

Variační metody
- povinný předmět SZZ NMS Matematické inženýrství

Seznam otázek

1. Odvození Eulerovy rovnice
2. Nutné podmínky existence extrému funkcionálu
3. Postačující podmínky existence extrému funkcionálu
4. Vztah konvexnosti a monotonie k extrému funkcionálu
5. Minimum kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem
6. Metoda zúplnění definičního oboru kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samosdruženým operátorem
7. Existence minima kvadratického funkcionálu a zobecněného řešení operátorové rovnice
8. Slabé řešení okrajové úlohy pro eliptickou parciální diferenciální rovnici
9. Sobolevovy prostory
10. Laxova-Milgramova věta
11. Existence slabého řešení okrajové úlohy pro eliptické parciální diferenciální rovnice

Otázka č. 1:**Odvození Eulerovy rovnice**

Odvoďte Eulerovu rovnici pro funkcionál tvaru

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

s definičním oborem $D_{\mathcal{F}} = \{y \in C^{(2)}((a, b)) \mid y(a) = \gamma_1, y(b) = \gamma_2\}$

Otázka č. 2:**Nutné podmínky existence extrému funkcionálu**

- a) Definujte lokální extrém
- b) Uveďte nutné podmínky existence extrému funkcionálu

Otázka č. 3**Postačující podmínky existence extrému funkcionálu**

- a) Definujte lokální extrém
- b) Uveďte postačující podmínky existence extrému funkcionálu

Otázka č. 4:**Vztah konvexnosti a monotonie k extrému funkcionálu**

- a) Popište vztah konvexnosti k extrému funkcionálu
- b) Popište vztah monotonie k extrému funkcionálu
- c) Uveďte podstatné kroky vedoucí k důkazu těchto vztahů

Otázka č. 5:**Minimum kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samodruženým operátorem**

- a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samodruženým operátorem
- b) Popište vztak tohoto minima k řešení operátorové rovnice $\mathbf{A}u = f$

Otázka č. 6:**Metoda zúplnění definičního oboru kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samodruženým operátorem**

- a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samodruženým operátorem
- b) Popište stručně kroky zúplnění definičního oboru

Otázka č. 7:**Existence minima kvadratického funkcionálu a zobecněného řešení operátorové rovnice**

- a) Vymezte podobu kvadratického funkcionálu určeného lineárním hustě definovaným samodruženým operátorem
- b) Vyslovte tvrzení o existenci minima kvadratického funkcionálu
- c) Definujte zobecněné řešení operátorové rovnice

Otázka č. 8:**Slabé řešení okrajové úlohy pro eliptickou parciální diferenciální rovnici**

Pro úlohu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \text{ v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí

- a) odvoďte slabou rovnost
- b) definujte slabé řešení

Otázka č. 9:**Sobolevovy prostory**

- a) Konstrukce prostorů $W_2^{(k)}(\Omega)$
- b) Základní vlastnosti těchto prostorů

Otázka č. 10:**Laxova-Milgramova věta**

- a) Znění věty
- b) Základní kroky důkazu

Otázka č. 11:**Existence slabého řešení okrajové úlohy pro eliptické parciální diferenciální rovnice**

Pro úlohu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \text{ v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí

- a) shrňte její slabou formulaci
- b) zajistěte splnění předpokladů pro použití Laxovy - Milgramovy věty