

## Pokročilé pravděpodobnostní metody

volitelný předmět SZZ NMS Aplikace algebry a analýzy

Seznam otázek  
zkoušející Ing. Václav Kůs, Ph.D.

### Otázka č. 1:

**Náhodná veličina. Distribuční funkce, charakteristická funkce, základní vlastnosti a vztahy s distribučními funkcemi.**

- a) Diskrétní a spojitá náhodná veličina, frekvenční funkce a hustota pravděpodobnosti, Radon-Nykodimova věta
- b) Distribuční funkce, definice, vlastnosti, marginální distribuční funkce, nezávislost náhodných veličin, příklady diskrétních a spojitých rozdělání
- c) Charakteristická funkce, její vlastnosti, momenty náhodných veličin, Lévyho věta

### Otázka č. 2:

**Bayesův vzorec a jeho využití. Slabý zákon velkých čísel, konvergence dle pravděpodobnosti. Čebyševova nerovnost. Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Silný zákon velkých čísel a konvergence ve smyslu skoro jistě.**

- a) Definice podmíněné pravděpodobnosti, věta o úplném rozkladu, Bayesova věta, použití
- b) Konvergence podle pravděpodobnosti a skoro jistě, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy
- c) Čebyševova nerovnost, Bernoulliova a Čebyševova limitní věta. Slabý a silný zákon velkých čísel

**Otázka č. 3:**

**Centrální limitní teorém. Moivre-Laplaceova, Feller-Lindebergova podmínka. Ljapunovova věta.**

- a) Definice slabé konvergence (v distribuci), její vlastnosti a vztahy s ostatními konvergencemi, Slutského perturbační teorém a lemma
- b) Asymptotická normalita, definice, využití
- c) Centrální limitní teorémy: Moivre-Laplace, Lindeberg-Lévy, Lindeberg-Feller, Ljapunov.

**Otázka č. 4:**

**Pojem statistického odhadu, bodové a intervalové odhady. Rao-Cramérova nerovnost, konzistence, maximálně věrohodné funkce.**

- a) Statistické bodové odhady, jejich vlastnosti a kritéria optimality (nestrannost, eficeince, asymptotická normalita)
- b) Definice nejlepšího nestranného odhadu, Rao-Cramérova nerovnost, regulární systém hustot, maximálně věrohodné odhady a jejich ssymptotické vlastnosti
- c) Definice intervalů spolehlivosti, způsoby jejich konstrukce a ukázka použití pro normální rozdělení

**Otázka č. 5:**

**Pojem statistické hypotézy, Neyman-Pearsonovo lemma, chyby 1. a 2. druhu, test poměrem věrohodnosti.**

- a) Základní pojmy testování hypotéz: nulová a alternativní hypotéza, chyba 1. a 2. druhu, kritická oblast/funkce testu, hladina významnosti, p-hodnota, síla testu
- b) Neyman-Pearsonovo lemma, systémy s monotonním poměrem věrohodnosti
- c) Test poměrem věrohodnosti, jeho asymptotika, použití, ukázka pro normální rozdělení

## Pokročilé pravděpodobnostní metody

volitelný předmět SZZ NMS Aplikovaná algebra a analýza

Seznam otázek  
zkoušející Doc. RNDr. Jan Vybíral, Ph.D.

### Otázka č. 6:

**Definice náhodného procesu, Kolmogorovova věta, konzistentní systém konečněrozměrných rozdělení.**

- Uveďte definici náhodného procesu a několik důležitých příkladů
- Definujte konzistentní systém konečněrozměrných rozdělení, Kolmogorovova existenční věta

### Otázka č. 7:

**Vlastnosti trajektorií, pojem derivace a integrálů od náhodného procesu, stochastická míra a náhodný integrál, Wienerův proces**

- Limita, spojitost a derivace náhodného procesu
- Proces s ortogonálními přírůstky, přírůstková funkce, definice  $\int_0^t f(s)dW_s$
- Definujte Wienerův proces a uveďte základní vlastnosti (Markovská vlastnost, Gaussovský proces, autokovarianční funkce, vlastnosti trajektorií)

### Otázka č. 8:

**Kovarianční funkce procesu a Karhunenova věta, slabě stacionární procesy a jejich spektrální rozklad. Bochnerova věta, Herglotzovo lemma**

- Bochnerova věta, Herglotzovo lemma, slabě stacionární procesy
- Karhunen-Loèevova věta a spektrální rozklad pro Wienerův proces

**Otázka č. 9:**

**Predikce procesů a posloupností, lineární singularita a regularita. Woldův rozklad, ergodické věty a zákon velkých čísel**

- a) Časové řady, lineární proces, proces klouzavých součtů, autoregresní proces
- b) Definujte  $ARMA(p, q)$ , Woldův rozklad

**Otázka č. 10:**

**Náhodné matice, jejich třídy, Laymanova klasifikace, Bernsteinova nerovnost, Golden-Thompsonova nerovnost, Liebova věta**

- a) Příklady náhodných matic (nezávislé prvky, rotačně invariantní, GOE)
- b) Bernsteinova nerovnost pro nezávislé matice (náznak důkazu), Golden-Thompsonova nerovnost a Liebova věta (bez důkazu)