Matematické modely pro dopravní proudění

Předmět SZZ NMS Aplikované matematicko-stochastické metody

Studenti dostanou před přípravou na SZZ tabulku desater integrálních transformací.

1. Makroskopické dopravní zákonitosti a jejich teoretické zdůvodnění.
    1.1. S pomocí tzv. vyhlazeného počtu částic zaveďte základní makroskopické dopravní veličiny.
    1.2. Aplikací vyhlazeného počtu částic odvoďte rovnici kontinuity a vztah mezi hustotou, tokem a rychlostí pro homogenní proudění.
    1.3. [Hlavní teoretická úloha] Představte Greenbergovo odvození obou fundamentálních dopravních závislostí. Odvození proveďte detailně krok po kroku. Výchozí pohybovou rovnici pro jednodimenzionální kapalinové proudění pouze napište (neodvozujte).
    1.4. Představte dopravní fáze. Zmiňte jak dvoufázovou teorii, tak třífázovou. Vše také demonstrujte na reálné podobě fundamentálního diagramu.
    1.5. Vysvětlete základní principy zpracování empirických dopravních dat: 3s-unifikační proceduru.

2. Lighthillův-Whithamův dopravní model a jeho řešení.
    2.1. Vysvětlete pojem kinematických dopravních vln.
    2.2. Představte výchozí rovnici Lighthillova-Whithamova modelu a její konsolidovaný tvar. O jaký typ rovnice se matematicky jedná?
    2.3. Uveďte, jakým způsobem lze tento tvar převést na tvar řešitelný elementárními metodami matematické fyziky. Uveďte pouze výsledný tvar.
    2.4. Formulujte příslušnou Cauchyovu úlohu a zapište její tvar v řeči zobecněných funkcí.
    2.5. [Hlavní teoretická úloha] Nalezněte fundamentální řešení příslušného operátoru.
    2.6. Sestavte vzorec pro řešení úlohy.
    2.7. Jaká je praktická interpretace převodní funkce $\mu(x, \tau)$?

3. Formulace termodynamického dopravního modelu a odvození rozdělení rychlostí částic.
    3.1. Definujte termodynamický dopravní model s periodickými okrajovými podmínkami. Diskutujte typy interakčních potenciálů,

klasifikujte interakční dosah, představte tvar hamiltoniánu a vysvětlete, co se rozumí pod pojmem rezistivita.

3.2. Co rozumíme pojmem stacionární stav systému?

3.3. Diskutujte vztah mezi rezistivitou a vnitřním uspořádáním systému, tj. ilustrujte, jak se mění mikrostruktura systému při změně hodnoty rezistivity.

3.4. [Hlavní teoretická úloha] Odvoďte statistické rozdělení okamžitých rychlostí částic plynu.

3.5. [Hlavní teoretická úloha] Užitím teorie zobecněných funkcí demonstrujte konvergenci hustoty pravděpodobnosti pro rychlost při rezistivitě rostoucí nade všechny meze.

4. Řešení termodynamického modelu s obecným krátkodosahovým potenciálem, specifikace a rozbor výsledků.

4.1. [Hlavní teoretická úloha] Aplikací aproximace v sedlovém bodě odvoďte headway-distribuci v termodynamickém modelu s krátkodosahovou repulzí. Užitou metodu sedlového bodu pouze okrajově zmiňte. Detailní formulace této metody se nepožaduje.

4.2. Výsledek specifikujte pro hyperbolický potenciál. O jakou třídu distribucí se jedná?

4.3. Diskutujte, jak se headway-distribuce mění v závislosti na makroskopických parametrech dopravy. Co jsou limitní stavy této distribuce?

4.4. Normalizaci a škálování headway-distribuce neprovádějte. Pouze zmiňte některé zajímavé vlastnosti, které vykazuje chování škálovací konstanty a uveďte, jaká funkce se při normalizaci a škálování objevuje.

4.5. Rovnici pro sedlový bod upravte aplikací Laplaceovy transformace do čitelnější interpretace.

5. Analytické odvození časové headway distribuce

5.1. [Hlavní teoretická úloha] Na základě znalosti distribuce rychlostí a prostorových světlostí odvoďte hustotu pravděpodobnosti pro časový odstup mezi vozidly.

5.2. Výsledek upravte do tvaru řady a detekujte v něm hlavní člen. Dále dokažte, že zbylé členy lze v rozvoji chápat jako členy poruchové členy, jež se při normalizaci neprojevují.

5.3. Diskutujte oprávněnost teoretických předpokladů užitých v odvození.

5.4. Jak lze při aproximativním odvozování zužitkovat empirické poznatky extrahované z dopravních dat?

5.5. Z jakého důvodu je analýza časových rozestupů výhodnější než analýza prostorových rozestupů? Zmiňte při této příležitosti krátce metody akvizice dopravních dat.

6. Teorie balancovaných distribucí a jejich laplaceovských obrazů.

6.1. Definujte třídu balancovaných distribucí a diskutujte balanční kritérium. Co je jádro balancované distribuce a co je momentový kód?

6.2. Uveďte nejznámější zástupce třídy $\mathcal{B}$. Jaké operace zachovávají příslušnost ke třídě $\mathcal{B}$? Jakou „pestrost" má třída $\mathcal{B}$, tj. jaké všechny funkce do ní patří?

6.3. Co je distribuční funkce a chvostová distribuční funkce příslušná k balancované hustotě?

6.4. Definujte Laplaceovu transformaci nad $\mathcal{B}$ a popište, jaké sympatické vlastnosti mají laplaceovské obrazy balancovaných hustot.

6.5. [Hlavní teoretická úloha] Odvoďte vztah mezi Laplaceovým obrazem balancované hustoty a jejím momentovým kódem. Jak tento váš vztah souvisí teorií Taylorových rozvojů?

6.6. [Hlavní teoretická úloha] Jak lze ze znalosti momentového kódu hustoty určit momentový kód příslušné chvostové distribuční funkce?

7. Balanční částicový systém a tři způsoby jeho statistického popisu. Poissonovská varianta balančního částicového systému.

7.1. Definujte balanční částicový systém? Po neformálním uvedení zaveďte tradiční stochastický popis systému a vysvětlete, proč je výhodné klást jisté omezující matematické předpoklady.

7.2. Ukažte, jak lze přecházet mezi jednotlivými stochastickými popisy.

7.3. Vysvětlete pojem generátoru BČS a uveďte některé vlastnosti jeho Laplaceova obrazu.

7.4. Kdy je BČS nazýván Poissonovským? Jaký je jeho generátor?

7.5. [Hlavní teoretická úloha] Aplikací Laplaceovy transformace odvoďte tvar statistického rozdělení multiroztečí v Poissonově BČS.

7.6. Co trendová funkce? A jaký je vztah mezi laplaceovskými obrazy trendové funkce a generátoru?

8. Vlastnosti shlukové funkce a jejího Laplaceova obrazu.

8.1. Definujte pojem shlukové funkce pro BČS.

8.2. [Hlavní teoretická úloha] Odvoďte vztah mezi Laplaceovými obrazy shlukové funkce a generátoru balančního částicového systému.

8.3. Odvoďte přesný tvar shlukové funkce pro poissonovský systém.

8.4. Co je shluková funkce prvního druhu? A jak souvisí s druhým momentem intervalové frekvence? A jak jí lze vyjádřit pomocí shlukové funkce (nultého druhu)?

9. Statistická rigidita, rozptyl intervalových frekvencí a klasifikace stochastických systémů podle kompresibility

9.1. Definujte pojmy statistické rigidity a number variance (rozptyl intervalových frekvencí) a odvoďte vztah mezi nimi.

9.2. Určete statistickou rigiditu pro poissonovský systém.

9.3. Vysvětlete, jaký tvar má graf statistické rigidity v obecných systémech. Užijte k tomu asymptotických vlastností rigidity.

9.4. Zaveďte pojem stochastická kompresibilita a vyslovte klíčovou větu o kompresibilitě a deflekci.

9.5. Jakým způsobem se klasifikují stochastické systémy podle úrovně kompresibility?

9.6. [Hlavní teoretická úloha] Určete kompresibilitu pro systém, jehož headway-distribuce je popsána Erlangovým rozdělením

$$h(x) = \frac{(k+1)^{k+1}}{k!}\Theta(x)x^k e^{-(k+1)x}.$$

Užijte faktu, že Laplaceovým obrazem Erlangovy distribuce je funkce

$$H(s) = (k+1)^{k+1}\frac{1}{(1+s+k)^{k+1}}$$

10. Diskrétní dopravní modely a charakteristiky jejich stacionárních stavů.

10.1. Definujte model TASEP a jeho parametry. Co rozumíme pojmem stacionární stav systému?

10.2. Představte řešení modelu podle Bernarda Derridy (tzv. Matrix Product Ansatz) včetně podmínek kladených na Derridovy matice.

10.3. Za jakých podmínek jsou Derridovy matice komutativní? Dokažte!

10.4. Jakého tvaru je normalizační konstanta ve formuli pro pravděpodobnost?

10.5. Jak jsou v modelu TASEP zavedeny obě základní makroskopické veličiny?

10.6. [Hlavní teoretická úloha] Odvoďte tvar fundamentální závislosti $J = J(\rho)$ pro nastavení na linii komutativity.

10.7. Jakého obecného tvaru je headway distribuce modelu TASEP analyzovaná v k –té buňce? Představte pouze obecný vzorec pro výpočet headway distribuce a specifikujte ho pro nastavení na linii komutativity.

10.8. Který diskrétní model je v oblasti dopravního modelování slavnější než model TASEP? Představte jeho kostru a tvar fundamentálního diagramu.