MAA2 cvičení LS 2016/17

Pracovní verze k: 14. 3. 2017

Polynomy

1. Dokažte tvrzení: má-li polynom p kořen x_0 s násobností $\lambda > 0$, má derivace p' kořen x_0 s násobností $\lambda - 1$.

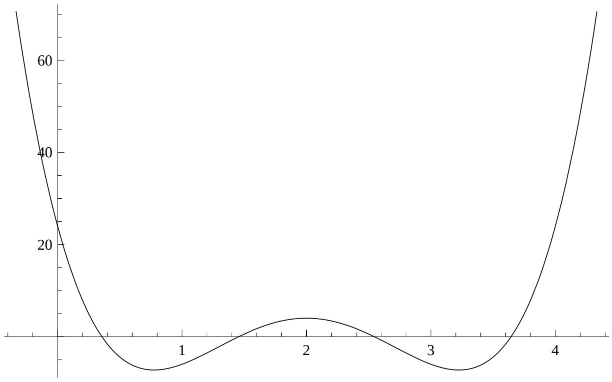
Důkaz. Je-li $p(x) = (x-x_0)^\lambda q(x)$, kde $q(x_0) \neq 0$, pak

$$p'(x) = \lambda(x-x_0)^{\lambda-1}q(x) + (x-x_0)^\lambda q'(x) = (x-x_0)^{\lambda-1}\underbrace{(\lambda q(x) + (x-x_0)q'(x))}_{r(x)}.$$

Protože $r(x_0) = \lambda q(x_0) \neq 0$, je x_0 právě $\lambda-1$-násobným kořenem p'.

2. Je dán polynom $p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Ukažte, že derivace p' má 4 reálné kořeny, a separujte je.

Řešení. p je 5. stupně, p' je stupně 4. Podle Rolleovy věty má p' právě 4 reálné kořeny, a to v intervalech (0,1), (1,2), (2,3), (3,4).



Polynom p'

3. Legendrovy polynomy. Označme

$$P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

Pak P_n, $n = 1,2,\ldots$ jsou polynomy n-tého řádu a všechny kořeny P_n jsou reálné, jednonásobné a leží v intervalu $(-1,1)$.

Důkaz. Polynom $q(x) = (x^2-1)^n$ je polynom stupně $2n$. Polynom q' je stupně $2n-1$, q'' je stupně $2n-2$, ... atd. až $q^{(n)}$ je stupně n.

Napišme pro zajímavost P_1, P_2, P_3:

$$P_1(x) = 2x,$$
$$P_2(x) = 12x^2 - 4,$$
$$P_3(x) = 120x^3 - 72x.$$

Polynom $q(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ má za kořeny čísla 1 a -1, každý s násobností n. Podle Rolleovy věty a lemmatu 1 bude mít q' kořeny 1 a -1, každý s násobností $n-1$ a dále alespoň 1 kořen x_0 z $(-1,1)$. (To je dohromady $2n-1$ kořenů, jsou to tedy všechny kořeny q', jiné mít q' nemůže.) Podobně q'' bude mít za kořeny 1 a -1, každý s násobností $n-2$ a dále jeden kořen z intervalu $(-1,x_0)$ a jeden z $(x_0,1)$. To je celkem $2n-2$ kořenů, jiné mít q'' tedy nemůže. Indukcí se dostaneme až k tomu, že $q^{(n)}$ bude mít právě n kořenů a všechny z $(-1,1)$ (kořeny -1 a 1 v posledním kroku zmizí).

4. Dokažte tvrzení: buď p reálný polynom, který má všechny kořeny reálné. Pak p' má také všechny kořeny reálné.

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ jsou všechny kořeny p stupně n s násobnostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Je $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = n$, všechna x_j jsou reálná čísla. Podle lemmy 1 p' bude mít za kořen číslo x_j jistě v případě, že $\lambda_j > 1$. Dále z Rolleovy věty plyne, že p' bude mít za kořeny čísla $y_1, \ldots, y_{k-1}$, kde $y_j \in (x_j, x_{j+1})$. Celkem tedy bude mít p' kořeny x_j s násobnostmi $\lambda_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$ a y_j, $j = 1, \ldots, k-1$. To dává dohromady $\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - 1) + k - 1 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j - 1 = n - 1$ kořenů, jsou to tedy všechny kořeny p' a jsou reálné.

Poznámka: Legendrovy polynomy tvoří OG bázi v prostoru kvadr. integrab. funkcí na $\langle -1, 1\rangle$. Platí pro ně $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \mathrm{d}x = C_n \delta_{mn}$ (kde C_n je nějaký normalizační koeficient).

5. Dokažte tvrzení: buď p reálný polynom, který má všechny kořeny reálné. Má-li p' vícenásobný kořen λ, je λ i kořenem p.

Důkaz. Buď $x_1 < \ldots < x_k$ všechny kořeny p (jsou reálné) s násobnostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Buď p stupně n, pak p' je stupně $n-1$. Je $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = n$. Pokud by λ nebyla kořenem p, tj. byla různá od všech x_j, pak by musela být maximálně jednonásobným kořenem p', neboť jaké má p' pouze kořeny: jsou to x_j s násobnostmi $\lambda_j - 1$ a dále jednonásobné kořeny $y_1, \ldots, y_{k-1}$ ležící v (x_j, x_{j+1}) (jeden z y_j je roven λ). To jsou všechny kořeny p', neboť součet jejich násobností je $n-1$.

6. Jak odhadnout, kam kořeny polynomu padnou? Dokažte tvrzení: buď $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polynom s nejvyšším koeficientem znormovaným na jedničku. Označme $A = \max |a_0|, \ldots, |a_{n-1}|$. Pak pro všechny kořeny $x_1, \ldots, x_k$ polynomu p platí $|x_j| \leqq 1 + A$.

Důkaz. Je

$$|p(x)| \geqq |x^n| - |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \geqq |x^n| - \Big(|a_{n-1}||x|^{n-1} + \ldots + |a_0|\Big) \geqq |x^n| - A\Big(|x|^{n-1} + \ldots + 1\Big) =$$
$$= |x|^n - A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \geqq |x|^n - A\frac{|x|^n}{|x|-1} = |x|^n\left(1 - \frac{A}{|x|-1}\right).$$

Buď $|x| > 1$. Je-li nyní x takové, že výraz v závorce kladný, tj.

$$1 - \frac{A}{|x|-1} > 0 \Leftrightarrow |x| > A + 1,$$

pak $|p(x)| > 0$, tj. x nemůže být kořenem p.

7. Buď $p(x) = 2x^3 + x - 6$. Odhadněte maximální interval, který obsahuje kořeny p.

Důkaz. Podle lemmatu 6 $A = \max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, |-3|\right\} = 3$, kořeny jsou proto všechny z intervalu $(-4, 4)$.

8. Mírná modifikace Rolleovy věty. Dokažte tvrzení: Buď $a \in \mathbb{R}$. Buď f spojitá na $\langle a, +\infty)$, $f(a) = 0$, $\lim_{+\infty} f = 0$ a nechť f má derivaci na $(a, +\infty)$. Pak existuje $c \in (a, +\infty)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pokud je f identicky nulová, tvrzení platí triviálně. Nechť f není na $\langle a, +\infty)$ konstantní. Pak existuje $b \in (a, +\infty)$ takové, že $f(b) \neq 0$. Z definice limity najděme takové $d \in (b, +\infty)$, pro které platí $|f(d)| < \frac{|f(b)|}{2}$. Na intervalu $\langle a, d\rangle$ je funkce f spojitá, proto zde nabývá svého maxima a minima. Díky volbě d se alespoň jeden z těchto extrémů nemůže nacházet v bodech a, d. Tedy se bude nacházet v nějakém bodě $c \in (a, d)$, kde díky existenci derivace bude platit $f'(c) = 0$.

Poznámka: věta platí pochopitelně i zleva, pro $-\infty$.

9. Dokažte tvrzení: Označme

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

Pak L_n, $n = 1, 2, \ldots$ je polynom n-tého stupně a má všechny kořeny reálné a kladné.

Důkaz. Napišme pro zajímavost první tři polynomy:

$L_1(x) = -x+1,$
$L_2(x) = x^2-4x+2,$
$L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6.$

Platí $L_n(x) = e^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}$, proto je polynom n-tého stupně. Koeficient u nejvyšší mocniny x^n je zřejmě $(-1)^n$.

Pro pevné $n\in\mathbb{N}$ má funkce $h(x)=x^ne^{-x}$ na $\langle 0,+\infty)$ jediný nulový bod $x=0$. Přitom $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x) = 0$. Proto podle lemmatu 8 má h' též nulový bod $x_1 \in (0,+\infty)$. Přitom polynom $e^xh'(x) = e^x\left(nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}\right) = nx^{n-1}-x^n$ má číslo 0 za $n-1$-násobný kořen. Proto h'' bude mít kromě nulového bodu 0 dva nulové body $x_2\in(0,x_1)$ a $x_3\in(x_1,+\infty)$. h''' bude mít kromě nuly tři kladné nulové body atd. Po n-tém zderivování se objeví u polynomu $e^x(h(x))^{(n)}$ poprvé nenulový absolutní člen o velikosti $n!$ a tento polynom tedy nebude mít za kořen nulu, bude však mít n kladných reálných kořenů.

10. Čebyševovy polynomy. Označme

$T_n(x) = \cos(n\arccos x).$

Pak T_n, $n = 1,2,\ldots$ jsou polynomy n-tého stupně zúžené na $\langle -1,1\rangle$ mající u x^n koeficient 2^{n-1} a všechny kořeny jednoduché.

Důkaz. Je

$$\cos nz = \mathrm{Re}\,(\cos nz + i\sin nz) = \mathrm{Re}\,(\cos z + i\sin z)^n = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}z(i\sin z)^k =$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}z(-1)^k\sin^{2k}z = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}z(-1)^k(1-\cos^2 z)^k.$$

Proto

$$\cos(n\arccos x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}x^{n-2k}(x^2-1)^k.$$

Jde tedy skutečně o polynomy n-tého stupně.

Pro zajímavost: platí

$T_1(x) = x,$
$T_2(x) = 2x^2-1,$
$T_3(x) = 4x^3-3x.$

Koeficient u nejvyšší mocniny x^n je roven $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ (součet čísel na $n-1$-ním řádku Pascalova trojuhelníku).

Protože

$$\cos nz = 0 \Leftrightarrow nz = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2k+1}{n},$$

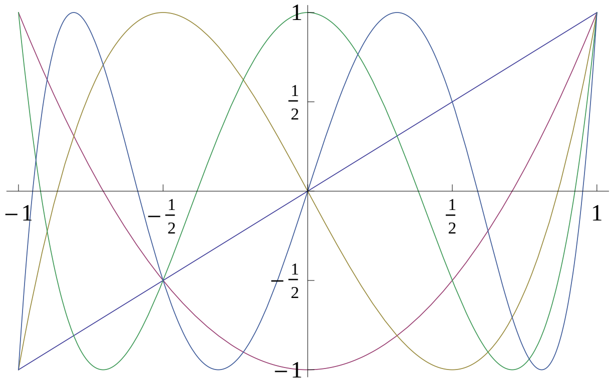
kořeny polynomu T_n jsou právě čísla $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2k+1}{n}$, $k = 0,\ldots,n-1$. Jsou z $(-1,1)$, je jich n, tedy jsou všechny (a to reálné a jednonásobné).

Poznámka: T_n může nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle -1,1\rangle$, neboť obor hodnot cos je $\langle -1,1\rangle$. Jedné nabývá T_n v bodech, které dostaneme řešením rovnice

$$\cos nz = 1 \Leftrightarrow nz = 2k\pi \Leftrightarrow z = \frac{2k\pi}{n},$$

tj. v bodech $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$, $k=0,\dots,[\frac{n}{2}]$.

Obrázek Čebyševových polynomů je zde:



Čebyševovy polynomy T_n

Stejnoměrná spojitost

11. Dokažte, že $f(x)=x$ je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Je třeba ukázat, že

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)(\forall\,x,y\in\mathbb{R})(|x-y|<\delta\Rightarrow|x-y|<\varepsilon).$$

Stačí volit $\delta=\varepsilon$.

12. Dokažte, že $f(x)=\dfrac{1}{x}$ je stejnoměrně spojitá na $\langle 1,+\infty)$.

Důkaz. Je třeba ukázat, že

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)(\forall\,x,y\geqq 1)\left(|x-y|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\varepsilon\right).$$

Zvolme lib. $\varepsilon>0$. Pak pro lib. $x,y\geqq 1$ je

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}\leqq|x-y|,$$

stačí proto volit $\delta=\varepsilon$.

13. Dokažte, že $f(x)=\dfrac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$.

Důkaz. Je třeba ukázat, že

$$(\exists\,\varepsilon>0)(\forall\,\delta>0)(\exists\,x,y\in(0,1))\left(|x-y|<\delta\wedge\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\geqq\varepsilon\right).$$

Volme $\varepsilon=1$. Pro libovolné $\delta>0$ pak volme $x<\min\left(\delta,\dfrac{1}{2}\right)$ libovolně, $y=2x$. Pak

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{2x}\geqq 1.$$

14. Dokažte tvrzení: Pokud je f stejnoměrně spojitá na (a,b), kde $a,b\in\mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{a+}f$ a $\lim\limits_{b-}f$ existují a jsou konečné. (Tj. f lze spojitě dodefinovat na $\langle a,b\rangle$.)

Důkaz. Z BCP plyne, že $\lim\limits_{a+}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$(\forall\,\varepsilon)(\exists\,\delta>0)(\forall\,x,y\in(a,a+\delta))(|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

To ovšem plyne ze stejnoměrné spojitosti na (a,b). Podobně pro $\lim\limits_{b-}$.

15. Dokažte pomocí předcházejícího lemmatu, že $f(x)=\dfrac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$.

Důkaz. Není $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

16. Dokažte tvrzení: Buď f spojitá na (a,b), kde $a,b \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim\limits_{a+} f \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{b-} f \in \mathbb{R}$. Pak f je na (a,b) spojitá stejnoměrně.

Důkaz. Dodefinujeme-li f na celé $\langle a,b\rangle$ pomocí hodnot jednostranných limit, je f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Podle Cantorovy věty je na $\langle a,b\rangle$ stejnoměrně spojitá, tedy je stejnoměrně spojitá i na (a,b).

17. Ukažte, že sin je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Je třeba ukázat, že

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x,y \in \mathbb{R})(|x-y| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin y| < \varepsilon).$$

Pro $z \geqq 0$ platí nerovnost $\sin z \leqq z$ (neboť pro funkci $f(z) = z - \sin z$ je $f'(z) = 1 - \cos z \geqq 0$, tedy f je rostoucí, a $f(0) = 0$). Pro libovolné $x,y \in \mathbb{R}$ je proto

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqq 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|.$$

Stačí proto volit $\delta = \varepsilon$.

Lepší způsob: použijeme Lagrangeovu větu, z ní

$$|\sin x - \sin y| = |(\cos z)(x-y)| \leqq |x-y|.$$

18. Dokažte tvrzení: Pokud má funkce f na intervalu I omezenou derivaci, je na něm stejnoměrně spojitá.

Důkaz. Nechť pro všechna $z \in I$ je $|f'(z)| \leqq K$. Buď $x,y \in I$, $x < y$. Pak

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)(y-x)| \leqq K|y-x|.$$

Odtud již plyne podmínka

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x,y \in I)(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zkoumejme, zda platí opačná podmínka:

19. Dokažte, nebo vyvraťte tvrzení: *Funkce stejnoměrně spojitá a diferencovatelná na I má na I omezenou derivaci.*

Řešení. Tvrzení neplatí. Položme $f(x) = \sqrt{x}$, $I = (0,1)$. Pak $\lim\limits_{0+} f = 0$, $\lim\limits_{1-} f = 1$, funkce je tedy na I podle lematu 16 stejnoměrně spojitá. Přitom $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ není omezená na $(0,1)$.

20. Dokažte, že $f(x) = x\sin x$ není na $\mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Důkaz. Ukažme, že

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x,y,\ |x-y| < \delta)\Big(|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon\Big).$$

Volme např. $x_n = 2n^2\pi$, $y_n = 2n^2\pi + \frac{\pi}{4n}$ pro $n = 1,2,\ldots$. Pak

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4n} = 0$$

a přitom

$$|f(y_n) - f(x_n)| = |\sin z_n + z_n\cos z_n||y_n - x_n| \geqq z_n\cos z_n(y_n - x_n) \geqq 2n^2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 n}{4},$$

kde $z_n \in (x_n, y_n)$ jsme získali z Lagrangeovy věty o přírůstku funkce, takže

$$\lim_{n\to+\infty}|f(y_n) - f(x_n)| = +\infty.$$

Stačí tedy volit $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}$.

21. Dokažte, že součin dvou stejnorměrně spojitých funkcí na intervalu I nemusí být na I stejnoměrně spojitý.

Důkaz. Plyne z příkladu 20.

Křivky zadané parametricky

22. Dokažte tvrzení: Nechť $\varphi,\psi\colon I \to \mathbb{R}$ jsou dvakrát diferencovatelné na intervalu I, nechť $\varphi'(t) \neq 0$ na I. Pak funkce $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ má

a) v bodě $x_0 = \varphi(t_0)$ derivaci $f'(x_0) = \dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$,

b) v bodě $x_0 = \varphi(t_0)$ druhou derivaci $f''(x_0) = \dfrac{G'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$, kde G je funkce definovaná vztahem $G(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Důkaz. φ je na I ostře monotónní, $\varphi(I) = \mathcal{J}$ je interval a f je tedy korektně definovaná na $\mathcal{J}$.

a) Derivace funkce ψ v bodě $t \in I$ je podle vzorce pro derivování složené funkce

$$\Big(\psi(t)\Big)' = \Big(f(\varphi(t))\Big)' = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Odtud $f'(\varphi(t)) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

b) Označme $G(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pro všechna $t \in I$. Pak derivace

$$G'(t) = \Big(f'(\varphi(t))\Big)' = f''(\varphi(t))\varphi'(t),$$

odkud $f''(\varphi(t)) = \dfrac{G'(t)}{\varphi'(t)}$.

23. Parametrizujte Descartův list $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ pomocí parametrizace $y = xt$. Vyšetřete takto parametrizovanou křivku.

Řešení. Zajímá nás množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 3axy\}$. Bod $(0,0) \in M$. Pokud $x \neq 0$, pak pro y, pro které $(x,y) \in M$, jistě existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $y = xt$. Proto lze použít (pro $x \neq 0$) tuto parametrizaci. Zajímají nás pak (x,t), pro které $x \neq 0$ a vyhovují rovnici

$$x^3 + (xt)^3 = 3axxt \Leftrightarrow x(1+t^3) = 3at. \tag{1}$$

Pro $t = -1$ je levá strana nulová, ale pravá nenulová, tj. taková (x,t), kde $t = -1$, nevyhovují podmínce. Proto je podmínka (1) ekvivalentní podmínce

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \wedge t \neq -1.$$

Pro y dostaneme

$$y = xt = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Vidíme, že $x = 0$ je pouze pro $t = 0$, pro tento bod je ale $y = 0$, a protože $(0,0) \in M$, můžeme $t = 0$ ponechat. Je tedy celkově

$$M = \left\{ \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}.$$

Načrtneme nyní v rovině body, které náleží do M. Vypočteme

$$x'(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3} \right)' = 3a\frac{1+t^3 - t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}.$$

Je

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

zkoumáme tedy intervaly $t \in (-\infty,-1)$, $\left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right\rangle$, $\left\langle \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ zvlášť. Je

$$y'(t) = 3a\frac{2t(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2} = 3at\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}.$$

Odtud

$$f'(x(t)) = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \tag{2}$$

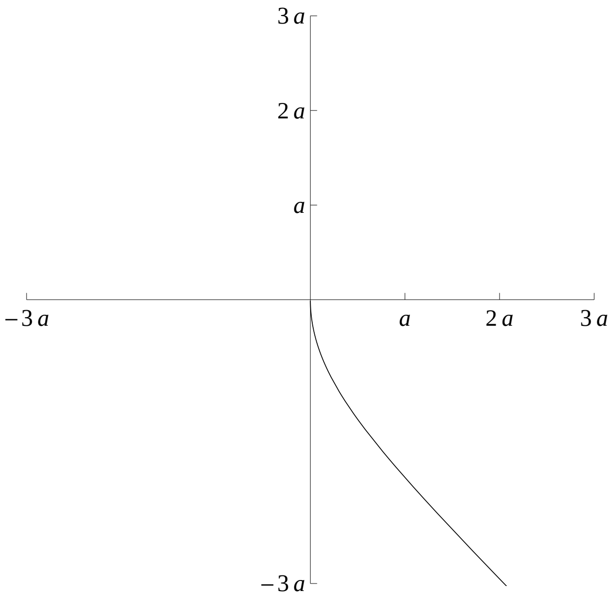
Dále je

$$f''(x(t)) = \frac{\left(\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}\right)'}{3a\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{\dfrac{(2-4t^3)(1-2t^3)-(2t-t^4)(-6t^2)}{(1-2t^3)^2}}{3a\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}. \tag{3}$$

Zaměříme se na interval $(-\infty,-1)$. Zde dostaneme:

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to-1-} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to-1-} y(t) = -\infty.$$

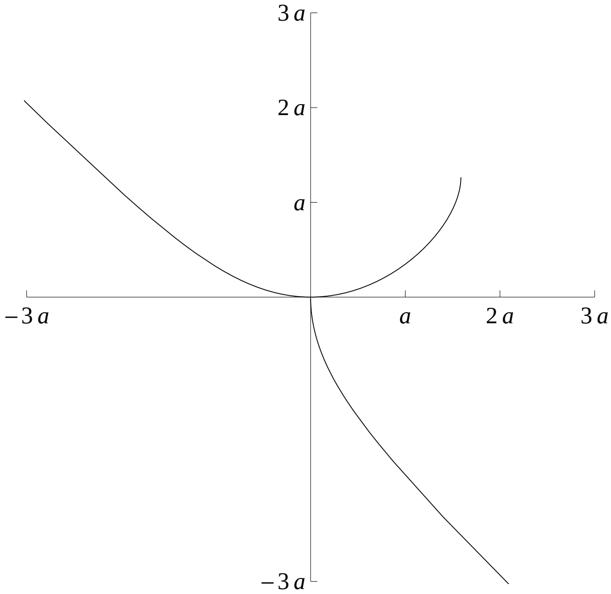
Pro $t \in (-\infty,-1)$ je první derivace (2) záporná, druhá derivace (3) kladná, je tedy f ostře klesající, ryze konvexní:



Na intervalu $\left(-1,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right\rangle$ dostaneme:

$$\lim_{t\to-1+} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to-1+} y(t) = +\infty, \quad x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt[3]{4}a, \quad y\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt[3]{2}a.$$

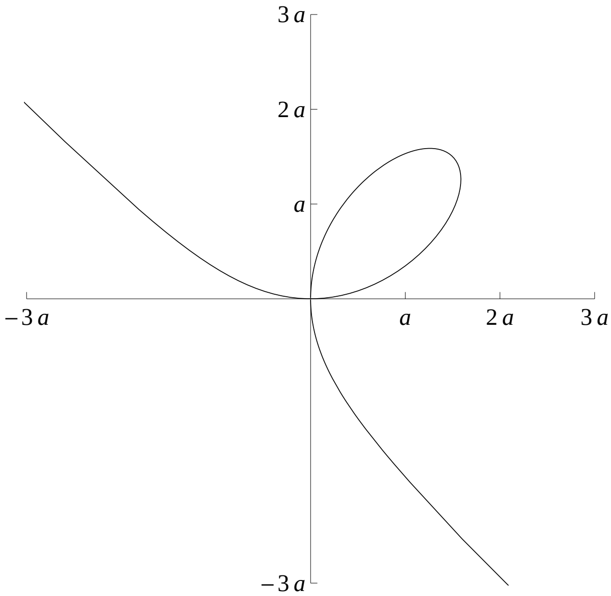
První derivace (2) je zde záporná pro $t \in (-1,0)$, kladná pro $t \in \left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, nulová pro $t = 0$. Druhá derivace (3) je kladná všude. Proto f má pro $t=0$ lokální minimum; je v bodě $x(0) = y(0) = 0$:



Na intervalu $\left\langle \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ dostaneme:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0,$$

dále první derivace (2) je zde záporná pro $t \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$, kladná pro $t \in (\sqrt[3]{2}, +\infty)$, nulová pro $t = \sqrt[3]{2}$. Druhá derivace (3) je záporná všude. Proto f má pro $t = \sqrt[3]{2}$ lokální maximum; je v bodě $x(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}a$, $y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}a$:



24. Vyšetřete křivku zadanou v polárních souřadnicích rovnicí $\rho = a(1+\cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ (kardioida).

Řešení. Použijeme parametrizaci v polárních souřadnicích:

$$x = \rho\cos t = a(1+\cos t)\cos t, \quad y = \rho\sin t = a(1+\cos t)\sin t.$$

Je

$$x'(t) = a\Big(-\sin t\cos t + (1+\cos t)(-\sin t)\Big) = -a\sin t(1+2\cos t),$$

$$y'(t) = a\Big(-\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t\Big) = a(2\cos^2 t + \cos t - 1) = a(\cos t + 1)(2\cos t - 1).$$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \pi \vee t = \frac{2\pi}{3}$, proto zkoumáme zvlášť intervaly $t \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ a $t \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$. Je

$$f'(x(t)) = \frac{(\cos t+1)(1-2\cos t)}{\sin t(1+2\cos t)} = \frac{-\cos t-\cos 2t}{\sin t(1+2\cos t)} = -\frac{2\cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}(1+2\cos t)} = -\frac{\cos\frac{3t}{2}}{\sin\frac{t}{2}(1+2\cos t)}.$$

Pro druhou derivaci dostaneme

$$f''(x(t)) = -\left(\frac{\cos t+\cos 2t}{\sin t(1+2\cos t)}\right)'\cdot\frac{1}{-a\sin t(1+2\cos t)} =$$
$$= -\frac{(-\sin t-2\sin 2t)(\sin t(1+2\cos t))-(\cos t+\cos 2t)(\cos t(1+2\cos t)+\sin t(-2\sin t))}{-a\sin^3 t(1+2\cos t)^3} =$$
$$= -\frac{(\sin t+4\sin t\cos t)(\sin t+2\cos t\sin t)+(\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t)(\cos t+2\cos^2 t-2\sin^2 t)}{a\sin^3 t(1+2\cos t)^3},$$

čitatel zlomku je po roznásobení roven

$$2\sin^4 t+\sin^2 t+2\cos^4 t+3\cos^3 t+\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t+3\sin^2 t\cos t =$$
$$= 1+2(\sin^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t+\cos^4 t)+3\cos t(\cos^2 t+\sin^2 t) = 1+2+3\cos t = 3(1+\cos t),$$

takže

$$f''(x(t)) = -\frac{3(1+\cos t)}{a\sin^3 t(1+2\cos t)^3}.$$

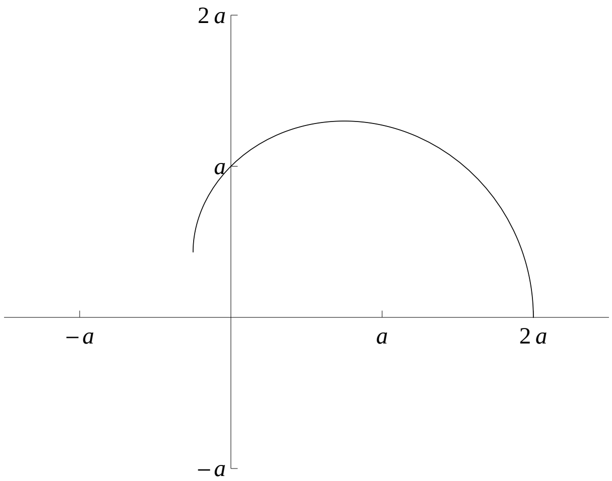
Máme

$$x(0)=2a,\quad y(0)=0,\quad x\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{a}{4},\quad y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}a}{4},\quad x(\pi)=0,\quad y(\pi)=0.$$

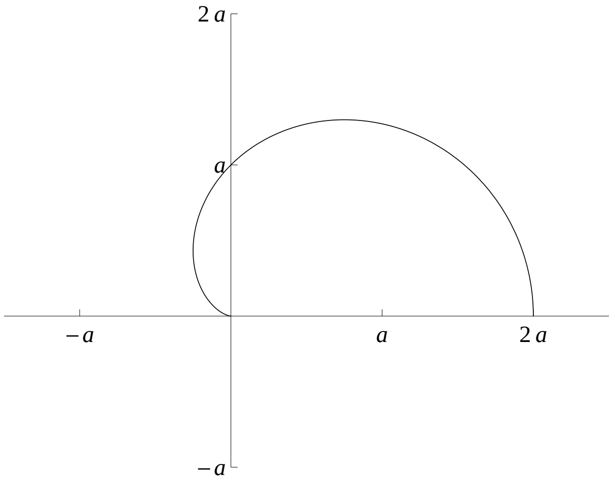
Zkoumejme nejprve funkci pro hodnoty $t\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$. Pro $t\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ je $f'(x(t))>0$, zde f ostře roste; pro $t\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ je $f'(x(t))<0$, zde je f ostře klesající. Je

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3a}{4},\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}a}{4}.$$

Na celém intervalu $t\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ je přitom $f''(x(t))<0$, tj. f je zde konkávní:



Pro hodnoty $t\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ je $f'(x(t))<0$, $f''(x(t))>0$, f je tedy ostře klesající a konvexní:



25. Vyšetřete křivku $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, kde $a>0$ (asteroida).

Řešení. Křivka je symetrická podle os x i y, stačí vyšetřit 1. kvadrant. Vidíme, že není třeba parametrizovat, neboť zde lze explicitně vyjádřit

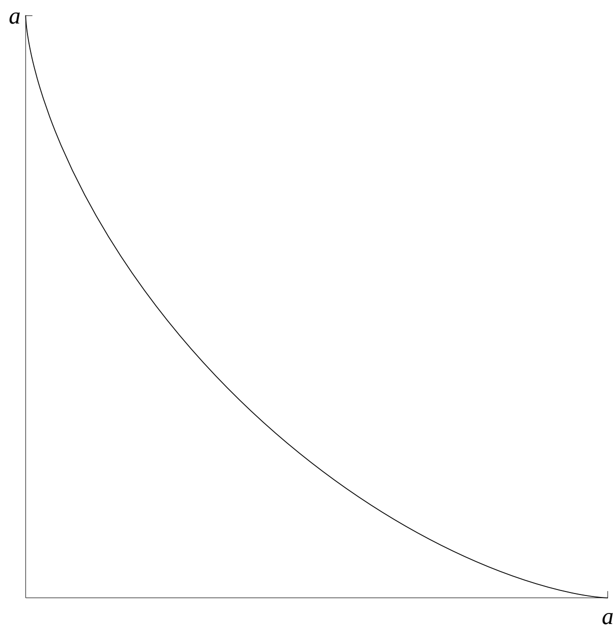
$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pro $x\in(0,a)$ je

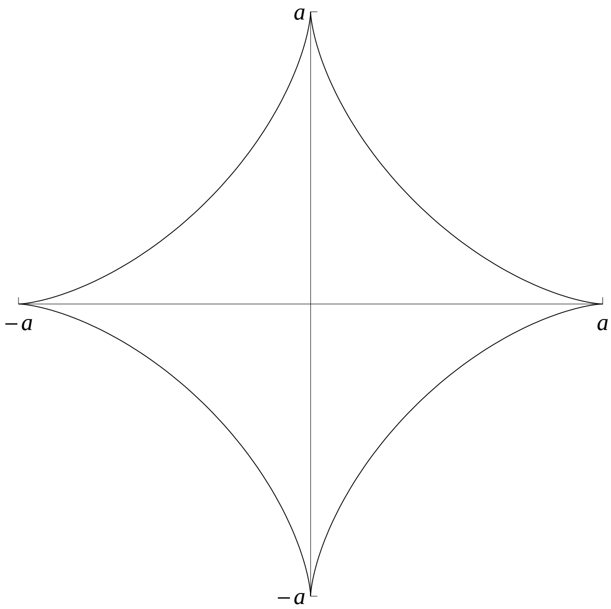
$$f'(x)=-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}<0,$$

$$f''(x)=-\frac{-\frac{1}{3\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}-\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}\sqrt[3]{x^4}}>0.$$

Je zde tedy f ostře klesající a ryze konvexní:



Ze symetrie snadno dokreslíme zbytek křivky:



26. Vyšetřete v prvním kvadrantu křivku $x^y = y^x$.

Řešení. Pohybujeme se v prvním kvadrantu, můžeme tedy předpokládat $x > 0, y > 0$. Použijeme např. parametrizaci $y = xt$, $t > 0$. Dosazením do rovnice křivky dostaneme rovnici

$$x^{xt} = (xt)^x \Leftrightarrow x^{xt-x} = t^x \Leftrightarrow x(t-1)\ln x = x\ln t \Leftrightarrow (t-1)\ln x = \ln t$$

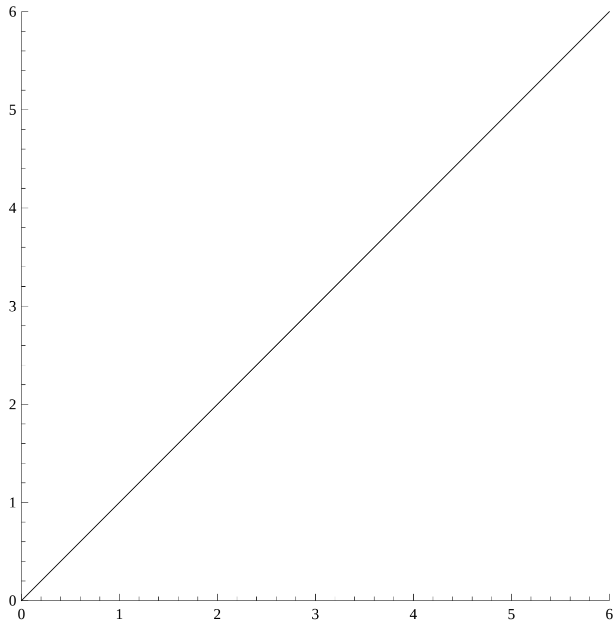
Pro $t = 1$ je rovnost splněna pro každé x, pro $t \neq 1$ dostaneme

$$\ln x = \frac{\ln t}{t-1} \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{t-1}}.$$

Pro y máme

$$y = t \cdot t^{\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

Pro $t = 1$ je tedy grafem polopřímka:



Pro $t \neq 1$ dostaneme:

$$x'(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)' = t^{\frac{1}{t-1}}\left(-\frac{1}{(t-1)^2}\ln t + \frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{t^{\frac{1}{t-1}}(-t\ln t + t - 1)}{(t-1)^2 t},$$

$$y'(t) = \left(t^{\frac{t}{t-1}}\right)' = t^{\frac{t}{t-1}}\left(-\frac{1}{(t-1)^2}\ln t + \frac{1}{t-1}\right) = \frac{t^{\frac{t}{t-1}}(-\ln t + t - 1)}{(t-1)^2}.$$

Je

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow -t\ln t + t - 1 = 0.$$

Označme $g(t) = -t\ln t + t - 1 = t(1-\ln t) - 1$. Tato funkce má derivaci

$$g'(t) = 1 - \ln t + t\left(-\frac{1}{t}\right) = 1 - \ln t - 1 = -\ln t.$$

Proto g ostře roste na $(0,1\rangle$, ostře klesá na $\langle 1,+\infty)$ a $g(1)=0$. Je tedy $g(t)<0$ pro všechna $t\neq 1$, tím pádem $x'(t)<0$ pro všechna $t\neq 1$. Podobně $y'(t)>0$ pro všechna $t\neq 1$, neboť funkce $h(t) = -\ln t + t - 1$ má derivaci $h'(t) = -\frac{1}{t}+1$ zápornou na $(0,1)$ a kladnou na $(1,+\infty)$, tedy h je ostře klesající na $(0,1\rangle$ a ostře rostoucí na $\langle 1,+\infty)$ a $h(1)=0$. Z uvedeného plyne, že

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2(t-1-\ln t)}{t-1-t\ln t}$$

je záporná pro $t\neq 1$, f tedy pro $t\in(0,1)$ i pro $t\in(1,+\infty)$ ostře klesá. Máme

$$\lim_{t\to 0+} x(t) = \lim_{t\to 0+} t^{\frac{1}{t-1}} = +\infty, \quad \lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{t\to 0+} t^{\frac{t}{t-1}} = 1,$$

$$\lim_{t\to 1} x(t) = \lim_{t\to 1} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t\to 1} e^{\frac{1}{t-1}\ln t} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(t+1)}{t}} = e^1 = e, \quad \lim_{t\to 1} y(t) = \lim_{t\to 1} t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t\to 1} e^{\frac{t\ln t}{t-1}} = e,$$

$$\lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{t\to +\infty} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t\to +\infty} e^{\frac{\ln t}{t-1}} = e^0 = 1, \quad \lim_{t\to +\infty} y(t) = \lim_{t\to +\infty} e^{\frac{t\ln t}{t-1}} = +\infty.$$

Pro druhou derivaci dostaneme

$$f''(x(t)) = \frac{(t-1)^2 t}{t^{\frac{1}{t-1}}(-t\ln t + t - 1)}\left(\frac{t^2(t-1-\ln t)}{t-1-t\ln t}\right)' = \frac{(t-1)^2 t h_1(t)}{t^{\frac{1}{t-1}}(t-1-t\ln t)^3},$$

kde

$$h_1(t) = 3(t-1)^2 - 2(t^2-1)\ln t + t\ln^2 t.$$

O znaménku rozhoduje $h_1(t)$, neboť činitel ve jmenovateli $g(t)^3 = (t-1-t\ln t)^3$ je všude záporný, ostatní činitelé jsou kladní. Ukážeme, že $h_1(t)<0$ pro všechna $t\neq 1$: postupně zderivujeme

$$h_2(t) = h_1'(t) = \frac{2}{t} - 6 + 4t + (2-4t)\ln t + \ln^2 t,$$

$$h_2'(t) = \frac{2}{t^2}\Big(\underbrace{t-1+(t-2t^2)\ln t}_{h_3(t)}\Big),$$

$$h_4(t) = h_3'(t) = 2 - 2t + (1-4t)\ln t,$$

$$h_5(t) = h_4'(t) = \frac{1}{t} - 6 - 4\ln t,$$

$$h_6(t) = h_5'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t}.$$

Postupně dostaneme, že: h_6 je všude záporná, takže h_5 je všude ostře klesající. Přitom ovšem

$$\lim_{t\to 0+} h_5(t) = +\infty, \quad h_5(1) = -5 < 0,$$

proto existuje právě jeden nulový bod $t_0\in(0,1)$ takový, že $h_5(t_0)=0$. Dále

$$\lim_{t\to 0+} h_4(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to +\infty} h_4(t) = -\infty,$$

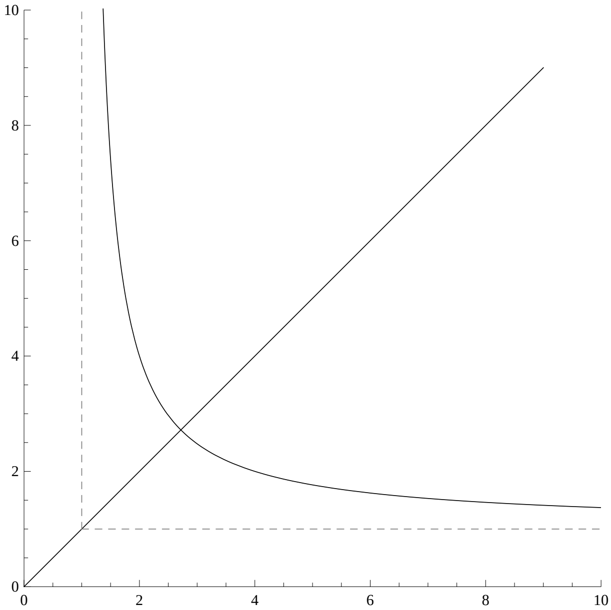
proto h_4 má v bodě t_0 lokální maximum. Protože $h_4(1)=0$, je $h_4(t_0)>0$, tedy existuje bod $t_1\in(0,t_0)$ tak, že $h_4(t_1)=0$. V něm $h_5'(t_1)>0$. Funkce h_3 má v bodě t_1 lokální minimum, v bodě 1 lokální maximum (je $h_5(1)=-5$), dále

$$\lim_{t\to 0+} h_3(t) = -1, \quad h_3(1) = 0, \quad \lim_{t\to +\infty} h_3(t) = -\infty.$$

h_3 je tedy pro $t\neq 1$ záporná, odtud plyne, že h_2 je všude ostře klesající, přitom

$$\lim_{t\to 0+} h_2(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to +\infty} h_2(t) = -\infty, \quad h_2(1) = 0.$$

Odtud vidíme, že h_1 ostře roste na $(0,1\rangle$ a ostře klesá na $\langle 1,+\infty)$, $h_1(1) = 0$. Z toho konečně dostaneme, že $h_1(t)<0$ pro všechna $t\neq 1$. Křivka je tedy všude ryze konvexní, její obrázek (včetně asymptot) je zde:



27. Vyšetřete křivku $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, kde $a>0$ (lemniskáta).

Řešení. Protože je křivka symetrická podle os x i y, stačí ji vyšetřit v prvním kvadrantu, tj. předpokládat $x,y>0$.

Přejdeme k polárním souřadnicím $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $r\geqq 0$. Bod $(0,0)$ leží na křivce, předpokládejme proto $r>0$. Dosazením dostaneme

$$r^4=a^2(r^2\cos^2 t-\sin^2 t)=a^2r^2\cos 2t\Leftrightarrow r^2=a^2\cos 2t.$$

Tuto rovnost je možné splnit jen tehdy, je-li $\cos 2t\geqq 0$, tj. $t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle$, stačí proto uvažovat t z tohoto intervalu. Pak je rovnost ekvivalentní rovnosti

$$r=a\sqrt{\cos 2t}.$$

Dosazením dostaneme

$$x(t)=a\sqrt{\cos 2t}\cos t,\quad y(t)=a\sqrt{\cos 2t}\sin t.$$

Na vnitřku intervalu pro $t\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ dostaneme

$$x'(t)=a\left(\frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos 2t}}\cos t-\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)=a\frac{-\sin 2t\cos t-\cos 2t\sin t}{\sqrt{\cos 2t}}=-a\frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}},$$

$$y'(t)=a\left(\frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos 2t}}\sin t+\sqrt{\cos 2t}\cos t\right)=a\frac{-\sin 2t\sin t+\cos 2t\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}=a\frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}},$$

platí tedy $x'(t)\neq 0$ pro všechna $t\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Na celém intervalu tedy

$$f'(x(t))=\frac{\cos 3t}{-\sin 3t}=-\operatorname{cotg} 3t,\qquad f''(x(t))=-\frac{3\sqrt{\cos 2t}}{a\sin^3 3t}.$$

Máme

$$x(0)=a,\quad y(0)=0,\quad x\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

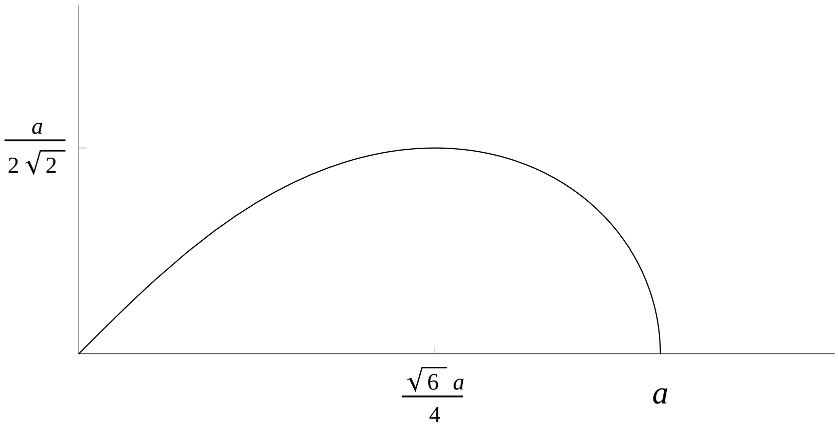
dále

$$f'(x(t))=0\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6},$$

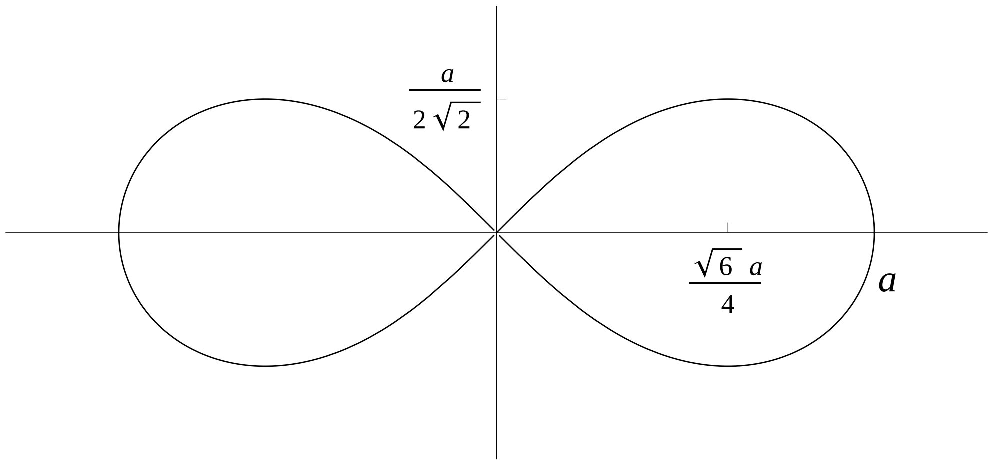
pro $t\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ je $f'(x(t))<0$, zde je funkce ostře klesající; pro $t\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ je $f'(x(t))>0$, zde je funkce ostře rostoucí. Je

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}a}{4},\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Pro všechna $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ je $f''(x(t)) < 0$, funkce je všude ostře konkávní. Z výše uvedených informací můžeme věrně zobrazit křivku v prvním kvadrantu:



Ze symetrie doplníme ostatní části:



Taylorovy polynomy

28. K funkci $f(x) = 6x^7 + x^5 + 3x + 1$ odvoďte Taylorovy polynomy třetího a osmého řádu v bodě 0 a třetího řádu v bodě 2.

Řešení. Je

$$f(x) = 6x^7 + x^5 + 3x + 1 = 1 + 3x + x^3 \underbrace{(x^2 + 6x^4)}_{\omega(x)},$$

kde

$$\lim_{x \to 0} \omega(x) = 0,$$

proto $1 + 3x$ je Taylorovým polynomem třetího řádu funkce f v bodě 0. Podobně

$$f(x) = 6x^7 + x^5 + 3x + 1 + x^8 \cdot 0,$$

proto přímo f je Taylorovým polynomem osmého řádu v bodě 0. Co se týče Taylorova polynomu f třetího řádu v bodě 2, buď můžeme počítat

$$f'(x) = 42x^6 + 5x^4 + 3, \quad f''(x) = 252x^5 + 20x^3, \quad f'''(x) = 1260x^4 + 60x^2,$$

odkud

$$f(2) = 807, \quad f'(2) = 2771, \quad f''(2) = 8224, \quad f'''(2) = 20400,$$

takže

$$T(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k = 807 + 2771(x-2) + 4112(x-2)^2 + 3400(x-2)^3.$$

Nebo můžeme použít tento postup: nejprve určíme koeficienty α_0, ..., α_3 z rovnosti

$$f(x)=\alpha_7(x-2)^7+\alpha_6(x-2)^6+\ldots+\alpha_0,$$

neboli z rovnosti

$$f(x+2)=\alpha_7x^7+\alpha_6x^6+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0.$$

Levá strana je rovna

$$f(x+2)=6(x+2)^7+(x+2)^5+3(x+2)+1,$$

takže dostaneme

$$\begin{aligned}
\alpha_0&=6\cdot2^7+2^5+3\cdot2+1=807,\\
\alpha_1&=6\cdot7\cdot2^6+5\cdot2^4+3=2771,\\
\alpha_2&=6\cdot\binom{7}{2}\cdot2^5+\binom{5}{2}\cdot2^3=4112,\\
\alpha_3&=6\cdot\binom{7}{3}\cdot2^4+\binom{5}{3}\cdot2^2=3400,
\end{aligned}$$

odkud

$$T(x)=3400(x-2)^3+4112(x-2)^2+2771(x-2)+807.$$

29. K funkci $f(x)=e^{2x-x^2}$ odvoďte Taylorův polynom 4. řádu v bodě 0.

Řešení. Víme, že

$$T_{\exp,n,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Tedy

$$e^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+x^4\omega(x),$$

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}+x^4\xi(x),$$

kde

$$\lim_{x\to0}\omega(x)=\lim_{x\to0}\xi(x)=0.$$

Proto

$$e^{2x-x^2}=e^{2x}\cdot e^{-x^2}=\left(1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+x^4\omega(x)\right)\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+x^4\xi(x)\right)=$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^4}{6}+x^4\underbrace{\left(\xi(x)+\omega(x)-\frac{x}{3}+2x\xi(x)+\ldots\right)}_{\tau(x)},$$

kde $\lim\limits_{x\to0}\tau(x)=0$. Hledaný Taylorův polynom je proto roven $T(x)=1+2x+x^2-\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5x^4}{6}$.

30. K funkci $f(x)=\ln(5-3x)$ odvoďte Taylorův polynom n-tého řádu v bodě 0.

Řešení. Víme, že pro $g(x)=\ln(1+x)$ je

$$T_{g,n,0}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Protože

$$\ln(5-3x)=\ln5\left(1-\frac{3}{5}x\right)=\ln5+\ln\left(1-\frac{3}{5}x\right),$$

je hledaný

$$T_n(x)=\ln5+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{3}{5}x\right)^k=\ln5-\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{k5^k}x^k.$$

31. K funkci $f(x)=\sin\sin x$ odvoďte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0.

Řešení. Víme, že

$$T_{\sin,2n+1,0}(x)=T_{\sin,2n+2,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Položme $p(x)=x-\frac{x^3}{3!}$, pak

$$p(p(x))=\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!}=x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2\frac{x^3}{6}+3x\frac{x^6}{6^2}-\frac{x^9}{6^3}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\dots,$$

odkud dostaneme hledaný Taylorův polynom:

$$T(x)=x-\frac{x^3}{3}.$$

32. K funkci $f(x)=(x^2-6x)\sqrt[3]{1-x^3}$ odvoďte Taylorův polynom n-tého řádu v bodě 0.

Řešení. Pro $g(x)=(1+x)^\alpha$ je

$$T_{g,n,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k,$$

odkud pro $h(x)=(1-x^3)^{\frac{1}{3}}$ je

$$T_{h,n,0}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-x^3)^k,$$

proto hledaný polynom je tvaru

$$T(x)=x^2\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{3}]}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-1)^kx^{3k}-6x\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{3}]}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-1)^kx^{3k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{3}]}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-1)^kx^{3k+2}-6\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{3}]}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-1)^kx^{3k+1}.$$

33. K funkci $f(x)=\arcsin x$ odvoďte Taylorův polynom n-tého řádu v bodě 0.

Řešení. Je $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, proto

$$T_{f',n,0}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^kk!}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}x^{2k}.$$

Odtud je hledaný Taylorův polynom roven

$$T_{f,n,0}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(Absolutní člen je nulový, neboť $\arcsin 0=0$.)

34. K funkci $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ odvoďte Taylorův polynom n-tého řádu v bodě 0.

Řešení. Je

$$f(x)=\frac{1}{3x+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{5}x}=\frac{1}{5}(1+\tfrac{3}{5}x)^{-1},$$

proto hledaný Taylorův polynom je roven

$$T_{f,n,0}(x)=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1}{k}(\tfrac{3}{5}x)^k=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\tfrac{3}{5}x)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k3^k}{5^{k+1}}x^k.$$

35. K funkci $f(x)=\dfrac{x^6}{15+2x-x^2}$ odvoďte Taylorův polynom n-tého řádu v bodě 0.

Řešení. Je

$$f(x)=x^6\cdot\frac{1}{(x+3)(5-x)}=\frac{x^6}{8}\Big(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{5-x}\Big),$$

takže příslušný polynom je pro $n<6$ nulový a pro $n\geqq 6$ je roven

$$T(x)=\frac{x^6}{8}\left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\Big(\frac{x}{3}\Big)^k+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\Big(-\frac{x}{5}\Big)^k\right)=\frac{x^6}{8}\sum_{k=0}^{n-6}\Big(\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}+\frac{1}{5^{k+1}}\Big)x^k.$$

36. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Protože ve jmenovateli je x^5, rozvineme čitatel do pátého řádu. Je

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+x^5\omega(x),$$

kde $\lim\limits_{x\to 0}\omega(x)=0$, označíme-li $p(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, dostaneme složením

$$p(p(x))=\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\Big)-\frac{\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\Big)^3}{3!}+\frac{\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\Big)^5}{5!}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\ldots,$$

odkud

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+x^5\tau(x),$$

kde $\lim\limits_{x\to 0}\tau(x)=0$. Dále

$$\sqrt[3]{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=\sum_{k=0}^{2}\binom{\frac{1}{3}}{k}(-x^2)^k+x^5\rho(x)=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+x^5\rho(x),$$

kde $\lim\limits_{x\to 0}\rho(x)=0$. Odtud

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+x^5\tau(x)-x\Big(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+x^5\rho(x)\Big)}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{90}x^5+x^5\tau(x)-x^6\rho(x)}{x^5}=\frac{19}{90}.$$

37. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\Big(x^3-x^2+\frac{x}{2}\Big)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right).$$

Řešení. Je

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{x^3}\omega\Big(\frac{1}{x}\Big),\qquad \sqrt{x^6-1}=x^3\Big(1-\frac{1}{x^6}\Big)^{\frac{1}{2}}=x^3\left(1-\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{x^6}\tau\Big(-\frac{1}{x^6}\Big)\right),$$

kde $\lim\limits_{y\to 0}\omega(y)=\lim\limits_{y\to 0}\tau(y)=0$. Pak

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{x^3}\omega\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x^3\left(1-\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{x^6}\tau\left(-\frac{1}{x^6}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{12x}+x^3+\omega\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}\omega\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\omega\left(\frac{1}{x}\right)-x^3+\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{x^3}\tau\left(-\frac{1}{x^6}\right)\right)=\frac{1}{6}.$$

38. Spočtěte s přesností 10^{-5} hodnotu $\ln 1{,}1$.

Řešení. Označme $f(x)=\ln(1+x)$. Pak

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+x)^n},$$

takže

$$\ln 1{,}1=\ln(1+0{,}1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}0{,}1^k+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}0{,}1^{n+1},$$

kde $0<\xi<0{,}1$. Aby Lagrangeův zbytek byl menší než 10^{-5}, musíme n volit tak, aby splňovalo nerovnost

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}0{,}1^{n+1}\right|<10^{-5},$$

která bude jistě splněna, pokud $0{,}1^{n+1}<10^{-5}\Leftrightarrow n+1>5\Leftrightarrow n>4$. Hodnota $\ln 1{,}1$ je tedy s chybou menší než 10^{-5} rovna

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k}0{,}1^k=\frac{285931}{3000000}\doteq 0{,}09531.$$

39. Spočtěte s přesností 10^{-5} hodnotu $\sqrt[12]{4000}$.

Řešení. Je

$$\sqrt[12]{4000}=\sqrt[12]{2^{12}-96}=2\left(1-\frac{96}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{12}}=2\left(1-\frac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

Stačí tedy vypočítat číslo $\left(1-\frac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{12}}$ s přesností $5\cdot10^{-6}$. Pro každé n je

$$\left(1-\frac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{12}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{12}}{k}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^k+\binom{\frac{1}{12}}{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{12}-n-1}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^{n+1},$$

kde $-\frac{3}{2^7}<\xi<0$ Proto požadujeme, aby n splňovalo nerovnost

$$\left|\binom{\frac{1}{12}}{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{12}-n-1}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^{n+1}\right|<5\cdot10^{-6}.$$

Protože

$$\binom{\frac{1}{12}}{n+1}<\frac{1}{12},\quad (1+\xi)^{\frac{1}{12}}<1,$$

stačí splnit nerovnost

$$\frac{1}{12}\left(\frac{3}{2^7(1+\xi)}\right)^{n+1}<5\cdot10^{-6}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2^7-3}\right)^{n+1}<60\cdot10^{-6}\Leftrightarrow n>\frac{\ln 60\cdot10^{-6}}{\ln\frac{3}{2^7-3}}-1.$$

Konkrétně lze volit $n=2$, číslo $\sqrt[12]{4000}$ je tedy s přesností 10^{-5} rovno $2\sum_{k=0}^{2}\binom{\frac{1}{12}}{k}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^k$.

40. Jaké maximální chyby se dopustíme, když při výpočtu hodnoty $\sin x$ použijeme přibližné vyjádření $x-\frac{x^3}{3!}$ pro $x\in\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$?

Řešení. Je

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\cos\xi}{5!}x^5,$$

kde ξ leží mezi 0 a x. Chyba je tedy menší nebo rovna číslu

$$\frac{\sin\frac{1}{2}}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5<\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{3840}.$$

41. Z jak velkého okolí nuly můžeme brát hodnoty x, abychom se při počítání hodnoty $\cos x$ pomocí vyjádření $1-\frac{x^2}{2}$ dopustili chyby menší než 10^{-4}?

Řešení. Je

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\xi}{4!}x^4,$$

kde ξ leží mezi 0 a x. Chyba $\frac{\cos\xi}{4!}x^4$ bude jistě menší než 10^{-4}, pokud bude platit

$$\left|\frac{x^4}{4!}\right|<10^{-4}\Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt[4]{4!}}{10}.$$

Hodnoty x lze tedy brát z okolí nuly o poloměru $\frac{\sqrt[4]{4!}}{10}$.

42. Jak velké $n\in\mathbb{N}$ je potřeba vzít, pokud chceme hodnotu $\exp x$ počítat pomocí sumy $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ na intervalu $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ s chybou menší než 10^{-4}?

Řešení. Je

$$\exp x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{\exp\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kde ξ leží mezi 0 a x. Chyba bude jistě menší než 10^{-4}, pokud bude platit

$$\frac{\sqrt{e}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<10^{-4}\Leftrightarrow (n+1)!2^{n+1}>10^4\sqrt{e}.$$

Vyzkoušením prvních přirozených čísel dostaneme, že nerovnost je splněna už pro $n=5$.

Řady

43. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Řešení. Označme $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4},$$

z podílového kritéria plyne, že řada konverguje.

44. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

Řešení. Pro všechna přirozená n platí $\ln n < n$, proto $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$. Není splněna základní podmínka konvergence řady, řada diverguje.

45. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Řešení. Pro všechna přirozená n platí $\ln n < n$; podle srovnávacího kritéria řada diverguje, neboť harmonická řada diverguje.

46. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Řešení. Je $\sqrt[n]{n!} < n$ (neboť $n! < n^n$); řada je podle srovnávacího kritéria diverguje.

47. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+\cos n}{3+\cos n}\right)^n$.

Řešení. Je $\frac{1}{2} \leqq \frac{2+\cos n}{3+\cos n} \leqq \frac{3}{4}$, proto řada podle srovnávacího kritéria konverguje, neboť geometrická řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konverguje.

48. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Řešení. Jelikož je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^n = e^{-2} < 1,$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q_0 \in (0,1)$ tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n < q_0$. Proto řada podle srovnávacího kritéria konverguje.

49. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (2-x)(2-\sqrt[2]{x})(2-\sqrt[3]{x})\dots(2-\sqrt[n]{x})$, kde $x > 0$.

Řešení. Pokud je x mocnina dvou, je a_n od jistého členu nulový, suma je konečná a řada konverguje.

V ostatních případech od jistého n máme $\sqrt[n]{x} < 2$, jedná se o řadu buď s kladnými nebo zápornými členy (až na konečný počet výjimek). Označme $a_n = (2-x)(2-\sqrt[2]{x})(2-\sqrt[3]{x})\dots(2-\sqrt[n]{x})$. Pak

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-(2-\sqrt[n+1]{x})\right) = n(\sqrt[n+1]{x}-1),$$

proto

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n+1]{x}-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{x}-1}{\frac{1}{n+1}} 1 \cdot \ln x.$$

Proto pro $x > e$ řada podle limitního Raabeova kritéria konverguje, pro $x < e$ diverguje. Pro $x = e$ řada diverguje podle nelimitního Raabeova kritéria, neboť

$$n(\sqrt[n+1]{e}-1) \leqq 1 \Leftrightarrow e \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

přitom posloupnost $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{+\infty}$ konverguje k e shora.

50. Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2-x)(2-\sqrt[2]{x})(2-\sqrt[3]{x})\dots(2-\sqrt[n]{x})$, kde $x>0$, pomocí Gaussova kritéria.

Řešení. Označme $a_n=(2-x)(2-\sqrt[2]{x})(2-\sqrt[3]{x})\dots(2-\sqrt[n]{x})$. Pokud je x mocnina dvou, je a_n od jistého členu nulový, suma je konečná a řada konverguje. V ostatních případech

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2-\sqrt[n]{x}=2-e^{\frac{\ln x}{n}}=2-\left(1+\frac{\ln x}{n}+\frac{\ln^2 x}{2n^2}+\frac{\ln^2 x}{2n^2}\omega\left(\frac{\ln x}{n}\right)\right)=1-\frac{\ln x}{n}-\frac{\ln^2 x}{2n^2}-\frac{\ln^2 x}{2n^2}\omega\left(\frac{\ln x}{n}\right).$$

Proto pro $\ln x\leqq 1\Leftrightarrow x\leqq e$ řada diverguje, pro $\ln x>1\Leftrightarrow x>e$ konverguje.

51. Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, kde $p\in\mathbb{R}$.

Řešení. Označme $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. Pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+p}$$

Odtud

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p=e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p.$$

Je

$$1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1+n\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{c_n^{(1)}}{n^3}\right)=1-1+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{2(n+1)^2}+\frac{c_n^{(1)}}{n^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{c_n^{(2)}}{n^2}=$$
$$=\frac{1}{2n}+\frac{c_n^{(2)}}{n^2},$$

kde $c_n^{(j)}$ označuje omezené posloupnosti, jejichž konkrétní tvar není důležitý. Dále

$$e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p=e^{\frac{1}{2n}+\frac{c_n^{(2)}}{n^2}}\left(1-\frac{p}{n+1}+\frac{c_n^{(3)}}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{c_n^{(4)}}{n^2}\right)\left(1-\frac{p}{n+1}+\frac{c_n^{(3)}}{n^2}\right)=1-\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+\frac{c_n^{(5)}}{n^2}.$$

Z Gaussova kritéria plyne, že pro $p-\frac{1}{2}>1\Leftrightarrow p>\frac{3}{2}$ řada konverguje a pro $p-\frac{1}{2}\leqq 1\Leftrightarrow p\leqq\frac{3}{2}$ diverguje.

52. Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4+1}{3^{\sqrt{n}}}$.

Řešení. Zřejmě existuje $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n>n_0$ je

$$\frac{n^4+1}{3^{\sqrt{n}}}\leqq\frac{1}{3^{n^{\frac{1}{3}}}}.$$

Vyšetřeme konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{n^{\frac{1}{3}}}}$. Označme $a_n=\frac{1}{3^{n^{\frac{1}{3}}}}$. Pak

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left(1-3^{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}\right)=n\left(1-e^{\ln 3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})}\right).$$

Je

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(1-e^{\ln 3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})}\right)=\lim_{n\to+\infty}n\frac{1-e^{\ln 3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})}}{\ln 3\cdot(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})}\ln 3\cdot(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n\ln 3\cdot(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln 3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty.$$

Podle limitního Raabeova kritéria řada konverguje. Tedy i původní řada konverguje.

Vyšetřeme konvergenci původní řady srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^4+1}{3^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}}=0,$$

proto i původní řada konverguje.

53. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n^\varepsilon}$, kde $q\in(0,1)$ a $\varepsilon>0$.

Řešení. Je $q^{n^\varepsilon}=e^{\ln q\cdot n^\varepsilon}$, dále $n=e^{\ln n}$, odkud

$$q^{n^\varepsilon}=n^{\frac{\ln q}{\ln n}\cdot n^\varepsilon}.$$

Protože $\ln q<0$, je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln q}{\ln n}\cdot n^\varepsilon=-\infty,$$

odkud plyne, že existuje n_0 tak, že pro všechna $n>n_0$ je exponent $\frac{\ln q}{\ln n}\cdot n^\varepsilon<-2$. Řada tedy podle srovnávacího kritéria konverguje.

54. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

Řešení. Jedná se o řadu s nezápornými členy. Protože je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n^2}}=1,$$

řada podle limitního srovnávacího kritéria konverguje.

55. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$, $p\in\mathbb{R}$.

Řešení. Jedná se zřejmě o řadu se zápornými členy. Vzhledem k tomu, že

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p$$

a

$$\ln\frac{n-1}{n+1}=\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

srovnáme uvedenou řadu s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$, která konverguje $\Leftrightarrow p>0$. Je

$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2^p}\cdot 2=\frac{1}{2^{p-1}}\in\mathbb{R}^+,$$

takže podle limitního srovnávacího kritéria i původní řada konverguje $\Leftrightarrow p>0$.

56. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n\ln^2(n+1)}$.

Řešení. Protože podle Stolzova vzorce je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1,$$

řada v zadání má stejný charakter jako řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Tato řada diverguje, tedy původní řada diverguje.

57. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

Řešení. Je

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{c_n}{n^3},$$

kde (c_n) je omezená posloupnost. Řada má stejný charakter jako řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}-\frac{c_n}{n^3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{c_n}{n}}{1+\sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}.$$

Zadaná řada proto konverguje.

58. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha}$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Řešení. Je

$$\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1=1+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2}{n^2}\omega\left(\frac{\ln n}{n}\right)-1=\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2}{n^2}\omega\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

odkud

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}+\frac{\ln^2}{n^{2+\alpha}}\omega\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^2}{n^{2+\alpha}}\omega\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Poslední úpravu je možné provést, neboť se jedná o řady s nezápornými členy. Pro $\alpha>0$ řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}$ konverguje, jak plyne ze srovnání s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$. Ze stejného důvodu konverguje i druhá řada.

Naopak, pro $\alpha\leqq 0$ řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}$ diverguje, proto diverguje bez ohledu na druhou řadu i jejich součet.

59. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}^n\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)$, kde $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Řešení. Pro $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ je $\operatorname{tg}\alpha<1$, proto

$$(\exists\, q\in(0,1))(\exists\, n_0)(\forall\, n>n_0)\left(\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)<q\right),$$

řada proto konverguje. Pro $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ je $\operatorname{tg}\alpha>1$, proto

$$(\exists\, q\in(1,+\infty))(\exists\, n_0)(\forall\, n>n_0)\left(\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)>q\right),$$

řada proto diverguje. Nechť konečně $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. Pro $\beta=0$ řada diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence. Pro $\beta\neq 0$ dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}\cdot n}=e^{2\beta},$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}\cdot n=\lim_{n\to+\infty}2\beta\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}{\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{n}}=2\beta\cdot 1\cdot 1=2\beta.$$

Číslo $e^{2\beta}\neq 0$, opět tedy není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

60. Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^3}{n-(-3)^n}$.

Řešení. Je

$$\left|\frac{2^n+n^3}{n-(-3)^n}\right|\leqq\frac{(\frac{7}{3})^n}{(\frac{8}{3})^n}=\left(\frac{7}{8}\right)^n,$$

řada konverguje absolutně.

61. Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, kde $p\in\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $p\leqq 0$ je $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}>0$, proto není splněna základní nutná podmínka pro konvergenci řady a řada diverguje. Pro $p>0$ je posloupnost $\displaystyle\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n=1}^{+\infty}$ monotónní (klesající) a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$. Proto podle Leibnizova kritéria řada konverguje. Přitom pro $p\in(0,1\rangle$ konverguje neabsolutně, pro $p>1$ konverguje absolutně.

62. Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\sqrt[n]{n}}$, kde $p\in\mathbb{R}$.

Řešení. Je $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Proto pro $p\leqq 0$ je $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p\sqrt[n]{n}}>0$, takže není splněna nutná podmínka konvergence a řada diverguje.

Uvažme $p>0$. Posloupnost $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je od třetího členu ostře klesající, neboť

$$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}\Leftrightarrow(n+1)^n<n^{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n\Leftrightarrow n\geqq 3.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ přitom podle příkladu 61 konverguje. Proto podle Abelova kritéria řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\sqrt[n]{n}}$ konverguje.

63. Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$, kde $p\in\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $p\leqq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.
Uvažujme $p>0$. Pak

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+(-p+\omega_n)\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}+\frac{\omega_n-p}{n^{p+1}}.$$

Tedy

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\omega_n-p}{n^{p+1}},$$

obě dvě řady konvergují (první podle Leibnizova kritéria), tedy i původní řada konverguje. Přitom pro $p\in(0,1\rangle$ řada konverguje neabsolutně, pro $p>1$ absolutně.

Řešme úlohu (pro $p>0$) pomocí uzávorkování. Označme

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+(-1)^k)^p}.$$

Pak

$$s_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1+(-1)^{2k-1})^p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{(2k+(-1)^{2k})^p}=\sum_{k=2}^{n}\frac{-1}{(2k-2)^p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^p}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{(2k+1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\Big)+\frac{1}{(2n+1)^p}=\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{1}{(2k+1)^p}\Big(\Big(1+\frac{1}{2k}\Big)^p-1\Big)+\frac{1}{(2n+1)^p}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{1}{(2k+1)^p}\Big(1+\frac{p+\omega_k}{2k}-1\Big)+\frac{1}{(2n+1)^p}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{-(p+\omega_k)}{(2k+1)^p(2k)}+\frac{1}{(2n+1)^p}.$$

Vidíme, že od jistého indexu platí

$$\left|\frac{-(p+\omega_k)}{(2k+1)^p(2k)}\right|\leqq\frac{p+1}{(2k)^{p+1}},$$

řada proto konverguje pro $p>0$.

64. Hromadné hodnoty posloupností $(\sin n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(\cos n)_{n=1}^{+\infty}$ vyplňují celý interval $\langle-1,1\rangle$. Dokažte.

Řešení. Vezměme např. posloupnost $(\cos n)$. Zvolme libovolné $x\in\langle-1,1\rangle$. Stačí najít ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos k_n=x$. Označme $\alpha=\arccos x$. Je $\alpha\in\langle0,\pi\rangle$. Protože cos je spojitá funkce, stačí nalézt (k_n) tak, aby $\lim\limits_{n\to+\infty}(k_n \bmod 2\pi)=\alpha$.

Takovou posloupnost bude snadné nalézt, pokud ukážeme, že pro libovolné $\varepsilon>0$ existuje $n\in\mathbb{N}$ tak, že $|n \bmod 2\pi-\alpha|<\varepsilon$, neboli že

$$\left|\frac{n \bmod 2\pi}{2\pi}-\frac{\alpha}{2\pi}\right|<\varepsilon_1,$$

kde $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2\pi}$.

Je

$$\frac{n \bmod 2\pi}{2\pi}=\frac{n-[\frac{n}{2\pi}]\cdot2\pi}{2\pi}=\frac{n}{2\pi}-\Big[\frac{n}{2\pi}\Big]=\Big\{\frac{n}{2\pi}\Big\},$$

kde $\{x\}$ značíme zlomkovou část x, tj. číslo $x-[x]$ (kde $[x]$ je celá část x).

Najdeme nejprve $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$ taková, aby

$$\left|\frac{p}{2\pi}-q\right|<\varepsilon_1.$$

To lze udělat např. následujícím způsobem: pro $k=1,2,\dots$ je jistě splněna nerovnost

$$0<\Big\{\frac{k}{2\pi}\Big\}=\frac{k}{2\pi}-\Big[\frac{k}{2\pi}\Big]<1,$$

takže musejí existovat dvě přirozená čísla k_1,k_2 tak, že rozdíl

$$\left|\Big\{\frac{k_1}{2\pi}\Big\}-\Big\{\frac{k_2}{2\pi}\Big\}\right|<\varepsilon_1.$$

(Pro $k=1,2,\ldots$ čísla $\left\{\frac{k}{2\pi}\right\}$ totiž „plní“ postupně interval $(0,1)$, takže po jisté době lze nalézt dvě libovolně blízko sebe.) A protože

$$\left|\left\{\frac{k_1}{2\pi}\right\}-\left\{\frac{k_2}{2\pi}\right\}\right|=\left|\frac{k_1}{2\pi}-\frac{k_2}{2\pi}-\left[\frac{k_1}{2\pi}\right]+\left[\frac{k_2}{2\pi}\right]\right|,$$

lze volit $p=k_1-k_2$, $q=-\left[\frac{k_1}{2\pi}\right]+\left[\frac{k_2}{2\pi}\right]$ (případně opačně, aby $p\in\mathbb{N}$).

Nyní nastane jedna ze dvou možností: buď $\left\{\frac{p}{2\pi}\right\}=\varepsilon_2$ nebo $\left\{\frac{p}{2\pi}\right\}=1-\varepsilon_2$, kde $\varepsilon_2<\varepsilon_1$.

V případě, že nastane první možnost, je

$$\left\{\frac{p}{2\pi}\right\}=\varepsilon_2,\quad \left\{\frac{2p}{2\pi}\right\}=2\varepsilon_2,\quad \text{atd.},$$

až pro jisté $k\in\mathbb{N}$ je

$$\left|\left\{\frac{kp}{2\pi}\right\}-\frac{\alpha}{2\pi}\right|<\varepsilon_1.$$

Z toho plyne, že

$$|kp \bmod 2\pi-\alpha|<2\pi\varepsilon_1=\varepsilon,$$

tj. klademe $n=kp$.

Podobně lze postupovat i v druhém případě.

65. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^p}$.

Řešení. Pro $p>1$ řada konverguje absolutně, neboť $|\sin n|\leqq 1$.

Pro $p\leqq 0$ řada diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ neexistuje (není splněna nutná podmínka konvergence, hromadné hodnoty posloupnosti $(\sin n)_{n=1}^{+\infty}$ vyplňují totiž celý interval $\langle -1,1\rangle$, viz lemma 64).

Pro $p\in(0,1\rangle$ použijeme Dirichletovo kritérium. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů, pomocí vzorce

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad\text{resp.}\qquad \cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$$

totiž dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{-2\sin\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\cos\frac{1}{2}}.$$

$a_n=\frac{1}{n^p}$ je monotónní a $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. Proto $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ podle Dirichletova kritéria konverguje. Konvergence je neabsolutní, neboť řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$ diverguje, což lze ukázat pomocí odhadu

$$\frac{|\sin n|}{n^p}\geqq\frac{\sin^2 n}{n^p}=\frac{\frac{1-\cos 2n}{2}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2n}{2n^p},$$

přitom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ diverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{n^p}$ podle Dirichletova kritéria konverguje.

66. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(-1)^n}{n^q}$, kde $q\in\mathbb{R}$.

Řešení. Jedná se o řadu se střídavými znaménky. Označme $b_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!n^q}$. Z Taylorova rozvoje je

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^q=1-\frac{q}{n}+\frac{q(q-1)}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\omega\left(-\frac{1}{n}\right),$$

kde $\lim\limits_{x\to 0}\omega(x)=0$. Pomocí tohoto vyjádření dostaneme, že

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{(2n-1)(n-1)^q}{2n\cdot n^q}==\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^q=\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{q}{n}+\frac{\omega_n}{n^2}\right)=1-\frac{q+\frac{1}{2}}{n}+\frac{c_n}{n^2},$$

kde (ω_n) a (c_n) jsou jisté omezené posloupnosti, jejichž konkrétní tvar nás nezajímá. Z modifikovaného Gaussova kritéria tedy dostáváme, že řada konverguje absolutně pro $q+\dfrac{1}{2}>1\Leftrightarrow q>\dfrac{1}{2}$, neabsolutně pro $q+\dfrac{1}{2}\in(0,1\rangle\Leftrightarrow q\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\rangle$ a diverguje pro ostatní q.

67. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{\ln(n+1)}$.

Řešení. Je

$$\left((-1)^{\binom{n}{2}}\right)_{n=1}^{+\infty}=\left(1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,\dots\right),$$

tj. znaménka se střídají vždy po dvou členech. Řada konverguje, neboť pro její posl. částečných součtů (s_n) platí

$$s_{4n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{\binom{4k-3}{2}}}{\ln(4k-3+1)}+\frac{(-1)^{\binom{4k-2}{2}}}{\ln(4k-2+1)}+\frac{(-1)^{\binom{4k-1}{2}}}{\ln(4k-1+1)}+\frac{(-1)^{\binom{4k}{2}}}{\ln(4k+1)}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\ln(4k-2)}+\frac{-1}{\ln(4k-1)}+\frac{-1}{\ln(4k)}+\frac{1}{\ln(4k+1)}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{\ln(2k)}+\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}\right)=s_{2n}^{(1)}+s_{2n}^{(2)},$$

kde $(s_n^{(1)})$ resp. $(s_n^{(2)})$ jsou posloupnosti částečných součtů konvergentních řad (konvergují podle Leibnizova kritéria)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n)}\quad\text{resp.}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}.$$

Původní řada konverguje neabsolutně, neboť řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ je divergentní (což lze ověřit např. srovnáním s divergentní harmonickou řadou $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$).

68. Určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ přerovnané tak, že vezmeme vždy jeden kladný sčítanec a pak dva záporné.

Řešení. Pro posloupnost částečných součtů (s_n) přerovnané řady platí

$$s_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln 2n-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\right)-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\frac{1}{2}\ln 2n-\frac{1}{4}\ln n-\frac{1}{4}\ln n.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to+\infty} s_{3n}=\frac{1}{2}\left(C-\frac{1}{2}C\right)-\frac{1}{4}C+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\ln 2}{2}.$$

Součet řady je roven $\frac{\ln 2}{2}$, neboť limity posloupností (s_{3n+1}) a (s_{3n+2}), které spolu s (s_{3n}) pokryjí (s_n), jsou stejné jako limita posloupnosti (s_{3n}), platí totiž

$$s_{3n+1}=s_{3n}+\frac{1}{2n+1},\quad s_{3n+2}=s_{3n+1}-\frac{1}{4n+2}.$$

69. Dokažte vzorec $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ tak, že vynásobíte Taylorovu řadu pro funkci $\cos x$ samu se sebou.

Řešení. Je

$$\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}x^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!(2n-2k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}.$$

Nyní využijeme toho, že součet čísel na n-tém řádku Pascalova trojúhelníku, tedy $\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{k}$, je roven 2^n a že součet čísel na řádku, pokud přičítáme pouze každé druhé, je roven součtu všech na předchozím řádku, tzn. pro $n\geqq 1$ je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}=2^{2n-1}.$$

Pro $n=0$ je

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{2n}{2k}=1.$$

Odtud dostaneme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}2^{2n-1}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{1}{2}\Big(\cos x-1\Big)=\frac{\cos x+1}{2}.$$

70. Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Řešení. Poloměr konvergence je

$$\rho=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}}=\frac{1}{3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{1+(-\frac{2}{3})^n}}{\sqrt[n]{n}}}=\frac{1}{3\cdot 1}=\frac{1}{3}.$$

Vyšetříme konvergenci v krajních bodech intervalu: pro $x=-\dfrac{4}{3}$ je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot n},$$

což je součet dvou konvergentních řad.

Pro $x=-\dfrac{2}{3}$ je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\frac{2}{3})^n}{n},$$

což je součet podstatně divergentní a konvergentní řady, původní řada tedy podstatně diverguje do $+\infty$.

Závěr: mocninná řada konverguje pro $x\in\left\langle-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

71. Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$.

Řešení. Podle Cauchyova vzorce

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{1}{2},$$

poloměr konvergence je tedy 2. Vyšetříme konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence. Pro $x=2$ se jedná o číselnou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$, o jejíž konvergenci rozhodne modifikované Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(1-\frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\Big((2n+3)(2n+2)-4(n+1)^2\Big)}{(2n+3)(2n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+2n}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{1}{2}>0,$$

proto řada konverguje. Pro $x=-2$ můžeme využít tento výpočet a podle Raabeova kritéria řada diverguje. Obor konvergence původní mocninné řady je proto interval $(-2,2\rangle$.

72. Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^nx^{n^2}$.

Řešení. Poloměr konvergence je roven

$$\rho=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{c_n}}},$$

kde $c_n=\sqrt{n}$ pro $n\in\{1,4,9,16,\dots\}$ a $c_n=0$ pro ostatní n. Je tedy

$$\rho=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{\sqrt{n+1}}}{2^{\sqrt{n}}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}2^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}}=\frac{1}{2^0}=1.$$

V krajních bodech řada diverguje, neboť není splněna ani v jednom případě nutná podmínka konvergence: pro $x=1$ u řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^n$ a pro $x=-1$ u řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}2^n(-1)^{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}2^n(-1)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n.$$

Původní mocninná řada tedy konverguje na intervalu $(-1,1)$.

73. Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$.

Řešení. Poloměr konvergence je roven

$$\rho=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{\frac{4^{2n}}{2n}}}=\frac{1}{4}.$$

V krajním bodě $x=\frac{1}{4}$ řada diverguje, neboť řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ lze (má kladné členy) přerovnat

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n},$$

přičemž první řada konverguje a druhá podstatně diverguje.

V krajním bodě $x=-\frac{1}{4}$ řada také diverguje, neboť pro její posloupnost částečných součtů (s_n) platí

$$s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(3+(-1)^k)^k}{k}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}},$$

což je (po provedení limitního přechodu) rozdíl podstatně divergentní a konvergentní řady.

74. Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

Řešení. Podle lemmatu 64 existuje vybraná posloupnost (k_n) z (n) tak, že $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin k_n=0$. Pro poloměr konvergence řady platí

$$\rho=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{\sin n}\right)^n\right|}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\sin n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\sin k_n}\right|}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

řada konverguje v jediném bodě $x=0$.

75. Rozviňte do mocninné řady $f(x)=\ln(2+3x)$ v bodě $a=1$.

Řešení. Je

$$f(x)=\ln(2+3x)=\ln(5+3(x-1))=\ln 5+\ln(1+\tfrac{3}{5}(x-1))=\ln 5+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\tfrac{3}{5}(x-1)\right)^n=$$

$$=\ln 5+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{n\cdot 5^n}(x-1)^n.$$

76. Rozviňte do mocninné řady $f(x)=\arcsin x$ v bodě $a=0$ pomocí derivování.

Řešení. Pro $x\in(-1,1)$ je

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n.$$

Protože

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

je

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

Proto pro $x\in(-1,1)$ je

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+C,$$

kde $C=0$, neboť $f(x)=0=C$.

Označme $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$. Protože

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}n\left(1-\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\right)=\lim_{n\to+\infty}n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6}=$$
$$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$ v krajních bodech ±1 podle Raabeova kritéria konverguje, díky spojitosti mocninné řady v celém oboru konvergence tedy platí rovnost

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

pro všechna $x\in\langle-1,1\rangle$.

77. Rozviňte do mocninné řady $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ v bodě $a=0$.

Řešení. Víme, že

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\ \text{pro}\ x\in(-1,1).$$

Proto

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ \text{pro}\ x\in(-1,1).$$

(V krajních bodech ±1 řada diverguje.)

78. Rozviňte do mocninné řady $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$ v bodě $a=0$.

Řešení. Racionální funkci f rozložíme na parciální zlomky:

$$f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}=\frac{1}{3(1+x)}+\frac{2}{3(1-2x)}.$$

Proto podle vzorce pro součet geometrické řady je

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}x^n$$

pro $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. (V krajních bodech $\pm\frac{1}{2}$ řada diverguje.)

79. Rozviňte do mocninné řady $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ v bodě $a=0$.

Řešení. Je $f(x)=\operatorname{argsinh}x$ a

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

na celém $\mathbb{R}$. Tedy

$$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

pro $x\in(-1,1)$. Proto

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}.$$

Rovnost platí i v krajních bodech, tj. na celém intervalu $\langle -1,1\rangle$, neboť řada $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$ absolutně konverguje podle Raabeova kritéria; pokud označíme $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$, je

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6}=\frac{3}{2}.$$

Integrály

80. Vypočtěte neurčitý integrál $\int(2+3x^2)^3\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand má za definiční obor množinu $\mathbb{R}$. Je zde spojitý, proto primitivní funkce na této množině jistě existuje. Při výpočtu využijeme linearity integrálu.

$$\int(2+3x^2)^3\mathrm{d}x=\int(8+36x^2+54x^4+27x^6)\mathrm{d}x=8x+36\frac{x^3}{3}+54\frac{x^5}{5}+27\frac{x^7}{7}=8x+12x^3+\frac{54x^5}{5}+\frac{27x^7}{7}.$$

81. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand má za definiční obor $\mathbb{R}^+$. Je zde spojitý, proto primitivní funkce na této množině jistě existuje. Využijeme linearity integrálu.

$$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{5}{12}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}-\frac{24x^{\frac{17}{12}}}{17}+\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3}.$$

82. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand má za definiční obor množinu $\mathbb{R}$. Je zde spojitý, proto primitivní funkce na této množině jistě existuje. Přičtením a odečtením čísla 1 v čitateli dostaneme

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\operatorname{arctg}x.$$

83. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\operatorname{cotg}^2x\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand má definiční obor $\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$, zde máme

$$\int\operatorname{cotg}^2x\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=-\operatorname{cotg}x-x.$$

84. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$.

Řešení. Integrand má definiční obor roven $\mathbb{R}$. Ze vzorce

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dostaneme substitucí $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ vztah

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\Big).$$

Platí tedy

$$\int \sin 3x \sin 5x \, dx = -\frac{1}{2}\int \Big(\cos 8x - \cos(-2x)\Big)\, dx = -\frac{1}{2}\int \cos 8x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx,$$

v posledním integrálu jsme využili sudosti funkce cos. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(\sin ax)' = a\cos ax,$$

proto

$$\int \sin 3x \sin 5x \, dx = -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

85. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x|x| \, dx$.

Řešení. Integrand má za definiční obor množinu $\mathbb{R}$. Najdeme nejprve primitivní funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ zvlášť.

Na $(0, +\infty)$ máme

$$\int x|x| \, dx = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \text{ na } \mathbb{R}^+.$$

Na $(-\infty, 0)$ máme

$$\int x|x| \, dx = \int (-x^2) \, dx = -\frac{x^3}{3} \text{ na } \mathbb{R}^-.$$

Proto celkově

$$\int x|x| \, dx = \frac{|x|^3}{3} \text{ na } \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+.$$

Poznámka: místo předchozích výpočtů na každém intervalu zvlášť lze výhodně využít znaménkové funkce sgn, která je konstantní na $\mathbb{R}^-$ i na $\mathbb{R}^+$, proto jde na obou těchto intervalech z integrálu vytknout. Protože $|x| = x \operatorname{sgn} x$, dostaneme

$$\int x|x| \, dx = \int x \cdot x \operatorname{sgn} x \, dx = \operatorname{sgn} x \int x^2 \, dx = \operatorname{sgn} x \frac{x^3}{3} = \frac{|x|^3}{3} \text{ na } \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+.$$

Integrand $x|x|$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Proto musí existovat primitivní funkce na množině $\mathbb{R}$, která je na celé této množině spojitá. Jelikož

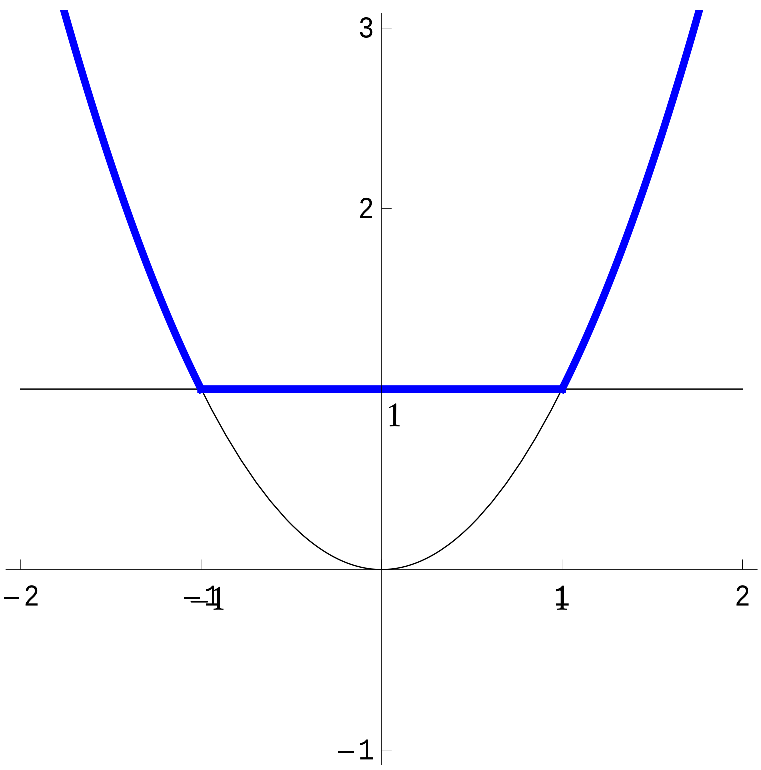
$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|^3}{3} = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|^3}{3} = 0,$$

funkce $\frac{|x|^3}{3}$ je spojitá v bodě 0. Proto podle (??) máme

$$\int x|x|\mathrm{d}x = \frac{|x|^3}{3} \text{ na } \mathbb{R}.$$

86. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

Řešení. Pro názornost načrtněme graf integrandu:



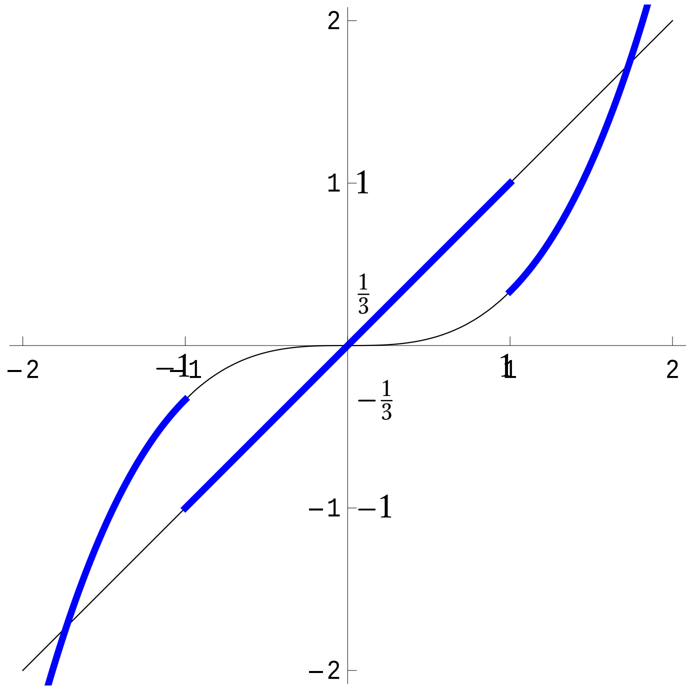
Integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, proto na této množině existuje primitivní funkce. Máme

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \text{ na } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

a

$$\int \mathrm{d}x = x \text{ na } (-1,1).$$

Znázorněme do grafu primitivní funkce na uvedených intervalech:



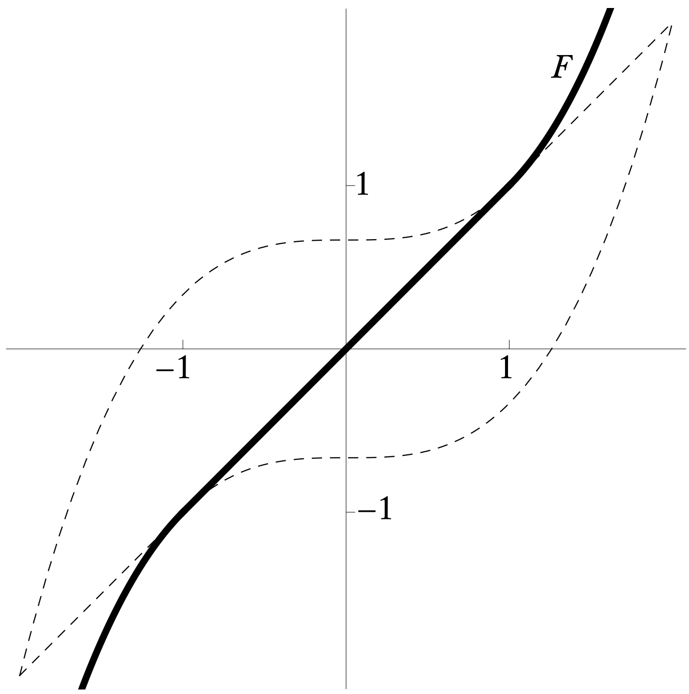
Je

$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^3}{3}=-\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to-1+}x=-1,\quad \lim_{x\to1-}x=1,\quad \lim_{x\to1+}\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Proto

$$\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=F(x)\text{ na }\mathbb{R},\text{ kde }F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3} & \text{pro}\quad x\in(-\infty,-1),\\ x & \text{pro}\quad x\in\langle-1,1\rangle,\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3} & \text{pro}\quad x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

Funkce F je již spojitá na $\mathbb{R}$, jak ukazuje obrázek.



87. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

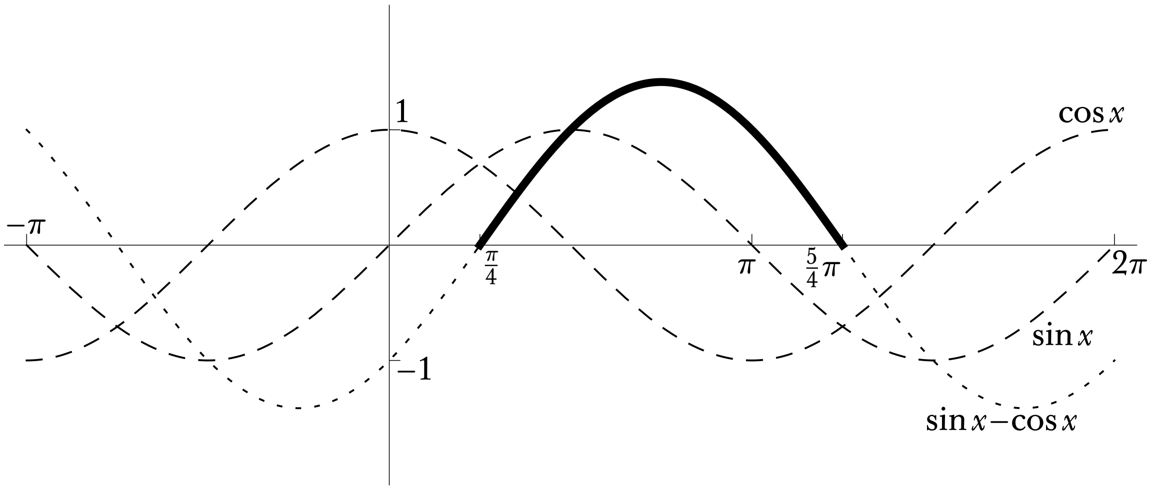
Řešení. Pod odmocninou v integrandu je vždy nezáporné číslo, neboť pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí $\sin 2x\leqq 1$.

Integrand je proto spojitý na $\mathbb{R}$, na celém $\mathbb{R}$ proto existuje primitivní funkce. Protože je integrand periodický s periodou π, stačí nalézt primitivní funkci na libovolném intervalu (a,b) délky π a dodefinovat ji pomocí periodicity a vhodného posunu na celé $\mathbb{R}$.

Protože

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin 2x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|,$$

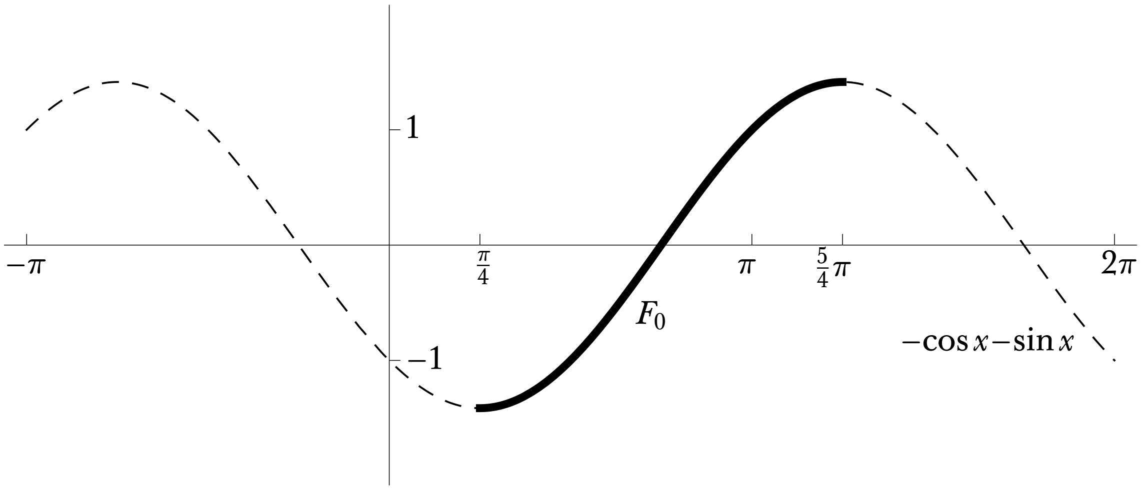
vidíme, že nejvhodnější interval délky π bude takový interval, kde se nebude měnit znaménko výrazu $\sin x - \cos x$ stojícího uvnitř absolutní hodnoty. Jak je zřejmé i z následujícího obrázku,



takovým intervalem je například interval $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$. Na tomto intervalu máme

$$\int |\sin x - \cos x| \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x) \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x \overset{\text{ozn.}}{=} F_0(x).$$

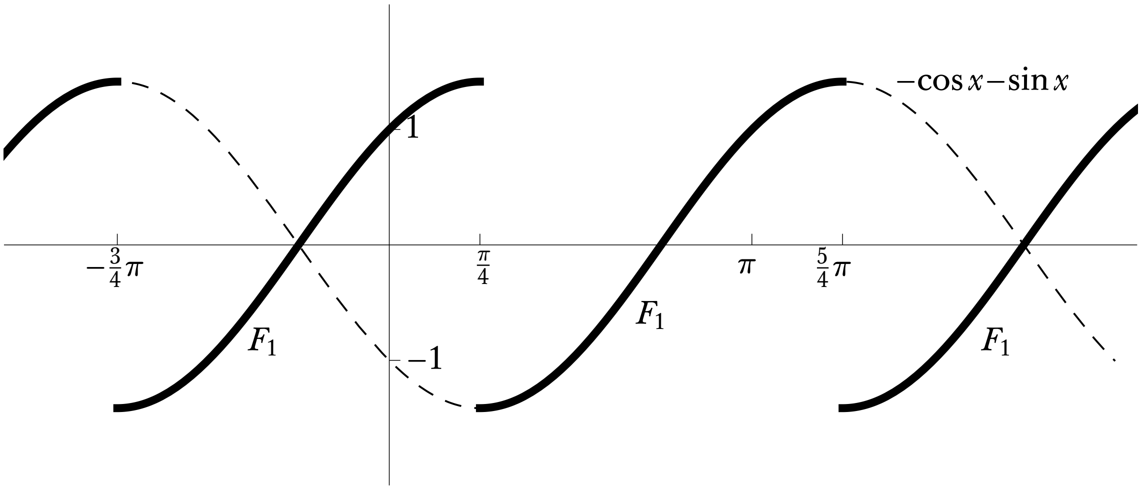
Funkce F_0 je zobrazena na obrázku níže:



Označme nyní

$$F_1(x) = F_0(x - k\pi) = (-1)^{k+1}(\cos x + \sin x) \text{ pro } x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5}{4}\pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce F_1 vypadá takto:



Z periodicity integrandu $\sqrt{1-\sin 2x}$ vyplývá, že funkce F_1 je primitivní funkcí k tomuto integrandu na $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Abychom sestrojili spojitou primitivní funkci na $\mathbb{R}$, je třeba k F_1 přičíst vhodné konstanty na jednotlivých intervalech délky π, které zjistíme výpočtem rozdílu konečných jednostranných limit:

$$\lim_{x\to\frac{5}{4}\pi-} F_1 - \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F_1 = \sqrt{2}-(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

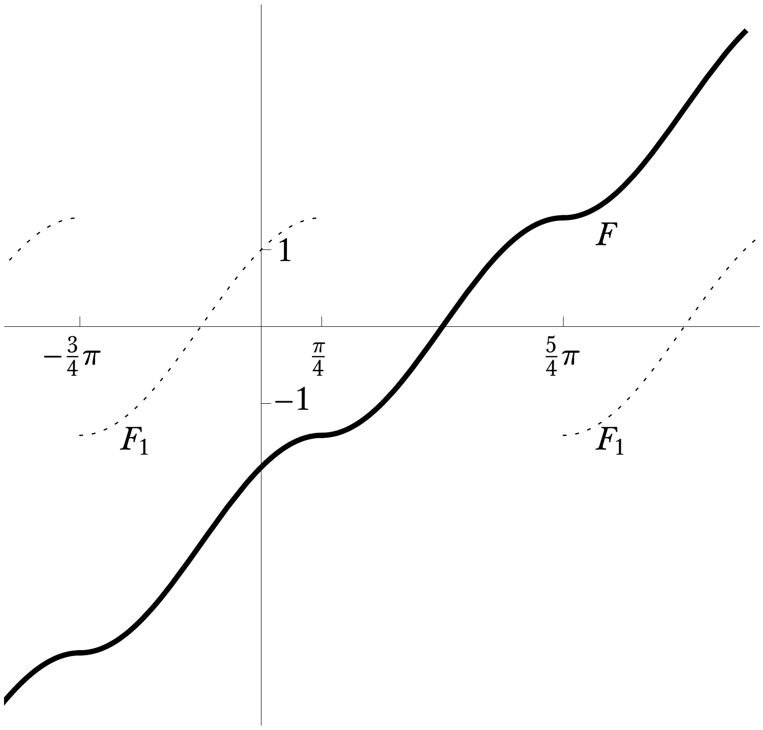
Jednotlivé posuny se sčítají, v k-tém intervalu $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{5}{4}\pi+k\pi\right)$ je třeba přičíst k-násobek rozdílu $2\sqrt{2}$. Jako výsledek dostaneme

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = F(x) \text{ na } \mathbb{R},$$

kde

$$F(x) = (-1)^{k+1}(\cos x+\sin x)+2k\sqrt{2} \quad \text{pro} \quad x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{5}{4}\pi+k\pi\right).$$

Funkce F je znázorněna na následujícím obrázku:



88. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}^+$. Použijeme metodu per partes, na integrand se díváme jako na součin $1\cdot\ln x$.

$$\int \ln x \mathrm{d}x = \int \underset{\substack{u'=1 \quad v=\ln x \\ u=x \quad v'=\frac{1}{x}}}{1\cdot\ln x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x \text{ na } \mathbb{R}^+.$$

89. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x$.

Řešení. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}$. Použijeme integraci per partes.

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{e^x} + \int \frac{\cos x}{e^x}\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{e^x} - \frac{\cos x}{e^x} - \int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x.$$

$$\begin{array}{llll} u_1' = e^{-x} & v_1 = \sin x & \qquad u_2' = e^{-x} & v_2 = \cos x \\ u_1 = -e^{-x} & v_1' = \cos x & \qquad u_2 = -e^{-x} & v_2' = -\sin x \end{array}$$

Pro primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x = F(x)$$

plyne z výše uvedeného výpočtu rovnice

$$F(x) = -\frac{\sin x}{e^x} - \frac{\cos x}{e^x} - F(x),$$

odkud (na $\mathbb{R}$)

$$F(x) = -\frac{\sin x + \cos x}{2e^x}.$$

90. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x+3}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

Řešení. Primitivní funkci hledáme na $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Integrand rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Hodnotu čísel A, B dostaneme buď násobením společným jmenovatelem

$$2x+3 = A(x+1) + B(x-1) \tag{4}$$

a srovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin, tj. řešením soustavy

$$3 = A - B, \quad 2 = A + B.$$

Máme

$$A = \frac{5}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Nebo alternativně násobíme kořenovým činitelem $x-1$,

$$\frac{2x+3}{x+1} = A + \frac{B}{x+1}(x-1) \tag{5}$$

a dosazením $x=1$ dostaneme přímo

$$A = \frac{2\cdot 1+3}{1+1} = \frac{5}{2},$$

podobně

$$B = -\frac{1}{2}.$$

(Poznámka: Tento postup zjištění hodnot konstant A, B je korektní. Platí-li totiž rovnost (4) pro nekonečně mnoho reálných čísel x, platí pro všechna reálná čísla, tedy i pro zakázané hodnoty $x = \pm 1$. Vztah (4) lze po této úvaze opět vydělit $x+1$ a dostat vztah (5), který již platí i pro $x = 1$.

Alternativně lze korektnost postupu odůvodnit tak, že ze vztahu (5) plyne rovnost limit

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{x+1} = \lim_{x\to 1} \left(A + \frac{B}{x+1}(x-1)\right),$$

které můžeme vyčíslit dosazením, neboť na jejich argumenty se můžeme dívat jako na spojité funkce v bodě 1.)

Pro primitivní funkci dostaneme

$$\int \frac{2x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \text{ na } \mathbb{R} - \{-1,1\}.$$

91. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}$.

Řešení. Integrand má za definiční obor množinu $\mathbb{R} - \{-1,-2,-3\}$. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3}. \tag{6}$$

Konstanty A, B, D určíme postupně násobením jmenovateli $x+1$, $(x+2)^2$ a $(x+3)^2$ a dosazením hodnot kořenů -1, -2 a -3. Tak dostaneme

$$A = \frac{1}{(-1+2)^2(-1+3)^2} = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{(-2+1)(-2+3)^2} = -1,\ D = \frac{1}{(-3+1)(-3+2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Konstanty C a E určíme např. následujícím postupem. Vynásobme vztah (6) výrazem $(x+2)^2$. Dostaneme

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)^2} = \frac{A(x+2)^2}{x+1} + B + C(x+2) + \frac{D(x+2)^2}{(x+3)^2} + \frac{E(x+2)^2}{x+3}.$$

Derivujeme-li nyní tuto rovnost podle x, dostaneme

$$\left(\frac{1}{(x+1)(x+3)^2}\right)' = \frac{Ax(x+2)}{(x+1)^2} + 0 + C + \frac{2D(x+2)}{(x+3)^3} + \frac{E(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}. \tag{7}$$

Vidíme, že ve všech sčítancích na pravé straně (7) kromě C figuruje činitel $(x+2)$ alespoň v první mocnině. Dosazením $x = -2$ do (7) proto dostaneme

$$C = \left(\frac{1}{(x+1)(x+3)^2}\right)'\Bigg|_{x=-2} = \frac{-3x^2-14x-15}{(x+1)^2(x+3)^4}\Bigg|_{x=-2} = 1.$$

Stejným postupem máme

$$E = \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)'\Bigg|_{x=-3} = \frac{-3x^2-10x-8}{(x+1)^2(x+2)^4}\Bigg|_{x=-3} = -\frac{5}{4}.$$

Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)^2} - \frac{5}{4(x+3)}.$$

Máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + \ln|x+2| + \frac{1}{2(x+3)} - \frac{5}{4}\ln|x+3| \text{ na } \mathbb{R} - \{-1,-2,-3\}.$$

92. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $\mathbb{R}$, neboť diskriminant jmenovatele je záporný. Jmenovatel upravíme na čtverec a provedeme vhodnou substituci:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} z = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{2}} &= z \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}} &= \mathrm{d}z \end{aligned}$$

93. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand je spojitý na $\mathbb{R}$, neboť diskriminant jmenovatele je záporný. Čitatel napíšeme jako součet derivace jmenovatele a konstanty:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x.$$

Na první integrál použijeme první substituční metodu.

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3).$$

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= z \\ (2x+2)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Druhý integrál jsme vypočítali v př. 92. Celkem

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

94. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}$.

Řešení. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}$, neboť diskriminant trojčlenu v závorce je záporný. Jmenovatel upravíme na čtverec a provedeme vhodnou substituci:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{((x+1)^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{2}} &= z \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}} &= \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Poslední integrál spočteme tak, že budeme počítat integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z$ metodou per partes:

$$\operatorname{arctg} z=\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{z}{z^2+1}+2\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{z^2+1}+2\int\frac{(z^2+1-1)dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{z^2+1}+2\int\frac{dz}{z^2+1}-2\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z-2\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Z rovnosti vyjádříme

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z^2+1}+\operatorname{arctg} z\right).$$

Proto

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\text{ na }\mathbb{R}.$$

95. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{x^3dx}{(x-1)^{100}}$.

Řešení. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}-\{1\}$. Lepší než rozkládat integrand na sto parciálních zlomků je provést substituci $x-1=t$:

$$\int\underset{\substack{x-1\,=\,t\\ dx\,=\,dt}}{\frac{x^3dx}{(x-1)^{100}}}=\int\frac{(t+1)^3dt}{t^{100}}=\int\left(t^{-97}+3t^{-98}+3t^{-99}+t^{-100}\right)dt=-\frac{1}{96t^{96}}-\frac{3}{97t^{97}}-\frac{3}{98t^{98}}-\frac{1}{99t^{99}}=$$

$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}\text{ na }\mathbb{R}-\{1\}.$$

96. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{e^x+1}{(e^x-1)(e^{2x}-e^2)}dx$.

Řešení.

$$\int\frac{e^x+1}{(e^x-1)(e^{2x}-e^2)}dx=\int\underset{\substack{e^x\,=\,t\\ e^xdx\,=\,dt}}{\frac{(e^x+1)e^x}{e^x(e^x-1)(e^{2x}-e^2)}dx}=\int\frac{t+1}{t(t-1)(t^2-e^2)}dt,$$

rozložíme:

$$\frac{t+1}{t(t-1)(t^2-e^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-e}+\frac{D}{t+e},$$

vynásobením společným jmenovatelem $t(t-1)(t^2-e^2)$ a dosazením hodnot kořenů dostaneme

$$A=\frac{1}{e^2},\qquad B=\frac{2}{1-e^2},\qquad C=\frac{e+1}{2e^2(e-1)},\qquad D=\frac{e-1}{2e^2(e+1)},$$

odtud

$$\int\frac{t+1}{t(t-1)(t^2-e^2)}dt=\frac{1}{e^2}\ln t+\frac{2}{1-e^2}\ln|t-1|+\frac{e+1}{2e^2(e-1)}\ln|t-e|+\frac{e-1}{2e^2(e+1)}\ln(t+e)=$$

$$=\frac{x}{e^2}+\frac{2}{1-e^2}\ln|e^x-1|+\frac{e+1}{2e^2(e-1)}\ln|e^x-e|+\frac{e-1}{2e^2(e+1)}\ln(e^x+e)\text{ na }\mathbb{R}-\{0,1\}.$$

97. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{dx}{1+\cos^2x}$.

Řešení. Integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, periodická s periodou π. Nejprve určíme primitivní funkci na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Při výpočtu využijeme vztahu

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Máme

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x+2)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}\mathrm{d}z}{z^2+1}=$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}x&=t\\ \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x&=\mathrm{d}t\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\frac{t}{\sqrt{2}}&=z\\ \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}}&=\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}z=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\overset{\text{ozn.}}{=}F(x).$$

Abychom obdrželi primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, vypočteme velikost skoku v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$:

$$\lim_{\frac{\pi}{2}-}F-\lim_{-\frac{\pi}{2}+}F=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Primitivní funkce na $\mathbb{R}$ má tedy tvar

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+k\frac{\sqrt{2}\pi}{2} & \text{pro } x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z},\\ \frac{\sqrt{2}(2k+1)\pi}{4} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

98. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

Řešení. Funkce v integrandu je periodická s periodou 2π, definiční obor je $\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. Proto stačí integrál počítat na $(-\pi,\pi)$:

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=t+\ln(t^2+1)=$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{x}{2}&=t\Rightarrow\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ x&=2\operatorname{arctg}t\\ \mathrm{d}x&=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)\ \text{na } \mathbb{R}-\{\pi+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}.$$

99. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

Řešení. Definiční obor integrandu je $\langle 0,+\infty)$, primitivní funkci hledáme proto na $\mathbb{R}^+$. Protože

$$\int\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\mathrm{d}x,$$

jedná se o Čebyševův integrál pro $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{3}$, $r=-2$. Je $\frac{p+1}{q}=\frac{9}{2}$, proto k převedení integrálu na integrál z racionální funkce použijeme substituci $y=x^{\frac{1}{6}}$.

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\mathrm{d}x=6\int y^3(1+y^2)^{-2}y^5\,\mathrm{d}y=6\int\frac{y^8}{(y^2+1)^2}\mathrm{d}y.$$

$$\begin{aligned} x &= y^6\\ \mathrm{d}x &= 6y^5\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Stupeň polynomu v čitateli je větší než stupeň polynomu ve jmenovateli, proto dělíme:

$$y^8:(y^4+2y^2+1)=y^4-2y^2+3-\frac{4y^2+3}{(y^2+1)^2}.$$

Rozklad zbytku na parciální zlomky je (díky tomu, že zlomek je funkce y^2) možno hledat ve tvaru

$$\frac{4y^2+3}{(y^2+1)^2}=\frac{A}{y^2+1}+\frac{B}{(y^2+1)^2}.$$

Násobením dostaneme rovnost

$$4y^2+3=A(y^2+1)+B,$$

odkud plyne

$$A=4,\qquad B=-1.$$

Proto

$$6\int\frac{y^8}{(y^2+1)^2}\mathrm{d}y=6\int\left(y^4-2y^2+3-\frac{4}{y^2+1}+\frac{1}{(y^2+1)^2}\right)\mathrm{d}y.$$

Připomeňme výsledek z příkladu 94:

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z^2+1}+\operatorname{arctg}z\right).$$

Odtud

$$6\int\frac{y^8}{(y^2+1)^2}\mathrm{d}y=\frac{6}{5}y^5-4y^3+18y-21\operatorname{arctg}y+\frac{3y}{y^2+1}.$$

Pro původní integrál proto dostaneme

$$\int\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

100. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x\sqrt{6+x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand je funkce definovaná na $\langle -2,3\rangle$, primitivní funkci proto hledáme na $(-2,3)$. Integrál upravíme na tvar

$$\int x\sqrt{6+x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int x\sqrt{(3-x)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int x(3-x)\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\,\mathrm{d}x$$

a použijeme substituci, kterou odvodíme řešením rovnice

$$t=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$$

vzhledem k x. Dostaneme

$$x=\varphi(t)=\frac{3t^2-2}{t^2+1}.$$

První derivace φ je rovna

$$\varphi'(t)=\frac{10t}{(t^2+1)^2}.$$

Protože $\varphi'(t)>0$ pro $t>0$ a

$$\varphi(0)=-2,\quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=3,$$

jako definiční obor φ volíme $\mathbb{R}^+$, neboť φ pak zobrazuje bijektivně $(0,+\infty)$ na $(-2,3)$. Dosazením φ do integrandu dostaneme

$$\int\frac{3t^2-2}{t^2+1}\cdot\left(3-\frac{3t^2-2}{t^2+1}\right)\cdot t\cdot\frac{10t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=50\int\frac{(3t^2-2)t^2}{(t^2+1)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky díky tomu, že integrand je funkce t^2, vypadá takto:

$$\frac{(3t^2-2)t^2}{(t^2+1)^4}=\frac{A}{t^2+1}+\frac{B}{(t^2+1)^2}+\frac{C}{(t^2+1)^3}+\frac{D}{(t^2+1)^4}.$$

Hodnoty konstant určíme násobením společným jmenovatelem a srovnáním koeficientů u mocnin:

$$3t^4-2t^2=A(t^6+3t^4+3t^2+1)+B(t^4+2t^2+1)+C(t^2+1)+D;$$

$$0=A,\qquad 3=3A+B,\qquad -2=3A+2B+C,\qquad 0=A+B+C+D.$$

Odtud postupně

$$A=0,\qquad B=3,\qquad C=-8,\qquad D=5.$$

Máme

$$50\int\frac{(3t^2-2)t^2}{(t^2+1)^4}\,\mathrm{d}t=150\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t-400\int\frac{1}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}t+250\int\frac{1}{(t^2+1)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Rekurentní vztah pro integrály $I_k=\int\frac{1}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t$ dostaneme pomocí integrace per partes:

$$I_k=\frac{t}{(t^2+1)^k}+2k\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{t}{(t^2+1)^k}+2k(I_k-I_{k+1})$$

$$\Rightarrow\quad I_{k+1}=\frac{1}{2k}\left(\frac{t}{(t^2+1)^k}+(2k-1)I_k\right).$$

Odtud dostaneme:

$$I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg}t\right),$$

$$I_3=\frac{1}{4}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{3t}{2(t^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2}+3\operatorname{arctg}t\right),$$

$$I_4=\frac{1}{6}\left(\frac{t}{(t^2+1)^3}+\frac{5}{8}\left(\frac{t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2}+3\operatorname{arctg}t\right)\right)=\frac{1}{48}\left(\frac{t(15t^4+40t^2+33)}{(t^2+1)^3}+15\operatorname{arctg}t\right).$$

Proto

$$50\int\frac{(3t^2-2)t^2}{(t^2+1)^4}\mathrm{d}t=150I_2-400I_3+250I_4=$$

$$=\frac{75t}{t^2+1}+75\operatorname{arctg}t-\frac{50t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2}-150\operatorname{arctg}t+\frac{125t(15t^4+40t^2+33)}{24(t^2+1)^3}+\frac{625}{8}\operatorname{arctg}t=$$

$$=\frac{24\cdot75t(t^2+1)^2-24\cdot50t(3t^2+5)(t^2+1)+125t(15t^4+40t^2+33)}{24(t^2+1)^3}=\frac{25t(3t^4-40t^2-3)}{24(t^2+1)^3}+\frac{25}{8}\operatorname{arctg}t.$$

Odtud máme

$$\int x\sqrt{6+x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{25\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\left(3\left(\frac{x+2}{3-x}\right)^2-40\frac{x+2}{3-x}-3\right)}{24\left(\frac{x+2}{3-x}+1\right)^3}+\frac{25}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}=$$

$$=\frac{25\sqrt{6+x-x^2}(3(x+2)^2-40(6+x-x^2)-3(3-x)^2)}{24\cdot5^3}+\frac{25}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6+x-x^2}(8x^2-2x-51)}{24}+\frac{25}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}.$$

Příklad můžeme počítat i alternativním způsobem. Vnitřek odmocniny upravíme na čtverec:

$$\sqrt{6+x-x^2}=\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{5}\right)^2}.$$

Nyní použijeme substituci druhého druhu $\frac{2x-1}{5}=\sin t$, kde $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Na tomto intervalu je $\cos t$ kladný, proto $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ a integrál přejde na

$$\int x\sqrt{6+x-x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{5\sin t+1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\frac{5\cos t}{2}\mathrm{d}t=\frac{25}{8}\int(5\sin t+1)\cos^2 t\mathrm{d}t=$$

$$x=\frac{5\sin t+1}{2}$$
$$\mathrm{d}x=\frac{5\cos t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{125}{8}\int\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t+\frac{25}{8}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=-\frac{125}{8}\frac{\cos^3 t}{3}+\frac{25}{8}\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=-\frac{125}{8}\frac{\cos^3 t}{3}+\frac{25}{16}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{(6+x-x^2)^3}+\frac{25}{16}\arcsin\frac{2x-1}{5}+\frac{25}{16}\cdot\frac{2x-1}{5}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{6+x-x^2}=$$
$$=\frac{8x^2-2x-51}{24}\sqrt{6+x-x^2}+\frac{25}{16}\arcsin\frac{2x-1}{5}.$$

Poznámka: dosazením hodnoty $x=\frac{1}{2}$ do obou výsledků vidíme, že se liší o konstantu $\frac{25\pi}{32}$.

101. Pomocí Newtonovy formule a základní věty integrálního počtu vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

Řešení. Nejprve vypočteme pomocí Newtonovy formule integrál

$$\int\limits_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[\operatorname{arctg}x]_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

Z vyjádření Riemannova integrálu jako limity integrálního součtu plyne, že

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Hodnota limity je tedy $\frac{\pi}{4}$.

102. Pomocí Newtonovy formule a základní věty integrálního počtu vypočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, kde $p>0$.

Řešení. Z Newtonovy formule vyplývá, že

$$\int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Z vyjádření Riemannova integrálu jako limity integrálního součtu plyne, že

$$\int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}.$$

Hodnota limity je tedy $\frac{1}{p+1}$.

103. Vypočtěte určitý Riemannův integrál $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x$.

Řešení. K výpočtu použijeme metodu per partes.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}[x]_0^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}x]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$u'=x,\quad v=\operatorname{arctg}x,$$
$$u=\frac{x^2}{2},\quad v'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

104. Vypočtěte určitý Riemannův integrál $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Řešení. Protože diskriminant polynomu ve jmenovateli je záporný, čitatel upravíme na součet derivace jmenovatele a zbytku, potom upravíme jmenovatel na čtverec a použijeme lineární substituci.

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(2x+1-1)\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}[\ln(x^2+x+1)]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$=\frac{\ln 3}{2}-\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{\ln 3}{2}-\frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{\ln 3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\ln 3}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

105. Vypočtěte určitý Riemannův integrál $\int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-t^2}{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{3}} - t^{\frac{5}{3}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3t^{\frac{8}{3}}}{8}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8}.$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

106. Vypočtěte určitý Riemannův integrál $\int_1^{n+1} \ln[x]\mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$; hranaté závorky označují celou část.

Řešení.

$$\int_1^{n+1} \ln[x]\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln[x]\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln k\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \ln k \int_k^{k+1} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)\cdot 1 = \ln n!.$$

107. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$. Jak plyne přímo z definice derivace, uvedená limita je rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = \cos 0^2 = 1.$$

108. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

Řešení. Protože $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, k výpočtu limity lze užít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \left(\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}^2 x\right) \cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

109. Rozhodněte o konvergenci zob. Riemannova integrálu $\int_0^{+\infty} x^\alpha \arccos \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. V závislosti na parametru α může být 0 kritickým bodem, $+\infty$ je kritickým bodem vždy. Studujeme zvlášť konvergenci integrálů $\int_0^1 x^\alpha \arccos \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ a $\int_1^{+\infty} x^\alpha \arccos \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

Funkce $\arccos\dfrac{x}{x+1}$ je spojitá v bodě 0 a $\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$, proto $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \arccos\frac{x}{x+1}\,dx$ má stejný charakter jako $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$. Konverguje tedy pro $\alpha>-1$.

Co se týče integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \arccos\frac{x}{x+1}\,dx$, nejprve vypočteme derivaci

$$\left(\arccos\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{-1}{(x+1)^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}}=-\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x}}.$$

Odtud vidíme, že je užitečné srovnat zkoumaný integrál s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{-\alpha+\frac{1}{2}}}$. Podle l'Hospitalova pravidla je totiž

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha\arccos\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x^{-\alpha+\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arccos\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x}}}{-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{2},$$

a proto integrály mají stejný charakter. Integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \arccos\frac{x}{x+1}\,dx$ proto konverguje pro $-\alpha+\dfrac{1}{2}>$ $>1\Leftrightarrow \alpha<-\dfrac{1}{2}$.

Závěr: původní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \arccos\frac{x}{x+1}\,dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

110. Rozhodněte o konvergenci zob. Riemannova integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,dx$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Řešení. Kritickým bodem je $+\infty$ a může jím být bod 1, proto zkoumáme zvlášť konvergenci integrálů $\displaystyle\int_1^{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,dx$ a $\displaystyle\int_2^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,dx$.

Integrál $\displaystyle\int_1^{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,dx$ má stejný charakter jako $\displaystyle\int_1^{2}\ln^\alpha x\,dx$, neboť $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1^2+1}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}>0$ a $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}$ je spojitá v bodě 1. $\displaystyle\int_1^{2}\ln^\alpha x\,dx$ má přitom stejný charakter jako $\displaystyle\int_1^{2}(x-1)^\alpha dx$, neboť

$$\lim_{x\to1+}\frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^\alpha}=\left(\lim_{x\to1+}\frac{\ln x}{x-1}\right)^\alpha=\left(\lim_{y\to0+}\frac{\ln(y+1)}{y}\right)^\alpha=1^\alpha=1.$$

To znamená, že $\displaystyle\int_1^{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,dx$ konverguje pro $-\alpha<1\Leftrightarrow\alpha>-1$.

Integrál $\int\limits_2^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,\mathrm{d}x$ má stejný charakter jako $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x}\mathrm{d}x$, neboť podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

Dále po provedení substituce $t=\ln x$ integrál přejde na

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}t^\alpha\mathrm{d}t,$$

poslední integrál přitom konverguje právě tehdy, když $\alpha<-1$.

Závěr: integrál $\int\limits_1^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1}\ln^\alpha x\,\mathrm{d}x$ diverguje pro všechny hodnoty α.

111. Rozhodněte o konvergenci (resp. absolutní konvergenci) zobecněného Riemannova integrálu $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Řešení. Kritické body jsou 0 a $+\infty$, proto zkoumáme integrály $\int\limits_0^1\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ a $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ zvlášť.

Zkoumejme nejprve $\int\limits_0^1\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$. Je

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{2\sin^2 x\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

přičemž poslední integrál má stejný charakter jako $\int\limits_0^1\frac{1}{x^{\alpha-2}}$, neboť $\cos 0=1$ a

$$\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{2\sin^2 x}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^{\alpha-2}}}=2\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2.$$

Proto integrál $\int\limits_0^1\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha-2<1\Leftrightarrow\alpha<3$. (Konvergence je absolutní, neboť integrand je nezáporný.)

Co se týče integrálu $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x\sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, pro $\alpha>0$ lze použít Dirichletovo kritérium: je totiž

$$\int\limits_1^x\sin t\sin 2t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^x\frac{1}{2}(\cos t-\cos 3t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\sin x-\sin 1+\sin 3-\sin 3x),$$

odkud

$$\left|\int_1^x \sin t \sin 2t \,\mathrm{d}t\right| \leqq \frac{1}{2}(1+1+1+1) = 2.$$

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ je klesající, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$, proto podle Dirichletova kritéria integrál pro $\alpha > 0$ konverguje.

Pro $\alpha \leqq 0$ je integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ divergentní, neboť je splněna negace Bolzanovy-Cauchyovy podmínky:

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\Big(\forall\, c \in (1,+\infty)\Big)\Big(\exists\, x_1, x_2 \in (c,+\infty)\Big)\left(\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right| \geqq \varepsilon\right).$$

Konkrétně lze volit $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$, neboť pro každé $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je $\sin x \sin 2x \geqq 0$ a

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}.$$

Co se týče absolutní konvergence, integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x \sin 2x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ pro $\alpha > 1$ konverguje, neboť

$$\frac{|\sin x \sin 2x|}{x^\alpha} \leqq \frac{1}{x^\alpha},$$

konvergence plyne ze srovávacího kritéria. Naopak pro $\alpha \in (0,1\rangle$ integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x \sin 2x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ diverguje, neboť

$$\frac{|\sin x \sin 2x|}{x^\alpha} = \frac{2\sin^2 x|\cos x|}{x^\alpha} \geqq \frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 2x}{x^\alpha} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{x^\alpha}$$

a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^\alpha}\mathrm{d}x$ je divergentní, zatímco $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{4x^\alpha}\mathrm{d}x$ je konvergentní (z Dirichletova kritéria).

Závěr: původní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ konverguje absolutně pro $\alpha \in (1,3)$, neabsolutně pro $\alpha \in (0,1\rangle$ a diverguje pro ostatní α.

112. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand je nezáporný, proto lze použít srovnávací kritérium. Kritické body jsou -1 a $+\infty$. Zkoumáme proto konvergenci $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$ zvlášť.

První integrál $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$ konverguje, neboť má stejný charakter jako integrál

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x,$$

protože

$$\lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{3}{4}\pi.$$

Druhý integrál $\int_{0}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x$ diverguje, neboť má stejný charakter jako integrál $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$, protože je

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x}{x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = 1\cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 1.$$

Celkově tedy integrál $\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}\operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x$ diverguje.