

Otázky pro test základních znalostí z Matematické analýzy 1

1. a) Nechť f je zobrazení množiny A do B , tj. $f: A \rightarrow B$.

Pomocí kvantifikátorů zapište:

- zobrazení f je prosté;
- zobrazení f je na množinu B .

b) Definujte, co znamená, že množina A je ekvivalentní s množinou B (tj. $A \sim B$).

c) Napište konkrétní příklad dvou množin A a B , které mají současně následující tři vlastnosti: $A \subset B$, $A \neq B$ a $A \sim B$. Zdůvodněte, proč vámi zvolené konkrétní množiny A , B jsou skutečně ekvivalentní.

2. a) Definujte pojmy: posloupnost, vybraná posloupnost, skorovybraná posloupnost.

b) Pro posloupnosti (a_n) , (b_n) , kde $a_n = ?$ a $b_n = ?$ (v každém testu bude nějaké konkrétní zadání) rozhodněte, zda

- jedna z těchto posloupností je vybraná z druhé;
- jedna z těchto posloupností je skorovybraná z druhé.

Své odpovědi zdůvodněte.

c) Vyslovte větu, která pojednává o vztahu limity posloupnosti a limity posloupnosti z ní vybrané.

3. Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost.

a) Buď $c \in \mathbb{R}$.

- Definujte pojem okolí bodu c .
- Zapište pomocí kvantifikátorů definici výroku $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$.

(Upozornění: zkontrolujte, zda váš zápis definice funguje univerzálně jak pro konečné, tak i nekonečné hodnoty c .)

b) Výroky A , B , C a D znějí takto:

A : (a_n) je omezená (shora omezená, zdola omezená),

B : (a_n) je konvergentní (divergentní, podstatně divergentní),

C : (a_n) má limitu (konečnou limitu, nekonečnou limitu),

D : (a_n) je monotónní (ryze monotónní).

Rozhodněte, zda pro libovonou posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ platí implikace $? \Rightarrow ?$ Svě tvrzení

zdůvodněte vyslovením příslušné věty, definice nebo konkrétním protipříkladem. (V testu budou místo $?$ uvedeny některé z konkrétních variant výroků $A, B, C, D, \neg A, \neg B, \neg C, \neg D$, kde $\neg$ značí negaci výroku.)

4. a) Vyslovte větu o vztahu limit posloupností (a_n) a (b_n) k limitě posloupnosti $(a_n ? b_n)$. (V

testu bude místo znaku $?$ zadána jedna z operací součet, rozdíl, součin, podíl a umocnění.

Poznámka: v případě umocnění předpoklejte, že (a_n) je kladná.)

b) Napište všechny páry hodnot $a, b \in \mathbb{R}$, pro které výraz $a ? b$ není definován. (Poznámka: v případě umocnění předpokládejte, že $a \geq 0$.)

c) Pro jeden vámi zvolený pár čísel a, b z předchozího bodu otázky vysvětlíte vhodnou volbou několika konkrétních dvojic posloupností (a_n) a (b_n) , proč výraz $a ? b$ nedefinujeme.

5. a) Definujte hromadnou hodnotu posloupnosti (a_n) .

b) Dejte příklad posloupnosti, jejíž počet hromadných hodnot je ? (V testu bude místo znaku ? uvedené přirozené číslo nebo $+\infty$.)

c) Napište, které dvě vlastnosti charakterizují číslo $\alpha = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n / \beta = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ (v testu bude jedna z těchto dvou variant).

6. Je daná posloupnost (a_n) a dvě posloupnosti (a_{k_n}) a (a_{h_n}) z ní vybrané.

a) Z jakých vlastností posloupností (a_{k_n}) a (a_{h_n}) plyne, že limita (a_n) neexistuje? Vyslovte příslušnou větu.

b) Z jakých vlastností posloupností (a_{k_n}) a (a_{h_n}) plyne, že limita (a_n) existuje? Vyslovte příslušnou větu.

7. Jsou dány dvě reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) , které mají limity $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Rozhodněte, které z následujících implikací NEJSOU pravdivé.

a) Pokud $a_n ? b_n$ pro každé přirozené číslo n , pak $a ? b$.

b) Pokud $a ? b$, pak pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí $a_n ? b_n$.

c) Pokud $a ? b$, pak pro každé přirozené číslo n platí $a_n ? b_n$.

(V testu budou místo znaků ? uvedeny některé ze symbolů $\leq, <, \geq, >, \neq, =$.) U každé implikace, kterou prohlásíte za nepravdivou, uveďte konkrétní dvojici posloupností (a_n) a (b_n) prokazující její neplatnost.

8. a) Definujte Eulerovo číslo e jako limitu jisté posloupnosti.

b) Odůvodněte, z jaké vlastnosti této posloupnosti plyne, že limita existuje. Příslušnou větu o existenci limity vyslovte.

9. a) Definujte hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$.

b) Dejte příklad množiny A , která má právě ? hromadných bodů. (V testu bude místo ? uvedeno celé nezáporné číslo nebo plus nekonečno).

c) Uveďte definici výroku $\lim_a f = c$. (Nezapomeňte nejprve uvést, co je f, a, c .)

10. a) Vyslovte Heineovu větu, která dává do souvislosti limitu funkce s limitami posloupností.

b) Předved'te na vámi zvoleném příkladě funkce f a bodu a , jak lze Heineovu větu využít k odůvodnění toho, že $\lim_a f$ neexistuje.

11. a) Vyslovte větu o limitě sevřené posloupnosti.

b) Vyslovte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro existenci konečné limity posloupnosti.

12. a) Vyslovte větu o limitě složené funkce.

b) Na základě této věty odvoďte, čemu jsou rovny limity funkcí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = ?$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$.

(Nezapomeňte při použití věty o limitě složené funkce ověřit všechny předpoklady!)

13. a) Definujte spojitost funkce v bodě.

b) Definujte, co znamená pojem izolovaný bod definičního oboru funkce.

c) Uveďte, jak je to se spojitostí funkce v izolovaném bodě definičního oboru této funkce. Svou odpověď řádně zdůvodněte.

14. a) Definujte spojitost funkce na intervalu.

b) Definujte, co se myslí pojmem obraz intervalu I funkcí f (tj. množina $f(I)$).

c) Napište, jakou vlastnost množiny $f(I)$ garantuje spojitost funkce f na uzavřeném intervalu I .

d) Na zvolené funkci f ukažte, že tato vlastnost není zaručená, pokud je interval $I = ?$ (v testu bude místo znaku ? uveden konkrétní interval, který nebude uzavřený).

15. a) Definujte pojem derivace funkce v bodě.

b) Uveďte příklad funkce f a bodu a tak, aby derivace f v bodě a byla rovna ? (v testu bude místo znaku ? uvedeno konkrétní reálné číslo nebo $+\infty$ nebo $-\infty$)/neexistovala. (Zdůvodněte, proč má f v bodě a tuto vlastnost.)

c) Napište, za jakých podmínek a jak lze ze znalosti derivace funkce f v bodě a spočítat derivaci funkce $\frac{1}{f}$ v bodě a .

16. a) Definujte pojem diferencovatelnost funkce v bodě.

b) Je dána funkce f a bod a . Výroky A, B, C znějí takto:

A : funkce f je spojitá v bodě a ,

B : funkce f je diferencovatelná v bodě a ,

C : funkce f má derivaci v bodě a .

Rozhodněte, zda platí $? \Rightarrow ?$ (v testu budou ? nahrazeny jedním z výroků $A, B, C, \neg A, \neg B, \neg C$).

Své odpovědi zdůvodněte.

17. a) Napište, kdy lze k funkci f definovat inverzní funkci, a definujte ji.

b) Za jakých podmínek a jak lze ze znalosti derivace funkce f v bodě ? určit derivaci funkce f^{-1} v bodě a . (Za otazník ? doplňte vhodný bod.)

18. a) Kdy říkáme, že funkce f má v bodě a lokální maximum? Napište příslušnou definici.

b) Co znamená, že funkce f nabývá na intervalu I svého suprema? Zapište pomocí kvantifikátorů.

c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti derivaci funkce f s prvním bodem této otázky.

19. a) Na příkladě zvolených funkcí f a g ukažte, že skládání funkcí není komutativní.

b) Vyslovte větu, která ze spojitosti funkce g a funkce f ve vhodných bodech zaručí spojitost $f \circ g$ v bodě a .

c) Analogickou větu vyslovte pro derivaci složené funkce a uveďte vzorec pro její výpočet.

20. a) Kdy říkáme, že funkce f má svislou asymptotu o rovnici $x = a$?

b) Kdy říkáme, že funkce f má asymptotu v bodě $-\infty$? Jak určíme parametry této asymptoty?

c) Uveďte příklad funkce f , pro kterou platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ a f nemá asymptotu v bodě $-\infty$.

21. a) Kdy říkáme, že funkce f je ostře rostoucí na intervalu I resp. funkce f je rostoucí na intervalu I ? Napište příslušné definice.

b) Uvažujme funkci f , která je spojitá na intervalu I a má konečnou derivaci v každém bodě $x \in I^0$. Jsou dány následující výroky A, B, C, D :

A : funkce f je rostoucí na I ,

B : funkce f je ostře rostoucí na I ,

C : $f'(x) > 0$ v každém bodě $x \in I^0$,

D : $f'(x) \geq 0$ v každém bodě $x \in I^0$.

Rozhodněte, zda platí $? \Rightarrow ?$ (v testu budou ? nahrazeny jedním z výroků $A, B, C, D, \neg A, \neg B, \neg C, \neg D$). Svoji odpověď zdůvodněte.

22. a) Kdy říkáme, že funkce f je konvexní na intervalu I ? Napište příslušnou definici.

b) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost funkce a první derivaci funkce f .

c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost funkce a druhou derivaci funkce f .