

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n^2} \arctan \frac{k}{n^2}$$

Uvažujeme rozdělenní (σ_n) intervalu $\langle 1, 2 \rangle$

$$\sigma_n = \left\{ 1 + \frac{k}{n^2} : k=0, 1, 2, \dots, n^2 \right\}$$

Pak $\frac{1}{n^2} \sum_{k=n^2+1}^{2n^2} \arctan \frac{k}{n^2} + \frac{1}{n^2} \arctan \frac{n^2}{n^2} =$

$$Y(\sigma_n) + \frac{1}{n^2} \frac{\pi}{4}$$

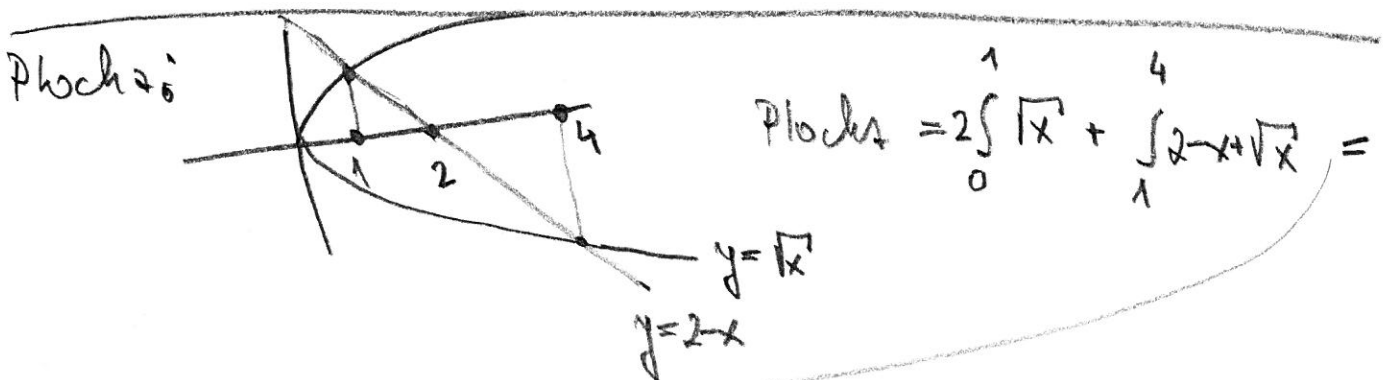
, kde Y je integr. souč.
funkce $f(x) = \arctan x$

pro $n \rightarrow \infty$

distancně $\lim_{n \rightarrow \infty} \dots = \int_1^2 \arctan x dx = \text{plocha}$

$$= [x \arctan x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= [x \arctan x]_1^2 - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_1^2 = 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{\frac{2}{5}}$$



$$= 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = 4 \frac{1}{2}$$

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2+4x+5} \right)^2 = \int \left(1 - \frac{4x+5}{x^2+4x+5} \right)^2 = \int \left(1 - \frac{4(x+2)-3}{(x+2)^2+1} \right)^2 dx$$

substitute $y = x+2$

$$\int \left(1 - \frac{4y-3}{y^2+1} \right)^2 dy$$

Upravíme vy'raz:

$$\left(1 - \frac{4y-3}{y^2+1} \right)^2 = 1 - 2 \frac{4y-3}{y^2+1} + \frac{16y^2-24y+9}{(y^2+1)^2}$$

$$= 1 - 4 \frac{2y}{y^2+1} + 6 \frac{1}{y^2+1} + 16 \frac{1}{y^2+1} - 7 \frac{1}{(y^2+1)^2} - 12 \frac{2y}{(y^2+1)^2}$$

primit. funkce k jednotlivým členům

$$y - 4 \ln(y^2+1) + 22 \arctan y + 12 \frac{1}{y^2+1} - 7 \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy$$

→ to vyřešíme jako na předchozíce pomocí per partes

a pak dosadíme do všeho $y = x+2$