická statistika . . . 14
1.4 Aplikovaná algebra a analýza . . . 17
1.4.1 Matematická analýza a lineární algebra . . . 17
1.4.2 Základy funkcionální analýzy . . . 18
1.4.3 Pravděpodobnost a matematická statistika . . . 19

1 Studijní programy akreditované od AR 2020/2021

1.1 Matematické inženýrství

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza a lineární algebra

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Základy numerické matematiky
2. Obecná algebra a její aplikace
3. Analytická mechanika

1.1.1 Matematická analýza a lineární algebra

1. Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce.

2. Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě.

3. Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnávání řad, součin řad.

4. Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.

5. (Totální) derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Parciální derivace a gradient funkce více proměnných. Vztah mezi derivací a parciální derivací? Věty o přírůstku funkce.

6. Nutná a postačující podmínka extrému funkce více proměnných. Hledání (volných) extrémů. Nutná a postačující podmínka vázaného extrému funkce více proměnných. Hledání vázaných extrémů.

7. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \text{ v intervalu } \mathcal{I}$$

   a) řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu bez pravé strany, fundamentální systém
   b) řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s pravou stranou, metoda variace konstant

8. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\boldsymbol{y}' \quad = \quad \mathbf{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \quad \text{v intervalu } \mathcal{I}$$

   a) řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu bez pravé strany, fundamentální systém
   b) řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s pravou stranou, metoda variace konstant

9. Abstraktní Lebesgueův integrál. Jednotlivé kroky konstrukce integrálu od jednoduchých funkcí po funkce komplexní. Tonelliho-Fubiniho věta. Věta o substituci pro Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$.

10. Postačující podmínky garantující záměnu Lebesgueova integrálu a řady. Věty o záměně limity a integrálu a záměně derivace a integrálu (pro funkci závislou na parametru).

11. Derivace funkce podle komplexní proměnné, holomorfní funkce a Cauchyovy-Riemannovy rovnice, křivkový integrál v $\mathbb{C}$, index bodu vzhledem ke křivce, Goursatova věta a Cauchyův vzorec pro konvexní množiny, analytické funkce a jejich vztah k holomorfním funkcím.

12. Kořeny a izolované singularity holomorfních funkcí, typy singularit, Laurentovy řady a jejich konvergence, věta o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady, Laurentova řada holomorfní funkce na okolí izolované singularity, Liouvilleova věta.

13. Křivkový integrál v $\mathbb{C}$ (zavedení), index bodu vzhledem ke křivce (definice), Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (obecná formulace), homotopie a Cauchyova věta, reziduum holomorfní funkce v izolované singularitě (definice), reziduová věta.

14. Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.

15. Hermitovské a kvadratické formy, polární báze, zákon setrvačnosti, matice kvadratické formy, kritéria pro určování charakteru formy.

16. Skalární součin a norma, ortogonalita, nerovnosti, ortogonální doplněk.

17. Determinant matice a determinant operátoru.

18. Vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic a operátorů.

19. Rieszova věta, sdružený operátor. Normální, hermitovský a unitární operátor.

1.1.2 Základy numerické matematiky

1. Finitní metody pro lineární soustavy algebraických rovnic

- Gaussova eliminační metoda – klasická a modifikovaná, pro které matice soustav lze použít
- LU a Choleského rozklad – existence, k čemu jsou dobré, jak je možné je napočítat

2. Iterační metody pro lineární soustavy algebraických rovnic

- Jacobiho, Gaussova-Seidelova a SOR metoda – jak jsou definovány, pro jaké matice soustav konvergují, vztah k předpodmíněné metodě postupných aproximací

3. Řešení částečného problému vlastních čísel

- Mocninná metoda – jak se počítá, jak volit počáteční vektor, kdy konverguje, jak s její pomocí vypočítat nejmenší vlastní číslo

4. Řešení úplného problému vlastních čísel

- Trojúhelníková metoda a LR algortimus
- QR algoritmus a Hessenbergovy iterace
- Porovnání jednotlivých metod

5. Výpočet QR rozkladu

- Gramův-Schmidtův algoritmus, Householderovy transformace, Givensovy rotace

6. Newtonova metoda pro nelineárních algebraických rovnic a soustav

- Odvození Newtonovy metody pro nelineární rovnice a pro soustavy nelineárních rovnic
- Konvergence obou metod

7. Lagrangeova interpolace

- Lagrangeův interpolační polynom – definice a kosntrukce
- Newtonova formule pro výpočet Lagrangeova polynomu
- Chyba interpolace Lagrangeovým polynomem
- Rungův jev
- Interpolace po částech
- Výpočet derivace a integrálu

8. Aproximace derivací pomocí konečných diferencí prostřednictvím Taylorova rozvoje.

a) uveďte přehled základních náhrad

b) odvoďte náhradu $y''(x)$ a určete chybu její aproximace

9. Metoda střelby pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

a) podoba metody pro skalární úlohu

$$y'' = f(x, y, y') \ \text{ v } (a, b)$$
$$y(a) = \gamma_1, \ y(b) = \gamma_2$$

b) komentář k možným zobecněním

10. Metoda sítí pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

a) podstata metody pro úlohu

$$
\begin{aligned}
&-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \ \text{ v } (a,b)\\
&y(a) = \gamma_1,\ y(b) = \gamma_2
\end{aligned}
$$

b) diskuse o vlastnostech diferenční úlohy

11. Laxova věta

a) základní pojmy a znění věty

b) struktura důkazu

12. Metoda sítí pro řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu

a) souhrnný postup pro typovou úlohu

$$
\begin{aligned}
&-\nabla \cdot (\lambda(x)\nabla y) + q(x)y = f(x) \ \text{ v } \Omega\\
&y|_{\partial\Omega} = 0\\
&\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2),\ x = [x_1, x_2]
\end{aligned}
$$

b) řešení diferenční úlohy a její vlastnosti

13. Metoda sítí pro řešení evolučních úloh pro parciální diferenciální rovnice parabolického typu

a) základy metody pro typovou úlohu

$$
\begin{aligned}
&\partial_t y = D\partial^2_{xx} y + f(t,x) \ \text{ v } (0,T) \times (a,b)\\
&y|_{x=a} = \gamma_1,\ y|_{x=b} = \gamma_2\\
&y|_{t=0} = y_{\text{ini}}
\end{aligned}
$$

b) přehled schémat a jejich vlastností

14. Metoda energetických nerovností

a) Postup pro typovou úlohu

$$
\begin{aligned}
&-(p(x)z')' + q(x)z = f(x) \ \text{ v } (a,b)\\
&z(a) = 0,\ z(b) = 0
\end{aligned}
$$

energetické výrazy - skalární součiny pro síťové funkce

b) energetická rovnost a nerovnost

15. Diferenciální a integrální podoba zákonů zachování

a) odvození zákona zachování pro skalární veličinu

b) integrální a diferenciální podoba

1.1.3 Obecná algebra a její aplikace

1. Relace, ekvivalence a rozklad množiny na třídy ekvivalence, uspořádání (úplné, dobré, svazové), princip transfinitní indukce.

2. Cyklické grupy a jejich klasifikace, podgrupy a generátory cyklických grup, konečně generované abelovské grupy.

3. Faktorizace grupy podle podgrupy, Lagrangeova věta, normální podgrupy, věty o izomorfizmu.

4. Okruhy, faktorizace okruhu podle ideálu, maximální ideály

5. Dělitelnost v oborech integrity: jednotky, ireducibilní prvek a prvočíslo, asociovanost. Gaussovy obory, obory hlavních ideálů, Eukleidovy obory.

6. Tělesa, charakteristika tělesa, prvotěleso, konečná tělesa a jejich konstrukce.

7. Lineární kódy, Hammingova mez.

- **a)** Definice lineárního kódu, kontrolní a generující matice, vztah mezi minimální vzdáleností lineárního kódu a lineární nezávislostí sloupců v kontrolní matici.
- **b)** Hammingova mez pro velikost binárního kódu dané délky a dané minimální vzdáleností.

8. Standardní dekódování, systematické kódy.

- **a)** Definice syndromu a standardní tabulky, použití standardní tabulky k dekódování lineárního kódu.
- **b)** Definice systematického lineárního kódu, ekvivalence lineárních kódů.

9. Levensteinova věta, Hadamardovy matice a optimální kódy.

- **a)** Definice Hadamardovy matice, konstrukce Hadamardových matic pomocí tenzorového součinu.
- **b)** Plotkinova mez a její těsnost díky Hadamardovým maticím (Levensteinova věta).

10. Cyklické kódy, generující a kontrolní polynomy.

- **a)** Definice cyklického kódu a polynomiální reprezentace jeho kódových slov.
- **b)** Generující a kontrolní polynom cyklického kódu, rozklad polynomu $x^n - 1$ v konečných tělesech charakteristiky 2.
- **c)** Generující kořeny cyklického kódu, konstrukce binárních cyklických kódů liché délky.

11. Hammingovy a BCH kódy.

- **a)** Konstrukce a vlastnosti Hammingova binárního kódu.
- **b)** Konstrukce a vlastnosti binárních BCH kódů pro opravy dvojnásobných chyb.

1.1.4 Analytická mechanika

1. Popište jednotlivé druhy vazeb vyskytující se v mechanice. Definujte konfigurační prostor pro mechanickou soustavu a obecné souřadnice této soustavy. Zapište Lagrangeovy rovnice prvního a druhého druhu pro mechanickou soustavu s holonomními vazbami a vysvětlete, jaký je mezi nimi rozdíl.

2. Definujte pojmy virtuální práce a virtuální posunutí. Vyslovte d'Alembertův princip a princip virtuální práce a uveďte jak spolu tyto principy souvisí. Jak tyto principy souvisí se statickou a dynamickou rovnováhou mechanické soustavy? Popište, jak lze pomocí d'Alembertova principu sestavit pohybové rovnice pro neholonomní soustavu.

3. Zapište Lagrangeovu funkci pro izolovanou soustavu dvou hmotných bodů, které na sebe působí silami nezávislými na rychlostech a splňujícími třetí Newtonův zákon. Určete celkem 10 integrálů pohybu odpovídajících invarianci Lagrangeovy funkce vůči Galileiho transformacím a popište, jak se pomocí nich úloha dvou těles zredukuje na pohyb soustavy s jedním stupněm volnosti.

4. Popište co jsou to malé kmity a pro které typy soustav nastávají. Popište, jak najít řešení popisující malé kmity dané mechanické soustavy pomocí metody módů. Definujte a vysvětlete co je to mód a normální souřadnice.

5. Definujte pojmy tuhé těleso, tenzor a pseudovektor úhlové rychlosti. Definujte tenzor momentu setrvačnosti, rozeberte jeho vlastnosti a zapište pomocí něj kinetickou energii tuhého tělesa. Popište rovnice jimiž se řídí pohyb tuhého tělesa.

6. Zapište Eulerovy setrvačníkové rovnice v obecné podobě a v hlavních osách. Najděte jejich řešení pro volný symetrický setrvačník. Definujte Eulerovy úhly a popište jejich vztah k úhlové rychlosti. Vysvětlete pojmy rotace, precese a nutace setrvačníku.

7. Stručně popište co je to variace křivky, funkcionál na prostoru křivek a jeho variace a základní lemma variačního počtu. Definujte akci a zapište podmínku, za které má akce na dané křivce stacionární hodnotu vzhledem k variacím s pevnými konci. Zformulujte Hamiltonův a Jacobiho princip pro mechaniku. Diskutujte analogii mezi Jacobiho principem v mechanice Fermatovým principem v optice.

8. Popište Legendreovu duální transformaci a její roli v analytické mechanice. Co jsou to Hamiltonovy pohybové rovnice. Definujte Poissonovu závorku, uveďte její vlastnosti a zapište pomocí ní Hamiltonovy rovnice. Definujte pojem integrál pohybu a ukažte, jak se ověří, že je daná funkce integrál pohybu v Hamiltonově formalismu.

9. Napište Lagrangeovu a Hamiltonovu funkci pro nabitou částici v elektromagnetickém poli pro případ nerelativistické a relativistické částice. Ukažte, že odpovídající Lagrangeovy rovnice jsou kalibračně invariantní.

10. Zformulujte teorém Noetherové v Lagrangeově formalismu a uveďte příklady týkající se translací a rotací. Jaký je rozdíl, mezi teorémem Noetherové v Lagrangeově a Hamiltonově formalismu? Ukažte, jak zachovávající se veličiny generují symetrie Hamiltonovy funkce.

11. Definujte kanonickou transformaci. Popište základní typy vytvořujících funkcí kanonické transformace. Uveďte kritéria kanoničnosti transformace. Zformulujte Lieovilleovu větu.

12. Zformulujte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici a Jacobiho větu. Co je to hlavní funkce Hamiltonova a jaký má význam. Jak se řeší Hamilton Jacobiho rovnice?

13. Zapište vzorce pro speciální Lorentzovy transformace. Co je to interval a jakého typu může být? Vysvětlete pojem relativistický invariant. Co je to světelný kužel? Jaký je matematický model Minkowského prostoročasu? Co to je Lorentzova transformace? Definujte Lorentzovu grupu a popište její strukturu.

14. Co je to vlastní čas? Vysvětlete, co je to čtyřvektor. Definujte pojmy čtyřrychlost, čtyřhybnost a čtyřsíla. Zapište Lorentzovu čtyřsílu a relativistickou pohybovou rovnici pro pohyb nabité částice v elektromagnetickém poli.

1.2 Aplikovaná informatika

Předmět obecného základu

1. Základy teoretické informatiky

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Programovací jazyky a operační systémy
2. Počítačová grafika

1.2.1 Základy teoretické informatiky

1. Vkládání prvků do binárního ohodnoceného stromu
   a) Stručný popis algoritmu
   b) Složitost obecně a složitost v případě úplného stromu
   c) Předávání parametrů odkazem
2. Vymazání prvku z binárního ohodnoceného stromu
   a) Stručný popis algoritmu
   b) Varianty: odstraňovaný prvek je listem, má jeden nebo dva podstromy
   c) Předávání parametrů odkazem.
3. Vyvážené stromy
   a) AVL stromy nebo B-stromy (podle vlastního výběru)
   b) Nástin algoritmu
   c) Složitost (bez odvozování)
4. Třídění haldou (heap sort)
   a) Uložení haldy v poli
   b) Popis algoritmu
   c) Složitost
5. Rychlé třídění (quick sort)
   a) Popis algoritmu
   b) Složitost
   c) Průměrná složitost (bez odvozování)
6. Konečné automaty
   a) Definice konečného automatu a třídy Rec A*
   b) Operace s automaty (uzavřenosti třídy Rec A*)
   c) Použití konečného automatu při vyhledávání v textu
7. Deterministické konečné automaty

- **a)** Definice deterministického konečného automatu (DKA)
- **b)** Algoritmus determinizace
- **c)** Použití DKA

8. Bezkontextové gramatiky a zásobníkové automaty

- **a)** Definice bezkontextové gramatiky (BKG), jazyk generovaný BKG
- **b)** Definice zásobníkového automatu (ZA), jazyk přijímaný ZA
- **c)** Chomského normální forma BG: definice a metoda převodu gramatiky do CNF

9. Turingovy stroje

- **a)** Definice Turingova stroje, jazyk přijímaný TS, funkce počítaná TS
- **b)** Churchova-Turingova téze
- **c)** Problém zastavení Turingova stroje

10. Stromy a lesy

- **a)** Definice stromu a lesa, základní vlastnosti stromů
- **b)** Kořenový a pěstovaný strom, různé typy izomorfizmů
- **c)** Algoritmus izomorfizmu stromů

11. Kostra grafu

- **a)** Definice kostry grafu
- **b)** Úloha minimální kostry
- **c)** Kruskalův algoritmus

12. Párování v grafu

- **a)** Definice párování v grafu, maximální a perfektní párování
- **b)** Rozhodování maximality párování (Bergeho věta)
- **c)** Algoritmy pro hledání max párování (Maďarská metoda nebo Edmondsův algoritmus)

13. Eulerovské grafy

- **a)** Definice eulerovského grafu
- **b)** Algoritmy pro hledání eulerovských tahů (algoritmus z dk Eulerovy věty, algoritmus Edmonds-Johnson)
- **c)** Souvislost s úlohou Čínského pošťáka

14. Barevnost grafu

- **a)** Definice vrcholové a hranové barevnosti grafu
- **b)** Hladový algoritmus pro vrcholové obarvení, odhady barevnosti grafu
- **c)** Kritické grafy a jejich vlastnosti

1.2.2 Programovací jazyky a operační systémy

1. Datové typy (výčtové typy, číselné typy, pole, struktury).

- Datové typy v jazyce C++ nebo jiném kompilovaném programovacím jazyce.
- Celočíselné typy a typy pro uložení racionálních čísel.
- Výčtové typy, pole, struktury a unie.
- Ukazatele na funkci.

2. Příkazy v programovacích jazycích (v jazyce C++ nebo jiném kompilovaném programovacím jazyce).

- Podmíněný příkaz, příkazy cyklu.
- Výjimky, příkaz `try` ... `catch`.
- Příkaz `for` (... : ...) procházející pole a kontejnery.
- Prázdný příkaz a jednoduchý příkaz (tvořený výrazem a středníkem).

3. Předávání parametrů při volání funkcí.

- Předávání parametrů hodnotou a odkazem.
- Implementace předávání odkazem pomocí ukazatelů.
- Příklad použití.
- Předávání polí v jazyce C/C++.

4. Ukazatele a dynamické datové struktury.

- Pole a ukazatele
- Ukazatele na struktury.
- Vytváření a rušení instancí pomocí `new` a `delete`.
- Rozdíly oproti jazykům sledujícím reference na objekty (Java, C#, Python).

5. Objektově orientované typy v C++.

- Třídy, dědičnost, přístup k členským funkcím.
- Konstruktor, destruktor, deklarace členských funkcí.
- Volání konstruktoru při inicializaci instance objektového typu.
- Volání konstruktoru při dynamické alokaci instance objektového typu (pokud inicializujeme ukazatel).

6. Virtuální metody, tabulka virtuálních metod v C++.

- Implementace virtuálních metod pomocí tabulky virtuálních metod.
- Dědičnost a tabulka virtuálních metod.
- Polymorfismus.
- Přetypování `dynamic_cast`.

7. Práce se soubory (identifikační čísla souborů, otevírání souborů, čtení a zápis dat). Dle vlastního výběru:

- Funkce `CreateFile`, `ReadFile`, `WriteFile` z Windows API.
- Funkce `open`, `read` a `write` z GNU libc.

8. Přidělování procesoru, procesy, vlákna.

- Co je to process.
- API funkce `CreateProcess` nebo `fork`.
- Co je to vlákno.
- Vytváření vláken pomocí funkce `CreateThread` nebo `pthread_create`.

9. Přidělování paměti, stránkování.

- Logické a fyzické adresy, rámce a stránky.
- Implementace stránkování u procesorů 386 (stačí 32-bitové adresy).
- Ochrana paměti proti nedovolenému přístupu.
- Výběr stránek pro odložení do odkládacího souboru.

10. Synchronizace procesů, semafory.

- Definice semaforu a kritické sekce.
- Nedělitelnost funkcí `up` a `down`.
- Mutex obecně a mutex ve Windows API.
- Příklad výrobce a spotřebitel, ve kterém up a down provádí různá vlákna.
- Uváznutí (deadlock).

11. Soubory zobrazované do paměti (memory mapped files).

- API ve Windows nebo v Linuxu.
- Porovnání implementace souborů zobrazovaných do paměti se stránkováním a odkládacím souborem.
- Příklady využití souborů zobrazovaných do paměti - dynamické knihovny.

1.2.3 Počítačová grafika

1. Princip vidění a vnímání barev

a) stavba lidského oka a důvod vnímání trojrozměrné barevné informace
b) klasifikace barev, prostor barev XYZ
c) prostor barev RGB, barevný gamut
d) prostory barev CMYK, HSV, HSL
e) výpočet jasu z RGB, prostory barev YCbCr, YUV, YIQ (pouze princip transformace z RGB) a jejich využití

2. Zobrazovací zařízení a reprezentace barevné informace

a) pixel a subpixel
b) technologie zobrazovacích zařízení (CRT, LCD, OLED atd.), jejich vlastnosti
c) převod obrazu z počítače na zobrazovací zařízení: grafické adaptéry a jejich funkce

3. Rastrové algoritmy

a) Bresenhamův algoritmus rasterizace úsečky, rasterizace kružnice a elipsy

b) Ořezávání polygonů (Hodgman-Sutherlandův algoritmus)

c) Vyplňování útvarů a polygonů

d) Metody antialiasingu při rasterizaci a vyplňování

4. Transformace rastrového obrazu

a) dopředné a zpětné mapování

b) typy interpolace

c) plošné a bodové vzorkování, vážené plošné vzorkování

d) zvětšení a zmenšení obrazu, rotace obrazu, aliasing a jeho potlačení

e) obecné transformace obrazu (warping - libovolný algoritmus)

5. Výpočetní geometrie: datové struktury a jednoduché algoritmy.

a) algoritmy pro nalezení konvexního obalu množiny bodů

b) robustnost a složitost těchto algoritmů.

c) další problémy výpočetní geometrie a vhodné datové struktury (BSP stromy a poloha bodu vůči polygonu, Deloneho triangulace a Voroného diagram)

6. Ukládání a komprese obrazu

a) ztrátová a bezztrátová komprese

b) kódování RLE, Huffmanovo kódování

c) algoritmus komprese do formátu JPEG

d) stručný přehled (1 téma dle vlastního výběru)

i. další klasické formáty pro ukládání obrazu (PNG, GIF)

ii. moderní formáty (HEIF, WEBP, AVIF), komprese videa (základní principy + současné formáty: H.264, H.265, AV1, VP9 atd.)

7. Grafická uživatelská rozhraní

a) prvky klasického GUI: okna, widgety

b) programování GUI: program ovládaný událostmi

c) softwarová koncepce grafického desktopu

d) vzdálená plocha

e) uživatelská rozhraní v mobilních zařízeních a jejich specifika

8. Modelování křivek a ploch

a) parametrické křivky a povrchy, princip definice pomocí kontrolních bodů

b) Hermitovy a Bézierovy kubiky, B-spliny

c) implicitní povrchy

d) dělicí schémata pro křivky a povrchy

9. Modelování a reprezentace pevných těles

a) regularizované booleovské operace
b) objemové reprezentace: buněčný model, quadtree a octree
c) konstruktivní geometrie pevných těles (CSG)
d) polygonální sítě a datové struktury

10. Procedurální modelování objektů a textur
    a) soběpodobnost, fraktál, fraktální dimenze; příklady fraktálů
    b) algoritmy procedurálního modelování (1 téma dle vlastního výběru)
        i. generování fraktálních textur a jejich použití (metoda přesunu středního bodu a gradientní šum)
        ii. procedurální modelování rostlin (D0L systémy a další zobecnění)
        iii. systémy částic - (pseudo)fyzikální simulace a jejich použití

11. Geometrické transformace pomocí matic
    a) homogenní souřadnice
    b) maticová reprezentace afinní transformace
    c) příklady transformací ve 3D a jejich reprezentace
    d) skládání transformací a jejich využití

12. Promítání a řešení viditelnosti
    a) základní pojmy: průmětna, promítací paprsek, střed a směr promítání
    b) středové a rovnoběžné promítání a jejich vlastnosti
    c) specifikace pohledu kamery
    d) pohledový objem a jeho význam
    e) pseudo-vzdálenost a z-buffer

13. Osvětlování a stínování
    a) typy světelných zdrojů a stínů
    b) explicitní vykreslování stínů, stínová paměť hloubky (depth buffer)
    c) Phongova osvětlovací rovnice
    d) konstantní, Gouraudovo a Phongovo stínování
    e) implementace a význam mlhy

14. Mapování a aplikace textur
    a) typy textur
    b) typy projekce (rovinná, sférická, cylindrická. . .)
    c) perspektivně korektní mapování v průmětně
    d) modifikace vlastností povrchu pomocí textury: barevná vs. bump textura
    e) environment mapping
    f) mip-mapping a anizotropní filtrování

15. Fotorealistické zobrazovací metody
    a) základní algoritmus ray tracingu (sledování paprsku)
    b) distribuovaný ray tracing a jeho využití (plošné světelné zdroje, průsvitnost, částečný lesk)
    c) implementace globálního osvětlení (distribuovaný RT, fotonové mapy, metoda radiozity)

1.3 Aplikované matematicko-stochastické metody

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza

Předmět odborného zaměření studijního programu

1. Pravděpodobnost a matematická statistika

1.3.1 Matematická analýza

Otázky jsou (až na několik málo výjimek) vybrány zejména z předmětů 01ANB3, 01ANB4 a 01CAS a zkoušení probíhá ve formátu a symbolice analogické k těmto přednáškám. Pro přípravu k SZZ užijte následující skripta:

- M. Krbálek, Matematická analýza III (čtvrté přepracované vydání), Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2019
- M. Krbálek, Funkce více proměnných (druhé přepracované vydání), Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2021
- M. Krbálek, Teorie míry a Lebesgueova integrálu, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014
- `www.krbalek.cz/For_students/Files_to_load/01MCS_studentsky_zaznam_prednasek.pdf`

Zkušební otázky:

1. Diferenciální počet – derivace funkce jedné proměnné, parciální derivace funkce více proměnných, směrová derivace, gradient, Jacobiho matice, parciální derivace složené funkce, limita, spojitost, vzájemné vztahy.

2. Číselné a mocninné řady – základní definice, kritéria konvergence číselných a mocninných řad, typy konvergence funkcionálních řad, charakteristiky oboru konvergence mocninných řad, základní věta teorie mocninných řad, operace s mocninnou řadou.

3. Taylorova řada funkce jedné proměnné – pojem analytické funkce, Taylorovy koeficienty a odvození jejich tvaru, Maclaurinova řada, Taylorův polynom, Lagrangeův zbytek, polynomická aproximace funkce, rozvoje základních funkcí do Maclaurinovy řady.

4. Totální diferenciál a Taylorova řada funkce více proměnných – totální diferenciál a jeho koeficienty, tečná rovina ke grafu funkce, Taylorova řada funkce více proměnných, pojem analytické funkce, diferenciály vyšších řádů, Hessova matice, kvadratická forma druhého totálního diferenciálu.

5. Lineární algebra v teorii diferenciálních rovnic – elementární pojmy lineární algebry (vlastní čísla, vlastní vektory, dimenze, báze, jádro operátoru, lineární varieta), diferenciální operátor a jeho definiční obor, lineární diferenciální rovnice, vlastnosti množin všech řešení, lineární nezávislost funkcí, fundamentální systém, testování nezávislosti funkcí.

6. Lineární diferenciální rovnice – Cauchyova úloha, věta o jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, integrační faktor, metoda snížení řádu, rovnice s konstantními koeficienty, Eulerova diferenciální rovnice, metody pro hledání partikulárních řešení.

7. Kvadratické formy – bilineární a kvadratická forma, vlastnosti, kanonický a normální tvar, zákon setrvačnosti, spektrum a uspořádané spektrum matice, typologie a kritéria definitnosti, skalární součin a příklady. Skalární součin nad prostorem funkcí.

8. Extrémy funkce více proměnných – lokální, globální a vázané extrémy, nutné a postačující podmínky, vztah k Hessově matici, věta o Lagrangeových multiplikátorech, věta o globálních extrémech.

9. Lebesgueův integrál – míra a její axiomatické a další elementární vlastnosti, množinové soustavy $\mathscr{H}_r$, $\mathscr{S}_r$ a $\mathscr{M}_r$, měřitelný prostor, měřitelná funkce, tři konstrukční etapy lebesgueovské integrace, ekvivalentní funkce, prostory $\mathscr{L}(E,\mu)$ a $\mathscr{L}^\star(E,\mu)$.

10. Vlastnosti Lebesgueova integrálu – základní vlastnosti, Fubiniova věta, věta o separabilitě, Lebesgueova věta, Leviho věta pro řady, věta o substituci, limita a derivace integrálu s parametrem.

11. Konvoluce – pojem hustoty, momenty hustoty, statistická interpretace konvoluce, zjednodušení definičního vztahu pro funkce s pozitivním nosičem, věta o existenci konvoluce, důkaz konvolučního teorému pro Laplaceovu transformaci, momenty konvoluce a jejich vztah k momentům původních funkcí

12. Klasická Laplaceova transformace – prostor funkcí nejvýše exponenciálního růstu, balancovaná hustota, Laplaceova transformace, definiční obor Laplaceova obrazu balancované hustoty, desatero Laplaceovy transformace, důkaz věty o záměně obrazu a vzoru, Lerchův teorém, věta o inverzi.

1.3.2 Pravděpodobnost a matematická statistika

1. Definice pravděpodobnosti, rozšíření míry, součinová míra, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost jevů.

   a) Kombinatorická, Geometrická a Axiomatická definice pravděpodobnosti P, operace s jevy nad σ-algebrou $\mathscr{A}$, základní vlastnosti míry P (monotonie, substraktivita, komplementarita, Booleova nerovnost, spojitost shora/zdola).

   b) Podmíněná pravděpodobnost, věta o součinovém pravidlu, věta o úplném rozkladu, Bayesova věta.

   c) Stochastická nezávislost jevů, její základní vlastnosti a souvislost s podmíněnou pravděpodobností; pojem 'skoro jistě' a jeho využití.

2. Náhodné veličiny, jejich nezávislost, rozdělení, distribuční funkce, diskrétní rozdělení.

   a) Definice náhodné veličiny X, její uzavřenost na spočetné operace; stochastická nezávislost sady náhodných veličin X_j, rozdělení náhodné veličiny X.

   b) Kumulativní distribuční funkce (CDF), 4 základní vlastnosti CDF, použití CDF pro výpočty intervalových pravděpodobností, vztah CDF a nezávislosti sady náhodných veličin X_j.

   c) Diskrétní náhodná veličina a její rozdělení, diskrétní hustota pravděpodobnosti (obrázek), Diracovo a Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, Zákon řídkých jevů.

3. Spojité náhodné veličiny, vlastnosti hustoty, transformace náhodných veličin, příklady.

   a) Radon-Nikodymova věta, (sdružená) hustota pravděpodobnosti (PDF), 2 základní vlastnosti PDF, vztah mezi hustotou a distribuční funkcí; marginální hustota, sdružená hustotou vs. nezávislost sady náhodných veličin Xj.

   b) Transformace náhodných veličin $Y = g(X)$ a příslušných hustot ASR pro případy $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; transformace součtu, součinu, podílu náhodných veličin s ASR.

   c) Příklady symetrických a nesymetrických ASR (Uniformní, Beta, Gamma, Gauss a jeho základní vlastnosti, Studentovo, χ^2 a Fisherovo rozdělení).

4. L_p-prostory, střední hodnota a rozptyl, korelace a kovariance, charakteristická funkce.

a) $L_1(P)$-prostor, definice EX, vlastnosti EX, Jensenova nerovnost, věta o přenosu integrace (VPI).

b) $L_2(P)$-prostor, definice DX a jeho vlastnosti, Čebyševova nerovnost; kovariance a korelace náhodných veličin X a Y, jejich vlastnosti a využití v praxi, kovarianční a korelační matice; $L_p(P)$ a vztah mezi L_p a L_q při $p \leq q \leq +\infty$.

c) Definice charakteristické funkceφ_x, korektnost, existence, omezenost, spojitost a diferencovatelnost φ_x; vztah φ_x k momentům X, souvislost s nezávislostí náhodných veličin X_j, charakteristická funkce součtu i.d. veličin.

5. Konvergence L_p, skoro jistá, podle pravděpodobností, zákony velkých čísel, jejich použití.

a) Definice konvergencí skoro jistě a podle pravděpodobnosti P a jejich vztah ke konvergenci L_p (včetně obrátek implikací, např. LDCT pro konvergenci podle P); vlastnosti konvergence podle P (např. přenos konvergence na $g(X_n)$).

b) Slabé zákony velkých čísel (ZVČ), Bernoulliho, Standardní a Čebyševův ZVČ a jeho zdůvodnění, nelimitní tvar Čebyševovy věty, jeho využití v praxi.

c) Silné zákony velkých čísel, Borelův, Standardní (i.d. L_2 a i.i.d. L_1) a Kolmogorovův ZVČ pro i.d. posloupnost; využití ZVČ v praxi (např. metoda Monte Carlo pro výpočet určitých integrálů).

6. Slabá konvergence, centrální limitní věty, jejich použití, s-rozměrné Gaussovo rozdělení.

a) Slabá konvergence pravděpodobnostních měr P_n, konvergence v distribuci a její vztah ke konvergenci podle P a s.j. (obrátky implikací); přenos konvergence na $g(X_n)$, Slutsky, Lévyho continuity teorém.

b) Centrální limitní věty (CLT) a asymptotická normalita (AN), Moivre-Laplaceův, Lindeberg-Lévyho CLT; delta metoda pro $g(X_n)$.

c) Definice s-rozměrného Gaussova rozdělení $\boldsymbol{Y} \sim N_s$, základní vlastnosti N_s, maticová transformace D$\boldsymbol{Y}$ a její důsledky; rozklad $\boldsymbol{Y} \sim N_s$ pomocí Z_j i.i.d. $N(0,1)$, podmínka pro existenci hustoty pravděpodobnosti N_s, tvar hustoty.

7. Kritéria optimality bodových odhadů.

a) Set-up statistických odhadů: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, parametrická funkce τ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace X, definice bodového odhadu.

b) Nestrannost, Vychýlenost (Bias) (obrázek), Eficience (MSE), Relativní eficience (RE), Konzistence (slabá/silná, řád konzistence), Asymptotická normalita (AN), Asymptotická relativní eficience pro AN odhady (ARE).

c) Delta metoda pro přenos asymptotiky odhadů $T_n(\boldsymbol{X})$ na $g(T_n(\boldsymbol{X}))$.

8. Neparametrické odhady, statistický funkcionál, odhad α-kvantilu.

a) Set-up statistických odhadů; Odhady EX, DX , r-momentů, jejich nestrannost, konzistence a asymptotická normalita; t-, χ^2-, F-statistiky pro Gaussův model.

b) Empirická distribuční funkce F_n (obrázek), její vlastnosti, Glivenko-Cantelli lemma (resp.Massartův odhad).

c) Statistický funkcionál a jeho využití pro odhad α-kvantilu (konzistence a AN) (obrázek).

9. Metoda momentů, UMVUE, vlastnosti těchto odhadů.

a) Set-up statistických odhadů; Metoda momentů, momentové rovnice, invariance MM, podmínky pro konzistenci a asymptotickou normalitu MM; nedostatky MM metody.

b) Postačující statistika (PS), Neymanův faktorizační teorém pro hledání PS, Rao-Blackwellova věta, důsledek R-BV pro nestranné odhady.

c) Definice UMVUE odhadu, úplná PS, Lehmann-Scheffého věta; nedostatky UMVUE metody.

10. Rao-Cramérova nerovnost, metoda maximální věrohodnosti, vlastnosti.

a) Set-up statistických odhadů; Regulární systém hustot, Fisherova informační matice a její výpočet.

b) Rao-Cramérova nerovnost, RCLB, eficience nestranných odhadů; nedostatky UMVUE metody založené na R-CN.

c) Definice maximálně věrohodného (ML) odhadu, zdůvodnění ML metody, soustava věrohodnostních rovnic, jejich řešení RLE; ML-regulární systém, asymptotická normalita a eficience RLE (ELE); nedostatky ML metody.

11. Stejnoměrně nejsilnější testy hypotéz.

a) Set-up testování statistických hypotéz: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, nulová H_0 a alternativní H_1 hypotéza, jednoduchá a složená hypotéza.

b) Kritická funkce testu ϕ, chyba I. a II. druhu, hladina (významnosti) testu (α), silofunkce testu β, UMP(U) strategie a UMP(U) kritická oblast (obrázek).

c) Neyman-Pearsonovo lemma, praxe a jeho použití pro test složené (altern.) hypotézy, MLR systémy pro jednostranné alternativy; nevýhody UMP testů.

12. LRT testy, t-test, F-test, p-hodnota.

a) Set-up testování statistických hypotéz: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, nulová H_0 a alternativní H_1 hypotéza, jednoduchá a složená hypotéza.

b) Definice LRT testu pomocí funkce $\Lambda(\boldsymbol{x})$, odůvodnění tvaru LRT, nevýhody LRT testů; t-, χ^2-, F-test v jednovýběrovém a dvouvýběrovém Gaussově modelu, vysvětlení principu ANOVA (obrázek); asymptotika LRT testu.

c) Definice p-hodnoty, výhody použití v praxi (obrázek), nevýhody p-hodnoty.

13. Neparametrické testy dobré shody.

a) Set-up neparametrických testů dobré shody (GoF): populace, vlastnost X, stat.model, tvar H_0, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$; princip asymptotických testů hypotéz (asymptotický pivot).

b) Převod GoF testu na parametrický test v multinomickém modelu $\mathrm{Mult}(n, \boldsymbol{p})$, aplikace asymptotiky χ^2-LRT testu; pozorované a teoretické četnosti (obrázek), LRT a Pearsonova testovací statistika; nevýhody těchto GoF testů.

c) Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody, vlastnosti a rozdělení $D_n(F)$.

14. Konfidenční intervaly, metody jejich konstrukce.

a) Konfidenční množiny a intervaly $C(\boldsymbol{X})$, set-up: neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, hladina $1-\alpha$, konfidenční koeficient, střední objem $C(\boldsymbol{X})$ (obrázek).

b) Stejnoměrně optimální strategie, UMA kritérium pro $C(\boldsymbol{X})$.

c) Metody konstrukce pomocí (asympt.) pivotů nebo (asympt.) testů hypotéz invertováním přípustné oblasti $A(\theta)$; úskalí těchto konstrukcí.

1.4 Aplikovaná algebra a analýza

Předmět obecného základu

1. Matematická analýza a lineární algebra

Předměty odborného zaměření studijního programu s možností výběru

1. Základy funkcionální analýzy
2. Pravděpodobnost a matematická statistika

1.4.1 Matematická analýza a lineární algebra

1. Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce.

2. Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě.

3. Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnávání řad, součin řad.

4. Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady.

5. (Totální) derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Parciální derivace a gradient funkce více proměnných. Vztah mezi derivací a parciální derivací? Věty o přírůstku funkce.

6. Nutná a postačující podmínka extrému funkce více proměnných. Hledání (volných) extrémů. Nutná a postačující podmínka vázaného extrému funkce více proměnných. Hledání vázaných extrémů.

7. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \text{ v intervalu } \mathcal{I}$$

   a) řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu bez pravé strany, fundamentální systém
   b) řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s pravou stranou, metoda variace konstant

8. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\boldsymbol{y}' = \mathbf{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \text{ v intervalu } \mathcal{I}$$

   a) řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu bez pravé strany, fundamentální systém
   b) řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s pravou stranou, metoda variace konstant

9. Abstraktní Lebesgueův integrál. Jednotlivé kroky konstrukce integrálu od jednoduchých funkcí po funkce komplexní. Tonelliho-Fubiniho věta. Věta o substituci pro Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$.

10. Postačující podmínky garantující záměnu Lebesgueova integrálu a řady. Věty o záměně limity a integrálu a záměně derivace a integrálu (pro funkci závislou na parametru).

11. Derivace funkce podle komplexní proměnné, holomorfní funkce a Cauchyovy-Riemannovy rovnice, křivkový integrál v $\mathbb{C}$, index bodu vzhledem ke křivce, Goursatova věta a Cauchyův vzorec pro konvexní množiny, analytické funkce a jejich vztah k holomorfním funkcím.

12. Kořeny a izolované singularity holomorfních funkcí, typy singularit, Laurentovy řady a jejich konvergence, věta o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady, Laurentova řada holomorfní funkce na okolí izolované singularity, Liouvilleova věta.

13. Křivkový integrál v $\mathbb{C}$ (zavedení), index bodu vzhledem ke křivce (definice), Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (obecná formulace), homotopie a Cauchyova věta, reziduum holomorfní funkce v izolované singularitě (definice), reziduová věta.

14. Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.

15. Hermitovské a kvadratické formy, polární báze, zákon setrvačnosti, matice kvadratické formy, kritéria pro určování charakteru formy.

16. Skalární součin a norma, ortogonalita, nerovnosti, ortogonální doplněk.

17. Determinant matice a determinant operátoru.

18. Vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic a operátorů.

19. Rieszova věta, sdružený operátor. Normální, hermitovský a unitární operátor.

1.4.2 Základy funkcionální analýzy

1. Topologické prostory, báze topologie, axiomy oddělování, metrické prostory, vnitřek a uzávěr množiny, kartézský součin topologických a metrických prostorů, topologické vektorové prostory.

2. Úplné metrické prostory, věta o zúplnění, normované vektorové prostory, norma lineárního zobrazení, prostory omezených operátorů, věta o spojitém prodloužení omezeného operátoru, Banachův prostor (definice).

3. Normovaný vektorový prostor, věta o zúplnění normovaného vektorového prostoru, Banachův prostor (definice), konečnorozměrné normované vektorové prostory, kritérium konvergence řady v Banachově prostoru, norma operátoru, inverze operátoru tvaru $(I + A)$.

4. Konvexní množiny, konvexní funkcionál, seminorma, Hahnova-Banachova (H-B) věta - reálný a komplexní případ, normované vektorové prostory, duální prostor, H-B věta pro normované vektorové prostory, důsledek H-B věty pro duální prostor.

5. L_p prostory, základní vlastnosti, Youngova nerovnost, Minkowského nerovnost, Hölderova nerovnost, esenciální supremum, duální prostor k L_p prostoru pro $1 < p < +\infty$.

6. Unitární a Hilbertovy prostory, vzdálenost vektoru od uzavřené konvexní podmnožiny, věta o ortogonální projekci, vlastnosti ortogonálního doplňku, ortonormální soubory a báze, OG projekce na konečnorozměrný podprostor se zadanou ON bází, Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost, ekvivalentní tvrzení o ON bázi.

7. Ortonormální báze a ekvivalentní tvrzení, konvergence řady v Hilbertově prostoru, Fourierův rozvoj vektoru do řady, Rieszova věta o reprezentaci funkcionálu, sdružený operátor a vlastnosti hermitovského sdružení.

8. Bairova věta a důsledky, princip stejnoměrné omezenosti a důsledek pro silně konvergentní posloupnost operátorů, věta o otevřeném zobrazení a důsledek pro invertovatelné lineární zobrazení.

9. Uzavřené a uzavíratelné operátory, věta o uzavřeném grafu, spektrum uzavřeného operátoru a jeho klasifikace, vlastnosti rezolventy, spektrální poloměr.

10. Normální a samosdružené omezené operátory, Weylovo kritérium, uspořádání samosdružených omezených operátorú, spektrální vlastnosti samosdružených omezených operátorů.

11. Věta o konvergenci omezené monotónní posloupnosti operátorů v Hilbertově prostoru, odmocnina z pozitivního operátoru, absolutní hodnota omezeného operátoru, součin pozitivních operátorů, porovnání dvou operátorů se stejnou druhou mocninou, rozklad samosdruženého omezeného operátoru na pozitivní a negativní část.

12. Projekce a ortogonální projekce v Hilbertově prostoru, porovnání dvou OG projekcí, rozklad jedničky, konstrukce integrálu podle rozkladu jedničky (náznak), spektrální rozklad samosdružených omezených operátorů, rozklad jedničky a vlastnosti spektra.

13. Typy konvergence v Banachových prostorech a prostorech operátorů, kompaktní množiny v topologických a metrických prostorech, věta Arzela-Ascoli.

14. Kompaktní množiny v topologických a metrických prostorech, kompaktní a úplně spojité operátory - definice, prostor kompaktních operátorů, vlastnosti spektra kompaktních operátorů.

15. Hilbertovy-Schmidtovy (H-S) operátory - zavedení, vztah ke kompaktním operátorům, vztah operátorové normy a H-S normy, prostor H-S operátorů, integrální operátory a H-S operátory.

1.4.3 Pravděpodobnost a matematická statistika

1. Definice pravděpodobnosti, podmíněná pravděpodobnost.

   a) Kombinatorická, Geometrická a Axiomatická definice pravděpodobnosti P, související operace s jevy nad σ-algebrou $\mathcal{A}$, základní vlastnosti míry P (monotonie, substraktivita, komplementarita, Booleova nerovnost, spojitost shora/zdola).

   b) Podmíněná pravděpodobnost, její základní vlastnosti a souvislost se stochastickou nezávislostí jevů, věta o součinovém pravidlu, věta o úplném rozkladu, Bayesova věta.

   c) Definice jevu $\limsup A_n$ a Borel-Cantelliho lemma.

2. Rozšíření míry, součinová míra, nezávislost jevů.

   a) Nulové množiny $\mathcal{N}$, zúplnění σ-algebry a rozšíření míry P, vlastnosti rozšíření, pojem 'skoro jistě' a jeho použití (např. pro $X = Y$ s.j, $\mathrm{E}\,|X|$, apod.) (obrázek).

   b) Součinová σ-algebra $\mathscr{A}^n$ a součinová pravděp.míra P^n, její existence a jednoznačnost, tzn. Monotone class theorem (MCT) a věta o jednoznačném rozšíření pravděp.míry ze systému τ na $\sigma(\tau)$; použití $\otimes P_j$ (nezávislost X_j, Tonelli-Fubini, etc.).

   c) Stochastická nezávislost jevů, její základní vlastnosti a souvislost s podmíněnou pravděpodobností.

3. Náhodné veličiny, jejich nezávislost, rozdělení, distribuční funkce, diskrétní rozdělení.

   a) Definice náhodné veličiny X, její uzavřenost na spočetné operace; stochastická nezávislost sady náhodných veličin X_j.

   b) Rozdělení náhodné veličiny X a její kumulativní distribuční funkce (CDF), jejich vzájemný charakterizační vztah; 4 základní vlastnosti CDF, použití CDF pro výpočty intervalových pravděpodobností, vztah CDF a nezávislosti sady náhodných veličin X_j; kvantilová funkce příslušná CDF.

c) Diskrétní náhodná veličina a její rozdělení, diskrétní hustota pravděpodobnosti (obrázek), Diracovo a Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, Zákon řídkých jevů.

4. Spojité náhodné veličiny, vlastnosti hustoty, příklady.

a) Rozdělení absolutně spojité náhodné veličiny X (ASR), Radon-Nikodymova věta, Lebesgueova dekompozice konečné míry, (sdružená) hustota pravděpodobnosti (PDF), 2 základní vlastnosti PDF.

b) Vztah mezi hustotou a distribuční funkcí pro ASR, marginální hustota, souvislost mezi sdruženou hustotou a nezávislostí sady náhodných veličin X_j.

c) Příklady symetrických i nesymetrických ASR (Uniformní, Beta, Gamma, Gauss a jeho základní vlastnosti, etc.).

5. Transformace náhodných veličin, příklady, podmíněná hustota pro ASR.

a) Transformace náhodných veličin $Y = g(X)$ a příslušných hustot ASR pro případy $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; transformace součtu, součinu, podílu náhodných veličin s ASR.

b) Příklady transformací: LogNormal, Studentovo, χ^2 a Fisherovo rozdělení; reprodukční vlastnosti.

c) Způsoby získání podmíněného rozdělení a hustoty pravděpodobnosti $X| Y = y$ pro ASR.

6. L_p-prostory, střední hodnota a rozptyl, momenty.

a) $\mathrm{L}_1(P)$-prostor integrovatelných náhod.veličin, definice $\mathrm{E}X$ buď pomocí míry P nebo distribuční funkce F nebo hustoty f, vlastnosti $\mathrm{E}X$, norma na L_1, LDCT, Beppo-Leviho věta, Jensenova nerovnost, věta o přenosu integrace (VPI).

b) $\mathrm{L}_2(P)$-prostor, definice $\mathrm{D}X$ a jeho vlastnosti, Čebyševova nerovnost.

c) $\mathrm{L}_p(P)$-prostor, k-tý obecný a centrální moment X, šikmost, špičatost, norma na L_p, vztah mezi L_p a L_q při $p \leq q \leq +\infty$.

7. L_2-prostor, korelace a kovariance, charakteristická funkce.

a) Schwarzova nerovnost a skalární součin na L_2, kovariance a korelace náhodných veličin X a Y, jejich vlastnosti a využití v praxi, kovarianční a korelační matice a jejich vlastnosti.

b) Definice charakteristické funkce φ_x náh.vel. X, její korektnost zavedení v komplexním oboru; existence, omezenost, spojitost, vzájemná jednoznačnost určení φ_x a rozdělení F_x, souvislost φ_x s momentovou vytvářející funkci m_x.

c) Diferencovatelnost φ_x, vztah φ_x k momentům X; souvislost s nezávislostí sady náhodných veličin X_j, charakteristická funkce součtu X_j i.d. veličin, reprodukční vlastnosti, např. pro Gaussovo rozdělení.

8. Konvergence L_p, skoro jistá, podle pravděpodobnosti.

a) Definice konvergencí v L_p-normě a skoro jistě a vztah mezi nimi.

b) Definice konvergence podle pravděpodobnosti P a její vztah ke konvergenci L_p a skoro jisté (včetně forem obrátek implikací, např. LDCT pro konvergenci podle P).

c) Metrizovatelnost topologie dané konvergencí podle P, podmínky pro přenos konvergence podle P z X_n na $g(X_n)$, např. součet, součin, podíl; Je konvergence podle P konvergencí 'po složkách'?

9. Zákony velkých čísel, jejich použití.

- **a)** Slabé zákony velkých čísel (ZVČ), Bernoulliho, Standardní a Čebyševův ZVČ a jeho zdůvodnění, nelimitní tvar Čebyševovy věty, jeho využití v praxi.
- **b)** Silné zákony velkých čísel, Borelův, Standardní (i.d. L_2 a i.i.d. L_1) a Kolmogorovův ZVČ pro i.d. posloupnost náhodných veličin; nutná podmínka pro platnost silného ZVČ v i.i.d. případě.
- **c)** Využití těchto ZVČ v praxi (např. metoda Monte Carlo pro výpočet určitých integrálů).

10. Slabá konvergence měr, konvergence v distribuci.

- **a)** Slabá konvergence pravděpodobnostních měr P_n a její vztah ke konvergenci podle P a v L_p (včetně obrátek implikací, např. LDCT pro slabou konvergenci).
- **b)** Souvislost slabé konvergence měr s konvergencí distribučních funkcí (konvergence v distribuci), metrizovatelnost topologie dané konvergencí v distribuci (Lévyho metrika).
- **c)** Skorochodův reprezentační teorém a jeho důsledek pro přenos konvergence v distribuci na $g(X_n)$, Slutského perturbační teorém, Slutského lemma, Lévyho continuity teorém.

11. Centrální limitní věty, jejich použití, s-rozměrné Gaussovo rozdělení.

- **a)** Centrální limitní věty (CLT) a asymptotická normalita (AN): Moivre-Laplaceův, Lindeberg-Lévyho (standard), Lindebergův nebo Ljapunovův CLT; Berry-Esseenova věta; CLT v $\mathbb{R}^s$; použití CLT pro aproximace rozdělení.
- **b)** Delta metoda pro přenos asymptotické normality z X_n na $g(X_n)$ pro $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$; vztah asymptotické normality a řádu konzistence X_n.
- **c)** Definice s-rozměrného Gaussova rozdělení $\boldsymbol{Y} \sim N_s$, základní vlastnosti N_s, maticová transformace D$\boldsymbol{Y}$ a její důsledky; rozklad $\boldsymbol{Y} \sim N_s$ pomocí Z_j i.i.d. $N(0,1)$, podmínka pro existenci hustoty pravděpodobnosti N_s, tvar této hustoty.

12. Kritéria optimality bodových odhadů.

- **a)** Set-up statistických odhadů: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, parametrická funkce τ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace X, definice bodového odhadu.
- **b)** Nestrannost, Vychýlenost (Bias) (obrázek), Eficience (MSE), Relativní eficience (RE), Konzistence (slabá/silná, řád konzistence), Asymptotická normalita (AN), Asymptotická relativní eficience pro AN odhady (ARE).
- **c)** Delta metoda pro přenos asymptotiky odhadů $T_n(\boldsymbol{X})$ na $g(T_n(\boldsymbol{X}))$.

13. Neparametrické odhady, statistický funkcionál, odhad α-kvantilu.

- **a)** Set-up statistických odhadů; Odhady EX, DX , r-momentů, jejich nestrannost, konzistence a asymptotická normalita; t-, χ^2-, F-statistiky pro Gaussův model.
- **b)** Empirická distribuční funkce F_n (obrázek), její vlastnosti, Glivenko-Cantelli lemma (resp.Massartův odhad).
- **c)** Statistický funkcionál a jeho využití pro odhad α-kvantilu (konzistence a AN) (obrázek).

14. Metoda momentů, UMVUE, vlastnosti těchto odhadů.

- **a)** Set-up statistických odhadů; Metoda momentů, momentové rovnice, invariance MM, podmínky pro konzistenci a asymptotickou normalitu MM; nedostatky MM metody.
- **b)** Postačující statistika (PS), Neymanův faktorizační teorém pro hledání PS, Rao-Blackwellova věta, důsledek R-BV pro nestranné odhady.
- **c)** Definice UMVUE odhadu, úplná PS, Lehmann-Scheffého věta; nedostatky UMVUE metody.

15. Rao-Cramérova nerovnost, metoda maximální věrohodnosti, vlastnosti.

- **a)** Set-up statistických odhadů; Regulární systém hustot, Fisherova informační matice a její výpočet.
- **b)** Rao-Cramérova nerovnost, RCLB, eficience nestranných odhadů; nedostatky UMVUE metody založené na R-CN.
- **c)** Definice maximálně věrohodného (ML) odhadu, zdůvodnění ML metody, soustava věrohodnostních rovnic, jejich řešení RLE; ML-regulární systém, asymptotická normalita a eficience RLE (ELE); nedostatky ML metody.

16. Stejnoměrně nejsilnější testy hypotéz.

- **a)** Set-up testování statistických hypotéz: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, nulová H_0 a alternativní H_1 hypotéza, jednoduchá a složená hypotéza.
- **b)** Kritická funkce testu ϕ, chyba I. a II. druhu, hladina (významnosti) testu (α), silofunkce testu β, UMP(U) strategie a UMP(U) kritická oblast (obrázek).
- **c)** Neyman-Pearsonovo lemma, praxe a jeho použití pro test složené (altern.) hypotézy, MLR systémy pro jednostranné alternativy; nevýhody UMP testů.

17. LRT testy, t-test, F-test, p-hodnota.

- **a)** Set-up testování statistických hypotéz: populace, vlastnost X, stat.model, neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, nulová H_0 a alternativní H_1 hypotéza, jednoduchá a složená hypotéza.
- **b)** Definice LRT testu pomocí funkce $\Lambda(\boldsymbol{x})$, odůvodnění tvaru LRT, nevýhody LRT testů; t-, χ^2-, F-test v jednovýběrovém a dvouvýběrovém Gaussově modelu, vysvětlení principu ANOVA (obrázek); asymptotika LRT testu.
- **c)** Definice p-hodnoty, výhody použití v praxi (obrázek), nevýhody p-hodnoty.

18. Neparametrické testy dobré shody.

- **a)** Set-up neparametrických testů dobré shody (GoF): populace, vlastnost X, stat.model, tvar H_0, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$; princip asymptotických testů hypotéz (asymptotický pivot).
- **b)** Převod GoF testu na parametrický test v multinomickém modelu $\text{Mult}(n, \boldsymbol{p})$, aplikace asymptotiky χ^2-LRT testu; pozorované a teoretické četnosti (obrázek), Kullback-Leiblerova, Pearsonova a Neymanova testovací statistika; nevýhody těchto GoF testů.
- **c)** Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody, vlastnosti a rozdělení $D_n(F)$.

19. Konfidenční intervaly, metody jejich konstrukce.

- **a)** Konfidenční množiny a intervaly $C(\boldsymbol{X})$, set-up: neznámý parametr θ, identifikovatelnost rodiny, i.i.d. replikace $\boldsymbol{X}$, hladina $1-\alpha$, konfidenční koeficient, střední objem $C(\boldsymbol{X})$ (obrázek).
- **b)** Stejnoměrně optimální strategie, UMA kritérium pro $C(\boldsymbol{X})$.
- **c)** Metody konstrukce pomocí (asympt.) pivotů nebo (asympt.) testů hypotéz invertováním přípustné oblasti $A(\theta)$; úskalí těchto konstrukcí.

Poslední úprava: 13. června 2023
Otázky a podněty zasílejte na: `pavel.strachota@fjfi.cvut.cz`