# Kartézský součin

**Def** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru $(x,y)$, kde $x \in A, y \in B$. Formálně

$$A \times B = \{(x,y) / x \in A, y \in B\}$$

$A \times B$ se nazývá kartézský součin množin $A$ a $B$

**Def** Relace mezi množinami $A$ a $B$ je libovolná podmnožina $\mathcal{R}$ kartézského součinu $A$ a $B$. Je-li $A = B$, mluvíme o relaci na $A$. Náleží-li dvojice $(x,y)$ relaci $\mathcal{R}$, tj. $(x,y) \in \mathcal{R}$ říkáme, že $x$ a $y$ jsou v relaci $\mathcal{R}$, zapisujeme $x\mathcal{R}y$

**Def** Řekneme, že relace $\mathcal{R}$ na množině $M$ je <u>ekvivalence</u>, když má následující tři vlastnosti

1. pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$ (reflexivita)
2. Kdykoliv $x\mathcal{R}y$, pak i $y\mathcal{R}x$ (symetrie)
3. Ze vztahů $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$ plyne $x\mathcal{R}z$ (tranzitivita)

**Def** Řekneme, že relace $\leq$ na množině $M$ ~~je usp~~ uspořádání, když má tři vlastnosti

1. pro každé $x \in M$ platí $x \leq x$ (reflexivita)
2. jestliže $x \leq y, y \leq x$, pak $x = y$ (antisymetrie)
3. jestliže $x \leq y, y \leq z$, pak $x \leq z$ (tranzitivita)

# Zobrazení (funkce)

**Def|** Nechť $A, B$ jsou libovolné množiny. Zobrazením nazveme každou podmnožinu $f \subset A \times B$ po které platí, že

$$(\forall x, y, z)(((x,z) \in f \wedge (x,y) \in f) \Rightarrow (y = z))$$

zapisujeme $f: A \to B$, pokud $(x,y) \in f$, pak používáme zápis $y = f(x)$

Množinu

$$D_f = \{x \mid (\exists y)(y = f(x))\}$$

nazveme definičním oborem zobrazení $f$

Množinu

$$H_f = \{y \mid (\exists x)(y = f(x))\}$$

nazveme oborem hodnot zobrazení $f$

$f: A \to B$, chápeme jako $D_f = A \wedge H_f \subset B$

$f: (A) \to B$ budeme chápat jako $D_f \subset A \wedge H_f \subset B$

Dvě zobrazení $f, g$ se rovnají právě tehdy, když

$$D_f = D_g \wedge (\forall x \in D_f)(f(x) = g(x))$$

Zobrazení $f$ nazveme konstantní pokud

$$(\forall x, y \in D_f)(f(x) = f(y))$$

Neprázdné konstantní zobrazení má jednoprvkový obor hodnot

Zobrazení $h: M \cap A \to B$ je zúžením zobrazení $f: A \to B$ na množinu $M$, když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in M \cap A$. Symbolicky zapisujeme $h = f|_M$

## Obraz množiny M při zobrazení $f: A \to B$

$$f(M) = \{y \mid (\exists x \in M)(y = f(x))\} \Leftrightarrow \{f(x) \mid x \in M\}$$

## Vzor množiny M při zobrazení $f: A \to B$

$$f^{-1}(M) = \{x \mid (\exists y \in M)(y = f(x))\} \Leftrightarrow \{x \in A \mid f(x) \in M\}$$

## Složené zobrazení

Nechť $f: A \to B$, $g: B \to C$ jsou zobrazení.
Potom definujeme zobrazení $h: A \to C$ předpisem $h(x) = g(f(x))$.
Takové zobrazení se nazývá složení zobrazení $g$ a $f$ a značí se $g \circ f$. Platí tedy $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

skládání zobrazení není obecně komutativní, je však asociativní. Pro každá tři zobrazení umožňující skládání platí $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Nechť $f: A \to B$

$g: C \to D$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f = A \Rightarrow D_{f \circ g} = g^{-1}(A)$

pak $(\forall x \in g^{-1}(A))((f \circ g)(x) = f(g(x)))$

## Vlastnosti zobrazení

Nechť $f: A \to B$ zobrazení a M libovolná množina.

Řekneme, že $f$ je

① Injektivní, pokud $(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

② M-surjektivní, pokud $(\forall y \in M)(\exists x \in A)(y = f(x))$

③ M-bijektivní, pokud je injektivní a zároveň M-surjektivní.

Zobrazení je identické, pokud $(\forall x \in A)(f(x) = x)$, ozn. $Id_f$

## Inverzní zobrazení

Nechť $f: A \to B$ injektivní zobrazení, pak definujeme inverzní zobrazení ~~f~~ k $f$

$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ $\quad D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

$\left.\begin{array}{l} f^{-1} \circ f = Id_1 \\ f \circ f^{-1} = Id_2 \end{array}\right\}$ obecně $Id_1 \neq Id_2$

# Množina reálných čísel ($\mathbb{R}$)

- tvoří uspořádané těleso

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

1. $x+y = y+x, \; xy = yx$
2. $x+(y+z) = (x+y)+z, \; x(yz) = (xy)z$
3. $x(y+z) = xy + xz$
4. $(\exists! 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x+0 = x)$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! -x \in \mathbb{R})(x+(-x) = 0)$
6. $(\exists! 1 \in \mathbb{R})(1 \neq 0 \wedge (\forall x \in \mathbb{R})(1 \cdot x = x))$
7. $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(x \cdot x^{-1} = 1)$
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$
9. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R})(x+z \leq y+z))$
10. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz)$
11. $\mathbb{R}$ je úplná

## Základními podmnožinami $\mathbb{R}$ jsou intervaly

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < y$

$\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - uzavřený interval

$\langle a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ - polouzavřený interval

$(a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ - otevřený interval

# Elementární funkce

## Polynom n-tého stupně, $n \in \mathbb{N}_0$

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n$, $\alpha_n \neq 0$,

$(\forall i \in \hat{n}_0)(\alpha_i \in \mathbb{R})$

Podíl dvou polynomů se nazývá racionální funkce

## Mocninná funkce

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

## Exponenciální funkce

$f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ - logaritmus

## Goniometrické funkce

$f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1; 1 \rangle$

$f(x) = \cos x$; $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1; 1 \rangle$

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $H_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{cotg} x$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$, $H_f = \mathbb{R}$

Zúžením $D_f$ můžeme definovat inverzní funkce, nazýváme je cyklometrické

$f(x) = \arcsin x$, $D_f = \langle -1; 1 \rangle$, $H_f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

$f(x) = \arccos x$, $D_f = \langle -1; 1 \rangle$, $H_f = \langle 0; \pi \rangle$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$, $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0; \pi)$

## Hyperbolické funkce

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$f(x) = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

## Aritmetika funkcí

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$, $D_{fg} = D_f \cap D_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus g^{-1}(\{0\})$

Společně s operacemi skládání funkcí a inverzí (je-li to možné) takto konečným počtem kroků lze vytvořit všechny ostatní

# Ekvivalence množin

Nechť $A$ a $B$ jsou množiny. Řekneme, že množina $A$ je ekvivalentní s množinou $B$, pokud existuje bijekce $f: A \to B$, ozn. $A \sim B$.

Relace $\sim$ má vlastnost ekvivalence.
Tedy pro každé tři množiny $A, B, C$ platí

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

# Mohutnost množin

O množině $A$ řekneme, že je

1. konečná, pokud je prázdná nebo ekvivalentní s $\{1; 2; \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$
2. Spočetná, pokud je ekvivalentní s $\mathbb{N}$, nejvýše spočetná pokud je spočetná nebo konečná
3. Nespočetná, pokud není ani spočetná, ani konečná

množina $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ je spočetná
libovolný interval (podmnožina) nespočetné množiny je ekvivalentní s nespočetnou množinou

# Absolutní hodnota, trojúhelníková nerovnost

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ přiřadíme

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

velikost (absolutní hodnotu) reálného čísla

## Trojúhelníková nerovnost

Z definice, pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$x \leq |x| \qquad\qquad -x \leq |x|$$
$$y \leq |y| \quad \wedge \quad -y \leq |y|$$

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \wedge \quad -x - y \leq |x| + |y|$$

z definice: $\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$

Snadno ukážeme, že také: $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |(y-x) + x| \leq |y-x| + |x|$$

$$\Rightarrow |x| - |y| \geq -|x-y|$$

z definice už plyne, že $\boxed{|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|}$

## Celá část reálného čísla

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho celou část $[x]$ jako největší celé číslo menší nebo rovno $x$.

$$x - 1 < [x] \leq x$$

## Signum

tzv. znaménková funkce, pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

## Omezenost podmnožiny reálných čísel, maximum, minimum

Řekneme, že podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená shora, pokud $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq H)$

Každé $H$ s takovou vlastností nazýváme horní závora $A$

Řekneme, že podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, pokud $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \geq D)$

Každé $D$ s takovou vlastností nazýváme dolní závora $A$

# Maximum

Řekneme, že $a \in A$ je ~~maxim~~ maximem podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$ právě tehdy když $(\forall x \in A)(x \leq a)$

# Minimum

Řekneme, že $b \in A$ je minimem podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$ právě tehdy když $(\forall x \in A)(x \geq b)$

# Rozšíření množiny reálných čísel

Množinu $\mathbb{R}$ rozšíříme o dva nové prvky, které označíme $+\infty$ a $-\infty$, nazveme je plus nekonečno a minus nekonečno.
Označíme toto rozšíření $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$
Uspořádání na $\overline{\mathbb{R}}$ rozšíříme vztahem
$(\forall x \in \mathbb{R})(-\infty < x < +\infty)$

# Množina komplexních čísel

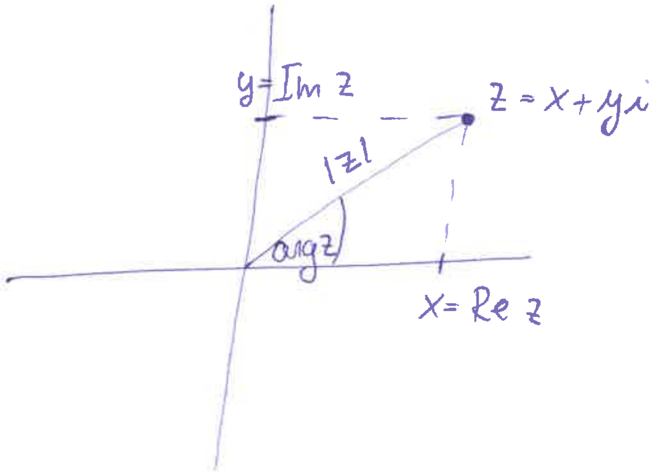
- Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je množina uspořádaných dvojic $\mathbb{R}^2$ na které je definováno sčítání a násobení
- Každé komplexní číslo, z, lze zapsat ve tvaru $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a $i$ je imaginární jednotka $i^2 = -1$
- $x$ nazýváme reálnou část $z$, ozn. $x = \operatorname{Re} z$
- $y$ nazýváme imaginární část $z$, ozn. $y = \operatorname{Im} z$
- Reálná čísla považujeme za speciální případ komplexních s nulovou imaginární částí, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Číslo $\bar{z} = x - iy$ nazýváme komplexně združené k $z$
- Pro libovolná $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$$

- Číslo $\sqrt{x^2+y^2}$ nazýváme velikostí komplexního čísla $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, ozn. $|z|$
- Pro každá dvě čísla $z, w \in \mathbb{C}$ také platí

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

- Každé komplexní číslo, z, lze vyjádřit v goniometrickém tvaru $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ 12, kde $\alpha = \arg z$




Pro každé komplexní číslo z platí Moivrova věta

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Geometrický význam absolutní hodnoty jakožto vzdálenost dvou bodů je příčinou pojmenování množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq R\}$ názvem otevřený kruh resp. uzavřený kruh se středem v bodě a poloměrem R

Omezené podmnožiny komplexních čísel

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{C}$ je omezená právě tehdy, když

$$(\exists k > 0)(\forall z \in A)(|z| \leq k)$$

„A se schová do uzavřeného kruhu se středem v počátku o poloměru k"

Rozšíření množiny komplexních čísel

Rozšíříme $\mathbb{C}$ o jeden prvek, ozn. $\infty$, nazveme jej nekonečno

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

# Supremum, infimum

## Supremum

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak $\exists! \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, že

1. $(\forall x \in A)(x \le \beta)$ $\quad \beta' < x \le \beta$
2. $(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(x > \beta')$

Číslo $\beta$ nazveme supremum $A$, ozn. $\sup A$.

Má-li množina maximum, pak $\sup A = \max A$

## Infimum

Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak $\exists! \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, že

1. $(\forall x \in A)(x \ge \alpha)$
2. $(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha > \alpha')(\exists x \in A)(x < \alpha')$

Číslo $\alpha$ nazveme infimum $A$, ozn. $\inf A$

Má-li množina minimum, pak $\inf A = \min A$

**Věta:** Množina $\mathbb{N}$ není shora omezená

**Dk:** Předpokládejme, že existuje $H$ horní závora, pak $\beta = \sup \mathbb{N} \le H$

Pak jistě existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\beta - 1 < n \le \beta$

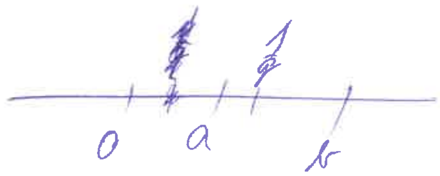
a tedy $\beta < n+1$,

$n+1$ je ale přirozené číslo. SPOR

**Věta** Mezi každými dvěma reálnými čísly existuje racionální číslo.

**Dk** Zvolme $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$

Nechť BÚNO $0 < a < b$




Protože $\mathbb{N}$ není omezeno shora, pak existuje $q \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{q} < b - a$ a tedy $\frac{1}{q} < b$. Pak nechť $p$ je maximální přirozené číslo, že $\frac{p}{q} < b$. (Takové existuje a je větší nebo rovno 1)

Pak $\frac{p+1}{q} \geq b$

a z toho plyne $a = b - (b - a) < \frac{p+1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$

a tedy platí $a < \frac{p}{q} < b$

## Věta o existenci $n$-té odmocniny

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Pak

① Pro $a \geq 0$ a $n$ sudé existuje právě jedno $b \geq 0$, že $b^n = a$

② Pro $n$ liché existuje právě jedno $b \in \mathbb{R}$, takové, že $b^n = a$

**Dk** • Jednoznačnost

Předpokládejme, že $a > 0$ a že existují $b_1 \neq b_2$ a $b_1 \neq b_2$ takové, že $b_1^n = b_2^n = a$. Pak ale $b_1^n - b_2^n = 0$ a tedy

$0 = b_1^n - b_2^n = (b_1 - b_2) \sum_{k=0}^{n-1} b_1^k b_2^{n-k}$, pak ale nutně $b_1 - b_2 = 0 \Leftrightarrow b_1 = b_2$, SPOR

- **Existence**

① $a = 0$, pak už nutně $b = 0$
② $a = 1$, pak nutně $b = 1$
③ $a \in (0;1)$
④ $a > 1$ - stačí ukázat po jeden z intervalů a aplikovat to na druhý! neboť $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$

$$S := \{s \in \mathbb{R} \,/\, s \geq 1 \wedge s^n \leq a\}$$

- $S$ neprázdná, neboť $1 \in S$
- $S$ je shora omezená
- $b = \sup S$

$b^n = a \iff b^n \leq a \wedge b^n \geq a$

Ukažme, že nemůže být pravda $b^n < a$

Pokud by $b^n < a$, pak jistě existuje tak velké $k \in \mathbb{N}$, (neboť $\mathbb{N}$ není omezené) že $\left(b + \frac{1}{k}\right)^n < a \iff b + \frac{1}{k} \in S$

SPOR

$b = \sup S \iff$ ① $(\forall s \in S)(s \leq b)$
② $(\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in S)(s > b - \varepsilon)$

Ukažme nyní, že ani $b^n > a$ nemůže být pravda

Kdyby $b^n > a$, pak jistě existuje tak velké číslo $k \in \mathbb{N}$, že $\left(b - \frac{1}{k}\right)^n > a$, pak ale $b$ nemůže být supremum, neboť stále platí, že $(\forall s \in S)\left(s \leq b - \frac{1}{k}\right)$.

Tedy nutně $b^n = a$

# Okolí bodu v $\bar{R}$ a $\bar{C}$

• Nechť $a \in R$, $\varepsilon > 0$ pak interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nazveme $\varepsilon$-okolím bodu „a", ozn. $H_a(\varepsilon)$

Interval $(a-\varepsilon, \varepsilon)$ resp $(\varepsilon; a+\varepsilon)$ nazýváme levé, resp. pravé okolí bodu „a", ozn. $H_a^-(\varepsilon)$ resp. $H_a^+(\varepsilon)$. Někdy také jednostranné okolí.

• Nechť $\varepsilon > 0$, pak interval $(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$ nazýváme $\varepsilon$-okolím bodu $+\infty$.
Interval $(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$ nazýváme $\varepsilon$-okolím bodu $-\infty$. Ozn. $H_{+\infty}(\varepsilon), H_{-\infty}(\varepsilon)$

• Nechť $a \in C$, $\varepsilon > 0$, pak otevřený kruh $\{z \in C / |z-a| < \varepsilon\}$ nazýváme $\varepsilon$-okolím bodu „a", ozn $H_a(\varepsilon)$.
Množinu $\{z \in C / |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ nazýváme $\varepsilon$-okolím bodu $\infty$, ozn. $H_\infty(\varepsilon)$.

**Věta** ① Nechť $a \in \bar{R}$ a nechť $H_a^{(1)}$ a $H_a^{(2)}$ jsou okolí bodu a v $R$.
Pak $(\exists H_a)(H_a \subset H_a^{(1)} \wedge H_a \subset H_a^{(2)})$

② Nechť $a \in R$, nechť $H_a$ je okolí bodu a v $R$ a nechť $b \in H_a$.
Pak $(\exists H_b)(H_b \subset H_a)$

③ Nechť $a, b \in \bar{R}$ a nechť $a \neq b$. Pak $(\exists H_a)(\exists H_b)(H_a \cap H_b = \emptyset)$.

**Dk** ① • $H_a^{(1)} = H_a^{(2)}$, pak libovolné $H_a \subset H_a^{(1)}$ je i $H_a \subset H_a^{(2)}$
• $H_a^{(1)} \subset H_a^{(2)}$, pak po libovolné $H_a \subset H_a^{(1)}$ je i $H_a \subset H_a^{(2)}$
• $H_a^{(2)} \subset H_a^{(1)}$, pak po libovolné $H_a \subset H_a^{(2)}$ je i $H_a \subset H_a^{(1)}$

② • $a = \pm\infty$, $H_a = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$, $b \in H_a$, pak zvolím $\varepsilon_1 = |\frac{1}{\varepsilon} - b| \frac{1}{2}$ a
$H_b = (\varepsilon_1; +\infty) \subset H_a$
• $a \in R$, $H_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $b \in H_a$ nechť BÚNO $b \in H_a^+$, pak zvolím $H_b = (a; a+\varepsilon)$

③ • $a = +\infty$

$b \in \mathbb{R}$

pak nechť $\varepsilon > 0$, zvolím $H_a = (b + \frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$, $H_b = (b - \frac{1}{\varepsilon}; b + \frac{1}{\varepsilon})$

• $a \in \mathbb{R}$

$b \in \mathbb{R}$

nechť BÚNO $a < b$

nechť dále $\varepsilon > 0$, pak zvolím $H_a = (a - \varepsilon; \frac{|a-b|}{2})$, $H_b = (\frac{|a-b|}{2}; b + \varepsilon)$

## Číselné posloupnosti

Každé zobrazení, jehož definičním oborem je $\mathbb{N}$ nazýváme posloupnost. Posloupnost $f$, pro kterou platí $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$ ... atd., značíme $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ nebo $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $(a_n)$

Je-li obor hodnot posloupnosti podmnožinou $\mathbb{C}$, pak mluvíme o číselné nebo komplexní posloupnosti. Jsou-li v oboru hodnot pouze reálná čísla, mluvíme o reálné posloupnosti.

## Omezenost, monotonie

- Číselnou posloupnost $(a_n)$ nazýváme omezená, pokud její obor hodnot je omezená množina
- Reálnou posloupnost $(a_n)$ nazýváme
  - Omezená shora, pokud její obor hodnot je množina omezená shora
  - Omezená zdola, pokud její obor hodnot je množina omezená zdola
  - Rostoucí, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq a_{n+1})$
  - Klesající, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq a_{n+1})$
  - Ostře rostoucí, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$
  - Ostře klesající, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > a_{n+1})$
  - Monotónní, pokud je klesající nebo rostoucí
  - Ryze monotónní, pokud je ostře klesající nebo ostře rostoucí

## Vybraná posloupnost

Posloupnost $(b_n)$ nazveme vybranou posloupností z $(a_n)$ pokud existuje ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n)$ tak, že $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n = a_{k_n})$

## Limita posloupnosti

Nechť $(a_n)$ reálná posloupnost, nechť $a \in \bar{\mathbb{R}}$.
Říkáme, že $(a_n)$ má limitu $a \in \bar{\mathbb{R}}$, pokud
$(\forall H_a \subset \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a)$

Říkáme, že komplexní posloupnost $(a_n)$ má limitu $a \in \bar{\mathbb{C}}$, pokud
$(\forall H_a \subset \mathbb{C})(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a)$

Zapisujeme

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ nebo $\lim a_n = a$ nebo $a_n \mapsto a$

**Věta** Číselná posloupnost může mít nanejvýš jednu limitu

**Dk** Předpokládejme, že posloupnost $(a_n)$ má za limitu $a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a \neq b$
Pak jistě existují $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ takové, že $H_a(\varepsilon_1) \cap H_b(\varepsilon_2) = \emptyset$ a platí
$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a(\varepsilon_1))$
$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_b(\varepsilon_2))$
Lze tedy nalézt $n_1$ a $n_2$ na základě $\varepsilon_1$ a $\varepsilon_2$. Pak tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}, n > \max\{n_1, n_2\}$ bude $H_a(\varepsilon_1) \cap H_b(\varepsilon_2) \ni a_n$. SPOR

**Věta** Nechť posloupnost $(a_n)$ má za limitu $a \in \bar{\mathbb{R}}$.
Pak každá posloupnost z ní vybraná má za limitu $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

**Dk** Předpokládáme tedy, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a(\varepsilon))$$

a chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(a_{k_n} \in H_a(\varepsilon_1))$$

Protože $k_n$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak jistě $(\forall n \in \mathbb{N})(k_n \geq n)$

Zvolme tedy $\varepsilon_1 = \varepsilon$ a $n_1 = n_0$

- Číselná posloupnost, která má za limitu $a \in \mathbb{R}$, resp. $a \in \mathbb{C}$ nazveme KONVERGENTNÍ
- Číselná posloupnost, která není konvergentní nazveme DIVERGENTNÍ
  - je-li limita $+\infty$ nebo $-\infty$, resp. $\infty$ nazveme ji podstatně divergentní
  - nemá-li posloupnost žádnou limitu nazveme ji oscilující

**Věta** Nechť $(a_n)$ je posloupnost mající za limitu $a$, $(k_n)$ je posloupnost přirozených čísel s limitou $+\infty$. Pak posloupnost $(a_{k_n})$, nazýváme ji „skoroovybraná“, má také za limitu $a$.

**Dk** Z předpokladů víme, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \in H_a(\varepsilon))$$

$$(\forall K > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(k_n \geq K)$$

a chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(a_{k_n} \in H_a(\varepsilon_2))$$

Zvolme $\varepsilon$, najdeme $n_0$, nyní zvolíme $K = n_0$ a najdeme $n_1$

Pak stačí zvolit $\varepsilon_1 = \varepsilon$ a $n_2 = n_1$

**Věta** Nechť $(a_n)$ reálná posloupnost, pak

1. Má-li posloupnost konečnou limitu, tak je omezená! (in $\mathbb{C}$)
2. Má-li posloupnost limitu $+\infty$ je omezená zdola a neomezená shora
3. Má-li posloupnost limitu $-\infty$ je omezená zdola a neomezená shora.

**Dk**

1. Podle předpokladu tedy $\lim a_n = a$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$

a chceme ukázat, že existuje $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $|a_n| \leq K$

Zvolme $\varepsilon = 1$, pak k němu existuje $n_0$ takové, že pro všechna $n > n_0$, $|a_n - a| < 1$

$|a_n - a| \leq |a_n| - |a| < 1 \iff |a_n| < 1 + |a|$

Zvolme $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, \dots, |a| + 1\}$, pak tedy

$|a_n| \leq K$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$

2. Dle předpokladu

$(\forall \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha)$

a chceme ukázat, že $(\forall K > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(a_n > K)$

a že $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq D)$

pro libovolné $K$ volíme $n = [n_0] + 1$

protože zcela jistě existuje minimum oboru hodnot, neboť není možné

aby měla posloupnost dvě různé limity ($+\infty$ a $-\infty$)

proto $D = \min\{a_n\}$

3. analogicky

**Věta** Přidáním, odebráním či modifikací konečně mnoha členů posloupnosti se nezmění její omezenost ani existence její limity, ani její hodnota.

**Dk** Takovou úpravu můžeme provést například tak, že přidáme konečně mnoho členů na začátek. Máme tedy ukázat, že

$(a_n)$ je (shora, zdola) omezená $\Leftrightarrow$ $(a_{n+p})$ je (shora, zdola) omezená

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim a_{n+p} = a$$

ukážeme dvě implikace

1. $\Rightarrow$ • $(a_n)$ je omezená $\Leftrightarrow (\exists K>0)(\forall n\in N)(|a_n|<K)$
 protože $\{p+1, p+2, \dots\} \subset N$ tak $(\forall n \in \{p+1, p+2, \dots\})(|a_n|<K)$
 • $\lim a_n = a$, pak nutně $\lim a_{n+p} = a$, neboť $a_{n+p}$ je posloupnost vybraná z $a_n$

2. $\Leftarrow$ • $(a_{n+p})$ je omezená $\Leftrightarrow (\exists K_1)(\forall n \in \{p+1, p+2, \dots\})(|a_n|<K_1)$
 Zvolme $K_2 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_p|\}$, $K = \max\{K_1, K_2\}$
 pak $(\forall n \in N)(|a_n|<K)$
 • $\lim a_{n+p} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in R)(\forall n\in N, n>n_0)(a_{n+p} \in H_a(\varepsilon))$
 a chceme ukázat, že $\lim a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1>0)(\exists n_1 \in R)(\forall n\in N, n>n_1)(a_n \in H_a(\varepsilon_1))$
 $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $n_1 = n_0 + p$

**Věta** Každá monotónní posloupnost má limitu

**Dk** Nechť $(a_n)$ je monotónní reálná posloupnost.

BÚNO předpokládejme, že $(a_n)$ je rostoucí

① $(a_n)$ je omezená, pak existuje $\beta = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, a $\beta \in \mathbb{R}$

Ukažme, že $\lim a_n = \beta$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - \beta| < \varepsilon)$

$\beta = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \beta)$

$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(a_{n_1} > \beta - \varepsilon)$

$|a_n - \beta| < \varepsilon \Leftrightarrow \underline{\beta - \varepsilon} < a_n < \underline{\beta + \varepsilon}$

plyne z

zvolme $\varepsilon = \varepsilon_1$ a $n_0 = n_1$, protože $(a_n)$ je rostoucí, pak všechny následující členy do škály nalezí

② $(a_n)$ není omezená $\Leftrightarrow (\forall K > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(a_{n_1} > K)$

Ukažme, že $\lim a_n = +\infty$

$\Leftrightarrow (\forall \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha)$

po libovolné $\alpha > 0$ zvolíme $n_0 = [n_1] + 1$, protože $(a_n)$ rostoucí pak každé všechny další členy jsou větší než $\alpha$

**Věta** Komplexní posloupnost $(a_n)$, kde $(a_n) = \alpha_n + i\beta_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ je konvergentní právě tehdy když $(\alpha_n)$ a $(\beta_n)$ jsou konvergentní. Pak navíc $\lim a_n = \lim \alpha_n + i \lim \beta_n$

**Dk** Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{C}$, $a = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ukažme dvě implikace

① $\Rightarrow$ $(a_n)$ konvergentní

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$

ukažme, že odtud plyne $\lim \alpha_n = \alpha$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon_1)$

víme, že $(\forall z \in \mathbb{C})(|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| \wedge |z| \geq |\mathrm{Im}\, z|)$

tedy $|\alpha_n - \alpha| \leq |a_n - a| < \varepsilon$

stačí tedy volit $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $n_1 = n_0$

Stejně zvolíme $\varepsilon$ i pro případ $\lim \beta_n = \beta$

② $\Leftarrow$ Nechť máme stejné předpoklady jako v 1. implikaci

víme, že $(\forall z \in \mathbb{C})(|z| = |\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$

tedy $|a_n - a| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

zvolme tedy $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

# Aritmetika limit

Pokud výrazy na pravé straně mají smysl, pak platí

1. $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
2. $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$
3. $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$
5. $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$
6. $\lim a_n = a \Rightarrow \lim |a_n| = |a|$, platí pro $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

   pro $a = 0$, $a = \infty$ platí ekvivalence

**Dk** 1. • $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$

Chceme tedy ukázat, že $\lim (a_n + b_n) = a + b$

víme tedy, že $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$

$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|b_n - b| < \varepsilon_2)$

ukážeme, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon)$

$$|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

zvolme $\varepsilon_* = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ; $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

(1) • $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$

Chceme ukázať, že $\lim (a_n + b_n) = +\infty$

tj. že $(\forall \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n + b_n > \alpha)$

vieme, že $(\forall \beta > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(a_n > \beta)$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|b_n - b| < \varepsilon)$

Zvoľme $\alpha > 0$ ľubovoľné, tak, aby bolo možné

položme $\varepsilon = 1$, $\beta = \alpha - b + 1$

$|b_n - b| < 1$

$b - 1 < b_n < b + 1$

Potom $a_n + b_n > \beta + b - 1 = \alpha - \cancel{b} + 1 + b - 1 = \alpha$

a $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

(2) Analogicky

(3) • $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$

Chceme ukázať, že $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

vieme, že $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$

$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|b_n - b| < \varepsilon_2)$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n b_n - ab| < \varepsilon)$

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| =$

$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$

potože $\lim \cancel{a_n} = \cancel{a} \in \mathbb{R}$, tak $(\exists K>0)(\forall n\in\mathbb{N})(|\cancel{a_n}|\le K)$

$|\cancel{a_n}||b_n - b| + |b||a_n - a| < K\cdot\varepsilon_1 + |b|\cdot\varepsilon_2$

~~[illegible]~~ v předpokladech volme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2K}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|b|}$,

tak $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

- $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\forall \alpha>0)(\exists n_1\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_1)(a_n>\alpha)$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_2\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_2)(|b_n - b|<\varepsilon)$

Ukažme, že $\lim (a_n\cdot b_n) = +\infty$

$\Leftrightarrow (\forall \beta>0)(\exists n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)(a_n b_n > \beta)$

$|b_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < b_n < b+\varepsilon$

zvolme $\varepsilon = 1$ a $\alpha = \frac{\beta}{b-1}$

$a_n\cdot b_n > (b-1)\cdot\frac{\beta}{b-1} = \beta$

④ ~~Nap~~ • $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$

$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|b_n - b| < \varepsilon_2)$

Chceme ukázat, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \varepsilon)$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b_n \cdot b}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} = \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a||b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{|a_n - a|}{k} + \frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{k}$$

pak zvolíme $\varepsilon$ a dle předpokladu $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon |k|}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{|b| \varepsilon k}{|a|}$

kde $k$ je horní závora ~~o~~ obou hodnot

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

⑤ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

~~[illegible]~~ Nechť $\lim a_n = a$

- je-li $a = 0$ tvrzení je triviální
- je-li $a = +\infty$ tvrzení je též jednoduché
- předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Chceme tedy ukázat, že

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| < \varepsilon)$$

a víme, že $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \left| \frac{a_n - a}{\sum_{i=0}^{k-1} (\sqrt[k]{a_n})^i (\sqrt[k]{a})^{k-1-i}} \right| \leq \left| \frac{a_n - a}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} \right| = \frac{|a_n - a|}{|(\sqrt[k]{a})^{k-1}|}$$

$K := \dfrac{1}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}}$, zvolme libovolné $\varepsilon$ a podle předpokladu položme $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{K}$, najdeme k němu $n_1$ a zvolme $n_0 = n_1$

⑥ $\lim a_n = a \Rightarrow \lim |a_n| = |a|$

- $a = 0$, ukažme ekvivalenci

$\lim a_n = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n| < \varepsilon)$
$\lim |a_n| = 0 \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(||a_n|| < \varepsilon)$
viditelně jsou výroky ekvivalentní

- $\lim a_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$
$\lim |a_n| = |a| \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(||a_n| - |a|| < \varepsilon_1)$
Zvolme $\varepsilon_1 = \varepsilon$ a $n_1 = n_0$, pak $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$
Pro $a = +\infty$: od jistého $n$ jsou určitě všechny členy kladné, tedy $|a_n| = a_n > K, \forall K > 0$

# Věty o nerovnostech limit

Pro každé dvě reálné posloupnosti $(a_n), (b_n)$ platí

$$\lim a_n < \lim b_n \Rightarrow (\exists n_0)(\forall n > n_0)(a_n < b_n)$$

Dk: Označme $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$$
$$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)(|b_n - b| < \varepsilon_2)$$

Protože $a < b$, pak jistě existují $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ takové, že $H_a(\varepsilon_1) \cap H_b(\varepsilon_2) = \emptyset$.

Z definice najdeme k nim příslušná $n_1, n_2$ a zvolme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Užitečná je i obměněná implikace, tedy

$$(\forall n_0)(\exists n > n_0)(a_n \geq b_n) \Rightarrow \lim a_n \geq \lim b_n$$
$$\Leftrightarrow (\forall n)(a_n \geq b_n) \Rightarrow \lim a_n \geq \lim b_n$$

# Věta o limitě sevřené posloupnosti

Nechť $(a_n), (b_n), (c_n)$ jsou reálné posloupnosti a nechť platí, že $\lim a_n = \lim b_n = c$ a platí-li, že $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \le c_n \le b_n)$ pak $\lim c_n$ existuje a je rovna $c$, $\lim c_n = c$

**Dk**

- $c = +\infty$

  Pak z předpokladu $(\forall \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha)$

  pak protože $c_n \ge a_n > \alpha$ plyne $c_n > \alpha$, podle definice $\lim c_n = +\infty$
- $c = -\infty$, analogicky
- $c \in \mathbb{R}$

  pak $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - c| < \varepsilon_1)$

  $(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|b_n - c| < \varepsilon_2)$

  a chceme ukázat, že

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|c_n - c| < \varepsilon)$

  $c - \varepsilon_1 < a_n < c + \varepsilon_1$

  $c - \varepsilon_2 < b_n < c + \varepsilon_2$

$c - \varepsilon_1 < a_n \le c_n \le b_n < c + \varepsilon_2$

Zvolme $\varepsilon > 0$, dle předpokladu položme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, nalezneme $n_1, n_2$ a zvolíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

**Příklad** platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

**Řešení** očividně $n \geq 1 \quad / ^{\frac{1}{n}}$

$$\sqrt[n]{n} \geq 1$$

označme $\alpha_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$

$$\alpha_n + 1 = \sqrt[n]{n} \quad / ^n$$

$$(\alpha_n + 1)^n = n$$

$$n = (\alpha_n + 1)^n \geq \binom{n}{2} \alpha_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 \geq 0 \quad / ^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq \alpha_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = \lim \alpha_n + 1 = \lim \alpha_n + \lim 1 = 1$$

**Příklad** nechť $a > 0$, pak $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

**Řešení**

- $a > 1$

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$$

- $a \in (0;1)$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$$

- $a = 1$, triviální

**Příklad** platí $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

**Řešení**

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} n-k+1$$

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) \geq n^n$$

Ukažme, že $(\forall k \in \hat{n})(k(n-k+1) \geq n)$

$n=1$, $k=1$: $1(\cancel{n}-1+1) \geq \cancel{n}$

$\cancel{n} \geq \cancel{n}$

$n \to n+1$

$$k(n+1-k+1) \geq n+1$$

$$\underbrace{k(n+1-k)}_{\geq n} + \underbrace{k}_{k \geq 1} \geq n+1$$

$k = n+1$: $(n+1)(n+1-(n+1)) + (n+1) \geq n+1$

$$n+1 \geq n+1$$

pak tedy $(n!)^2 \geq n^n \quad / \sqrt[2n]{\ }$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$$

a protože $\lim \sqrt{n} = +\infty$, pak už nutně i $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

# Eulerovo číslo e

Nechť $(a_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $(b_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, pro všechna přirozená $n$

## Lemma

Posloupnost $(a_n)$ je ostře rostoucí, posloupnost $(b_n)$ je ostře klesající

**Dk**

$(a_n)$ je ostře rostoucí $\iff (\forall n \in \mathbb{N})(a_n < a_{n+1})$

- $$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1-\frac{i}{n}\right)$$

- $$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^k} \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k)}{k!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1-\frac{i}{n+1}\right)$$

evidentně platí $\left(1-\frac{i}{n}\right) \le \left(1-\frac{i}{n+1}\right)$, navíc druhá suma obsahuje o jeden kladný sčítanec navíc

a proto $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$(b_n)$ ostře klesající $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(b_n > b_{n+1})$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}\frac{1}{(n(n+2))^k} > 1+\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{n}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n+2}\binom{n+2}{k}\frac{1}{(n(n+2))^k}}_{>0} > 1+\frac{1}{n}$$

**Lemma** Obě posloupnosti $(a_n)$ i $(b_n)$ mají stejnou limitu

**Dk** Protože jsou obě posloupnosti monotónní, jejich limity jistě existují.

Přitom platí $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Pak $\lim b_n = \lim a_n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim a_n \cdot 1$

**Definice** Společnou hodnotu limit posloupností $(a_n)$ i $(b_n)$ nazýváme Eulerovým číslem, ozn. $e$.

**Lemma** Nechť $(c_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, pro všechna $n > 1$ platí $c_n > a_n$ a $c_n < e$.

**Dk** • $a_n < c_n$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) < (*)$$

$$(*) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = c_n$$

• $e > c_n$

Pro libovolné $m \in \mathbb{N}, m > n$

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)$$

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \geq \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) = c_n$$

$$e \geq c_n$$

Musí ovšem platit $e > c_n$, neboť $c_n$ je ostře rostoucí a kdyby existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že $c_{n_0} = e$, pak by $c_{n_0+1} > e$ a to je spor, že $e \geq c_n$.

Proto tedy $e > c_n$.

**Lemma** Platí $\lim c_n = e$

**Dk** Tvrzení plyne z nerovností $a_n < c_n < e$.
Užitím věty o limitě sevřené posloupnosti tedy

$\lim a_n \leq \lim c_n \leq e \Rightarrow \lim c_n = e$

**Lemma** Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$e - c_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$$

**Dk** Zvolme libovolné $m > n$, pak

$$c_m - c_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots + \frac{1}{m!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots m}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$$

pak tedy $\lim\limits_{m \to +\infty} c_m - \lim\limits_{m \to +\infty} c_n \leq \lim\limits_{m \to +\infty} \frac{1}{n!n}$ a dostáváme

$$e - c_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$$

**Lemma** Číslo $e$ je iracionální!

**Dk** Předpokládejme, že existují $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ takové, že $e = \frac{p}{q}$, pak nutně $q \geq 2$, neboť $2 < e < 3$

~~[illegible]~~ $0 \leq \frac{p}{q} - \sum_{k}^{q} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q \cdot q!}$

$$0 \leq p(q-1)! - \sum_{k}^{q} \frac{q!}{k!} \leq \frac{1}{q}$$

$\sum_{k}^{q} \frac{q!}{k!}$ je zcela určitě celé číslo

celkově $p(q-1) - \sum_{k}^{q} \frac{q!}{k!}$ je celé číslo, ozn. $K$

pak $0 \leq K \leq \frac{1}{q}$, neexistuje však takové $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$, aby $K \in \mathbb{Z}$.

# Limes superior, limes inferior

Hromadnou hodnotou reálné posloupnost $(a_n)$ nazveme každé $a \in \bar{\mathbb{R}}$, po které existuje z ní vybraná posloupnost $(a_{k_n})$ taková, že $\lim a_{k_n} = a$.

**Věta** Každá reálná posloupnost $(a_n)$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Množina všech hromadných hodnot má maximum a minimum.
Největší hromadnou hodnotu nazveme limes superior, ozn. $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$
Nejmenší hromadnou hodnotu nazveme limes inferior, ozn. $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$

**Dk** ① Nechť $(a_n)$ není omezená shora, tj
$(\forall K>0)(\exists n\in\mathbb{N})(a_n > K)$

Zvolme $K=1$, pak tedy jistě existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_1} > 1$, nyní zvolme $K=2$, ze stejného důvodu ($(a_n)$ neomezená) existuje $k_2 > k_1$, že $a_{k_2} > 2$. Takto pokračujeme dál. Dostáváme že $a_{k_n} > n$. Z věty o limitě seřazené posloupnosti:

$\lim a_{k_n} \geq \lim n \Rightarrow \lim a_{k_n} \geq +\infty$.

$\Rightarrow \lim a_{k_n} = +\infty$

To je zřejmě největší hromadná hodnota.

② Nechť $(a_n)$ je omezená shora

Pak má smysl definovat posloupnost

$\beta_n := \sup\{a_k / k \geq n\}$

$\beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, $\beta_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$

Je vidět tedy, že $\beta_n \geq \beta_{n+1}$, a protože ~~se~~ je daná a monotónní posloupnost tak musí existovat její limita

ozn. $\lim \beta_n = \beta$

rozlišíme dva případy

- $\beta = -\infty$ pak tedy $(\forall \alpha > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n \in N, n > n_0)(\beta_n < -\alpha)$

  $\wedge \; (\forall k \geq n)(a_k \leq \beta_n)$

  tedy $a_n \leq \beta_n < -\alpha$

  to tedy implikuje fakt, že $\lim a_n = -\infty$

- $\beta \in R \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n \in N, n > n_0)(\beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon)$

$\beta_n = \sup\{a_k / k \geq n\} \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists k \in N)(a_k > \beta - \varepsilon)$

$(\forall k \geq n)(a_k \leq \beta_n)$

volme $\varepsilon_1 = \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n \in N, n > n_0)(\exists k \geq n)(\beta - \varepsilon < a_k < \beta + \varepsilon)$

volme $\varepsilon = 1$, pak: $\beta - 1 < a_{k_1} < \beta + 1$

pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dostaneme $\beta - \frac{1}{2} < a_{k_2} < \beta + \frac{1}{2}$

sestrojme tedy ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n)$, dostáváme $\beta - \frac{1}{n} < a_{k_n} < \beta + \frac{1}{n}$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme, že

$\lim a_{k_n} = \beta$

**Příklad** Posloupnost $(a_n) = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ má za hromadné hodnoty všechna čísla z intervalu $\langle 0;1)$.

**Řešení** Sestrojme $(k_n)$ ostře rostoucí posloupnost takovou, že $\lim (a_{k_n}) = \alpha$

$$k_n = n^2 + 2[\alpha n]$$

protože platí:

$$n^2 \le n^2 + 2[\alpha n] < (n+1)^2$$

$$n \le \sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} < n+1$$

tedy $[\sqrt{k_n}] = n$

$$a_{k_n} = \sqrt{k_n} - [\sqrt{k_n}] = \sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} - n$$

$$\alpha \leftarrow \frac{2\alpha n - 1}{2n - 1} \le \frac{n^2 + 2[\alpha n] - n^2}{\sqrt{n^2 + 2[\alpha n]} + n} \le \frac{2\alpha n}{2n} = \alpha$$

**Věta** Nechť $(a_n)$ je reálná posloupnost. Pak platí

$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} a_n \iff$

① $(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha')$

② $(\forall \alpha'' \in \mathbb{R}, \alpha'' > \alpha)(\exists^\infty n \in \mathbb{N})(a_n < \alpha'')$

$\beta = \limsup_{n\to+\infty} a_n \iff$

① $(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' > \beta)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n < \beta')$

$(\forall \beta'' \in \mathbb{R}, \beta'' < \beta)(\exists^\infty n \in \mathbb{N})(a_n > \beta'')$

**Dk** Důkaz tvrzení plyne z důkazu předchozí věty.

## Věta | Stolzův vzorec

Nechť $(a_n),(b_n)$ jsou reálné posloupnosti takové, že

① $(b_n)$ je ostře rostoucí a $\lim b_n = +\infty$

② existuje limita $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

Pak existuje i limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

**Dk |**

Důkaz věty bude plynout z obecnějšího tvrzení a sice

faktu, že $\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le \liminf \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

jistě implikuje tvrzení věty. Hodnoty na levé a pravé straně se dle předpokladů rovnají. Prostřední nerovnost plyne z definice. Ukážeme tedy krajní nerovnost a pak to bude jasné!

$$\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le \liminf \frac{a_n}{b_n}$$

Předpokládejme opak, tedy $\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > \liminf \frac{a_n}{b_n}$

Pak jistě díky úplnosti $\mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že $\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > \xi > \liminf \frac{a_n}{b_n}$

Pak z 1. bodu věty o vlastnostech liminf a lim sup platí, že

$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > \xi\right)$

Jistě lze zvolit $n_0$ tak, aby $(\forall n > n_0)(b_n > 0)$, tedy $a_{n+1}-a_n > \xi(b_{n+1}-b_n)$

napíšeme tuto nerovnost pro $k = n_0+1, n_0+2, \dots, k_n-1$ a sečteme je

tedy: $a_{k_n} - a_{n_0+1} > \xi(b_{k_n} - b_{n_0+1}) \iff \frac{a_{k_n}}{b_{k_n}} - \frac{a_{n_0+1}}{b_{k_n}} > \xi\left(1 - \frac{b_{n_0+1}}{b_{k_n}}\right)$

po limitním přechodu: $\liminf \frac{a_n}{b_n} \ge \xi$

SPOR

$\boxed{\text{Věta}}$ Cauchyův vzorec

Nechť $(a_n)$ je posloupnost kladných čísel a existuje limita $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Pak existuje i limita $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

# Bolzanovo - Cauchyho kriterium konvergence

Def| Číselná posloupnost $(a_n)$ se nazývá Cauchyovská, když
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)(|a_m - a_n| < \varepsilon)$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

Věta| Číselná posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je Cauchyovská

Dk| $(a_n)$ je konvergentní $\Leftrightarrow \lim a_n = a \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ ~~$m > n_0$~~ $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon_1)$

$\Rightarrow$: $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon_1$

zvolme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ pro libovolné $\varepsilon$ a najdeme $n_0$, pak pro $n, m > n_0$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$

$\Leftarrow$:

# Definice obecné mocniny

**Lemma** Nechť $x > -2$, $n \in \mathbb{N}$, Pak

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Dk** • $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$: $(1+x)^1 \geq 1+x$

$n \to n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$$

• $x \in (-2,-1)$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -|1+x| \geq 1+x \geq 1+nx$$

**Lemma** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $d_1, \dots, d_n \geq 0$, pak platí

$$\sqrt[n]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n} \leq \left(\frac{d_1 + \dots + d_n}{n}\right), \text{ tedy}$$

$$(d_1 \cdot \ldots \cdot d_n) \leq \left(\frac{d_1 + \dots + d_n}{n}\right)^n$$

**Dk** Pro $n = 1$: $\alpha \leq \alpha$ ✓

$n = 2$: $d_1 \cdot d_2 \leq \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2$

$$4d_1 \cdot d_2 \leq d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$$

$$0 \leq (d_1 - d_2)^2 \quad ✓$$

Předpokládejme platnost pro $n = 2^k$, pak ukažme pro $2^{k+1}$

$$(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2^{k+1}}) = (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2^k})(\alpha_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{2^{k+1}}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \cdot \left(\frac{\alpha_{2^k+1} + \ldots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1} - 2^k - 1}\right)^{2^{k+1} - 2^k - 1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \left(\frac{\alpha_{2^k+1} + \ldots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k} = \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{\alpha_{2^k+1} + \ldots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k} \leq$$

$$\leq \left(\left(\frac{\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2^k}}{2^k} + \frac{\alpha_{2^k+1} + \ldots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)^2\right)^{2^k} = \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{k-1} < n < 2^k$:

$$S := \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}$$

$$\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \underbrace{S \cdot S \cdot \ldots \cdot S}_{2^k - n} \leq \left(\frac{\overbrace{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}^{n \cdot S} + (2^k - n)S}{2^k}\right)^{2^k} = S^{2^k}$$

tedy: $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot S^{2^k - n} \leq S^{2^k} \quad \Big/ \frac{1}{S^{2^k - n}}$

$$\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \leq S^n$$

$$\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}\right)^n$$

**Lemma** Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak existuje konečná kladná limita $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

**Dk** Označme $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Ukážeme $(a_n)$ je od jistého členu rostoucí a omezená posloupnost kladných čísel

Zvolme $x \in \mathbb{R}$ libovolné

nechť $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$, $n > k$

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

Posloupnost je tedy od $k$-tého členu rostoucí.

$$\left(1+\frac{x}{kn}\right)^{-n} = \left(\frac{kn+x}{kn}\right)^{-n} = \left(\frac{kn}{kn+x}\right)^n = \left(1-\frac{x}{kn+x}\right)^n \overset{\text{AG}}{\geq}$$

$$\overset{\text{AG}}{\geq} 1-\frac{nx}{kn+x} \geq 1-\frac{nx}{kn} = 1-\frac{x}{k}$$

Tedy platí:

$$\left(1+\frac{x}{kn}\right)^{-n} \geq 1-\frac{x}{k} \quad \Big/^k$$

$$\left(1+\frac{x}{kn}\right)^{-nk} \geq \left(1-\frac{x}{k}\right)^k$$

$$\left(1+\frac{x}{kn}\right)^{nk} \leq \underbrace{\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}}$$

Vybraná posloupnost $(a_{kn})$ je shora omezená, kvůli monotonii je shora omezená i $(a_n)$. To společně zaručuje existenci limity.

Limita je kladné číslo, neboť (51) $(a_n)$ je od jistého členu kladná.

**Věta** Existuje právě jedna funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) = f(x) f(y)$$

$$f(x) \geq 1 + x$$

**Dk** Ukažme, že funkce je uvedenými vlastnostmi dána jednoznačně.

Předpokládejme, že $f$ s uvedenými vlastnostmi existuje.

- Pak dosazením $x = y = 0$

  $f(0) = (f(0))^2$, odtud $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$

  z druhého bodu (vlastnosti) nutně plyne $f(0) = 1$

- Dosazením $y = -x$ dostaneme

  $f(0) = 1 = f(x) \cdot f(-x)$, odtud $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a

  $$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

- Celkově tedy dostáváme, že $f$ je kladná na celém $\mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ indukcí dostáváme

  $$f(nx) = (f(x))^n$$

- $1 + \frac{x}{n} \leq f\left(\frac{x}{n}\right)$

  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f\left(\frac{x}{n}\right)^n = f\left(\frac{nx}{n}\right) = f(x)$

• $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le f\left(-\frac{x}{n}\right)^n = f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

• To dohromady dává

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le f(x) \le \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$1 \le \frac{f(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}$$

$$1 \ge \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \ge 1-\frac{x^2}{n}$$

$$\Rightarrow \lim \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = 1$$

$$\lim \frac{f(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1$$

a odtud

$$f(x) = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Funkce $f$ je tedy dána jednoznačně

Nyní ukážeme, že funkce s uvedenými vlastnostmi existuje.
Označme $f$ funkci definovanou vztahem $f(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
Ukážeme, že tato funkce splňuje oba vztahy.

① • Z AG nerovnosti pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$, $|x|<n$, $|y|<n$ a $|x+y|<n$ plyne, že

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\le\left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+n\left(1+\frac{y}{n}\right)}{2n}\right)^{2n}=\left(\frac{n+x+n+y}{2n}\right)^{2n}=$$
$$=\left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n}$$

Po limitním přechodu po $n\to+\infty$ dostáváme

$$f(x+y)\ge f(x)\cdot f(y)$$

• Stejně tak z AG nerovnosti plyne, že pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$, že $|x+y|<n-1$, $|xy|<n$ plyne

$$\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{xy}{n}\right)\le\left(\frac{(n-1)\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)+\left(1+\frac{xy}{n}\right)}{n}\right)^n=$$
$$=\left(\frac{n-1+x+y+1+\frac{xy}{n}}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

Po limitním přechodu po $n\to+\infty$

$$f(x+y)\le f(x)\cdot f(y)$$

Celkově tedy

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

② Z Bernoulliho nerovnosti po $|x|<n$ pak plyne

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

Po limitním přechodu dostaneme

$$f(x) \geq 1+x$$

## Definice

Funkci $f$ z předchozí věty značíme exp a nazýváme exponenciála. (Exponenciální funkce)

**Lemma** Základní vlastnosti exponenciály

① $\exp 1 = e$, kde $e$ je eulerovo číslo

② exp je ostře rostoucí na $\mathbb{R}$

③ Pro obor hodnot exponenciály platí $H_{\exp} = \mathbb{R}^+$

④ Pro libovolnou konvergentní posloupnost $(a_n)$ platí

$$\lim \exp a_n = \exp(\lim a_n)$$

⑤ Pro libovolné racionální číslo $r \in \mathbb{Q}$, kde $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\exp\left(\frac{p}{q}x\right) = \sqrt[q]{(\exp x)^p}$$

**Dk** ① Jednoduše plyne z definice Eulerova čísla

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

② $\forall x,y \in \mathbb{R}, x>y$ : $\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y} \geq 1+x-y > 1 \Rightarrow \exp x > \exp y$

③ Ukažme, že funkce exp je $\mathbb{R}^+$-surjektivní

Zvolme $y \in \mathbb{R}^+$ libovolně

Definujme množinu $S := \{x \in \mathbb{R} \mid \exp x \leq y\}$

$S$ je neprázdná neboť z nerovnosti $\exp x \geq 1 + x$

plyne, že $\lim \exp n = +\infty$

a také $\lim \exp(-n) = \lim \frac{1}{\exp n} = 0$

$S$ je shora omezená, neboť exp je ostře rostoucí.

$S$ je tedy shora omezený a zdola neomezený interval.

Dále označme $s = \sup S$

Ukažme, že $s \in \mathbb{R}$ a $\exp s = y$

- Kdyby $\exp s < y$, pak jistě existuje $n \in \mathbb{N}$, že
  $\exp(s + \frac{1}{n}) < y \iff \exp s \cdot \sqrt[n]{e} < y$
  Z toho ale vyplývá, že $s + \frac{1}{n} \in S$, to je ale spor, že $s = \sup S$
- Kdyby $\exp s > y$, pak jistě existuje $n \in \mathbb{N}$, že
  $\exp(s - \frac{1}{n}) > y \iff \frac{\exp s}{\sqrt[n]{e}} > y$
  To ale znamená, že $s - \frac{1}{n} \notin S$, to je spor s druhou vlastností suprema

Proto $\exp s = y$

4 Z nerovnosti, že $\exp x \geq 1+x$ a $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x} \geq 1 + x$ plyne že pro každé $x \in (-1;1)$ platí

$$1+x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x}$$

- Nechť nejprve $\lim a_n = 0$, pak jistě od jistého indexu $a_n \in (-1;1)$ a platí

$$1+a_n \leq \exp a_n \leq \frac{1}{1-a_n}$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne, že ~~exp an~~
$\lim \exp a_n = 1$

- Nyní obecně předpokládejme $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$

Pak určitě $\lim (a_n - a) = 0$ a tedy $\lim \exp(a_n - a) = 1$

$$\lim \exp(a_n - a) = 1 \Leftrightarrow \lim \left[\exp a_n \cdot \exp(-a)\right] = 1$$

$$\lim \exp a_n = \exp a$$

5 Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\exp(nx) = (\exp x)^n$$

Odtud z věty o existenci a jednoznačnosti přirozené odmocniny plyne

$$\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp x}$$

Kombinací dostáváme dokazované tvrzení

Z dokázaného lemmatu plyne, že $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá ostře rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ s oborem hodnot $\mathbb{R}^+$ 57 a proto existuje inverzní funkce

# Logaritmus

Funkci inverzní k exp nazýváme přirozený logaritmus, ozn. ln.

## Lemma

Funkce ln je má definiční obor $\mathbb{R}^+$ a obor hodnot $\mathbb{R}$.

Je ~~ke~~ ostře rostoucí a spojitá.

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

**Dk** Prostota a monotonie plyne přímo z definice

označme $z = \ln x$, $w = \ln y$

pak z definice $x = \exp z$, $y = \exp w$

Odtud $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w = x \cdot y$

a odtud už plyne, že $\ln xy = z + w = \ln x + \ln y$

# Definice obecné mocniny

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$. Pak obecnou mocninu $a^b$ definujeme vztahem

$$a^b = \exp(b \cdot \ln a)$$

Protože podle 5. bodu lemmatu

$$\exp\left(\frac{p}{q} \ln a\right) = \sqrt[q]{(\exp \ln a)^p} = \sqrt[q]{a^p}$$

Je definice v souladu s definicí 58 racionální mocniny.

# Reálné funkce reálné proměnné

Reálná funkce je každé zobrazení, jehož obor hodnot je podmnožina reálných čísel.

Funkce (jedné) reálné proměnné je každé zobrazení jehož definiční obor je podmnožina reálných čísel

Reálná funkce reálné proměnné je každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

## Definice

Reálnou funkci reálné proměnné $f$ nazýváme

- Omezená shora, pokud její obor hodnot $H_f$ je množina omezená shora.
- Omezená zdola, pokud její obor hodnot $H_f$ je množina omezená zdola
- Omezená, pokud její obor hodnot $H_f$ je množina omezená.
- Rostoucí, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) \leq f(x_2))$.
- Klesající, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) \geq f(x_2))$.
- Ostře rostoucí, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_1) < f(x_2))$.
- Ostře klesající, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2)(f(x_2) > f(x_2))$.
- Monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající.
- Ryze monotónní, pokud je ostře rostoucí nebo ostře klesající.
- Sudá, pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = f(-x))$
- Lichá, pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = -f(-x))$
- Periodická s periodou $k > 0$, pokud $(\forall x \in D_f)(f(x) = f(x \pm k))$

# Limita funkce

Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ nazveme hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z množiny $A$.

Body z $A$, které nepatří mezi hromadné body $A$ se nazývají izolované.

Množinu všech hromadných bodů $A$ značíme $A'$.

## Definice

Nechť $a$ je hromadný bod definičního oboru funkce $f$, tj. $a \in D_f'$.

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $a$ limitu $c \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud

$$(\forall H_a)(\exists H_c)(\forall x \in D_f \cap H_a - \{a\})(f(x) \in H_c)$$

Zapisujeme $\lim\limits_{a} f = c$ nebo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Pro $a, c \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta)(|f(x) - c| < \varepsilon)$$

# Heineova věta

Nechť $a \in D_f'$. Pak platí: funkce $f$ v bodě $a$ má za limitu číslo $c$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $(x_n)$, pro kterou platí $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f - \{a\})$ a $\lim x_n = a$ je limita posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$

**Dk** Ukážeme dvě implikace

$\Rightarrow$ Víme, že $\lim\limits_{a} f = c$

$\iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta)(|f(x) - c| < \varepsilon_1)$

a, že $\lim x_n = a$

$\iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(|x_n - a| < \varepsilon_2)$

Chceme ukázat, že $\lim f(x_n) = c$

$\iff (\forall \varepsilon_3 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|f(x_n) - c| < \varepsilon_3)$

Zvolme $\varepsilon$ libovolně, položme $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$, najdeme $\delta$, položme nyní $\varepsilon_2 = \delta$, najdeme $n_1$. Zřejmě můžeme položit $n_0 = n_1$

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že pro každou posl. $(x_n)$ s uvedenými předpoklady platí $\lim f(x_n) = c$ a zároveň $\lim\limits_{a} f \neq c$, tedy

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta)(f(x) \notin H_c(\varepsilon))$

Volme za $\delta$ postupně $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, tím dostaneme posloupnost $(x_n)$, že $\lim x_n = a$ (VOLSP), Volme $\varepsilon = \varepsilon_3$, dostaneme $n_0$: $f(x_n) \in H_c(\varepsilon)$, $f(x) \notin H_c$ SPOR!

# Důsledek Heineovy věty

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a$$

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## Definice

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $a$ limitu $c$ vzhledem k množině $A$, pokud zúžení $f|_A$ má v bodě $a$ limitu $c$.
Značíme $\lim_{a,A} f = c$ nebo $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = c$

## Definice

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $a$ limitu zleva resp. zprava, rovnu $c$, pokud zúžení $f|_{(-\infty, a)}$ resp. $f|_{(a, +\infty)}$ má v bodě $a$ limitu $c$.

## Věta

Nechť $a$ je hromadným bodem množiny $D_f \cap (-\infty, a)$ a $D_f \cap (a, +\infty)$. Pak funkce $f$ má v bodě $a$ limitu $c$ právě tehdy, když je limita $f$ zleva i zprava v bodě $a$ rovna $c$

**Dk** Plyne z definice jednostranné limity

## Věta

Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $a$ je hromadným bodem $D_f \cap H_a^+(\delta)$ a funkce $f$ je na $D_f \cap H_a^+(\delta)$ monotónní.

Pak existuje limita v bodě $a$ zprava.

**Dk**

Nechť $f$ rostoucí na $D_f \cap H_a^+(\delta)$.

Pak položíme $\alpha = \inf\{f(x) / x \in D_f \cap H_a^+(\delta)\}$

- $\alpha = -\infty$, množina $\{f(x) / x \in D_f \cap H_a^+(\delta)\}$ tedy není zdola omezená

  tj. $(\forall K > 0)(\exists x_0 \in D_f \cap H_a^+(\delta))(f(x_0) < -K)$

  definujme $\delta = x_0 - a > 0$, pak z monotonie plyne, že pro všechna $x$ taková, že $x < x_0 = \delta + a$ a $x \in D_f \cap H_a^+(\delta)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$

  což lze zapsat jako

  $(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap H_a^+(\delta))(0 < x < \delta + a \Rightarrow f(x) < -K) \Leftrightarrow \lim_{a+} f = -\infty$

- $\alpha \in \mathbb{R}$

  $\alpha = \inf\{f(x) / x \in D_f \cap H_a^+(\delta)\}$

  $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in D_f \cap H_a^+(\delta))(f(x) \geq \alpha)$

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in D_f \cap H_a^+(\delta))(f(x_0) < \alpha + \varepsilon)$

  Opět definujme $\delta = x_0 - a > 0$, pak pro všechna $x < x_0 = \delta + a$ platí $f(x) \leq f(x_0)$

  tedy dohromady

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap H_a^+(\delta))(0 < x < a + \delta \Rightarrow \alpha \leq f(x) < \alpha + \varepsilon)$

  $\Leftrightarrow \lim_{a+} f = \alpha$

# Aritmetika limit funkcí

Nechť $a \in D'_{f\pm g}$, resp. $D'_{fg}$, resp. $D'_{\frac{f}{g}}$ pak platí

① $\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g$

② $\lim_a (f-g) = \lim_a f - \lim_a g$

③ $\lim_a (fg) = \lim_a f \cdot \lim_a g$

④ $\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$

Dk: Tvrzení plynou Heineovy věty a věty o aritmetice limit posloupností.

Označme $\lim_a f = c$, $\lim_a g = d$ a předpokládejme, že $c+d$ má smysl.

Podle Heineovy věty pro každou posloupnost $(x_n)$ takovou, že $(x_n) \in D_{f+g} - \{a\}$, tj. $(x_n) \in D_f - \{a\}$ a současně $(x_n) \in D_g - \{a\}$ platí

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = c$, $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = d$

Z věty o aritmetice limit posloupností dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) + \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = c + d$$

Proto tedy platí $\lim_a (f+g) = c + d$, což jsme chtěli dokázat

Věta: Nechť $f$ je nezáporná funkce reálné proměnné, $a \in D'_f$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\lim_a f = c \Rightarrow \lim_a \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{c}$$

Dk: Opět plyne z Heineovy věty

**Věta** Nechť $a \in D_f'$, $f$ funkce reálné proměnné. Pak platí

$$\lim_a f = c \Rightarrow \lim_a |f| = |c|$$

$$\lim_a f = 0 \Leftrightarrow \lim_a |f| = 0$$

**Dk** Plyne z Heineovy věty a analogické věty o posloupnosti

**Věta** Nechť $a \in D_{f\circ g}'$, nechť dále $\lim_a g = b$, $\lim_b f = c$ a nechť platí alespoň jedna ze tří podmínek

① $(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in D_g \cap H_a(\tilde{\delta}) - \{a\})(g(x) \neq b)$

② $f(b) = c$

③ $b \notin D_f$

Pak $\lim_a f \circ g = c$

**Dk** Víme, že $\lim_a g = b$, $\lim_b f = c$

$\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in D_g \cap H_a(\delta_1) - \{a\})(g(x) \in H_b(\varepsilon_1))$

$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in D_f \cap H_b(\delta_2) - \{b\})(f(x) \in H_c(\varepsilon_2))$

Chceme ukázat, že

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_{f\circ g} \cap H_a(\delta) - \{a\})(f(g(x)) \in H_c(\varepsilon))$

Zvolme $\varepsilon$ libovolně, chceme najít příslušné $\delta$.
Položme $\varepsilon = \varepsilon_2$ a z předpokladu najdeme $\delta_2$, nyní zvolme $\varepsilon_1 = \delta_2$ a najdeme $\delta_1$.
Pokud platí první podmínka, pak volíme $\delta = \min\{\tilde{\delta}, \delta_1\}$, v opačném případě $\delta = \delta_1$

**Příklad** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

**Řešení** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

**Příklad** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

**Řešení** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+e^x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

**Věta** Nechť $a \in \bar{\mathbb{R}}$ a nechť $f, g$ jsou reálné funkce reálné proměnné takové, že $\lim_a f$ i $\lim_a g$ existují a okolí $H_a^*$, pro něž $H_a^* \cap D_f - \{a\} = H_a^* \cap D_g - \{a\} =: M$

Pak ① $\lim_a f < \lim_a g \Rightarrow (\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) < g(x))$

② $(\forall x \in M)(f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \lim_a f \leq \lim_a g$

**Dk** Označme $\lim_a f = c$, $\lim_a g = d$

nechť $c < d$, tak jistě lze zvolit $H_c$ a $H_d$ tak malá, že $H_c \cap H_d = \emptyset$, tedy $(\forall y_1 \in H_c)(\forall y_2 \in H_d)(y_1 < y_2)$ z definice limity funkce k nim lze nalézt $H_a^{(1)}$ a $H_a^{(2)}$ tak, že

$(\forall x \in H_a^{(1)} \cap D_f - \{a\})(f(x) \in H_c)$

$(\forall x \in H_a^{(2)} \cap D_g - \{a\})(g(x) \in H_d)$ → Pak stačí zvolit $H_a = \min\{H_a^{(1)}, H_a^{(2)}\}$

**Věta** Bolzano-Cauchyova podmínka existence konečné limity

Nechť $a \in D_f'$, pak existuje konečná limita $\lim_a f$ právě tehdy když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D_f \cap H_a(\delta) - \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

**Dk** $\Rightarrow$: předpokládejme, že $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$

tj. $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta_1) - \{a\})(|f(x) - c| < \varepsilon_1)$

Chceme aby platilo

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D_f \cap H_a(\delta) - \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Zvolme $\varepsilon$ libovolné a hledejme $\delta$, položme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ a zvolme $\delta = \delta_1$

$|f(x) - f(y)| = |f(x) - c + c - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$

Což jsme chtěli ukázat

$\Leftarrow$: Nechť platí B.C. podmínka

Uvažujme posloupnost $(x_n)$ takovou, že

$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f - \{a\})$ a $\lim x_n = a$

Zvolme $\varepsilon$ libovolné najdeme $\delta > 0$ takové, že

$(\forall x, y \in D_f \cap H_a(\delta) - \{a\})(|f(x) - f y| < \varepsilon)$

Jelikož $\lim x_n = a$, tak od jistého $n_0$ všechny leží všechny členy v $H_a(\delta)$

Tedy lze dosadit za $x = x_n$, $y = x_m$ a dostáváme, že

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0)(|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)$

Tedy posloupnost $f(x_n)$ je cauchyovská.

To tedy implikuje fakt, že $f(x_n)$ má konečnou limitu.

Ukažme, že $\lim f(x_n)$ je stejná pro všechny posloupnosti požadovaných vlastností.

Předpokládejme, že existují posloupnosti $(x_n^{(1)})$ a $(x_n^{(2)})$, že

$\lim f(x_n^{(1)}) = c_1$, $\lim f(x_n^{(2)}) = c_2 \neq c_1$

Pak zřejmě posloupnost $(x_n^{(3)})$ definovaná jako

$x_{2n}^{(3)} := x_n^{(1)}$, $x_{2n-1}^{(3)} = x_n^{(2)}$ by měla požadované vlastnosti.

Posloupnost $f(x_n^{(3)})$ by však neměla limitu, neboť $f(x_n^{(1)})$ a $f(x_n^{(2)})$ mají různé limity. To je ve sporu, že $f(x_n^{(3)})$ je cauchyovská.

To podle Heineovy věty znamená, že $\lim_a f$ existuje a je konečná.

# Spojitost funkce

Řekneme, že funkce $f$ je spojitá v bodě $a$ (č. $a$ je bodem spojitosti $f$) pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta))(f(x) \in H_{f(a)}(\varepsilon))$$

Je zřejmé, že každý izolovaný bod je bodem spojitosti $f$

**Věta** Nechť $a \in D_f'$. Pak platí:

funkce $f$ je spojitá v bodě právě tehdy, když $\lim_a f = f(a)$

**Dk** Tvrzení plyne z definice spojitosti

**Věta** Nech $f, g$ jsou spojité v bodě $a$
Pak funkce $|f|$, $f \pm g$, $fg$, $\frac{f}{g}$ (pokud $g(a) \neq 0$) jsou spojité v bodě $a$

**Dk** Pokud $a^*$ je hromadným bodem definičních oborů $f, g$ pak tvrzení plyne z aritmetiky limit, resp. věty o limitě abs. hodnoty.
Pokud je $a$ izolovaný bod, pak tvrzení plyne z definice

**Věta** Nechť $g$ je spojitá v bodě $a$, funkce $f$ je spojitá v $g(a)$. Pak $f \circ g$ je spojitá v bodě $a$.

**Dk** Pokud $a$ je izolovaným bodem $D_{f \circ g}$, tvrzení plyne z definice spojitosti.

Pokud $a$ je hromadným bodem $D_{f \circ g}$ je také hromadným bodem $D_g$, a proto tedy platí, že $\lim_a g = g(a)$. Pak rozlišíme dva případy

- $g(a)$ je hromadným bodem $D_f$, pak podle věty (předchozí) platí $\lim_{g(a)} f = f(g(a))$ a celkově tedy $\lim_a f \circ g = f(g(a))$

- $g(a)$ je izolovaný bod $D_f$, to z definice znamená, že existuje okolí $H_{g(a)}$ takové, že $H_{g(a)} \cap D_f = \{g(a)\}$. Zároveň platí, že $\lim_a g = g(a)$, tedy z definice limity existuje a lze nalézt okolí $H_a$ takové, že $\forall x \in H_a \cap D_{f \circ g}$ $g(x) \in H_{g(a)}$. Pro všechna taková $x$ padne $g(x)$ do $H_{g(a)} \cap D_f = \{g(a)\}$ to je možné pouze pokud je na nějakém okolí funkce $g$ konstantní a je rovna $g(a)$. To ovšem znamená, že $f \circ g$ je konstantní na tomto okolí a rovna $f(g(a))$.

Pak tedy platí, že $\lim_a f \circ g = f(g(a))$ a tedy $f \circ g$ je spojitá v bodě $a$.

**Věta** Elementární funkce jsou spojité ve všech bodech definičního oboru.

**Dk** Ukažme, že ~~také~~ identita $f(x) = x$ a $f(x) = c \in \mathbb{R}$ jsou spojité funkce

tj. $f(x) = x$ spojitá v libovolném bodě $a$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \delta)(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

pokud $f(x) = x$, $f(a) = a$, pak má platit $|x-a| < \varepsilon$
pak stačí zvolit $\varepsilon = \delta$

$f(x) = c \in \mathbb{R}$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$ spojitá v každém bodě $a$

$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \delta)(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

pokud $f(x) = c$ a $f(a) = c$,
pak má platit $0 < \varepsilon$, to je pravda pro každé $\varepsilon > 0$,
zvolme tedy $\delta$ libovolné $\delta = 1$

- Spojitost libovolného polynomu plyne z věty o spojitosti součinu a součtu, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
- Spojitost libovolné racionální funkce plyne ze spojitosti polynomů a věty o spojitosti podílu $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- Spojitost exponenciální funkce plyne ze vztahu $\lim_{x \to a} e^x = e^a$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$, který je důsledkem Heineovy věty a vztahu $\lim_{n \to +\infty} e^{a_n} = \exp(\lim_{n \to \infty} a_n)$

- Spojitost logaritmu plyne z věty o spojitosti inverzní funkce
- Spojitost obecné mocniny plyne ze spojitosti exp a ln a věty o sp. složené fce
-

Definice

Řekneme, že $f$ je spojitá v bodě vzhledem k množině $A$ pokud $f|_A$ je spojitá v bodě $a$.

Řekneme, že $f$ je spojitá v bodě $a$ zprava, pokud $f|_{[a,+\infty)}$ je spojitá v bodě $a$.

Řekneme, že $f$ je spojitá v bodě $a$ zleva, pokud $f|_{(-\infty,a]}$ je spojitá v bodě $a$.

Definice

Nechť $a \in D_f$. Pokud $a$ není bodem spojitosti, pak jej nazveme bodem nespojitosti. Rozeznáváme následující druhy bodů nespojitosti funkcí

1. Odstranitelná, $\lim_a f \in \mathbb{R}$, ale není rovna $f(a)$ nebo $a \notin D_f$
2. Skok, když existují různé konečné $\lim_{a-} f$, $\lim_{a+} f$
3. Druhého druhu, když se nejedná ani o odstranitelnou nespojitost ani o skok

# Spojitost na intervalu (na množině)

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné a nechť $M \subset D_f$.
Řekneme, že funkce $f$ je spojitá na množině $M$, pokud zúžení $f|_M$ je spojité v každém bodě $M$

**Věta** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a;b \rangle$ a nechť platí $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje bod $c \in (a;b)$ takový, že $f(c) = 0$

**Dk** Můžeme BÚNO předpokládat, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$
Důkaz provedeme metodou půlení intervalů.
Rozpůlíme interval $\langle a;b \rangle$

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, pak je důkaz hotov
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, pak položíme $\langle a; \frac{a+b}{2} \rangle$
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, pak položíme $\langle \frac{a+b}{2}; b \rangle$

Uvažujme interval $\langle a, \frac{a+b}{2} \rangle$ (pro $\langle \frac{a+b}{2}; b \rangle$ by byl postup analogický)
Označme jej $\langle a_1, b_1 \rangle$, celý proces zopakujeme a zvolíme $\langle a_2; b_2 \rangle$
Když máme definovaný interval $\langle a_i, b_i \rangle$ takový, že platí $f(a_i) < 0$, $f(b_i) > 0$
postupujeme dále půlením intervalů, kde znaménko ~~ho~~ funkční hodnoty průměru určí další postup takto:

$$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \begin{cases} = 0, \ c := \frac{a_i+b_i}{2} \text{ a STOP} \\ < 0; \ a_{i+1} := \frac{a_i+b_i}{2}, \ b_{i+1} := b_i \\ > 0, \ a_{i+1} := a_i, \ b_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2} \end{cases}$$

Pokud $f(\frac{a_i+b_i}{2}) \neq 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, pak dostáváme posloupnost $(a_n)$ a $(b_n)$, pro které zřejmě platí

$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ a zároveň $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Je zřejmé, že $\frac{b-a}{2^n}$ má limitu 0 pro všechna $b, a \in \mathbb{R}$, to společně s monotonií a omezenost posloupností $(a_n)$ a $(b_n)$ znamená, že musejí mít stejnou konečnou limitu.

Označme $c = \lim a_n = \lim b_n$

Podle spojitosti na $\langle a; b\rangle$ a Heineovy věty to znamená, že

$$f(c) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$$

Z předpokladu, že $f(a) < 0$ a $f(b_n) > 0$ to znamená, že

$$0 \geq \lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n) \geq 0$$

To už nutně znamená, že $f(c) = 0$

## Poznámka

Z věty ihned plyne, že libovolná funkce $f$ spojitá na $\langle a;b\rangle$ dokonce nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Je-li $f(a) < f(b)$ a $f(a) \leq z \leq f(b)$ pro nějaké $z$, pak funkce $g(x) := f(x) - z$ je spojitá na $\langle a;b\rangle$, a proto tedy existuje $c \in \langle a, b\rangle$, že $g(c) = 0 = f(c) - z \Rightarrow f(c) = z$

**Věta** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na ~~~~ intervalu $J$. Pak obraz $f(J)$ je interval nebo jednoprvková množina

**Dk** Pokud $f(J)$ je jednoprvková je důkaz hotov.
Předpokládejme, že $f(J)$ má alespoň dva prvky.
Kdyby $f(J)$ nebyl interval, existovala by čísla $a < b < c$, taková, že $a \in f(J)$, $c \in f(J)$, $b \notin f(J)$.
Nechť $x, y \in J$ jsou taková čísla, že $f(x) = a$, $f(y) = c$,
$f$ je tedy spojitá na $\langle x, y\rangle$, resp $\langle y, x\rangle$. Nutně tedy nabývá všech hodnot mezi $f(x)$ a $f(y)$, z toho plyne, že $b \in f(J)$.
To je ve sporu s předpokladem.

Věta: Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak $f$ je na $\langle a;b\rangle$ omezená.

Dk: Kdyby $f$ nebyla omezená ~~dol~~ na $\langle a;b\rangle$, pak by na něm nebyla omezená shora zdola.

Předpokládejme, že tedy není omezená shora.

Pak tedy jistě platí, že $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists x\in\langle a;b\rangle)(f(x)>n)$.

Tedy takto nagenerujeme celou posloupnost $(x_n)$, která je omezená zdola „a" a shora „b".

~~[illegible]~~

Označme $\beta=\limsup x_n$. Lze tedy vybrat posloupnost $(x_{k_n})$ z $(x_n)$ takovou, že $\lim(x_{k_n})=\beta\in\langle a;b\rangle$

Z Heineovy věty plyne, že $f(\beta)=\lim f(x_{k_n})\geq \cancel{\lim x_{k_n}}$

$\Rightarrow \lim f(\beta)=+\infty$, to je ale spor, neboť $f$ je reálná funkce a $f(\beta)$ musí být reálné číslo

**Věta** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na $\langle a;b\rangle$. Pak $f$ nabývá na tomto intervalu hodnot $\sup\{f(x) \mid x\in\langle a;b\rangle\}$ a $\inf\{f(x) \mid x\in\langle a;b\rangle\}$

**Dk** Supremum:

(Pro infimum analogicky), označme $M := \{f(x) / x\in\langle a;b\rangle\}$

Předpokládejme, že $B = \sup M$ a platí $B > f(x)$ pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$.

Pak definujme $g(x) := \dfrac{1}{B-f(x)}$, $g(x)$ je spojitá kladná funkce na $\langle a;b\rangle$.

Podle předchozí věty je $g(x)$ omezená na $\langle a;b\rangle$.

Pak jistě existuje $K>0$, takové, že $g(x) < K$ pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$.

Z toho plyne:

$$\frac{1}{B-f(x)} < K$$

$$B - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < B - \frac{1}{K}$$

To je spor s druhou vlastností suprema

Položíme-li $h(x) = -f(x)$, pak je jasné, že tvrzení platí také pro inf, neboť $\sup(-A) = \inf A$

**Věta]** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné, ~~[illegible]~~ spojitá na $J \subset D_f$ a prostá na $J$.

Pak je $f$ na $J$ ryze monotónní a $f|_J^{-1}$ je spojitá a ryze monotónní na $f(J)$

**Dk]** • Ukažme nejprve, že $f$ je na $J$ ryze monotónní.

Předpokládejme, že $f$ na $J$ ryze monotónní není.

To znamená, že existují $x_1, x_2, x_3 \in J$, $x_1 < x_2 < x_3$ takové, že $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_2) > f(x_3)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$ a $f(x_2) < f(x_3)$.

Uvažujme například první z možností.

Definujme $c \in (\max\{f(x_1), f(x_3)\}; f(x_2))$

Protože $f$ je spojitá na $\langle x_1, x_2 \rangle$, tak nabývá všech hodnot mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ a tedy i hodnoty $c$.

Dále protože $f$ je spojitá na $\langle x_2; x_3 \rangle$, tak nabývá všech hodnot mezi $f(x_2)$ a $f(x_3)$ a tedy i hodnoty $c$.

To je ale spor s ~~ho~~ prostotou funkce $f$ na $J$

• Ukažme, že $f|_J^{-1}$ je ryze monotónní na $I := f(J)$, konkrétně předpokládejme, že je $f$ ostře rostoucí a zachovává se tedy i typ monotonie.

Zvolme $a, b \in I$, $a < b$ libovolně. Pak existují $x, y \in J$, že $x = f|_J^{-1}(a)$, $y = f|_J^{-1}(b)$, z toho plyne, že $a = f(x)$, $f(y) = b$, a protože víme, že $f$ je dle předpokladu ostře rostoucí, platí, že $x < y$, tedy $f|_J^{-1}(a) < f|_J^{-1}(b)$.

• Zbývá ukázat, že $f|_J^{-1}$ je na $I$ ~~[illegible]~~ spojitá.

Stačí tedy ukázat, že $\lim_a f|_J^{-1} = f|_J^{-1}(a)$ pro všechna $a \in I$

~~[illegible]~~ Existence jednostranné limity $\lim_{a+} f|_J^{-1}$ resp. $\lim_{a-} f|_J^{-1}$ plyne z věty o limitě monotónní funkce.

Pro ostře rostoucí funkci $f|_J^{-1}$ tedy platí

$$\lim_{a+} = \inf\{f|_J^{-1}(x) \mid x \in I \cap (a; +\infty)\}$$

a

$$\lim_{a-} = \sup\{f|_J^{-1}(x) \mid x \in I \cap (-\infty; a)\}$$

Díky monotonii $f|_J^{-1}$ platí, že

$$\lim_{a-} f|_J^{-1} \leq f|_J^{-1}(a) \leq \lim_{a+} f|_J^{-1}$$

Přitom musí platit rovnost, neboť kdyby v některém bodě platila ostrá nerovnost, pak by ~~I~~ obraz $f|_J^{-1}(I) = J$ nebyl interval.

Z předpokladu víme, že $J$ je interval. To je spor

# Derivace funkce

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné, $a \in D_f \cap D_f'$

Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme ji derivací funkce $f$ v bodě $a$, ~~...~~. značíme $f'(a)$

## Poznámka

Pomocí věty o limitě složené funkce lze definici derivace ekvivalentně zapsat jako

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

## Definice

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné; $a \in D_f \cap D_f'$

Limitu

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ resp. } \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pokud existuje nazveme derivací funkce $f$ zleva, resp. zprava,

značíme $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$

## Definice

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné a $f'(a)$ existuje.
Pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že $f$ má vlastní derivaci v bodě $a$,
neboli že $f$ je diferencovatelná v bodě $a$.
Pokud $f'(a) = \pm\infty$, mluvíme o nevlastní derivaci

## Věta

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné a nechť je $f$ diferencovatelná v bodě $a$. Pak je v tomto bodě spojitá.

**Dk** Protože $f'(a) \in \mathbb{R}$, má podle věty o aritmetice limit smysl následující výraz a úpravy

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(x)\cdot 0 = 0$$

platí tedy $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

# Aritmetika derivací

Nechť $f, g$ jsou reálné funkce reálné proměnné diferencovatelné v bodě $a$ a nechť dále $a \in D_{f\pm g} \cap D'_{f\pm g}$, resp. $D_{fg} \cap D'_{fg}$, resp. $D_{\frac{f}{g}} \cap D'_{\frac{f}{g}}$

Pak platí

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
3. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

**Dk** Podle věty o aritmetice limit

1. $$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

2. $$(f-g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) - g'(a)$$

3. $$(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \text{82} + \lim_{x\to a} f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

④ $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)\cdot g(a)(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g(a)}{g(x)g(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{f(a)}{g(x)\cdot g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

**Věta** Nechť $f, g$ jsou reálné funkce reálné proměnné a nechť $g$ je diferencovatelná v bodě $a$, $f$ diferencovatelná v bodě $g(a)$ a nechť dále $a \in D_{f\circ g} \cap D'_{f \circ g}$.
Pak $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě $a$ a platí
$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$$

**Dk** Definujme $G(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} & , y \neq g(a) \\ f'(g(a)) & , y = g(a) \end{cases}$, $G$ je tedy spojitá v $g(a)$

$$(f\circ g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f\circ g)(x) - (f\circ g)(a)}{x-a} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} G(g(x)) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$
$$= G(g(a))\cdot g'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$$

~~Derivace~~ * otevřeném

**Věta** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá a prostá na* $J \subset D_f$. Nechť $x_0 \in J$, $f'(x_0) \neq 0$.
Pak platí

$$\left(f|_J^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

**Dk** Označme $y_0 = f(x_0)$. Funkce $f|_J^{-1}$ je ~~v~~ bodě $y_0$ spojitá, proto $\lim\limits_{y \to y_0} f|_J^{-1}(y) = f|_J^{-1}(y_0)$.

Podle věty o limitě složené funkce proto platí

$$\left(f|_J^{-1}\right)'(f(x_0)) = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{f|_J^{-1}(f(x)) - f|_J^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

# Lokální extrémy

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné a nechť $a \in D_f$.

~~Řekneme~~

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $a$

- Lokální maximum, pokud $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$
- Lokální minimum, pokud $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$
- Ostré lokální maximum, pokud $(\exists H_a)(\forall x \in H_a - \{a\})(f(x) < f(a))$
- Ostré lokální minimum, pokud $(\exists H_a)(\forall x \in H_a - \{a\})(f(x) > f(a))$

Také říkáme, že má funkce v bodě $a$ lokální extrém

**Věta** Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné a nechť $f$ má v bodě $a$ lokální extrém.

Pak $f'(a) = 0$ ~~nebo~~ neexistuje

**Dk** Předpokládejme opak, tedy $f'(a)$ existuje a je nenulová.

- $f'(a) > 0$, to z definice znamená, že existuje okolí $H_a$ takové, že pro všechna $x \in H_a - \{a\}$ je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$

to ovšem znamená, že pokud

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \quad \wedge \quad x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

~~Pak~~ To je spor s definicí lokálního extrému.

# Věty o průběhu funkce

## 1. Rolleova věta

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(a) = f(b)$ a nechť existuje derivace v každém bodě $(a;b)$.

Pak existuje $c \in (a;b)$, že $f'(c) = 0$.

Dk

- Pokud $f$ je konstantní, pak je tvrzení triviálně pravda
- Předpokládejme, že $f$ není konstantní

  Protože $f$ je na $\langle a;b\rangle$ spojitá, tak na něm nabývá svého maxima a minima.

  Tyto hodnoty jsou různé a protože $f(a) = f(b)$, ~~tak existuje~~ tak alespoň jedné z těchto hodnot nabývá v bodě, který není krajním bodem intervalu $\langle a;b\rangle$.

  Označme jej $c \in (a;b)$.

  Pak v bodě $c$ je lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$.

  (Neexistence je vyloučena v předpokladu)

# Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na $\langle a;b\rangle$ a nechť má v každém bodě intervalu $(a;b)$ derivaci.

Pak existuje $c \in (a;b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dk: Označme $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $F(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě $(a,b)$.
Zřejmě také platí, že $F(a) = F(b) = f(a)$
Jsou tedy splněny předpoklady Rolleovy věty a podle ní existuje $c \in (a,b)$, že $F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

# Cauchyova věta o přírůstku funkce

Nechť $f, g$ jsou reálné funkce reálné proměnné spojité na $\langle a,b\rangle$ a mající derivaci v každém bodě $(a,b)$. Nechť dále derivace $g$ je na $(a,b)$ konečná a nenulová.

Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dk: Označme $F(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$

$F(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má derivaci ve všech bodech $(a,b)$. A platí $F(a) = F(b)$

$$F'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x)(f(b)-f(a))$$

Podle Rolleovy věty existuje $c \in (a,b)$, že $F'(c) = 0$.

$$0 = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a))$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Neboť $g'(c) \neq 0$ z předpokladu a $g(b) \neq g(a)$ neboť by pak podle Rolleovy věty existovalo $\tilde{c} \in (a,b)$, že $g'(\tilde{c}) = 0$.

## Definice

Nechť $I$ je interval s krajními body $a < b$.
Otevřený interval $(a, b)$ se nazývá vnitřek intervalu $I$.
Značíme $I^\circ$.

## Věta

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá na $I$.
Nechť $f$ má derivaci v každém bodě $I^\circ$.
Pak ① $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ je na $I$ rostoucí
② $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow f$ je na $I$ klesající
③ $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ je na $I$ ostře rostoucí
④ $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ je na $I$ ostře klesající
⑤ $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ je na $I$ konstantní

**Dk** ① Ukažme obě implikace

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že platí $(\forall x \in I^\circ)(f'(x) \geq 0)$
Zvolme $x_1, x_2 \in I^\circ$, $x_1 < x_2$ libovolně. Pak je $f$ na $\langle x_1, x_2 \rangle$ spojitá a má na $(x_1, x_2)$ derivaci.
Z Lagrangeovy věty plyne, že existuje $c \in (x_1, x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

Z předpokladu $f'(c) \geq 0$ a $x_2 - x_1 > 0$
Tedy nutně $f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že $f$ je na $I$ rostoucí.

Chceme ukázat, že pro všechna $x \in I^\circ$ je $f'(x) \geq 0$.

Kdyby existovalo $x_0 \in I^\circ$, že $f'(x) < 0$, tak by to znamenalo, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \cap H_{x_0} - \{x_0\})\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0\right)$$

To ale znamená, že pro všechna $x \in H_{x_0}$, že

$x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

To je ale spor, že $f$ je rostoucí na $I$.

2
3
4
5 $\Big\}$ Analogicky

U 3 a 4 zřejmě není ekvivalence, neboť

$f(x) = x^3$ je ostře rostoucí na $(-\infty, +\infty)$ a zároveň $f'(0) = 0$

## Definice!

Symbolem $f'$ označíme funkci s definičním oborem $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) \in \mathbb{R}\}$ definovanou předpisem

$$f'(x) = f'(x)$$

kde vlevo stojí hodnota funkce v bodě $x$ a vpravo limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nazýváme ji první derivace $f$.

Derivaci této první derivace v bodě $x_0$ nazýváme druhá derivace funkce $f$ v bodě $x_0$. Značíme ji $f''(x_0)$.
Podobným způsobem definujeme $n$-tou derivaci funkce $f$ pro $n > 2$.
Užíváme značení $f''$, $f'''$ nebo $f^{(2)}$, $f^{(3)}$.
Často klademe $f^{(0)} = f$

Pro $m$-tou derivaci $n$-té derivace zřejmě platí

$$\left(f^{(m)}\right)^{(n)} = f^{(m+n)}$$

# Leibnizův vzorec pro n-tou derivaci součinu

Nechť $f, g$ jsou reálné funkce reálné proměnné a nechť mají v bodě $x_0$ n-tou derivaci.

Pak platí

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

**Dk** Pro $n=1$ tvrzení plyne z věty o aritmetice derivací

$n \to n+1$

$$(fg)^{(n+1)}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n+1-k)}(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n+1-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n+1-k)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) \cdot g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n+1-k)}(x_0) + f(x_0) \cdot g^{(n+1)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) \cdot g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n+1-k)}(x_0) + f(x_0) \cdot g^{(n+1)}(x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}(x_0)$$

# Postačující podmínky pro lokální extrém

- Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné spojitá v bodě $a$, a nechť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že
    - $f$ je (ostře) rostoucí na $H_a^-(\varepsilon)$ a (ostře) klesající na $H_a^+(\varepsilon)$. Pak $f$ má v bodě $a$ (ostré) lokální maximum.
    - $f$ je (ostře) klesající na $H_a^-(\varepsilon)$ a (ostře) rostoucí na $H_a^+(\varepsilon)$. Pak $f$ má v bodě $a$ (ostré) lokální minimum.

**Dk** Důkaz plyne přímo z definice pojmu lokální extrém.

- Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné diferencovatelná na nějakém okolí bodu $a$.

Nechť $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, resp $f''(a) < 0$.

Pak $f$ má v bodě $a$, ostré lokální minimum, resp. maximum.

**Dk** Z definice, že $f''(a) > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in H_a(\delta) \cap D_f - \{a\})\left(\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0\right)$

$\Rightarrow x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \;\wedge\; x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a)$

$\Leftrightarrow x > a \Rightarrow f'(x) > 0 \;\wedge\; x < a \Rightarrow f'(x) < 0$

To ale implikuje, že $f$ má v bodě $a$ ostré lokální minimum.

Pro $f''(a) < 0$ analogicky.

# Darbouxova věta o limitě derivace

Nechť $f$ je spojitá v bodě zprava $a$ a $f$ je diferencovatelná na nějakém okolí $H_a^+$

Nechť existuje $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.

Pak $f$ má v bodě $a$ derivaci zprava a pro její hodnotu platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x)$$

**Dk** Pro každé $x \in H_a^+$, že $f$ je spojitá na $\langle a, x \rangle$, neboť zúžení $f|_{\langle a, x \rangle}$ je spojité v každém bodě.

Podle předpokladu je také $f$ diferencovatelná na $(a, x)$.

Proto lze použít Lagrangeovu větu. Podle ní existuje $c(x) \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - f(a) = f'(c(x))(x-a)$$

Pro derivaci funkce $f$ v bodě $a$ zprava platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} f'(c(x))$$

Podle věty o limitě sevřené funkce: $a < c(x) < x$ je $\lim\limits_{x \to a+} c(x) = a$ a to celkově (94) dává $\lim\limits_{x \to a+} f'(c(x)) = \lim\limits_{y \to a+} f'(y)$

(*) (věta o limitě složené)

**Věta** Nechť $f$ má vlastní nenulovou derivaci na $(a,b)$. Pak $f'$ je všude kladná nebo všude nezáporná.

**Dk** Kdyby existovaly $x, y \in (a,b)$, $x < y$ takové, že $f'(x) < 0$ a $f'(y) > 0$, tak by existovalo $c \in (x,y)$, že $f'(c) = 0$ a tedy $f$ má v bodě $c$ lokální minimum. To podle věty o existenci nulového bodu je spor s předpokladem.

## Definice

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že $f$ má v bodě $a \in D_f$ tečnu

- o rovnici $x = a$, je-li $f$ spojitá v bodě $a$ a $f'(a) = +\infty$ nebo $-\infty$
- o rovnici $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, je-li $f$ diferencovatelná v bodě $a$

Bodu $(a, f(a))$ říkáme v obou případech bod dotyku.

## Definice

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že $f$ je na intervalu $J \subset D_f$

- Konvexní, pokud $(\forall x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3)\left(f(x_2) \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)\right)$
- Konkávní, pokud $(\forall x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3)\left(f(x_2) \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)\right)$
- Ryze konvexní, pokud $(\forall x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3)\left(f(x_2) < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)\right)$
- Ryze konkávní, pokud $(\forall x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3)\left(f(x_2) > \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)\right)$

### Ekvivalentní formulace podmínky konvexity

Nerovnost

$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)$$

lze ekvivalentně zapsat

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

odkud

$$(f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_1) \leq (f(x_3)-f(x_1))(x_2-x_1)$$

$$f(x_2)x_3 - f(x_2)x_1 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_1 \leq f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_1)x_2 + f(x_1)x_1$$

$$f(x_2)x_3 - f(x_2)x_2 - f(x_1)x_3 + f(x_1)x_2 \leq f(x_3)x_2 - f(x_3)x_1 - f(x_2)x_2 + f(x_2)x_1$$

$$(f(x_2)-f(x_1))(x_3-x_2) \leq (f(x_3)-f(x_2))(x_2-x_1)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

# Postačující podmínky pro konvexnost, konkávnost na intervalu

**Věta** Nechť $f$ je spojitá na $I \subset D_f$, nechť $f$ je diferencovatelná na $I$.
Pak platí:
Je-li $f'$ (ostře) rostoucí resp. klesající na $I^\circ$, je $f$ (ryze) konvexní resp. konkávní na $I$.

**Dk** Předpokládejme, že $f'$ je na $I^\circ$ rostoucí.
Zvolme libovolně $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$.
Pak $f$ je spojitá na $\langle x_1, x_2 \rangle$, resp. $\langle x_2, x_3 \rangle$, a diferencovatelná na $(x_1, x_2)$, resp. $(x_2, x_3)$.
Podle Lagrangeovy věty tedy existuje ⊛

⊛ $c \in (x_1, x_2)$, resp. $d \in (x_2, x_3)$ taková, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ resp. } f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Protože $f'$ je na $I^\circ$ rostoucí tak platí $c < d \Rightarrow f'(c) \leq f'(d)$

~~zatím~~ To už implikuje konvexnost, neboť

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Ostatní případy analogicky

**Věta** Nechť $f$ spojitá na $I$.
Pak platí
$(\forall x \in I^{\circ})(f''(x) \geq 0$ (resp. $>, \leq, <$)$) \Rightarrow f$ je na $I$ konvexní (resp. ryze konvexní, resp. konkávní, ryze konkávní)

**Dk** Z předpokladů plyne, že $f'$ je na $I^{\circ}$ rostoucí, resp. ostře rostoucí, klesající, ostře klesající.
To už implikuje konvexnost, resp. ryze konvexnost, konkávnost, ryze konkávnost z platnosti předchozí věty.

**Definice**

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné, řekneme, že $f$ má v bodě $a \in D_f$ inflexi ($a$ je inflexním bodem), pokud je $f$ diferencovatelná v bodě $a$, a platí buď

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a)((x < a \Rightarrow f(x) < f'(a)(x-a) + f(a)) \wedge (x > a \Rightarrow f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)))$$

nebo

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a)((x < a \Rightarrow f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)) \wedge (x > a \Rightarrow f(x) < f'(a)(x-a) + f(a)))$$

**Věta** Nechť $f$ má inflexi v bodě $a$. Nechť je $f$ na nějakém okolí $H_a$ diferencovatelná.
Pak $f''(a)=0$ nebo $f''(a)$ neexistuje.

**Dk** Předpokládejme, že $f''(a)$ existuje a platí $f''(a)>0$ nebo $f''(a)<0$.
Uvažujme napříklat, že platí $f''(a)>0$.
Pak z definice derivace, resp. limity musí platit, že existuje okolí $H_a$ takové, že $\forall x \in H_a^+$ $f'(x) > f'(a)$. ~~[illegible]~~
Nerovnost $f(x) > f'(a)(x-a)+f(a)$ se dá přepsat jako
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > f'(a)$, podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a,x)$, že
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) > f'(a)$

Pro $x \in H_a^-$ platí, že $f'(x) < f'(a)$ pro nějaké $c \in (x,a)$ platí, že
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$ a tedy
$f(x) > f'(a)(x-a)+f(a)$, a proto $f$ nemůže mít v bodě $a$ inflexi.

**Věta** Nechť $f$ má konečnou druhou derivaci na nějakém okolí $H_a$.
Nechť $f''(a)=0$ a $f'''(a)\neq 0$. Pak $f$ má v bodě $a$ inflexní bod.

**Dk** Předpokládejme například, že $f'''(a) > 0$
Existuje tedy okolí $H_a$, že $\forall x \in H_a^+$ je $f''(a)>0$. To ale znamená, že $f'$ je na $H_a^+$ rostoucí a tedy $\forall x \in H_a^+$ je $f'(x) > f'(a)$. ~~Pro nějaké~~
To ale znamená, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > f'(a)$, neboť pro nějaké $c \in (a,x)$ je
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) > f'(a)$

Protože je na $H_a^-$ $f'' \leq 0$ je na $H_a^-$ $f'$ ~~klesající~~ ~~rostoucí~~ rostoucí; ← klesající. Pro všechna $x \in H_a^-$ tedy platí, že $f'(x) > f'(a)$ a tedy platí, že

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} > f'(a)\text{, neboť pro nějaké } c \in (x;a) \text{ je } f'(c) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

a tedy $f(x) < f'(a)(x-a)+f(a)$

# Definice

Nechť $f$ je reálná funkce reálné proměnné.

- Přímku $y = kx+q$ nazveme asymptotou funkce $f$ v bodě $\pm\infty$, pokud $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x)-(kx+q)) = 0$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.

- Buď $a \in \mathbb{R}$. Přímku o rovnici $x = a$ nazveme svislou asymptotou funkce $f$ v bodě $a$, pokud existuje alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x \to a^-}$ či $\lim\limits_{x \to a^+}$ a je rovna $\pm\infty$.

**Věta** $f$ má v bodě $+\infty$ (*) právě tehdy, když

(*) asymptotu o rovnici $y = kx+q$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \to +\infty} (f(x)-kx) = q \in \mathbb{R}$$

**Dk** Pokud platí, že $f$ má v bodě $+\infty$ asymptotu $y = kx+q$, pak

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)-kx-q) = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} (f(x)-kx) = q \quad / \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)-kx}{x} = 0 \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

Pokud platí: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-kx) = q \iff \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-(kx+q)) = 0$

Všechny kroky jsou ekvivalence. Proto je důkaz hotov.