

## Parciální diferenciální rovnice

- volitelný předmět SZZ NMS Aplikovaná algebra a analýza

### Otázka č. 1

#### Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Odvoďte Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro funkcionál

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x) dx,$$

kde  $w = g$  na  $\partial U$ .

### Otázka č. 2

#### Nutná podmínka pro existenci minimizeru funkcionálu

V hlavních krocích odvoďte nutnou podmínku pro existenci minimizeru funkcionálu  $I$ .

### Otázka č. 3

#### Postačující podmínka pro existenci minimizeru funkcionálu

Vyslovte postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost minimizeru funkcionálu  $I$ . Pokuste se je alespoň heuristicky obhájit.

### Otázka č. 4

#### Věta o střední hodnotě

Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě pro harmonické funkce.

### Otázka č. 5

#### Aplikace věty o střední hodnotě

Pohovořte o důsledcích/aplikacích věty o střední hodnotě pro harmonické funkce: princip maxima, Liouvillovův teorém, jednoznačnost řešení Poissonovy rovnice.

### Otázka č. 6

#### Princip maxima pro eliptické operátory

Vyslovte slabý princip maxima pro eliptické operátory a naznačte jeho důkaz.

**Otázka č. 7**

**Hopfovo lemma**

Vyslovte Hopfovo lemma pro eliptické operátory a vysvětlete, jak se z něj odvodí silný princip maxima.

**Otázka č. 8**

**Slabá derivace a Sobolevovy prostory**

Definujte pojem slabé derivace a zaveďte Sobolevovy prostory  $W^{k,p}(U)$  a  $W_0^{k,p}(U)$ . Ukažte, že se jedná o dobře zavedené pojmy. Diskutujte základní vlastnosti Sobolevových prostorů (úplnost, separabilita, reflexivita).

**Otázka č. 9**

**Sobolevovy prostory-aproximace hladkými funkcemi**

Vyslovte věty o lokální aproximaci a aproximaci až k hranici (stačí pro hvězdicovitou oblast). Diskutujte klíčové kroky příslušných důkazů.

**Otázka č. 10**

**Sobolevovy prostory-věta o stopě**

Vyslovte větu o stopě pro funkce z  $W^{1,p}(U)$  a představte klíčové kroky jejího důkazu.

**Otázka č. 11**

**Sobolevovy nerovnosti**

Rozšiřte Gagliardovu-Nirenbergerovu-Sobolevovu nerovnost na  $W_0^{1,p}(U)$ , speciálně diskutujte Poincarého nerovnost. Vyslovte Sobolevovu nerovnost pro  $W^{1,p}(U)$ , kde  $U \subset \mathbb{R}^n$ , s  $n < p$ .

**Otázka č. 12**

**Slabá formulace eliptického problému**

Odvoďte slabou formulaci pro eliptickou rovnici s Dirichletovou hraniční podmínkou a popište, jak se odvodí existence a jednoznačnost slabého řešení (Lax-Milgramova věta a energetický odhad).

**Otázka č. 13**

**Lax-Milgramova věta**

Vyslovte a dokažte Lax-Milgramovu větu.

**Otázka č. 14**

**Regularita slabých řešení eliptického problému**

Vyslovte větu o vnitřní  $H^2$ -regularitě slabého řešení eliptického problému. Zaveďte pojem diferenčního kvocientu a vysvětlete, jak se použije v důkaze vnitřní regularity. Ukažte, že za podmínek věty o vnitřní regularitě splývá slabé řešení s klasickým skoro všude.

**Otázka č. 15**

**Operátorové semigrupy**

Definujte operátorovou semigrupu a její generátor. Popište základní vlastnosti semigrup a jejich generátorů. Vyslovte Hille-Yosidovu větu.

**Otázka č. 16**

**Aplikace operátorových semigrup**

Detailněji pohovořte o vybrané aplikaci semigrupových metod v teorii parciálních diferenciálních rovnic (souvislost spektra a stability, konstrukce řešení pro parabolické a hyperbolické rovnice druhého řádu apod.).