Lieovy algebry, grupy a jejich aplikace

Seznam otázek ke SZZ MFN

1. Lieova grupa – definice grupy, definice diferencovatelné variety a hladkosti zobrazení, definice Lieovy grupy, maticové Lieovy grupy

2. Levoinvariantní vektorová pole – definice vektorového pole, tečného a kotečného zobrazení, ekvivalentní definice levoinvariantních vektorových polí, Lieova algebra dané Lieovy grupy

3. Exponenciální zobrazení – definice, lokální difeomorfismus algebry a grupy, toky levoinvariantních vektorových polí

4. Podgrupy a podalgebry – definice, podalgebra Lieovy algebry jako integrabilní distribuce a podgrupa v Lieově grupě jako jí odpovídající maximální list

5. Lieovy grupy s danou Lieovou algebrou – definice a konstrukce univerzálního nakrytí, definice grupové struktury na něm, popis všech souvislých Lieových grup s danou Lieovou algebrou

6. Akce grupy - definice, základní typy akcí, podgrupa izotropie, levé a pravé cosety, homogenní prostory

7. Reprezentace Lieovy grupy, resp. Lieovy algebry – definice, invariantní podprostory, (i)reducibilita, Schurovo lemma, adjungovaná reprezentace, příklady úplně reducibilních reprezentací

8. Lieova algebra – definice, základní typy Lieových algeber, Leviho věta o rozkladu na radikál a poloprostý Leviho faktor, příklady jednotlivých typů algeber v nízkých dimenzích

9. Lieova a Engelova věta – formulace a důsledky pro strukturu řešitelných a nilpotentních algeber

10. Killingova forma – definice symetrických forem invariantních vzhledem k automorfismům a ad-invariantních forem, definice Killingovy formy, její základní vlastnosti

11. Cartanova kritéria – formulace Cartanových kritérií řešitelnosti, resp. poloprostoty, jejich důsledky pro vlastnosti poloprostých Lieových algeber

12. Cartanova podalgebra – definice, konstrukce, systém kořenů, základní vlastnosti Cartanovy podalgebry komplexní poloprosté Lieovy algebry

13. Weylova-Chevalley normální forma komplexní poloprosté Lieovy algebry – detailní vlastnosti kořenového systému a kořenových podprostorů (nepřerušené posloupnosti kořenů, dimenze kořenových podprostorů, násobky kořenů, Cartanova celá čísla), formulace Weylovy-Chevalley věty

14. Kořenové diagramy – kořeny jako prvky Eukleidova prostoru, Weylova grupa, kladné, záporné a prosté kořeny a jejich vztahy, úhly mezi kořeny, Cartanova matice

15. Dynkinovy diagramy – definice, vztah ke kořenovým diagramům, Cartanova klasifikace komplexních prostých Lieových algeber

16. Reálné formy komplexních Lieových algeber – definice, konstrukce pomocí involutivních automorfismů, význam kompaktních reálných forem poloprostých algeber pro teorii reprezentací, Weylova věta o úplné reducibilitě reprezentací

17. Konečněrozměrné reprezentace komplexních poloprostých Lieových algeber – váhy, váhové diagramy, nejvyšší váhy, fundamentální váhy a fundamentální reprezentace

18. Tenzorový součin reprezentací – konstrukce, invariantní podprostory, využití ke konstrukci reprezentací z definující reprezentace prosté maticové Lieovy algebry

19. Spinorové reprezentace – Cliffordova algebra, její využití ke konstrukci spinorových reprezentací algeber B_l a D_l, proč nelze spinorové reprezentace získat z definující reprezentace tenzorovými součiny?

20. Gell-Mannův kvarkový model jako příklad využití reprezentací Lieovy algebry su(3) – fyzikální interpretace kořenových vektorů, prvků Cartanovy podalgebry, váhových diagramů, uspořádání silně interagujících částic částic do multipletů, kvarková interpretace