

Matematická analýza 2

Zpracoval: Patrik Šnauko

1 Věty o přírůstku funkce

1.0.1 Věta 1 (Rolleova věta)

Nechť f je RFRP splňující:

- $f \in C(\langle a, b \rangle)$
- $f(a) = f(b)$
- $f \in \mathcal{D}((a, b))$

pak $\exists c \in (a, b); f'(c) = 0$.

Důkaz:

Zimní semestr.

1.0.2 Věta 2 (Lagrangeova věta)

Nechť f je RFRP splňující:

- $f \in C(\langle a, b \rangle)$
- $f \in \mathcal{D}((a, b))$

pak $\exists c \in (a, b); f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz:

Zimní semestr.

1.0.3 Věta 3 (Cauchyova věta)

Nechť f, g jsou RFRP splňující:

- $f, g \in C(\langle a, b \rangle)$
- $\forall x \in (a, b); g'(x) \neq 0$
- $f \in \mathcal{D}((a, b)) \wedge g \in \mathcal{D}'((a, b))$

pak $\exists c \in (a, b); \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Důkaz:

- Najdeme takovou funkci, kterou bychom podobně jako v důkazu Lagrangeovy věty převedly na takovou, na kterou lze aplikovat Rolleovu větu.
 - Přírůstek funkce $g : g(b) - g(a)$; $f : f(b) - f(a)$.
 - Aby přírůstek obou funkcí byl stejný zařídíme tak, že funkci do důkazu zvolíme následovně:
 $F(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$.
- Ověříme předpoklady Rolleovy věty, zejména, zda $F(a) = F(b)$, zkoumejme tedy rozdíl $F(b) - F(a) = [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) - ([g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a)) = 0$. Tím jsme ověřili splnění předpokladů Rolleovy věty.
- Dostáváme tedy: $F'(x) = 0 = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c)$
- Provedeme tedy:

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) \quad (1)$$

$$[g(b) - g(a)]\frac{f'(c)}{g'(c)} = f(b) - f(a) \quad (2)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (3)$$

- Diskuze provedených úprav

- (1) Lze, protože víme, že $g \in \mathcal{D}'((a, b)) \wedge c \in (a, b)$. Z rovnosti tedy víme, že na obou stranách musí být konečné hodnoty.
- (2) Lze, jelikož $\forall x \in (a, b); f'(x) \neq 0 \wedge c \in (a, b)$.
- (3) Lze, jelikož: Kdyby $g(b) - g(a) = 0 \Leftrightarrow g(b) = g(a)$ - tím by byly splněny předpoklady Rolleovy věty, a tedy: $\exists c \in (a, b); g'(c) = 0$. Z předpokladu ale víme, že $\forall x \in (a, b); g'(x) \neq 0$. Taková situace tedy nemůže nastat.

□

2 l'Hospitalovo pravidlo

2.0.1 Věta 4 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť f, g jsou RFRP, pro které je splněno:

- $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \vee \lim_{x \rightarrow b} |g(x)| = +\infty$
- $\exists \mathcal{H}(b); \mathcal{H}(b) - \{b\} \subset D_{\frac{f}{g}} \wedge \mathcal{H}(b) - \{b\} \subset D_{\frac{f'}{g'}}$
- $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pro pozdější účely ji označme L ,

potom $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Důkaz:

- Pro $b \in \mathbb{R}$
- Je splněno, že: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x)$
- Rozepišme: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$
 - Zde jsme jen přičetli v čitateli a jmenovateli nulu. Limitu totiž „nezajímá“, jak se funkce chová v daném bodě, ale na jistém okolí, dodefinujeme proto: $f(b) = 0 \wedge g(b) = 0$.
- v intervalu (b, x) tedy podle Cauchyovy věty o přírůstku funkce jistě existuje $c = c(x) : \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}; \forall x \in (b, \text{cokoliv})$.
- Cíl: $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \stackrel{?}{=} L$
 - Ze sevření: $\forall x; b < c(x) < x$ plyne $\lim_{x \rightarrow b} c(x) = b$.
 - Z Cauchyovy věty dále víme, že $c(x) \neq b$. Tím je splněna podmínka prstencového okolí pro VLSF
 - VLSF (P): $\lim_{x \rightarrow B} F(x) = C \wedge \lim_{x \rightarrow A} G(x) = B \wedge \exists \mathcal{H}(A); \forall x \in \mathcal{H}(A); G(x) \neq B : \lim_{x \rightarrow A} F(G(x)) = C$.
 - * $G(x) := c(x), F(x) := \frac{f'(x)}{g'(x)}; b := A = B$.
- Touto volbou pro aplikaci VLSF dostáváme očekávanou rovnost.

3 Stejnomořná spojitost

3.0.1 Definice (spojitost v bodě)

$f \in C(\{a\}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in D_f; |x - a| < \delta; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

3.0.2 Definice (spojitost na intervalu)

Nechť I je interval. $f \in C(I) \Leftrightarrow \forall a \in I; \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in I; |x - a| < \delta; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

3.0.3 Definice (stejnomořná spojitost)

$f \in C^*(I) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x, a \in I; |x - a| < \delta; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Důsledek definic spojitosti na intervalu (množině) a stejnoměrné spojitosti

$f \in C^*(I) \Rightarrow f \in C(I).$

3.0.4 Věta 5 (Cantorova věta)

$f \in C(\langle a, b \rangle) \Rightarrow f \in C^*(\langle a, b \rangle).$

Důkaz:

- SPOREM

- Předpokládejme:

$$1) f \in C(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow \forall y \in \langle a, b \rangle; \forall \varepsilon' > 0; \exists \delta' > 0; \forall x \in \langle a, b \rangle; |x - a| < \delta'; |f(x) - f(a)| < \varepsilon'.$$

$\wedge$

$$2) f \notin C^*(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0; \exists x, y \in \langle a, b \rangle; |x - y| < \delta; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

- ε je pevné. $\delta := 1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ - odtud dostaneme:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \exists x_n, y_n \in \langle a, b \rangle; |x_n - y_n| < \frac{1}{n}; |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

- Jelikož (x_n) je omezená, můžeme z ní vybrat konvergentní podposloupnost (x_{k_n}) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{k_n} := L \in \langle a, b \rangle.$$

- (y_n) je také omezená, tedy z ní můžeme vybrat konvergentní podposloupnost. Chceme ukázat, že platí:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{k_n} = L.$$

$$\text{— máme tedy: } 0 \leq |y_{k_n} - L| \leq \underbrace{|y_{k_n} - x_{k_n}|}_{< \frac{1}{k_n}} + \underbrace{|x_{k_n} - L|}_{v \text{ limitě nula}}$$

$$\text{— odtud máme sevření: } 0 \leq |y_{k_n} - L| < \underbrace{\frac{1}{k_n}}_{(k_n) \nearrow \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} = 0}$$

$$\text{— Z tohoto sevření máme } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{k_n} - L = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{k_n} = L.$$

- $f \in C(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$

- Podle Heineovy věty: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{k_n}) = f(L) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{k_n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = 0$

- Poslední implikace už nás přivádí ke sporu s tím, že $\forall n \in \mathbb{N}; |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$, tento rozdíl tedy nemůže mít za limitu nulu.

☒

4 Aproximace funkce polynomem

4.1 Taylorův polynom

4.1.1 Věta 6 (o Taylorově polynomu)

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_0 \wedge a \in \mathbb{R} : f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak existuje jediný polynom T_n stupně nejvýše n takový, že platí: $\forall k \in \hat{n}; f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$.

Důkaz:

- Nechť p je polynom takový, že $\deg(p) \leq n$, tedy $p \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- Berme bázi tohoto vektorového prostoru: $\mathcal{X} = (1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$.
- $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{P}_{n+1} \wedge p \in \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n$.
- Hledejme tedy derivace tohoto polynomu v bodě a .
 - $p^{(0)}(a) = \alpha_0 = f(a)$
 - $p'(a) = \alpha_1 = f'(a)$
 - $p''(a) = 2\alpha_2 = f''(a) \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{f''(a)}{2}$
 - $\vdots$
 - $p^{(k)}(a) = k(k-1)(k-2) \dots \alpha_k = f^{(k)}(a) \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$
- Koeficienty daného polynomu jsou dány jednoznačně a tím je tedy i polynom dán jednoznačně.

☒

4.1.2 Definice (n-tý Taylorův polynom)

Polynom T_n z předchozí věty daný následovně: $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$. Nazveme n -tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a .

4.1.3 Poznámka (zbytek po Taylorovu polynomu)

Funkci lze tedy aproximovat polynomem jistých vlastností a chceme zkoumat, jak dobře tento polynom funkci aproximuje. Proto zavádíme zbytek po Taylorovu polynomu:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

4.1.4 Věta 7 (o zbytku po Taylorově polynomu)

Nechť $n \in \mathbb{N} \wedge f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists \mathcal{H}(a); f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}(a)) \wedge f^{(n)} \in C(\{a\})$, potom:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz:

- Předpoklady l'Hospitalova pravidla jsou splněny, proto k ukázání této rovnosti použijeme právě tuto větu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{x-a} \underbrace{=}_{l'H} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_n(x)}{n(x-a)^n} \underbrace{=}_{l'H} \dots \underbrace{=}_{l'H} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n(n-1)(n-2) \dots 2} = 0.$$

- pozn.: to, že $R_n^{(n)}(x) = 0$ víme proto, že na Taylorův polynom klademe požadavek, aby pro nějaký bod a bylo splněno: $\forall k \in \hat{n}; f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$.

☒

4.1.5 Poznámka (Peanův tvar zbytku)

označme $\omega_n := \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$, dosadíme do definice zbytku a vyjádříme funkci, kterou aproximujeme - tím dostaneme tvar:

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{(x-a)^n \omega_n(x)}_{\text{Peanův tvar zbytku}} \wedge \lim_{x \rightarrow a} \omega_n(x) = 0.$$

4.1.6 Věta 8 (o nejlepší aproximaci)

Nechť $n \in \mathbb{N} \wedge f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists \mathcal{H}(a); f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}(a)) \wedge \exists f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Nechť Q je polynom takový, že: $\deg Q \leq n \wedge \forall x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq T_n(x)$. Potom:

$$\exists \mathcal{J}(a); \forall x \in \mathcal{J}(a) - \{a\}; |f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)|.$$

Důkaz:

- Vyjádříme si polynomy T_n, Q v jisté bázi prostoru P_{n+1} .

$$- T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$$

$$- Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k$$

- Jelikož platí $\forall x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq T_n(x)$, tak určitě existuje nějaký index i takový $a_i \neq b_i$. Berme tento index nejmenší možný.

- $f(x) - T_n(x) \underbrace{=}_{\text{Peano}} (x-a)^n \omega_n(x).$

- $f(x) - Q(x) = T_n(x) + (x-a)^n \omega_n(x) - Q(x) = \left(\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)(x-a)^k \right) + (x-a)^n \omega_n(x)$

- Zdefinujme si funkci $F(x) = \frac{|f(x) - Q(x)|}{|x-a|^i} = \left| (a_i - b_i) + (a_{i+1} - b_{i+1})(x-a) + (a_{i+2} - b_{i+2})(x-a)^2 \dots + (x-a)^{n-i} \omega_n(x) \right|.$

$$- \lim_{x \rightarrow a} F(x) = |a_i - b_i| \wedge a_i \neq b_i \Rightarrow |a_i - b_i| > 0.$$

- Zdefinujme si funkci $G(x) = \frac{|f(x) - T_n(x)|}{|x-a|^i} = |(x-a)^{n-i} \omega_n(x)|.$

$$- \lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0$$

- Dostáváme tedy: $|a_i - b_i| = \lim_{x \rightarrow a} F(x) > \lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0$ z věty o nerovnostech mezi limitami pro funkce tedy dostáváme, že existuje jisté okolí $\mathcal{K}(a); \forall x \in \mathcal{K}(a); \frac{|f(x) - Q(x)|}{|x-a|^i} > \frac{|f(x) - T_n(x)|}{|x-a|^i} \Leftrightarrow |f(x) - Q(x)| > |f(x) - T_n(x)|.$

□

4.2 Odhadování chyby v Taylorově vzorci

4.2.1 Věta 9 (Taylorova)

Nechť existuje okolí $\mathcal{H}(a)$ bodu takové, že funkce f má konečnou $(n+1)$ -ní derivaci a nechť $x \in \mathcal{H}(a)$. Potom zbytek v Taylorově polynomu $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ má tvar:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}; \quad \xi \in (\min\{x, a\}, \max\{x, a\}).$$

Tento tvar zbytku nazýváme Lagrangeův.

Důkaz:

- **Společná část**

- Víme, že $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$
- Zvolme nějaké pevné a, x . BÚNO: $a < x$.
- Definujme funkci $\psi : \psi(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (x-z)^k$
- $\psi(a) = T_n(x)$; $\psi(x) = f(x) \wedge \frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x-z)^n$

- **Cauchyův tvar zbytku**

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \psi(x) - \psi(a) \underbrace{=}_{\text{podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce}} = \psi'(\xi)(x-a)$
- po dosazení derivace funkce ψ dostáváme: $R_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-\xi)^n (x-a)}_{\text{Cauchyův tvar zbytku}}$

- **Lagrangeův tvar zbytku**

- Definujme další, zatím blíže nespecifikovanou funkci φ
- Platí: $\frac{R_n(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)}$
- Odtud vidíme, že pokud doposud nespecifikovanou funkci φ budeme definovat takto: $\varphi(z) = (x-z)^n + 1$, dostaneme:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^n$$

- Což je přesně výsledek, který jsme chtěli.

□

5 Číselné řady

5.1 Zavedení číselných řad

5.1.1 Definice (číselná řada, součet řady, konvergence, divergence číselné řady)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Nechť n -tý člen posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ vznikl následujícím způsobem: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Uspořádanou dvojici $((a_n), (s_n))$ nazveme číselnou řadou. Budeme ji značit takto: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

- Posloupnost (s_n) budeme nazývat posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- Součtem řady budeme rozumět $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$
- Je-li $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{R}$ říkáme, že řada konverguje. V opačném případě říkáme, že diverguje. Je-li tato hodnota nekonečná mluvíme o podstatné divergenci, neexistuje-li, mluvíme o oscilaci.

5.1.2 Věta 10 (nutná podmínka konvergence)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ [K]} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Důkaz:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ [K]} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = c \in \mathbb{C}$
- z definice limity: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{= a_n} = 0$

☒

5.1.3 Věta 11 (Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ [K]} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n, m \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0; |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Důkaz:

Okamžitě plyne z BCP pro limitu posloupnosti.

5.1.4 Věta 12 (o konvergenci řady z absolutních hodnot)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ [K]} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ [K]}.$$

Důkaz:

- podle BCP $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ [K]} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \dots; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon$
- z trojúhelníkové nerovnosti: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon$

☒

5.2 Řady s kladnými členy

5.2.1 Věta 13 (srovnávací kritérium)

Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou řady s kladnými členy takové: $\exists n_0; \forall n \geq n_0; 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\mathbb{K} \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\mathbb{K} \right]$$

Důkaz

- Stačí si uvědomit, že to, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\mathbb{K} \right] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^{(b)} \in \mathbb{R} \wedge \exists n_0; \forall n \geq n_0; 0 \leq a_n \leq b_n$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{podle větě o nerovnostech mezi limity posl.}} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^{(a)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^{(b)} \in \mathbb{R}$$

- Příklad, že by limita částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ vyšla $-\infty$ nemůže nastat z toho důvodu, že posloupnost (a_n) je kladná.

☒

5.2.2 Věta 14 (srovnání podílu po sobě jdoucích členů)

Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou řady s kladnými členy takové: $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\mathbb{K} \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\mathbb{K} \right]$$

Důkaz:

- pro $k = 1, 2, \dots, n$ z podmínky $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ dostáváme sadu nerovností:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &\leq \frac{b_2}{b_1} \\ \frac{a_3}{a_2} &\leq \frac{b_3}{b_2} \\ &\vdots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &\leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \end{aligned}$$

- pozn.: pro kladná čísla platí:

$$\begin{aligned} A &\leq B \\ C &\leq D \\ \Rightarrow AC &\leq BD \end{aligned}$$

- naše posloupnosti jsou obě kladné proto mezi sebou n nerovností vynásobíme a dostaneme:

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \Leftrightarrow a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\mathbb{K} \right] \left(\Rightarrow C \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\mathbb{K} \right] \right)$$

- tím jsme tedy naplnili předpoklady předchozí věty - z té plyne, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\mathbb{K} \right]$

☒

5.2.3 Věta 15 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou řady s kladnými členy. Nechť existuje $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} := L$. Potom

1. $L < +\infty \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \boxed{\text{K}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}}$
2. $L > 0 \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \boxed{\text{D}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{D}}$
3. $L \in (0, +\infty)$, potom: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \boxed{\text{K}}$

Důkaz:

1. $- L < +\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \leq n_0; \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \leq (L + \varepsilon)b_n \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \boxed{\text{K}} \left(\Rightarrow C \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \boxed{\text{K}} \right)$
 $-$ tedy podle srovnávacího kritéria $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}}$
 $\boxtimes$
2. $- L \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0; \frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2}$
 $-$ tedy dostáváme divergenci ze srovnávacího kritéria
 $- L = +\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0; \frac{a_n}{b_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > b_n \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{D}}$
 $-$ tedy dostáváme divergenci ze srovnávacího kritéria
 $\boxtimes$
3. je důsledkem předchozích dvou bodů
 $\boxtimes$

5.2.4 Věta 16 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0$. Potom:

- $\exists q < 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0; \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}$.
- $\exists^\infty n \in \mathbb{N}; \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{D}}$.

Důkaz:

- Podle prvního předpokladu platí, že $\forall n > n_0; a_n \leq q^n \wedge q \in (0, 1) \xrightarrow{\text{podle SK}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je totiž konvergentní geometrická řada.
 - Podle druhého předpokladu je pro nekonečně mnoho indexů $a_n \geq 1 \Rightarrow$ není splněna nutná podmínka konvergence.
- $\boxtimes$

5.2.5 Věta 17 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\forall n \in \mathbb{N}; a_n > 0$. Potom:

- $\exists q < 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}$.

- $\exists n_0; \forall n; n \leq n_0; \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{D}}.$

Důkaz:

- Využijeme kritéria o srovnání podílu po sobě jdoucích členů, kde $b_n := q^n, q \in (0, 1) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} =$

$$q \wedge \sum_{n=1}^{\infty} q^n \boxed{\text{K}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}.$$

- pro druhé tvrzení využijeme totéž, ale $q = 1$.

☒

5.2.6 Věta 18 (Raabeovo kritérium)

Nechť $\forall n \in \mathbb{N}; a_n > 0$. Potom:

- $\exists \alpha > 0; \exists n_0; \forall n > n_0; n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}.$

- $\exists n_0; \forall n > n_0; n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{D}}.$

Důkaz:

- označme $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$ a uvažujme konvergentní řadu: $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.$

- Cílem je ukázat, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého indexu. Tvrzení potom bude plynout z kritéria o srovnání dvou po sobě jdoucích členů.

- $\frac{b_{n+1}}{b_n} \stackrel{\text{Taylor}}{=} 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} - \frac{1}{n} \omega\left(-\frac{1}{n}\right)$

- $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1+\varepsilon}{n}.$

- Stačí tedy ukázat, že od jistého indexu platí:

$$1 - \frac{1+\varepsilon}{n} \stackrel{?}{\leq} 1 - \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{n} - \frac{1}{n} \omega\left(-\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 1 + \varepsilon \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{n} \omega\left(-\frac{1}{n}\right) \Bigg/ \lim_{\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}} \infty$$

nerovnost tedy od jistého n_0 nastává a tvrzení proto plyne z již zmíněného porovnání podílu po sobě jdoucích členů.

- Druhé tvrzení $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Berme tedy $b_n = \frac{1}{n-1}$. Tvrzení poté vyplývá z drobně modifikovaného kritéria o porovnání podílu po sobě jdoucích členů.

☒

5.2.7 Věta 19 (Gaussova kritérium)

Buď (a_n) kladná posloupnost, ke které existují $q, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, (c_n)$ omezená. Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(*) \frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

potom:

- $(q < 1 \vee q = 1) \wedge \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{K}}.$

- $(q > 1 \vee q = 1) \wedge \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\text{D}}.$

Důkaz:

- pro $q \neq 1$ dostáváme z $(*) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ a tvrzení dostáváme z podílového kritéria.
- $q = 1 \wedge \alpha \neq 1$, pak dostáváme z $(*) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \alpha$ a tvrzení dostáváme z Raabeova kritéria.
- Nechť $q = 1 \wedge \alpha = 1$. Bereme tedy takové posloupnosti, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

- Berme kalibrační divergentní řadu $\sum_{n=3}^{\infty} b_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$
- Cílem je ukázat, že platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ tvrzení potom bude vyplývat z modifikovaného kritéria srovnání podílů dvou po sobě jdoucích členů.
- $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)\ln(n-1)}{n\ln(n)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}\right) = 1 - \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n)}$
- Máme tedy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Leftrightarrow \frac{c_n}{n^{1+n}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})^n}{n\ln(n)} \Leftrightarrow c_n \geq \underbrace{\frac{n^\varepsilon}{\ln(n)} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{\substack{\rightarrow \infty \quad \rightarrow 1 \quad \rightarrow -1 \\ \rightarrow -\infty}}$$

- (c_n) je omezená, tudíž nerovnost od jistého indexu určitě platí.

☒

5.3 Řady s obecnými členy

5.3.1 Věta 20 (Dirichletovo kritérium)

Nechť (a_n) je reálná a (b_n) komplexní. Dále nechť je současně splněno:

1. (a_n) je monotonní.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

3. $\exists K > 0; \forall n \in \mathbb{N}; \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq K$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \quad \boxed{\text{K}}.$$

Důkaz:

• Využijeme BCP, tedy chceme ukázat: $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N}; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0; \exists n'_0 \in \mathbb{N}; \dots; |a_n| < \varepsilon'$

• $B_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n \Rightarrow b_n = B_n - B_{n-1}$

$$\begin{aligned} \bullet \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k \right| = \\ &= \left| a_{n+p} B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} B_n \right| \leq \underbrace{K|a_n| + K|a_n|}_{\text{viz pozn1}} + K \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \underbrace{=}_{\text{viz pozn2}} 2K|a_n| + \\ &K|a_{n+1}| + K|a_{n+p-1}| \leq 4K|a_n| < 4K\varepsilon' = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4K} \wedge n'_0 := n_0 \end{aligned}$$

pozn1 V této nerovnosti jsme využili prvních dvou předpokladů, jelikož (a_n) je monotonní posloupnost jdoucí k nule, musí platit $|a_n| \geq |a_{n+1}|$. Dále jsme využili předpokladu omezenosti posloupnosti částečných součtů.

pozn2 V trojúhelníkové nerovnosti $|A+B| \leq |A|+|B|$ nastává rovnost právě tehdy, když A, B mají stejná znaménka. To, že pro všechny členy sumy platí, že mají stejná znaménka, vyplývá z předpokladů 1 a 2. Proto tedy platí:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k+1}| &= |a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \dots + |a_{n+p-2} - a_{n+p-1}| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \\ &\dots + a_{n+p-2} - a_{n+p-1}| = |a_{n+1} - a_{n+p-1}| \end{aligned}$$

☒

5.3.2 Věta 21 (Abelovo kritérium)

Nechť (a_n) je reálná a (b_n) komplexní. Dále nechť je současně splněno:

1. (a_n) je monotonní.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad \boxed{\text{K}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \quad \boxed{\text{K}}.$$

Důkaz:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) b_n + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n}_{\boxed{\text{K}}}$$

- $(a_n - a) \rightarrow 0 \wedge (a_n - a)$ monotonní $\wedge \exists K > 0; \dots; \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq K \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a)b_n$ konverguje z Dirichletova kritéria.
- Součet konvergentních sum konverguje.

☒

5.3.3 Věta 22 (Leibnizovo kritérium)

Nechť (a_n) je klesající $\wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ K.

Důkaz:

- Jedná se o přímý důsledek Dirichletova kritéria. V předpokladech věty máme první 2 body Dirichletových předpokladů.
- Za posloupnost (b_n) klademe $(-1)^n$ - ta má omezenou posloupnost částečných součtů.

☒

5.3.4 Věta 23 (Gaussovo modifikované kritérium)

Nechť (a_n) je kladná posloupnost splňující pro nějaké $q, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, (c_n)$ omezenou, že podíl jejích po sobě jdoucích členů lze pro každé přirozené n zapsat následujícím vztahem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Potom platí:

- $(q > 0 \vee q = 0) \wedge \alpha \leq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^n (-1)^n a_n$ D.
- $(q < 0 \vee q = 0) \wedge \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^n (-1)^n a_n$ KA.
- $q = 1 \wedge \alpha \in (0, 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^n (-1)^n a_n$ KN.

Důkaz:

5.4 Uzávorkování řady

5.4.1 Definice (uzávorkování řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je číselná řada. Nechť $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost celých čísel a současně nechť $k_0 = 0$.

Definujme $\forall n \in \mathbb{N}; A_n := A_{k_{n-1}+1} + \dots + A_{k_n}$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ nazýváme uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$.

5.4.2 Poznámka

Označme posloupnosti částečných součtů. Posloupnost částečných součtů řady s_n a uzávorkování S_n . Z definice je zřejmé, že mezi nimi platí vztah: $S_n = s_{k_n}$. Posloupnost částečných součtů uzávorkování je tedy vybraná z posloupnosti částečných součtů řady. Z toho lze usoudit:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}} \left(\boxed{\text{PD}} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \boxed{\text{K}} \left(\boxed{\text{PD}} \right).$$

"Důkaz"

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{C} \wedge s_{k_n}$ je vybraná z $s_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{C} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{k_n} \in \mathbb{C}$.
- Obdobně pro $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \ (\pm \infty)$

☒

5.4.3 Věta 24 (řada a její uzávorkování)

Buďte $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n; (k_n)$ stejných vlastností jako v definici. Nechť dále platí:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
2. $\exists M \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; k_n - k_{n-1} \leq M$.

Potom mají řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ mají stejný charakter.

Důkaz:

- Cílem bude tvrzení dokázat pomocí pokrývací věty.
- Definujme posloupnosti:

$$\begin{aligned} & (S_n) \dots (s_{k_n}) \\ & (S_n + a_{k_n+1}) \dots (s_{k_n+1}) \\ & \vdots \\ & (S_n + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_n+M+1}) \dots (s_{k_n+M}) \end{aligned}$$

- Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \boxed{\text{K}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_{k_n+1} &= S_n + \underbrace{a_{k_n+1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow L \\ S_{k_n+2} &= S_n + \underbrace{a_{k_n+2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow L \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Všechny námi vygenerované posloupnosti mají tedy za limitu číslo $L \in \mathbb{C}$.
- Pro zakončení důkazu pokrývací větou stačí ukázat, že $\{k_n\} \cup \{k_n + 1\} \cup \dots \cup \{k_n + M - 1\} = \mathbb{N}$.
 - To je určitě splněno, protože každé dva indexy jsou od sebe vzdáleny nejvýše o M , takže každý z indexů za k_n zahrneme do některé z dalších nagenovaných posloupností. Některé budou zahrnuty i víckrát, proto jsme tím pokryli celou množinu přirozených čísel.

□

5.5 Přerovnání řady

5.5.1 Definice (přerovnání řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je číselná řada. Nechť $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ nazveme přerovnáním řady.

5.5.2 Věta 25 (charakter řady a přerovnání)

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{KA}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} \boxed{\text{KA}}.$$

2. (Riemannova)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \boxed{\text{K}}; \forall n \in \mathbb{N}; a_n \in \mathbb{R}. \text{ Potom ke každému } s \in \mathbb{R}^* \text{ existuje přerovnání } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} \text{ mající } s \text{ za součet.}$$

Rovněž existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\psi(n)}$, které osciluje.

Důkaz:

1. Konvergence

$$- \sum a_n \boxed{\text{KA}} \Leftrightarrow \sum |a_n| \boxed{\text{K}}$$

$$- \text{Chci ukázat: } \sum |a_{\varphi(n)}| \boxed{\text{K}}$$

$$- s'_n := |a_{\varphi(1)}| + \dots + |a_{\varphi(n)}| \Rightarrow (s'_n)_{n=1}^{+\infty} \text{ je ostře rostoucí} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n \text{ existuje. - chceme ukázat omezenost}$$

$$- s_n := |a_1| + \dots + |a_n| \leq \sum |a_n|$$

$$- \text{volme } k_n = \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

$$- \text{potom platí: } s'_n \leq s_{k_n} \leq \sum |a_n| \in \mathbb{R}$$

– tím jsme ukázali, že řada konverguje

2. Stejný součet - $\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0$

$$- \text{Z předchozího bodu víme, že } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$- \text{Dále víme, že } \varphi \text{ je bijekce, proto tedy existuje inverzní zobrazení a platí } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))}$$

$$- \text{Celkem tedy: } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

3. Stejný součet - $\forall n \in \mathbb{N}; a_n \in \mathbb{R}$

$$- \text{Nadefinujeme: } a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \geq 0; a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Uvažujme řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$. Obě tyto řady jsou konvergentní, protože jsou složeny každá z nekonečně mnoha členů absolutně konvergentní řady, a navíc kladné, tedy z 2. bodu důkazu víme:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \boxed{\text{K}} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- \boxed{\text{K}} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-\end{aligned}$$

- odtud tedy:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_{\varphi(n)}^+ - a_{\varphi(n)}^-}_{a_{\varphi(n)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_n^+ - a_n^-}_{=a_n}$$

□

Riemannova věta bez důkazu.

5.6 Součin řad

5.6.1 Definice (součin řad)

Budťe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ číselné řady. Nechť $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. $\forall n \in \mathbb{N}; c_n := a_i b_j; n = \varphi(i, j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nazýváme součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Součin řad značíme $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j$.

5.6.2 Věta 26 (Součin absolutně konvergentních řad)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní číselné řady. Pak jejich libovolný součin je také absolutně konvergentní a platí:

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Důkaz:

5.6.3 Definice (součinová řada)

Budťe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ číselné řady. Součinovou řadou těchto dvou řad nazveme řadu definovanou následovně:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right)$$

6 Mocninné řady

6.1 Vlastnosti mocninných řad

6.1.1 Definice (mocninná řada)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Nechť $a \in \mathbb{C}$, potom $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě a . Oborem konvergence mocninné řady nazveme množinu definovanou takto:

$$\mathcal{O} := \left\{ x \in \mathbb{C}; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n \left[\text{K} \right] \right\}. \forall x \in \mathcal{O}; s = s(x) \text{ nazýváme součet řady.}$$

6.1.2 Věta 27 (o charakteru mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ je mocninná řada. Potom $\exists \rho \in \mathbb{R}^* : \rho \geq 0$; takové, že platí:

1. $|x-a| < \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n \left[\text{KA} \right].$
2. $|x-a| > \rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n \left[\text{D} \right].$

Důkaz:

- Definujme $M := \left\{ |x-a|; (a_n(x-a)^n)_{n=1}^{+\infty} \text{ je omezená} \right\} \neq \emptyset \Leftarrow 0 \in M$
- označme: $\rho := \sup M$
- Tvrzení 2

– Nechť $|x-a| > \rho \Rightarrow \underbrace{|x-a| \notin M}_{z \text{ 1. vlastnosti suprema}} \Rightarrow (a_n(x-a)^n)_{n=1}^{+\infty} \text{ není omezená} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x-a)^n \neq 0 \Rightarrow \text{není splněna nutná podmínka konvergence.}$

- Tvrzení 1

– $|x-a| < \rho \Rightarrow \underbrace{\exists \underbrace{|x_0-a|}_{=: \rho'} \in M; |x-a| \leq |x_0-a| \leq \rho}_{z \text{ 2. vlastnosti suprema}}$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left| a_n(x_0-a)^n \right|}_{\leq K} \underbrace{\left(\frac{x-a}{x_0-a} \right)^n}_{=q < 0}$$

– Jelikož se jedná o řadu s kladnými členy dostáváme ze srovnávacího kritéria:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} K|q|^n \left[\text{K} \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x-a)^n| \left[\text{K} \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n \left[\text{KA} \right]$$

⊠

6.1.3 Definice (poloměr konvergence)

Číslo $\rho \in \mathbb{R}^*$ z předchozí věty nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady.

6.1.4 Věta 28 (o poloměru konvergence mocninné řady)

Buď $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ mocninná řada. Potom pro poloměr konvergence této mocninné řady platí:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Přičemž pro $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ klademe $\rho = 0$ a pro $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ klademe $\rho = +\infty$.

Důkaz:

- Z předchozího důkazu víme, že: $\rho = \sup M$, kde $M = \left\{ |y| : (a_n y^n)_{n=1}^{+\infty} \text{ je omezená} \right\} \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in M$
- Berme tedy $y \neq 0$
- Za tohoto předpokladu jistě platí: $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} = |y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$
- Berme $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0; \exists_{\infty} n \in \mathbb{N}; \sqrt[n]{a_n y^n} > 1 + \varepsilon \Leftrightarrow a_n y^n > \underbrace{(1 + \varepsilon)^n}_{\rightarrow +\infty} \Rightarrow (a_n y^n)$ není omezená.
 - celkem tedy: $|y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow |y| \notin M$
- Berme $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} < 1 \Rightarrow \exists n_0; \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0; |a_n y^n| < 1 \Rightarrow (a_n y^n)$ je omezená.
 - celkem tedy: $|y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow |y| \in M$
- Závěrem:
 - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow M = \{0\} \wedge \rho = 0$
 - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow M = \mathbb{R} \wedge \rho = +\infty$
 - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L \Rightarrow M = \langle 0, \frac{1}{L} \rangle \vee M = \langle 0, \frac{1}{L} \rangle \wedge \rho = \frac{1}{L}$

☒

6.1.5 Věta 29 (derivování mocninné řady člen po členu)

Nechť $\rho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$. Na vnitřku oboru konvergence platí:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \right)'$$

Důkaz:

- Berme nějaké $x_0 \in (a - \rho, a + \rho)$
- Chceme ukázat: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0 - a)^{n-1} \right) = 0$
- $s(x) - s(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{[(x-a)^n - (x_0-a)^n]}_{=(x-x_0) \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k}} \underbrace{=}_{a_0=0}$

$$\underbrace{=}_{a_0=0} (x-x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k}$$
- $\frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0 - a)^{n-1} = \frac{(x-x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k}}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0 - a)^{n-1} =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} - \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n}_{=\sum_{k=0}^{n-1} 1} a_n (x_0-a)^{n-1} \underbrace{=}_{a_1=0}$$

$$\underbrace{=}_{a_1=0} \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} - (x_0-a)^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x_0-a)^{n-1-k} \underbrace{((x-a)^k - (x_0-a)^k)}_{=(x-x_0) \sum_{i=0}^{k-1} (x-a)^i (x_0-a)^{k-1-i}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x_0-a)^{n-1-k} (x-x_0) \sum_{i=0}^{k-1} (x-a)^i (x_0-a)^{k-1-i}$$
- Berme $\tau < \rho$ tak, aby: $x_0 \in (a - \tau, a + \tau)$. Naše snaha teď bude ukázat, že suma za posledním „rovná se“ je konvergentní řada a využít větu o limitě sevržené funkce. Tím bude tvrzení dokázáno.

$$\bullet (x - x_0) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_0 - a)^{n-1-k}}_{\leq \tau^{n-1-k}} (x - x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{(x - a)^i}_{\leq \tau^i} \underbrace{(x_0 - a)^{k-1-i}}_{\leq \tau^{k-1-i}} \leq (x - x_0) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\tau^{n-1-k} \tau^{k-1}}_{\leq \tau^{n-2}} =$$

$$(x - x_0) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \frac{n(n-1)}{2} \tau^{n-2}$$

- Nyní ukážeme, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n(n+1)}{2} \tau^n$ konverguje. Podle srovnávacího kritéria potom bude konvergovat i původní řada. (Zde jsme pouze posunuli meze.)

$$- \frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$- \frac{1}{\bar{\rho}} = \limsup \sqrt[n]{|a_n| \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\rho} \wedge \tau < \rho \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n(n+1)}{2} \tau^n \boxed{\text{KA}} \quad \forall x \in (a - \rho, a + \rho)$$

– Součet této řady označme S .

$$\bullet \text{ Máme tedy sevření: } 0 \leq \left| \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (x_0 - a)^{n-1} \right| \leq |x - x_0| |S|$$

- vezmeme-li v předchozím bodu $\lim_{x \rightarrow x_0}$ dostáváme tvrzení věty.

☒

6.1.6 Věta 30 (Abelova)

Mocninná řada je spojitá na celém oboru konvergence.

Důkaz:

$$\bullet \text{ Necht' } \rho = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n \boxed{\text{K}} \text{ na } \{a\} \wedge a \text{ je izolovaný bod} \Rightarrow \text{spojitost.}$$

$$\bullet \text{ Necht' } \rho > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n \boxed{\text{K}} \text{ na nějakém intervalu } (\langle a, b \rangle) \wedge \text{ na svém oboru je diferencovatelná podle předchozí věty (dokonce nekonečněkrát)} \Rightarrow \text{spojitost.}$$

☒

7 Primitivní funkce, neurčitý integrál

7.1 Existence primitivní funkce, per partes, substituční metoda

7.1.1 Definice (primitivní funkce)

Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkci $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme primitivní funkcí k $f \Leftrightarrow \forall x \in (a, b); F'(x) = f(x)$.

7.1.2 Věta 31 (o primitivní funkci)

Nechť $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je primitivní funkcí k f na $(a, b) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}; G(x) = F(x) + C$.

Důkaz:

Tvrzení je zřejmé.

7.1.3 Definice (neurčitý integrál)

Neurčitým integrálem - značíme $\int f$ - rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na intervalu (a, b) . Je-li neprázdná zapisujeme $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Úmluva: Konstantu C nebudeme se zřetelem na předchozí větu uvádět.

7.1.4 Věta 32 (postačující podmínka existence primitivní funkce)

Nechť $f \in C((a, b)) \Rightarrow$ existuje primitivní funkce k f na (a, b) .

Důkaz:

bude proveden v další kapitole

7.1.5 Věta 33 (metoda per partes)

Nechť jsou funkce $f, g \in \mathcal{D}'((a, b))$. Nechť H je primitivní k fg' . Potom $fg - H$ je primitivní k $f'g$.

Důkaz:

- Chceme: $(fg - H)' = f'g$
- Provedeme: $(fg - H)' = f'g + fg' - fg' = f'g$.

☒

7.1.6 Věta 34 (substituce v neurčitém integrálu)

Nechť F je primitivní k f na intervalu (a, b) . Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ takové, že $\varphi \in \mathcal{D}'((\alpha, \beta))$. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α, β) .

Důkaz:

- Chceme: $(F \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$
- Provedeme: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

☒

7.1.7 Poznámka (ekvivalence ve větě o substituci)

předchozí věta zapsána symbolicky: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C \Rightarrow \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$

Nechť φ je prostá, potom: $t = \varphi^{-1}(\tau)$, tedy: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \underbrace{f(\varphi(\varphi^{-1}(\tau)))}_{=f(\tau)} \underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(\tau))\varphi^{-1'}(\tau)}_{=1 \Leftarrow \varphi(\varphi^{-1}(\tau))=\tau} d\tau = \int f(\tau)d\tau$.

Pro φ prosté tedy dostáváme v předchozí větě ekvivalenci.

7.2 Integrační metody pro speciální třídy funkcí

8 Určitý integrál - Riemannova-Cauchyova definice

8.1 Zavedení Riemannova integrálu

8.1.1 Definice (základní pojmy)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$.

- **Rozdělením** intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme každou konečnou množinu $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$, kde $x_0 = a, x_n = b$.
- $\Delta_i := x_i - x_{i-1}$.
- **Normou rozdělení** nazveme číslo $\nu(\sigma) := \max\{\Delta_i; i \in \widehat{n}\}$.
- **Zjemněním rozdělení** σ' intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme každé σ' splňující, že $\sigma \subset \sigma'$.

8.1.2 Poznámka (ekvidistantní rozdělení)

Ekvidistantním rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme rozdělení splňující: $\forall i, j \in \widehat{n}; \Delta_i = \Delta_j$.

Příklad.

$$\sigma = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + n\frac{b-a}{n} \right\}.$$

8.1.3 Úmluva

V celé kapitole: $\langle a, b \rangle = J$.

8.1.4 Definice (horní a dolní součet funkce při rozdělení)

Nechť f je omezená na J . Nechť je σ rozdělením J . Definujme:

- $M_i := \sup\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle : i \in \widehat{n}\} = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$
- $m_i := \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle : i \in \widehat{n}\} = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$
- **Horní součet funkce při rozdělení** $S(\sigma) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i$.
- **Dolní součet funkce při rozdělení** $s(\sigma) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$.

8.1.5 Poznámka (odhady dolního a horního součtu funkce při rozdělení)

Funkce f je na J omezená $\Leftrightarrow \exists K > 0; \forall x \in J; |f(x)| \leq K$

$$\forall i \in \widehat{n}; -K \leq m_i \leq M_i \leq K \Rightarrow -K(b-a) \leq s(\sigma) \leq S(\sigma) \leq K(b-a) \Leftarrow \sum_{i=1}^n \Delta_i = b-a$$

8.1.6 Lemma (odhad horního a dolního součtu funkce při rozdělení)

Buď f omezená konstantou K na J . Nechť σ je rozdělení intervalu J a σ' je jeho zjemnění. Potom platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} S(\sigma) - 2Kp\nu(\sigma) &\leq S(\sigma') \leq S(\sigma) \\ s(\sigma) &\leq s(\sigma') \leq s(\sigma) + 2Kp\nu(\sigma), \end{aligned}$$

kde $p = \text{card}(\sigma' - \sigma)$.

Důkaz:

8.1.7 Věta 35 (vztah mezi součty funkcí při dvou rozděleních)

Nechť je f omezená na J . Buďte σ_1, σ_2 různá rozdělení intervalu J . Potom platí:

$$s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$$

Důkaz:

- Berme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$
- σ je zjevně zjemněním rozdělení σ_1, σ_2 .
- z předchozího lemmatu tedy máme: $s(\sigma_1) \leq s(\sigma) \wedge s(\sigma) \leq S(\sigma) \wedge S(\sigma) \leq S(\sigma_2) \Rightarrow s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$

□

8.1.8 Definice (horní a dolní integrální součet)

Nechť je f omezená na J .

- **Dolní integrální součet** $\int_{a*}^b f := \sup\{s(\sigma); \sigma \leftrightarrow J\}$
- **Horní integrální součet** $\int_a^{b*} f := \inf\{S(\sigma); \sigma \leftrightarrow J\}$

8.1.9 Poznámka (vztah mezi horním a dolním integrálním součtem)

$$\sup \underbrace{\{s(\sigma); \sigma \leftrightarrow J\}}_{:=Q} = \int_{a*}^b f \leq \int_a^{b*} f = \inf\{S(\sigma); \sigma \leftrightarrow J\}$$

$$\text{Berme libovolně } \sigma_2. \forall \sigma; s(\sigma) \leq \underbrace{S(\sigma_2)}_{\text{jedná se o horní závorku pro množinu } Q} \Rightarrow \sup Q \leq S(\sigma_2)$$

8.1.10 Definice (Riemannův integrál)

Nechť je f omezená na J . Nechť $\int_{a*}^b f = \int_a^{b*} f$. Pak řekneme, že má funkce f na intervalu J Riemannův integrál a společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$.

8.1.11 Věta 36 (nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu)

Nechť je f omezená na J . Potom platí:

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \sigma \leftrightarrow J; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon.$$

Důkaz:

- ⇒
- předpokládáme existenci Riemannova integrálu, tedy $\int_{a*}^b f = \int_a^{b*} f$
 - Chceme ukázat: $\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma \leftrightarrow J; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$. Nechť je tedy zadáno $\varepsilon > 0$ libovolně.
 - $\forall \widehat{\varepsilon} > 0; \exists \sigma_1; \int_{a*}^b f - \widehat{\varepsilon} \underbrace{\leq}_{\text{z 2. vl. sup}} s(\sigma_1) \underbrace{\leq}_{\text{lemma}} s(\sigma)$
 - $\forall \bar{\varepsilon} > 0; \exists \sigma_2; \int_a^{b*} f + \bar{\varepsilon} \underbrace{\geq}_{\text{z 2. vl. inf}} S(\sigma_2) \underbrace{\geq}_{\text{lemma}} S(\sigma)$
 - Položme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$, což je zjevně pro obě rozdělení zjemnění.
 - Máme tedy soustavu nerovností:

$$\begin{aligned} \int_a^{b*} f + \bar{\varepsilon} &> S(\sigma) \\ \int_{a*}^b f - \widehat{\varepsilon} &< s(\sigma) \end{aligned}$$

- vynásobením druhé nerovnosti (-1) a sečtením nerovností dostaneme díky existenci Riemannova integrálu nerovnost:

$$\bar{\varepsilon} + \widehat{\varepsilon} > S(\sigma) - s(\sigma)$$

- Stačí tedy $\bar{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2} =: \widehat{\varepsilon}$ - tím dostáváme tvrzení věty

☒

⇐ – zde předpokládáme platnost výroku: $\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma \leftrightarrow J; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$

- a chceme ukázat, že už musí být nutně splněno, že $\int_{a*}^b f = \int_a^{b*} f$

- Z první vlastnosti infima a suprema dostáváme soustavu nerovností:

$$\begin{aligned} S(\sigma) &\geq \int_a^{b*} f \\ s(\sigma) &\leq \int_{a*}^b f \end{aligned}$$

- vynásobením druhé nerovnosti (-1) a sečtením nerovností dostáváme:

$$\varepsilon > S(\sigma) - s(\sigma) \geq \int_a^{b*} f - \int_{a*}^b f \geq 0$$

- Tato nerovnost má být podle předpokladu splněna pro libovolné $\varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^{b*} f = \int_{a*}^b f \Leftrightarrow \int_a^b f$ *existuje*.

☒

☒

8.1.12 Věta 37 (spojitost a Riemannův integrál)

Nechť f je omezená na J . Potom platí:

$$f \in C(J) \Rightarrow \int_a^b f \text{ existuje.}$$

Důkaz:

8.1.13 Věta 38 (monotonie a Riemannův integrál)

Nechť f je omezená na J . Potom platí:

$$f \text{ monotonní na } J \Rightarrow \int_a^b \text{ existuje.}$$

Důkaz:

- Předpokládejme, že f je na J ostře rostoucí.
- Chceme: $\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \sigma; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$
- Odhadněme tedy rozdíl $S(\sigma) - s(\sigma)$:

$$S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{\text{dky } f \text{ OR}} \underbrace{\Delta_i}_{\leq \nu(\sigma)} \leq \nu(\sigma) \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \nu(\sigma)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

- Stačí tedy rozdělení σ volit takovým způsobem, aby: $\nu(\sigma) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

☒

8.1.14 Věta 39 (dědičnost Riemannova integrálu)

Nechť f je omezená na J . Nechť $\langle c, d \rangle \subset J$. Potom platí:

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Rightarrow \int_c^d f \text{ existuje}.$$

Důkaz:

- Chceme: $\forall \varepsilon' > 0; \exists \sigma' \leftrightarrow \langle c, d \rangle; S(\sigma') - s(\sigma') < \varepsilon'$
- Máme: $\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma \leftrightarrow J; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$
- položíme $\varepsilon' := \varepsilon$ odtud dostaneme rozdělení intervalu $J - \sigma$.
- Definujeme $\sigma^* := \sigma \cup \{c, d\}$ - to je zjevně zjemněním rozdělení σ
- z lemmatu máme:

$$\begin{aligned} S(\sigma^*) &\leq S(\sigma) \\ s(\sigma^*) &\geq s(\sigma) \end{aligned}$$

- vynásobením druhé nerovnosti (-1) a jejich sečtením dostaneme nerovnost:

$$S(\sigma^*) - s(\sigma^*) \leq S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$$

- Definujeme $\hat{\sigma} = \sigma^* \cap \langle c, d \rangle$
- pro toto rozdělení bude určitě platit: $S(\hat{\sigma}) - s(\hat{\sigma}) < S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$

☐

8.1.15 Věta 40 (existence Riemannova integrálu na sousedních intervalech)

Nechť f je omezená na J . Nechť $a < c < b$. Potom platí:

$$\int_a^c f \text{ existuje} \wedge \int_c^b f \text{ existuje} \Rightarrow \int_a^b f \text{ existuje}.$$

Důkaz:

- Máme:
 - $\exists \sigma^1 \leftrightarrow \langle a, c \rangle; S(\sigma^1) - s(\sigma^1) < \varepsilon^1$
 - $\exists \sigma^2 \leftrightarrow \langle c, b \rangle; S(\sigma^2) - s(\sigma^2) < \varepsilon^2$
- Chceme $\exists \sigma \leftrightarrow J; S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$
- Položíme $\sigma = \sigma^1 \cup \sigma^2$

☐

8.1.16 Věta 41 (nespočetně mnoho bodů spojitosti riemannovsky integrovatelné funkce)

Nechť f je omezená na J . Potom platí:

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Rightarrow \exists_{\infty}^{nsp.} y \in J; f \in C(\{y\}).$$

Důkaz:

- Chceme ukázat pro pevně zvolený bod $c : f \in C(\{c\})$
- Berme posloupnost $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $\forall n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n > 0 \wedge (\varepsilon_n) \downarrow 0$.
- Konstruujeme posloupnost intervalů $(\langle a_n, b_n \rangle)_{n=0}^{\infty}$ následujícím způsobem:
 - Chceme, aby $\forall n \in \mathbb{N}; a_n < a_{n+1} \wedge b_{n+1} < b_n \wedge a_0 = a \wedge b_0 = b$
 - Dále víme, že $\int_{a_0}^{b_0} f \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall \varepsilon_0 > 0; \exists \sigma \leftrightarrow \langle a_0, b_0 \rangle; S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^n \left(\sup f - \inf f \right) \Delta_i < \varepsilon_0(b_0 - a_0)$
 - Odtud $\sup f - \inf f < \varepsilon_0$ pro supremum a infimum z intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$.
 - Kdyby ne:
 - * dostali bychom opačnou nerovnost - spor s nutnou a postačující podmínkou existenci Riemannova integrálu
 - Obdobným postupem bychom pro interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ dostali, že $\sup f - \inf f < \varepsilon_1$.
 - $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < b_n < \dots < b_0$
 - $c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \underbrace{\Rightarrow}_{a_n \text{ OR}} a_n < c < b_n$
- Chceme tedy ukázat: $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in (c - \delta, c + \delta); |f(x) - f(c)| < \varepsilon$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n < \varepsilon$ - k tomu dostaneme interval $\langle a_n, b_n \rangle$.
- zvolme $\delta := \min\{c - a_n, b_n - c\}$, potom dostaneme $|f(x) - f(c)| < \sup f - \inf f < \varepsilon_n < \varepsilon$

□

8.2 Riemannův určitý integrál jako limita posloupnosti

8.2.1 Definice (normální posloupnost rozdělení)

Nechť $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost rozdělení intervalu J . $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ nazveme normální $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

8.2.2 Poznámka (banalita)

Připomeňme, že $\int_{a*}^b f := \sup\{s(\sigma); \sigma \leftrightarrow J\}$, proto z druhé vlastnosti suprema:

$$\forall \varepsilon^*; \exists \sigma^*; \int_{a*}^b f - \varepsilon^* < s(\sigma) \leq \int_{a*}^b f$$

8.2.3 Věta 42

Nechť f je omezená na J . Potom platí:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall \sigma \leftrightarrow J : \nu(\sigma) < \delta; \int_{a*}^b f - \varepsilon < s(\sigma) \leq \int_{a*}^b f$$

Důkaz:

- $\varepsilon > 0$ zvoleno libovolně, pro něj hledáme $\delta > 0$.
- platí „banalita“, proto $\forall \varepsilon^* > 0; \exists \sigma^*; \int_{a*}^b f - \varepsilon^* < s(\sigma)$
- f je omezená na $J \Leftrightarrow \exists K > 0; \forall x \in J; |f(x)| < K$
- pro libovolné zjemnění $\sigma \subset \sigma'$ podle lemmatu platí $s(\sigma) \leq s(\sigma') < s(\sigma) + 2Kp\nu(\sigma)$, kde $p = \text{card}\{\sigma' - \sigma\}$
- $p^* := \text{card}(\sigma^*)$
- zvolme libovolně $\sigma \leftrightarrow \nu(\sigma)$, definujeme: $\sigma' := \sigma \cup \sigma^*$. Při takto definovaném rozdělení je zřejmé, že počet bodů v σ' je oproti počtu bodů v σ větší nanejvýš o p^* .
- Celkem tedy dostáváme:

$$s(\sigma) = \underbrace{s(\sigma) - s(\sigma')}_{> -2Kp^*\nu(\sigma)} + \underbrace{s(\sigma') - s(\sigma^*)}_{\geq 0} + \underbrace{s(\sigma^*)}_{\geq \int_{a*}^b f - \varepsilon^*} > \int_{a*}^b f - \varepsilon^* - \underbrace{2Kp^*\nu(\sigma)}_{je-li < \varepsilon^*} > \int_{a*}^b f - \varepsilon$$

- Nyní tedy stačí: $\nu(\sigma) < \frac{\varepsilon^*}{2Kp^*} =: \delta$

□

8.2.4 Věta 43 (horní a dolní součet funkce při normálním rozdělení)

Nechť je f omezená na intervalu J . Nechť $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je normální posloupnost rozdělení intervalu J . Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \int_{a*}^b f \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n) = \int_a^{b*} f.$$

Důkaz:

- Chceme ukázat $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \int_{a*}^b f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists m_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0; \left| s(\sigma_n) - \int_{a*}^b f \right| < \varepsilon$
- Máme:
 - $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je normální posloupnost rozdělení intervalu $J \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0; \exists n_0; \dots; |\nu(\sigma_n)| < \varepsilon'$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0$
 - z věty 43: $\forall \varepsilon'' > 0; \exists \delta > 0; \forall \sigma; \dots; \int_{a*}^b f - \varepsilon'' < s(\sigma)$

- $\varepsilon > 0$ je dáno libovolně. Vezměme tedy $\varepsilon'' \rightarrow \delta := \varepsilon' \rightarrow n_0$ tak, že platí:

$$\forall \varepsilon'' > 0; \exists n_0; \dots; \int_{a^*}^b f - \varepsilon'' < s(\sigma_n) < \int_{a^*}^b f + \varepsilon'' \Leftrightarrow \left| s(\sigma_n) - \int_{a^*}^b f \right| < \varepsilon''$$

- Stačí tedy $\varepsilon := \varepsilon''$ a tedy $m_0 := n_0$.

☒

8.2.5 Definice (Integrální součet)

Nechť f je omezená na intervalu J a nechť σ je rozdělení tohoto intervalu. Integrálním součtem funkce f při rozdělení σ nazveme číslo definované:

$$I(\sigma) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i,$$

kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \wedge \sigma = \{ \underbrace{x_0}_{=a}, x_1, \dots, x_{n-1}, \underbrace{x_n}_{=b} \}$.

8.2.6 Poznámka (další banalita)

Už víme, že platí:

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

odtud plyne:

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \leq I(\sigma) \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i = S(\sigma)$$

8.2.7 Věta 44 (ZLIP - základní lemma integrálního počtu)

Nechť je f omezená na J . Potom platí:

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow \forall (\sigma_n)_{n=0}^\infty \text{ normální; } \lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n) \in \mathbb{R}.$$

Důkaz:

$$\Rightarrow - \int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow \int_{a^*}^b f = \int_a^{b^*} f \wedge (\sigma_n) \text{ normální} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n)$$

– navíc podle další banality platí: $s(\sigma_n) \leq I(\sigma_n) \leq S(\sigma_n)$

– Odtud už limitním přechodem a podle věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme: $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n) = \int_a^b f$

☒

$\Leftarrow$ 1. fáze: předpokládejme, že pro všechny normální posloupnosti rozdělení jsou $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n)$ stejné. (bude dokázáno ve 2. fázi)

– (σ_n) je normální posloupnost rozdělení. $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)} = b\}$

– Víme, že $m_i = \inf_{\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle} f \wedge M_i = \sup_{\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle} f$

– Z vlastností suprema a infima dostáváme:

$$(1) \ m_i^{(n)} \leq f(\xi_i) \leq m_i^{(n)} + \frac{1}{n}$$

$$(2) \ M_i^{(n)} - \frac{1}{n} \leq f(\eta_i) \leq M_i^{(n)}$$

- Vynásobením obou nerovností Δ_i a vysčítáním obou nerovností dostaneme z (1):

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \Delta_i}_{=s(\sigma_n)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i) \Delta_i}_{=I_\xi(\sigma_n)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \Delta_i}_{=S(\sigma_n)} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \Delta_i}_{=\frac{b-a}{n}}$$

- Jelikož se (σ_n) je normální posloupnost rozdělení, platí pro ni, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n) = \int_{a^*}^b f$. Provedeme-li tedy v diskutované nerovnosti limitní přechod, pak z tohoto faktu a z věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\xi(\sigma_n) = \int_{a^*}^b f$
- Z (2) potom dostáváme:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \Delta_i}_{=S(\sigma_n)} - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \Delta_i}_{=\frac{b-a}{n}} \leq I_\eta(\sigma_n) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \Delta_i}_{=S(\sigma_n)}$$

- Ze stejných důvodů platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n) = \int_a^{b^*} f \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} I_\eta(\sigma_n) = \int_a^{b^*} f$
- Podle našeho předpokladu platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\xi(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\eta(\sigma_n) \Leftrightarrow \int_{a^*}^b f = \int_a^{b^*} f \Leftrightarrow \int_a^b f$ *existuje*.

$\Leftarrow$ 2. fáze: Ukázat, že všechny limity z předpokladu jsou si rovny. (SPOREM)

- Buďte $(I(\sigma_n^{(1)})), (I(\sigma_n^{(2)}))$ dvě různé, normální posloupnosti rozdělení takové, že $(I(\sigma_n^{(1)})) \rightarrow l_1 \wedge (I(\sigma_n^{(2)})) \rightarrow l_2 \wedge l_1 \neq l_2$
- Vygenerujeme posloupnost $(I(\sigma_n)) = (I(\sigma_1^{(1)}), I(\sigma_1^{(2)}), I(\sigma_2^{(1)}), I(\sigma_2^{(2)}), \dots)$ - to je normální posloupnost rozdělení (je nakombinována ze členů normálních posloupností rozdělení)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n)$ *neexistuje* $\Leftarrow I(\sigma_n^{(1)}) \rightarrow l_1 \wedge I(\sigma_n^{(2)}) \rightarrow l_2 \wedge l_1 \neq l_2$ tedy z věty o limitě vybrané posloupnosti. Jelikož limita integrálního součtu pro normální limitu posloupnost *neexistuje*, je to spor s naším předpokladem.

□

□

8.2.8 Věta 45 (součet určitých integrálů)

Nechť f, g jsou omezené na J . Pak platí:

$$\int_a^b f, \int_a^b g \text{ existují} \Rightarrow \int_a^b (f+g) \text{ existuje.}$$

Důkaz:

- berme libovolně (σ_n) normální posloupnost rozdělení, potom:

$$I_{f+g}(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n (f+g)(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i^{(n)}) + g(\xi_i^{(n)})) \Delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n g(\xi_i^{(n)}) \Delta_i^{(n)} = \underbrace{I_f(\sigma_n) + I_g(\sigma_n)}_{\text{konvergují}}$$

□

8.2.9 Věta 46 (existence Riemannova integrálu na sousedních podintervalech)

Buď f omezená na J . Buďte $a < c < b$, nechť existují $\int_a^c f, \int_c^b f$. Potom existuje také $\int_a^b f \wedge \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz:

- Buď (σ_n) normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$
- Vytvořme $\sigma_n^* = \sigma_n \cup \{c\}$ - ta je určitě normální.

- Dále generujeme: $\sigma_n^{a,c} = \sigma_n^* \cap \langle a, c \rangle$, $\sigma_n^{c,b} = \sigma_n^* \cap \langle c, b \rangle$ - normální posloupnosti rozdělení podintervalů intervalu J .
- Dále platí: $I(\sigma_n^*) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i) \Delta_i = I(\sigma_n^{a,b}) + I(\sigma_n^{c,b}) = \int_a^c f + \int_c^b f$

□

8.2.10 Věta 47 (nerovnosti v určitém integrálu)

Nechť existují $\int_a^b f$, $\int_a^b g$, potom:

1. $\forall x \in J; f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
2. $\forall x \in J; f(x) < g(x) \Rightarrow \int_a^b f < \int_a^b g$

Důkaz:

1. – Chceme ukázat, že: $0 \leq \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b g - f := \int_a^b h$
 – podle předpokladů víme, že: $\forall x \in J; h(x) \geq 0$, berme tedy nějaké rozdělení intervalu J a k němu dolní součet funkce při rozdělení: $s(\sigma) = \sum m_i \Delta_i \underset{\substack{\geq \\ \text{infima z nezáporné funkce}}}{\geq} 0$

$$- \int_a^b f, \int_a^b g \text{ existují} \Rightarrow \int_a^b h = \int_{a*}^b h = \sup\{s_n(\sigma); \sigma \text{ rozdělení } J\} \geq 0$$

□

2. – Berme $\int_a^b h$, kde h představuje tutéž funkci jako v bodě 1, tentokrát budeme chtít: $\int_a^b h > 0$
 – Zde obdobný postup nezabere, jelikož infimum z kladné funkce může být i nula, proto:
 – $\int_a^b h$ existuje $\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b); h \in C(\{x_0\}) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) > 0 \Rightarrow h(x_0) > \frac{1}{2}h(x_0) \wedge h \in C(\{x_0\}) \Rightarrow \exists \delta > 0; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta); h(x_0) > \frac{1}{2}h(x_0)$
 – odtud: $\int_a^b h = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} h}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h}_{> \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2}h(x_0)} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^b h}_{\geq 0} > \delta h(x_0) > \dots + \delta h(x_0) + \dots > 0$

□

□

8.2.11 Věta 48 (Riemannův integrál a absolutní hodnota)

Nechť f je omezená na J . Nechť existuje $\int_a^b f$, pak existuje také $\int_a^b |f|$ a platí, že $\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right|$.

Důkaz:

- 2. tvrzení: $\forall x \in J; |f(x)| \geq f(x) \wedge |f(x)| \geq -f(x) \Rightarrow \int_a^b |f| \geq \int_a^b f \wedge \int_a^b |f| \geq -\int_a^b f$. Máme tedy:
 „ $A \geq B \wedge A \geq -B \Leftrightarrow A \geq |B|$ “. Stačí tedy ukázat, že $\int_a^b |f|$ existuje.
- Ukažme pomocí nutné a postačující podmínky:
- Chceme ukázat, že $\forall \varepsilon > 0; \exists \sigma; \underbrace{S_{|f|}(\sigma) - s_{|f|}(\sigma)}_{\text{chci}} \underset{\text{mám}}{<} S_f(\sigma) - s_f(\sigma) \underset{\text{mám}}{<} \varepsilon$
- odtud: $\sum (\sup |f| - \inf |f|) \Delta_i \leq \sum (\sup f - \inf f) \Delta_i$

- Stačí tedy ukázat, že $\sup |f| - \inf |f| \leq \sup f - \inf f$ Rozdělme na několik případů:

- pro $f(x) \geq 0$ triviálně nastává rovnost
- pro $f(x) \leq 0$: $\sup |f| = -\inf f \wedge \inf |f| = -\sup f$, opět tedy triviálně nastává rovnost.
- $\exists x_0, y_0 \in J$; $f(x_0) > 0 \wedge f(y_0) < 0$, potom $\sup |f| = \max\{\sup f, -\inf f\} \wedge \inf |f| \geq 0$. Odtud

$$\sup |f| - \inf |f| \leq \sup |f| \leq \underbrace{\sup f - \inf f}_{\text{maximum z kladných součet je menší než jejich součet}}$$

□

8.3 Integrál jako funkce horní meze

8.3.1 Definice (horní a dolní mez)

Nechť f je omezená na intervalu J . $\int_a^b f$ existuje, potom platí, že $\int_b^a f := -\int_a^b f$. Číslo a nazýváme horní mez, číslo b nazýváme dolní mez.

8.3.2 Věta 49 (integrál jako funkce meze)

Nechť f je integrovatelná na intervalu J . Nechť $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ je $\forall x \in J; F(x) := \int_a^x f$. Potom:

1. $F \in C(J)$
2. Je-li x_0 bodem spojitosti funkce f , potom $F'(x_0) = f(x_0)$

Důkaz:

- 1 Chceme: $\forall x_0 \in J; \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta); |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$

$$- 0 \leq |F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \underbrace{\leq}_{f \text{ omezená}} \left| \int_{x_0}^x K \right| = K|x - x_0|$$

- po limitním přechodu $x \rightarrow x_0$ dostáváme z věty o limitě sevřené funkce: $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - F(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) \Leftrightarrow F \in C(\{x_0\}) \Rightarrow F \in C(J)$ - kvůli libovolnosti volby x_0 .

☒

- 2 Nechť x_0 je bodem spojitosti $f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta); f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$
 - $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta);$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f(x_0) - \varepsilon &< \int_{x_0}^x f < \int_{x_0}^x f(x_0) + \varepsilon \\ (f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) &< \underbrace{F(x) - F(x_0)}_{= \int_{x_0}^x f} < (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) \\ -\varepsilon &< \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$- \text{celkem tedy } \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \Leftrightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

☒

☒

8.4 Výpočet určitého integrálu

8.4.1 Věta 50 (Newtonova formule pro výpočet určitého integrálu)

Nechť $\int_a^b f$ existuje a současně nechť je splněno:

1. $\forall x \in (a, b); F'(x) = f(x)$,
2. $F \in C(J)$,

potom:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) := [F]_a^b$$

Důkaz:

- Berme σ rozdělení intervalu J . Víme, že platí: $a = x_0 < \dots < x_n = b$
- $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1})$
- podle předpokladů je F spojitá na uzavřeném intervalu J a na vnitřku tohoto intervalu má derivaci. Proto aplikujeme Lagrangeovu větu o přírůstku funkce, podle té existuje $\xi_i \in (a, b)$ takové, že:

$$* F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i = I(\sigma)$$

- Pro každé rozdělení σ intervalu J tedy nalezneme $\xi_i \in (a, b)$ takové, že $F(b) - F(a) = I(\sigma)$
- podle ZLIP: $\int_a^b f$ existuje $\Leftrightarrow \forall (\sigma_n)$ normální; $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n) \in \mathbb{R} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n) = \int_a^b f$
- Berme tedy σ normální. Limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ v * dostáváme:

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\sigma_n) = \int_a^b f$$

□

8.4.2 Věta 51 (metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť $f, g \in C(J) \wedge f, g \in \mathcal{D}'(J^0)$. Nechť $\int_a^b f'g, \int_a^b fg'$ existují. Potom platí:

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Důkaz:

- $\int_a^b (fg)' = [fg]_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \Leftrightarrow \int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$
- Existence integrálu $\int_a^b (fg)'$ je zaručena tím, že platí: $\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$ a oba tyto integrály z předpokladů existují.

□

8.4.3 Věta 52 (metoda substituce pro určitý integrál)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}'(J^0) \wedge \varphi \in C(J) \wedge f \in C(\varphi(J))$. Potom:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Důkaz:

- Berme nějaké $c \in \varphi(J)$, definujeme $\forall x \in \varphi(J) : F(x) := \int_c^x f(x)dx$. F je funkce horní meze, proto platí $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F$ je primitivní funkce k $f \wedge F \in C(\varphi(J))$.
- $F(\varphi(t))$ je $\forall t \in J^0$ primitivní k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$
- Platí tedy:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_c^{\varphi(b)} f(x)dx + \int_c^{\varphi(a)} f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \quad (*)$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \dots \quad (**)$$

- Celkem tedy: $(*) = (**)$

□

8.4.4 Věta 53 (integrální tvar zbytku v Taylorově vzorci)

Nechť $f \in C^{n+1}(H_a)$, potom platí:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Důkaz:

- Matematickou indukcí
- pro $n = 0$

$$f(x) = \underbrace{T_0(x)}_{=f(a)} + R_0(x) \Rightarrow R_0(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

- pro $n + 1$

$$f(x) = T_{n+1}(x) + R_{n+1}(x) \Rightarrow R_{n+1}(x) = \underbrace{T_n(x) - T_{n+1}(x)}_{= -\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} + R_n(x)$$

$$R_{n+1}(x) \underbrace{=}_{IP} -\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

- na poslední integrál aplikujeme metodu per partes pro určitý integrál tak, že $u'(t) = (x-t)^n \wedge v(t) = f^{(n+1)}(t)$. Odtud:

$$R_{n+1}(x) = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} - \frac{1}{n!} \left(\underbrace{\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x}_{=0 + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \right)$$

- Celkem tedy:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$$

□

8.5 Věty o střední hodnotě

8.5.1 Věta 54 (1. věta o střední hodnotě)

Nechť $f : \forall x \in J; f(x) \geq 0 \wedge g$ je omezená na J . Nechť $\int_a^b fg, \int_a^b f$ existují. Potom existuje $\mu \in \left\langle \inf_{\langle a,b \rangle} g, \sup_{\langle a,b \rangle} g \right\rangle$ takové, že:

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b f$$

pozn.: Je-li $g \in C(J); \exists c \in J; \mu = g(c)$

Důkaz:

- $\forall x \in J :$

$$\begin{aligned} \inf g &\leq g(x) \leq \sup g \\ \inf gf(x) &\leq f(x)g(x) \leq \sup gf(x) \\ \inf g \int_a^b f &\leq \int_a^b fg \leq \sup g \int_a^b f \end{aligned}$$

- je-li $\int_a^b f = 0 \Rightarrow \int_a^b fg = 0$
- je-li $\int_a^b f > 0 \Rightarrow \inf g \leq \frac{\int_a^b fg}{\underbrace{\int_a^b f}_{:= \mu}} \leq \sup g$

□

8.5.2 Věta 55 (2. věta o střední hodnotě)

Nechť g je monotónní na J . Nechť existují $\int_a^b fg, \int_a^b f$. Potom existuje $c \in J$ takové, že:

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

Pro důkaz přidáme následující předpoklady: $g' \in C(J) \wedge f \in C(J)$.

Důkaz:

- $\forall x \in J; F(x) := \int_a^x f \Rightarrow F'(x) = f(x) \wedge F \in C(J)$
- Budeme se snažit použít 1. větu o střední hodnotě na integrál $\int_a^b Fg'$. Předpoklady věty jsou jistě splněny, protože g je na J monotónní, a tedy g' na J nemění znaménko. $F \in C(J) \Rightarrow F$ omezená na J .
- Odtud dostáváme:

$$\begin{aligned} [Fg]_a^b - \int_a^b fg &\stackrel{\text{per partes}}{=} \int_a^b Fg' = \mu \int_a^b g' \stackrel{F \in C(J) \Rightarrow \exists c \in J}{=} = F(c) \int_a^b g' = F(c)[g]_a^b \\ &\int_a^b fg = g(a)[F(c) - F(a)] + g(b)[F(b) - F(c)] = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f \end{aligned}$$

□

9 Aplikace určitého integrálu

9.1 Délka grafu funkce

9.1.1 Definice (délka čáry aproximující graf funkce při rozdělení intervalu)

Nechť $f \in C(\langle a, b \rangle)$, potom délku čáry ... při rozdělení σ nazveme číslo definované:

$$l(\sigma) := \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

9.1.2 Poznámka

Nechť $\sigma \subset \sigma' \Rightarrow l(\sigma') \geq l(\sigma)$

9.1.3 Definice (délka grafu funkce)

Nechť $f \in C(\langle a, b \rangle)$, pak délkou grafu funkce nazveme číslo definované:

$$L := \sup\{l(\sigma); \sigma \leftrightarrow \langle a, b \rangle\}$$

9.1.4 Poznámka

Podle definice může být délka grafu funkce i nekonečná. Přidáme-li předpoklady: $f \in \mathcal{D}'(\langle a, b \rangle)$, f' omezená na $\langle a, b \rangle$.

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta_i = I_{\sqrt{1+f'^2}}(\sigma) \leq \sqrt{1+K^2} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \\ &= \sqrt{1+K^2}(b-a) < +\infty; \quad \forall \sigma \leftrightarrow \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Za těchto předpokladů je tedy délka grafu funkce číslo konečné.

9.1.5 Věta 56 (výpočet délky grafu funkce)

Nechť $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Potom platí:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$$

Důkaz:

- (σ_n) normální
- $f' \in C(J) \Rightarrow \sqrt{1+f'^2} \in C(J) \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1+f'^2} \text{ existuje} \wedge \int_a^b \sqrt{1+f'^2} \underbrace{=}_{ZLIP} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\sqrt{1+f'^2}}(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(\sigma_n) \underbrace{=}_{?} L$
- $\forall n \in \mathbb{N}; \exists \sigma_n^*; L - \frac{1}{n} \leq l(\sigma_n^*) \leq L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(\sigma_n^*) = L$
- berme $\sigma_n = \sigma_n^* \cup \left\{ a + \frac{b-a}{n}i; i \in \widehat{n} \right\}$ tj. zjemnění σ_n^* a také se jedná o normální rozdělení, odtud:
- $L - \frac{1}{n} \leq l(\sigma_n^*) \leq l(\sigma_n) \leq L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(\sigma_n) = L$

☒

10 Riemannův zobecněný integrál

10.1 Zavedení, vlastnosti

10.1.1 Definice (vlastnost R1, R2)

Řekneme, že funkce f má na intervalu $(a, b) := J^0$ vlastnost R1 $\Leftrightarrow \forall x \in J^0; (R) \int_a^x f$ existuje. Obdobně definujeme vlastnost R2.

10.1.2 Definice (Riemannův zobecněný integrál)

Měj f vlastnost R1 na J^0 . Řekneme, že f je na J^0 Riemannovsky integrovatelná $\Leftrightarrow \forall x \in J^0; \lim_{x \rightarrow b_-} (R) \int_a^x f \in \mathbb{R}$. Riemannův zobecněný integrál potom definujeme takto:

$$(R) \lim_{x \rightarrow b_-} \int_a^x f := \int_a^b f.$$

10.1.3 Definice (vhodné rozdělení)

$\tau = \{\underbrace{x_0}_{=a}, x_1, \dots, \underbrace{x_k}_{=b}\} : x_0 < x_1 < \dots < x_k$ nazveme vhodným rozdělením pro funkci f na $J^0 \Leftrightarrow \forall i \in \widehat{k}; f \Leftrightarrow$

$\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je vlastnosti R1 (R2). Pokud $\forall i \in \widehat{k}; \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ existuje $\Leftrightarrow \int_a^b f = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$.

10.1.4 Pozorování (vlastnosti Riemannova zobecněného integrálu)

- $\int_a^b f, \int_a^b g$ existují $\Rightarrow \int_a^b \alpha f + g = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$
(plyne z věty o aritmetice limit)
- $\int_a^b f, \int_a^b g$ existují $\wedge \forall x \in J^0; f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.
(plyne z věty o nerovnosti v limitách)

10.2 Výpočet Riemannova zobecněného integrálu)

10.2.1 Věta 57 (zobecněná Newtonova formule)

Nechť f má vlastnost R1 na intervalu J^0 . Nechť F je na J^0 primitivní k f . Nechť $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x), \lim_{x \rightarrow a_+} F(x) \in \mathbb{R}$.

Potom $\int_a^b f$ existuje a platí:

$$\int_a^b f = [F]_a^b := \lim_{b_-} F - \lim_{a_+} F.$$

Důkaz:

- f je vlastnosti R1 $\Leftrightarrow \forall y \in J^0; \int_a^y f$ existuje.
- Dodefinujeme $F(a) := \lim_{a_+} F \Leftrightarrow F \in C(\langle a, y \rangle)$ - tím jsou splněny předpoklady pro použití klasické Newtonovy formule:
- $(R) \int_a^y f = F(y) - F(a)$ - aplikujeme limitní přechod $\lim_{y \rightarrow b_-}$
- $\int_a^b f = \lim_{y \rightarrow b_-} (R) \int_a^y f = \lim_{y \rightarrow b_-} F(y) - \underbrace{F(a)}_{=\lim_{a_+} F}$

□

10.2.2 Věta 58 (zobecněná metoda per partes)

Buďte $f, g \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Nechť $\lim_{b-} \in \mathbb{R}$. Potom:

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg',$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz:

- použijme klasickou metodu per partes na interval $\langle a, y \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_a^y f'g &= [fg]_a^y - \int_a^y fg' \quad \Big/ \quad \lim_{b-} \\ \int_a^b f &= \lim_{y \rightarrow b-} (R) \int_a^y f = \lim_{y \rightarrow b-} [fg]_a^y - \lim_{y \rightarrow b-} (R) \int_a^y fg' \\ &= [fg]_a^b - \int_a^b fg' \end{aligned}$$

- Podle předpokladů jeden z integrálů existuje a díky rovnosti výše musí existovat i druhý.

☒

10.2.3 Věta 59 (zobecněná substituční metoda)

Buď $\phi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$, ostře monotónní na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Buď $f \in C(\phi(\langle \alpha, \beta \rangle))$. Označme $a := \phi(\alpha), b := \lim_{\beta-} \phi$. Potom platí:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Pakliže alespoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz:

- V důkazu využijeme následující dvě věty:

$$\begin{aligned} - \phi &\in C(\langle \alpha, \beta \rangle), \phi \in \mathcal{D}'(\langle \alpha, \beta \rangle) \wedge f \in C(\phi(\langle \alpha, \beta \rangle)) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx \\ - \text{VoLSF: } a &\in \mathbb{R}^* \wedge a \in \text{der}(D_{f \circ g}), b, c \in \mathbb{R}^* \wedge \lim_b f = c \wedge \lim_a g = b \wedge \left(\mathcal{S} \vee \mathcal{P} \right) \Rightarrow \lim_a f \circ g = c \end{aligned}$$

- BÚNO berme ϕ ostře rostoucí. Potom platí: $\phi(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle a, b \rangle \wedge \phi^{-1}$ je ostře rostoucí na $\langle a, b \rangle$.
- Navíc platí, že $\lim_{b-} \phi^{-1} = \beta \wedge \forall z \in \langle \alpha, \beta \rangle; \phi(z) < b \wedge \forall y \in \langle a, b \rangle; \phi(y) < \beta$
- Spojitost ϕ, ϕ', f zaručuje splnění předpokladů pro větu o substituci v určitém integrálu na intervalu $\langle \alpha, z \rangle$. Tedy podle té $\forall z \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí:

$$(***) \quad \int_{\alpha}^z f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(z)} f(x)dx = \int_a^{\phi(z)} f(x)dx$$

- Nechť existuje $\int_a^b f \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y f \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{VoLSF}} \lim_{z \rightarrow \beta-} \int_a^{\phi(z)} f$ a platí:

$$\lim_{z \rightarrow \beta-} \int_a^{\phi(z)} f = \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y f = \int_a^b f$$

pro VoLSF jsme využili toho, že $\forall z; z \neq \beta; \phi(z) \neq b$.

- Necht existuje $\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \beta-} \int_{\alpha}^z f(\phi)\phi' dt \in \mathbb{R} \stackrel{V o L S F}{\Rightarrow} \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^{\phi^{-1}(y)} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ a platí:

$$\lim_{y \rightarrow b-} \int_a^{\phi^{-1}(y)} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \lim_{z \rightarrow \beta-} \int_{\alpha}^z f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- Po dosazení z ^(***) do levé strany máme

$$\lim_{y \rightarrow b-} \int_a^{\phi^{-1}(y)} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^{\phi(\phi^{-1}(y))} f = \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y f = \int_a^b f$$

□

10.3 Konvergence Riemannova zobecněného integrálu

10.3.1 Věta 60 (integrální kritérium)

Nechť f mající vlastnost R1 je klesající na $\langle 1, \infty \rangle \wedge \lim_{\infty} f = 0$. Potom platí:

$$\int_1^{\infty} f \boxed{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \boxed{\mathbb{K}}.$$

Poznámka: f klesající a navíc $\lim_{\infty} f = 0 \Rightarrow \forall x \in \langle 1, \infty \rangle; f(x) > 0$. Definujme F pro každé $y \in \langle 1, \infty \rangle$; $F(y) = \int_1^y f(x)dx$. Tato funkce je určitě rostoucí, tj. $\forall y_1, y_2 \in D_F : y_1 < y_2; F(y_1) < F(y_2) \Leftrightarrow \int_1^{y_2} f = \int_1^{y_1} f + \int_{y_1}^{y_2} f$ přičtením druhého integrálu jsme první určitě zvětšili, jelikož integrál z kladné funkce je kladné číslo. Jelikož F je monotónní $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} \int_1^x f$ existuje.

Důkaz:

- Víme tedy už, že $\lim_{x \rightarrow b-} \int_1^x f$ existuje.

- Odhadněme $\int_1^{n+1} f(x)dx$

- dolní odhad:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \stackrel{aditivita}{=} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \stackrel{f \text{ kles}}{\geq} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k+1)dx = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

- horní odhad

$$\int_1^n f(x)dx \stackrel{aditivita}{=} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \stackrel{f \text{ kles}}{\leq} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k)dx = \sum_{k=1}^n f(k)$$

- celkem tedy:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \quad \Bigg/ \lim_{\infty}$$

$$s - f(1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq s,$$

$$\text{kde } s = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

- přičemž ze sevření je zřejmé, že integrál a příslušná řada musí mít nutně stejný charakter.

☒

10.3.2 Věta 60 (srovnávací kritérium pro konvergenci integrálů)

Nechť f, g mají na (a, b) vlastnost R1. Nechť je dále splněno: $\forall x \in (a, b); 0 \leq g(x) \leq f(x)$. Potom platí:

$$\int_a^b f \boxed{\mathbb{K}} \Rightarrow \int_a^b g \boxed{\mathbb{K}}.$$

Důkaz:

- z nerovnosti v integrálech máme: $0 \leq \int_a^y g(x)dx \leq \int_a^y f(x)dx$, odtud limitním přechodem $\lim_{b-}$

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y g(x)dx \leq \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y f(x)dx$$

$$0 \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

- přičemž jsme $\int_a^b g(x)dx$ sevřeli mezi dvě reálná čísla, musí tedy být také reálné číslo, a proto konverguje.

☒

10.3.3 Věta 61 (limitní tvar srovnávacího kritéria pro integrály)

Buďte f, g kladné s vlastností R1. Nechť existuje $L := \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Potom:

$$L < \infty \wedge \int_a^b f(x)dx \text{ [K]} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ [K]}.$$

Důkaz:

- Určitě existuje H_b^- takové, že $\frac{f(x)}{g(x)} < L + 1$, a proto:

$$\begin{aligned} 0 < f(x) < (L + 1)g(x) & \quad \Bigg/ \int_a^b \\ 0 < \int_a^b f(x)dx < (L + 1) \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

- Opět se nám $\int_a^b f(x)dx$ sevřít mezi dvě reálná čísla. Nezbyvá tedy, než aby bylo také reálné.

☒