jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor pro studijní program AAA

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab}\right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \, \mathrm{d}(x, y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right)x^n$?

7 (5 bodů) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f definované na $\mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 4 - x, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0 & x < 2 \text{ nebo } x > 4. \end{cases}$$

8 (5 bodů) Najděte řešení rovnice vedení tepla s okrajovými podmínkami:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = x^2 - 1.$$

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze	
jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor pro studijní program AMSM

❶ (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

❷ (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

❸ (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

❹ (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab} \right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

❺ (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

❻ (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$?

❼ (5 bodů) Vypočítejte směrodatnou odchylku náhodné veličiny, jejíž hustotou pravděpodobnosti je funkce $g(x) = 16\Theta(x)x\mathrm{e}^{-4x}$, kde $\Theta(x)$ je Heavisideova funkce zavedená předpisem

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

❽ (5 bodů) Nalezněte hustotu pravděpodobnosti součtu $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ dvou stejně rozdělených a nezávislých náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, víte-li, že hustota pravděpodobnosti obou veličin je $g(x) = 4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}$.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor pro studijní program MI

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab} \right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$?

7 (4 body) Nechť X je lineární normovaný prostor a $f : X \to \mathcal{R}$ je zobrazení určené vztahem $f(x) = \|x\|$, $x \in X$. Dokažte jeho spojitost.

8 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$2xy - 2x + (x^2 + 3)y' = 0$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze	
jméno a příjmení uchazeče	rodné číslo / číslo pasu / číslo občanského průkazu

Přijímací zkouška z matematiky do navazujícího magisterského studia

vzor pro studijní program MINF

1 (6 bodů) Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 27x\mathrm{e}^x$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 1$.

2 (2 body) Vypočítejte Wronského determinant (wronskián) souboru funkcí $\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}$. Jsou uvedené funkce lineárně závislé nebo nezávislé? Vysvětlete.

3 (5 bodů) Sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$ se středem v nule a určete, pro která x tato řada konverguje. Výsledku užijte k nalezení součtu řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^k k!}.$$

4 (10 bodů) Nechť je dána množina

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^4 \leqslant \frac{2xy}{ab} \right\}.$$

kde a, b jsou pevně zvolené kladné parametry. Přechodem k polárním souřadnicím r, φ zavedeným vztahy $x = ar\cos(\varphi)$, $y = br\sin(\varphi)$, vypočtěte integrál $\int_A x^2y^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

5 (2 body) Určete součin a součet vlastních čísel matice $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6 (5 bodů) Pro která reálná x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$?

7 (5 bodů) Je daná množina $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ a } \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) = 1 \right\}$. Ověřte, že G spolu s obvyklým násobením matic tvoří grupu. Co lze říci o vlastních číslech matice M, je-li její řád jako prvku v grupě G roven $k \in \mathbb{N}$. Nalezněte v grupě G (pokud existuje) prvek řádu 2, prvek řádu 4 a prvek řádu $+\infty$.

8 (5 bodů) Mějme okruh $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, kde i je imaginární jednotka a operace $+$ a $\times$ jsou definovány stejně jako v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$. Položme $\beta = i - 1 \in \mathbb{Z}[i]$. Řekneme, že $x \in \mathbb{Z}[i]$ je v relaci s $y \in \mathbb{Z}[i]$ a zapisujeme $x \sim y$, pokud existuje $w \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že $x - y = \beta w$. Ověřte, že $\sim$ je ekvivalence na $\mathbb{Z}[i]$. Rozhodněte, zda platí $2i \sim 2 + i$.

Přijímací zkouška se považuje za úspěšně složenou, získal-li uchazeč alespoň **20** bodů.