

ELMA - poznámky z přednášek

Kompilováno: 9. března 2014

Slova úvodem NEPROPADEJTE PANICE

Jako první bych podotkl, že moje poznámky jsou psány naprosto seriózně a není sebe-menší důvod se u nich smát!

Pro co nejlepší představu se budu snažit situace co nejlépe popsat. Ve většině kapitol už obrázky jsou, i když nejsou kdovíjaké kvality, ale pořád lepší, než drátem (nekonečným s proudem I a magnetickou indukcí B) do oka.

Kdyby to náhodou četl někdo jiný než já (což jako že asi jo), tak se omlouvám za případné chyby (které tu s nejvyšší pravděpodobností ještě jsou). Můžete mi napsat na (sv_thomasos@centrum.cz) a třeba je opravím. Můžete mi posílat i jiné věcné připomínky. Vzhledem k tomu, že já a hlavní korektorka už máme zkoušku za sebou, tak změny z mojí iniciativy už moc neočekávám. To však nemění nic na tom, že mi může poslat nějakou připomínku někdo další.

Co se týče číslování kapitol, tak se skript nedržím, čísluji si to, jak se to hodí. Jsou to poznámky z přednášek, ne ze skript a koneckonců jsem skripta neotevřel skoro vůbec.

Jo a jinak to, že jsem sepsal takhle hezky svoje poznámky a dostal jsem A, nemusí nutně znamenat, že tomu rozumím.

Vězte, že až se někdy octnete na pustém ostrově¹, tak se vám to zcela určitě bude hodit (hlavně výroba elektřiny s použitím cívky a magnetického pole Země, apod.).

„Není to chaos. Chaos má řád.“

Alternativní literatura

Štoll: Elektřina a magnetismus

Parsl: Elektřina a magnetismus

Feynmanovy přednášky

Web aldebaran

<http://aldebaran.cz/~bren/elmag/>

<http://aldebaran.cz/>

MEF - Multimediální Encyklopedie Fyziky

¹Těžko říct, jak Chadzi definuje pustý ostrov...

Obsah

1	Matematický aparát	4
1.1	Derivace a integrace	4
1.2	Skalární a vektorové pole	4
1.3	Tok vektorového pole	5
1.4	Gaussova věta o divergenci	6
1.5	Stokesova věta o rotaci	7
1.6	Kombinace gradientu, divergence a rotace	9
1.7	Taylorův rozvoj	10
2	Speciální teorie relativity	12
2.1	Lorentzovy transformace v jednom směru	13
2.1.1	Dilatace času	16
2.1.2	Kontrakce délek	17
2.1.3	Skládání rychlostí	17
2.2	Lorentzovy transformace obecně v časoprostoru	18
2.3	Něco o vlnách, Dopplerův jev	19
2.4	Další invariantní čtyřvektory	21
2.5	Disperzní relace	22
2.6	Dynamika ve speciální teorii relativity	22
2.6.1	Hybnost	22
2.6.2	Kinetická energie	23
3	Obecná teorie relativity	27
4	Elektrostatika	28
4.1	Elektrický náboj	28
4.2	Coulombův zákon	28
4.3	Elektrostatická energie	29
4.3.1	Potenciál v okolí nabitě kulové plochy	29
4.3.2	Hypotetický poloměr elektronu	30
4.4	Elektrostatické pole	30
4.5	Gaussův zákon elektrostatický	30
4.6	Energie elektrostatického pole	33
4.7	Polarizace aneb dielektrikum v elektrostatickém poli	34
4.7.1	Dipól	35
4.7.2	Dipólové momenty atomů	36
4.7.3	Objemově rozložený dipólový moment	37
4.8	Vodič v elektrostatickém poli	39
4.9	Elektrostatické zobrazení	40
4.10	Kondenzátor	42
4.11	Elektrostatické pole v dielektriku	44

5	Stacionární elektrické pole	45
5.1	Elektrický proud	45
5.1.1	Druhy proudů	45
5.1.2	Uzavřená plocha a smyčka	46
5.2	Ohmův zákon	46
5.3	Fotonka	47
5.4	Elektromotorické napětí	47
5.5	Kirchoffova pravidla	48
5.6	Klasická teorie vodivosti	48
6	Vznik magnetického pole	50
6.1	Pohyb nabitě částice v okolí vodiče s proudem	50
6.2	Vzájemné působení nábojů	51
6.3	Biotův-Savartův zákon	53
6.4	Magnetické pole v okolí nekonečného drátu s proudem	54
6.5	Magnetické pole v okolí nekonečné desky s proudem	54
6.6	Něco, co bych asi označil jako pohybující se kondenzátor	55
6.7	Invariantní veličiny	56
6.8	Vzájemné působení dvou vodičů s proudem	56
6.9	Ampérův zákon	56
6.10	Závit v okolí cívky s proudem	57
6.11	Vektorový potenciál magnetického pole	58
6.12	Magnetický dipólový moment	60
6.13	Homogenní magnetické pole	61
6.14	Vektor magnetizace	61
6.15	Pohyb nabitě částice v magnetickém poli	62
6.16	Kvazistacionární pole	62
6.17	RLC obvody, impedance, přechodové jevy...	63

1 Matematický aparát

Určitě bych doporučil se podívat na komplexní čísla, budou se hodit.

1.1 Derivace a integrace

Derivace je zvláštní případ limity. Udává směrnici funkce.

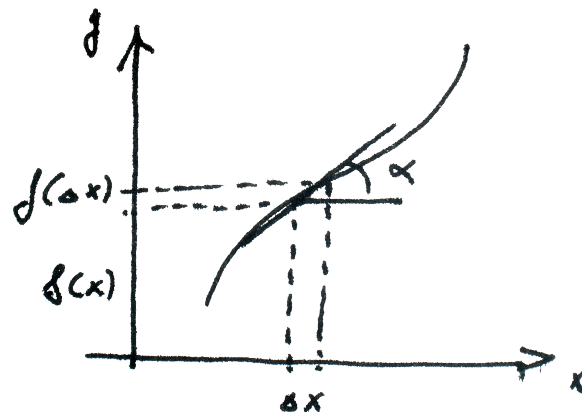
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Integrace je opačná operace k derivaci. Určuje obsah plochy pod křivkou.

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_A^B f(x) dx$$

Střední hodnota integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{f(x)} (b - a) \quad (1)$$



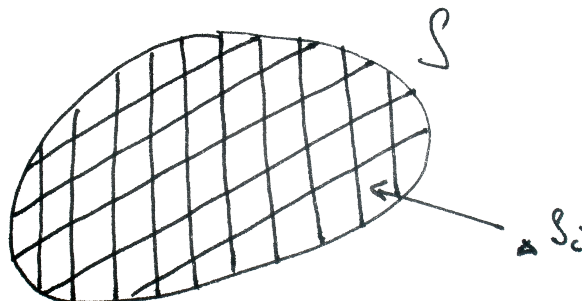
1.2 Skalární a vektorové pole

Intenzita vektorového pole v každém bodě vektorového prostoru:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Např. proud vody v řecišti

Skalární pole - v každém bodě pole je skalár (nějaká číselná hodnota). Skalární pole lze přirovnat k číselnému tělesu. Lze tedy použít toto pole k přidání jedné dimenze k prostoru, když budeme uvažovat hodnotu jako onu dimenzi.



$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta S_i = \int f dS = V$$

$$\sum_i S_i = \int_S dS = S$$

Parciální derivace - derivace ve směru, jsou závislé na zvolené soustavě souřadnic. Derivaci ve směru x značíme takto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial s} \right)_{\Delta \vec{r}} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - f(\vec{r})}{\Delta r} = \lim_{\Delta x; \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta r} = \\ &= \lim_{\Delta x; \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y) + f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta r} = \\ &= \lim_{\Delta x; \Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)}{\Delta r} + \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta r} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x; \Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta r} \right] = \\ &= \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta r}; \frac{\Delta y}{\Delta r} \right) \right| = \left(\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Gradient je diferenciální operátor působící na skalární pole $\text{grad}: f \rightarrow \vec{F}$ a udává směr a velikost růstu funkce v daném bodě. Gradient označujeme symbolem ∇ (nabla). Nabla je vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

1.3 Tok vektorového pole

- tok vektorů plochou

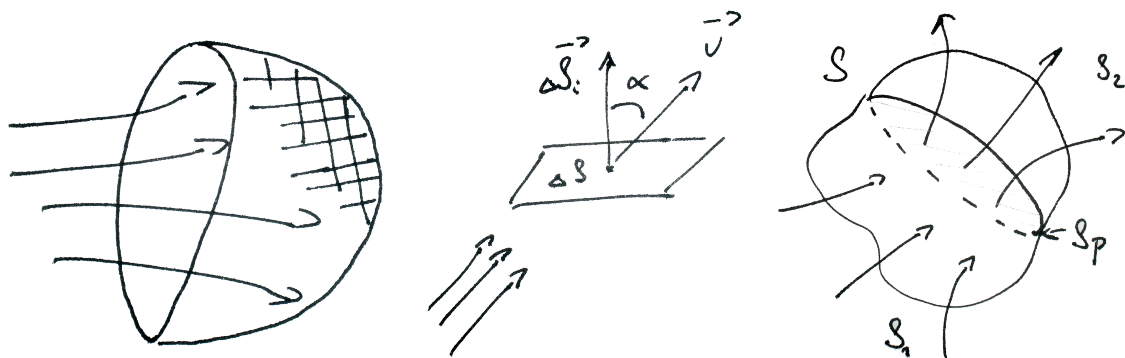
Voda $\leftrightarrow$ rychlostní pole = množství vody za čas

Rozdělme si plochu na nekonečně malé plošky, pak

$$v \Delta S \cos \alpha = \Delta \Phi$$

kde α je úhel, který svírá normála k plošce se směrem proudění

$$\Phi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{oka} \vec{v} \cdot \Delta \vec{S} = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v(\vec{r}) \cos \alpha dS$$



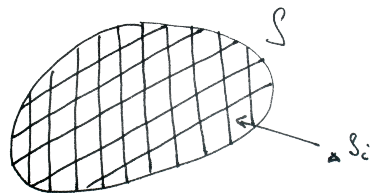
$$S = \sum \Delta S \neq \sum \Delta \vec{S}$$

Uzavřená plocha (nemá hranici) - u nestlačitelné kapaliny $\Phi = 0$, při zahřívání (změna objemu) $\Phi \neq 0$. Lze se dohodnout na orientaci. Směr, daný polopřímku začínající na ploše protínající plochu $(2n + 1)$ -krát je záporný a $2n$ -krát je kladný ($n \in \mathbb{Z}$), takže $\int_{koule} d\vec{S} = 0$. Uvažujme tedy uzavřenou plochu a rozdělme si ji příčkou o ploše S_p na plochy S_1 a S_2 . Získáme tak dvě uzavřené plochy $(S_1 + S_p)$ a $(S_2 + S_p)$.

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{\forall \Delta S \rightarrow 0} \sum_{\Delta S} F \Delta S = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S = S}} \left(\sum_{\Delta S \in S_1} \vec{F} \Delta \vec{S} + \sum_{\Delta S \in S_2} \vec{F} \Delta \vec{S} \right) + \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S = S_p}} \sum_{\Delta S \in S_p} \vec{F} \Delta \vec{S} - \\ &- \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S = S_p}} \sum_{\Delta S \in S_p} \vec{F} \Delta \vec{S} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S = S_1 + S_p}} \sum_{\Delta S \in S_1 + S_p} \vec{F} \Delta \vec{S} + \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \sum \Delta S = S_2 + S_p}} \sum_{\Delta S \in S_2 + S_p} \vec{F} \Delta \vec{S} \end{aligned}$$

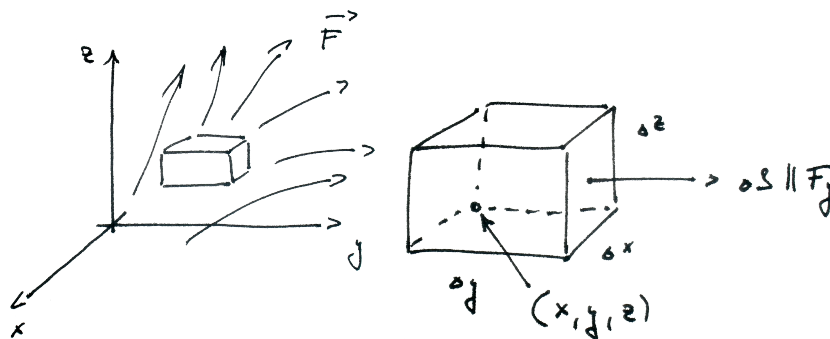
1.4 Gausova věta o divergenci

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{F} d\vec{S} &= \oint_{S'} \vec{F} d\vec{S} + \oint_{S''} \vec{F} d\vec{S} = \Phi \\ \Phi &= \oint_S \vec{F} d\vec{S} = \sum_{\forall S_i} \oint_{S_i} \vec{F} d\vec{S} = \sum_{\forall S_i} \frac{\oint_{S_i} F dS}{V_i} V_i = * \\ S_i &\rightarrow 0 \Rightarrow V_i \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Divergence je diferenciální operátor působící na vektorové pole $\text{div}: \vec{F} \rightarrow f$ a určuje, kolik z vektorového pole proteče uzavřenou plochou. Označujeme opět symbolem ∇ (nabla) a jeho působení se dá vyjádřit jako skalární součin dvou vektorů.

$$\text{div } \vec{F}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V}$$



$$* = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ \sum \Delta V_i = V}} \sum_i \left(\frac{\oint_{S_i} F dS}{V_i} \right) V_i = \int_V \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) dV$$

$$\Phi_x \approx F_x \left(x + \Delta x; y + \frac{\Delta y}{2}; z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \Delta z - F_x \left(x; y + \frac{\Delta y}{2}; z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\Phi_y \approx F_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y + \Delta y; z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta z - F_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y; z + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta z$$

$$\Phi_z \approx F_z \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y + \frac{\Delta y}{2}; z + \Delta z \right) \Delta x \Delta y - F_z \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y + \frac{\Delta y}{2}; z \right) \Delta x \Delta y$$

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta x; \Delta y; \Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{\Delta x; \Delta y; \Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$$

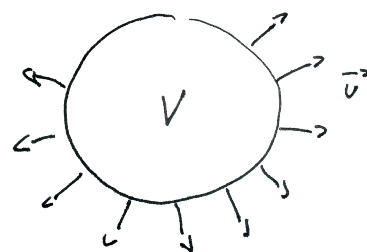
Příkladem, kdy $\Phi \neq 0$ může být například (pokud opomeneme možnosti „pramenění“ z jiné dimenze) zahříváná voda.

$$V = V_0(1 + \gamma \Delta T) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Delta t \Phi = 4 \pi v R^2 \Delta t = \Delta V = \frac{4}{3} \pi R^3 k \gamma \Delta t$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\Phi}{V} = \gamma k$$

$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T$$



Ukážkou využití v praxi jsou následující příklady

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{magnetické pole nevzniká ani nezaniká}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{elektrické pole vzniká v okolí náboje}$$

1.5 Stokesova věta o rotaci

Cirkulace vektorového pole - práce vykonaná polem.
Vemme si uzavřenou křivku c . Pak je cirkulace

$$\Gamma = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Gamma_{\vec{p}} = \sum_i \rho A \vec{v}_i \Delta \vec{s}_i$$

kde A je průřez a $\vec{s}_i$ vektor dráhy uražené polem

$$p = \sum \Delta p = \rho A \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta \vec{s}_i = \rho A \Gamma$$

$$\Gamma = \lim_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ \sum_i \Delta s_i = s}} \sum_i \vec{F}_i d\vec{s} = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Křivku si opět rozdělíme obdobně, jako u divergence

$$\Gamma = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{c_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{c_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{c'} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_{c'} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{c_1+c'} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{c_2-c'} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Každá ze vzniklých křivek lze opět rozdělit až $dS \rightarrow 0$

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \frac{\sum_i \oint_{c_i} \vec{F} d\vec{s}}{S_i} S_i = \text{rot } \vec{F} S_i$$

$$\text{rot } \vec{F} = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \left(\frac{\oint_c \vec{F} d\vec{s}}{S} \right) \vec{e}_{\perp}$$

$$\Gamma = \lim_{\substack{S_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow +\infty \\ \sum_i S_i = S}} \sum_{i=1}^N \frac{\oint_{c_i} \vec{F} d\vec{s}}{S_i} S_i = \lim_{\substack{S_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow +\infty \\ \sum_i S_i = S}} \sum_{i=1}^N \text{rot } \vec{F} S_i$$

$$\oint_c \vec{F} d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}$$

Což je konečná podoba Stokesovy věty o rotaci

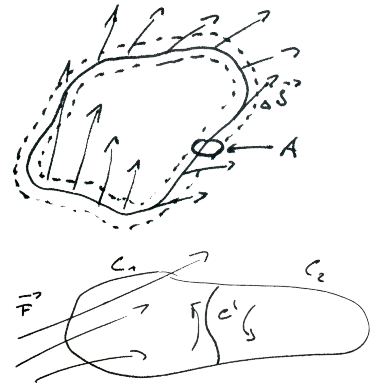
Zase možné použití kouká z magnetického a elektrického pole:

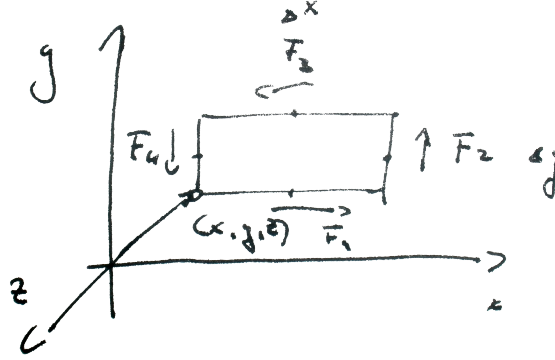
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Z těchto rovnic se dá později odvodit vlnová rovnice, jejíž řešením je $E_z(x \pm ct)$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$





$$\Gamma = F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y; z \right) \Delta x + F_y \left(x + \Delta x; y + \frac{\Delta y}{2}; z \right) \Delta y - F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y + \Delta y; z \right) \Delta x -$$

$$- F_y \left(x; y + \frac{\Delta y}{2}; z \right) \Delta y$$

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \lim_{\Delta x; \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta x \Delta y} = \frac{F_y \left(x + \Delta x; y + \frac{\Delta y}{2}; z \right) - F_y \left(x; y + \frac{\Delta y}{2}; z \right)}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y; z \right) - F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}; y + \Delta y; z \right)}{\Delta y} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$(\text{rot } \vec{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

1.6 Kombinace gradientu, divergence a rotace

Má cenu zmiňovat jen ty kombinace, které dávají smysl. Vychází se tedy z toho, co na co působí a co plive. Pro některé případy si zavedeme některé vztahy: Antisymetrický tenzor $A_{ji} = -A_{ij}$; symetrický tenzor $S_{ji} = S_{ij}$

$$A_{ji}S_{ji} = A_{em}S_{em} = A_{ij}S_{ij} = -A_{ij}S_{ij} = 0$$

$$\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j \quad \delta_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq j$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = 1 \Leftrightarrow i \neq j \vee j \neq k \vee i \neq k$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \Leftrightarrow i = j \vee j = k \vee i = k$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

$$(\operatorname{rot} \operatorname{grad} f)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{grad} f)_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} f = A_{ij} S_{ij} f = 0$$

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{rot} \vec{F})_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} F_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} F_m =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} F_m = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j - \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_l} F_i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \right) A_i = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F})_i - \nabla^2 A_i$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\oint_{\partial \vec{S}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$$

$$A \text{ (práce)} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0 \Leftarrow \vec{F} = \operatorname{grad} W_p \text{ (potenc. en.)}$$

1.7 Taylorův rozvoj

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$a_0 = f(x_0) \quad a_1 = f'(x_0) \quad 2a_2 = f''(x_0) \quad 2 \cdot 3a_3 = f'''(x_0) \quad \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Jedná se o aproximaci fce polynomem. Dá se využít při zjednodušování některých vztahů.

$$W_{LHO} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$W_p = \frac{l^2}{2mr} - \frac{GmM}{r} = W_p(r_0) + W'_p(r_0)(r - r_0) + W''_p(r_0)(r - r_0)^2 + \dots$$

$$F = - \text{grad } (W_p) \quad k = W''_p(R_0)$$

$$W_g = -\frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{R_0} + \frac{GmM}{R_0^2}(r - R_0) = \text{konst.} + g(R_0)m \approx mgh = W_t$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n x^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}x^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^n = (1+x_0)^n + n(1+x_0)^{n-1}(x-x_0) + \frac{n(n-1)(1+x_0)^{n-2}(x-x_0)^2}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow (1+\varepsilon)^n \doteq 1 + n\varepsilon$$

Další možností jak definovat ∇^2 je

$$\nabla^2 \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{rot rot } \vec{A}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{F} - \nabla^2 \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{F})$$

2 Speciální teorie relativity

Jedná se o zvláštní formu obecné teorie relativity. Popírá pojem absolutního času a prostoru, který se utvářel od dob Newtona a Descarta. Römer se zabývá pojmem absolutního času. Co se týče obrázků, tak sem se moc nehodí, protože to potom akorát mate.

1. pozorování možnosti konečnosti rychlosti světla byla změna ze Země pozorované periody oběhu měsíce Io kolem Jupitera v závislosti na směru rotace Země kolem Slunce. Io má poměrně krátkou a pozorovatelnou periodu oběhu, a to asi 1,75 dne. Pulsy, kdy je Io vidět, lze aproximovat zářením s vlnovou délkou, frekvencí apod.

$$n = \frac{l}{\lambda} = \frac{ct}{\lambda} \qquad \frac{n}{t} = \frac{c}{\lambda} = f$$

kde n je počet oběhů kolem Jupitera a l vzdálenost od Země

$$n' = \frac{l}{\lambda} + \frac{l'}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} + \frac{vt}{\lambda} = \frac{ct + vt}{\lambda}$$

$$l' = vt$$

$$f'_{ke} = \frac{c + v}{\lambda} \frac{c}{c} = \frac{c + v}{c} f$$

$$f''_{od} = \frac{c - v}{c} f$$

$$\frac{f'_{ke}}{f''_{od}} \frac{c + v}{c - v} = \frac{T''_{od}}{T'_{ke}}$$

$$c = \frac{T''_{od} + T'_{ke}}{T''_{od} - T'_{ke}} = 2,14 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Další, kdo dokázal konečnost rychlosti světla byli Badley a Fizean. Mechelson ve svém experimentu dokázal prakticky totéž, ale interpretovat to jako brzdění světla ve směru proti směru rotace Země éterem, který vyplňuje prostor. Jeho experiment spočíval v měření rychlosti světla v tečném a normálovém směru k rotaci Země kolem Slunce. Michelson se domníval, že bude platit $c_2 = c_1 - v$, ale vyšlo mu $c_1 = c_2$. Tímto experimentem nevědomky podložil teorii relativity publikovanou později (Einstein se o tomto experimentu během své práce nedozvěděl).

$$v = \frac{l}{t} \quad (1 + \varepsilon)^n \doteq 1 + n\varepsilon$$

$$t_{ABA} = \frac{l}{c + v} + \frac{l}{c - v} = \frac{l(c - v + c + v)}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \doteq \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$t_{ACA} = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{vt_{ACA}}{2}\right)^2}}{c}$$

$$c^2 = T_{ACA}^2 = 4l^2 + 4\frac{v^2 t_{ACA}^2}{4}$$

$$t_{ACA}^2(c^2 - v^2) = 4l^2$$

$$t_{ACA} = \sqrt{\frac{4l^2}{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$\Delta t = t_{ABA} - t_{ACA} = \frac{lv^2}{c^3}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad c = 299792,458 \text{ km/s}$$

2.1 Lorentzovy transformace v jednom směru

Lorentz tyto transformace sestrojil jako vysvětlení Michelsonova experimentu (to jako před Einsteinem). Vychází ze dvou postulátů:

1. Žádným fyzikálním způsobem nelze zjistit absolutní pohyb
2. Rychlost světla (c) je všude stejná

Lze je uplatnit jen na inerciální systémy, tedy systémy, které jsou ve vzájemném nezrychleném pohybu.

Ve skriptech je něco jako:

$$c^2t'^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

kamžto se má dosadit

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & \rightarrow & \quad x' = A(x - vt) \\ t' &= t & \rightarrow & \quad t' = Bx - ct \end{aligned}$$

My si ale ukážeme Břehův postup:

Čas se zavádí jako další souřadnice, souřadnice y a z se nemění, takže $y' = y$ a $z' = z$.

$$x' = Ax + Bt$$

$$t' = Cx + Dt$$

když pak $x' = 0$ tak pro $\forall t$

$$0 = Avt + Bt$$

$$B = -Av$$

$$x' = A(x - vt)$$

$$x = A(x' + vt')$$

Tyto dva vztahy se liší jen o $-$, protože obě soustavy se vůči sobě pohybují se stejnou rychlostí, ale v opačném směru. Pro vlnoplochu světla platí

$$x' = ct'$$

$$x = ct$$

(pro $o \equiv o'$)

$$ct' = A(ct - vt) = A(c - v)t$$

$$ct = A(ct' + vt') = A(c + v)t'$$

Vynásobením obou rovnic získáme

$$c^2 tt' = A^2(c^2 - v^2)tt'$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Protože x' roste $\Leftrightarrow x$ roste, tak můžeme uvažovat jen kladné A . Ozn. $|A| \equiv \gamma$ a $\frac{v}{c} = \beta$

$$x' = A(x - vt) = \gamma x - \gamma vt$$

$$x = A(x' + vt') = \gamma x' + \gamma vt'$$

Když pak dosadíme první do druhé tak

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'$$

$$t' = \frac{\gamma^2 vt + (x - \gamma^2 x)}{\gamma v} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Ve finále tedy dostáváme

$$x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right)$$

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

kde Λ je matice Lorentzových transformací

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Λ se od své inverzní podoby Λ^{-1} liší jen ve směru rychlosti, tedy $v \rightarrow -v$ takže $\beta \rightarrow -\beta$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha)$$

$$\det R_z(\alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\det \Lambda = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$$

$$\cos \alpha = \gamma \quad \sin \alpha = -\beta \gamma$$

$$\rightarrow \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

$$\cosh \varphi = \gamma \quad \sinh \varphi = \beta \gamma \quad \tanh \varphi = \beta = \frac{v}{c}$$

$$\varphi = \tanh^{-1} \left(\frac{v}{c} \right) \quad \text{rapidita}$$

$$\cosh x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix)$$

$$\sinh x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sin(ix)$$

Při troše fantazie poznáme, že se vlastně jedná o rotaci roviny Θx o imaginární úhel ve 4D prostoru.

$$\begin{aligned} dS'^2 &\equiv -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -c^2 \left(\frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + \left(\frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 \frac{dt^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{2c^2 dt \frac{v}{c^2} dx}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^4} dx^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2dtv dx}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2 dt^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 dt^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + dx^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + dy^2 + dz^2 = \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dS^2 \end{aligned}$$

což je časoprostorová vzdálenost mezi 2 událostmi, která se zachovává (je invariantní vůči Lorentzovým transformacím - transformacemi se nemění) a spojuje čas s prostorem za vzniku časoprostoru².

$$r^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = (ct; r^i) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

²Pro uvedení na pravou míru: Tady udělal na přednášce Břeň chybičku, že neumocnil některé odmocniny ve jmenovateli. Tyto členy se však stejně odečetly.

kde $r^0 = ct$ a $r^i = \vec{r}$ pro $\alpha = 0, 1, 2, 3$ a $i = 1, 2, 3$

$$dS^2 = dr^\alpha dr^\beta \eta_{\alpha\beta}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

kde $\eta_{\alpha\beta}$ je metrický tenzor plochého (Minkowského) časoprostoru. Pro popis ve sférických souřadnicích

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

lze použít

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Relativita současnosti - dvě události pozorované jedním pozorovatelem současně už z pohledu druhého pozorovatele současně probíhat nemusí.

2.1.1 Dilatace času

Dá se ukázkově demonstrovat na fotonových hodinách (které jsou pro běžné použití - mimo relativitu - docela nepraktické). Uvažujme tedy foton odražející se mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly ve vzájemné vzdálenosti h . Ozn. t_s čas pozorovatele, který stojí, a t_l čas soustavy pohybující se rychlostí v .

$$t_s = \frac{2h}{c} \quad \text{a} \quad t_l = \frac{2}{c} \sqrt{h^2 + \left(\frac{vt_l}{2}\right)^2}$$

$$c^2 t_l^2 = 4h^2 + v^2 t_l^2$$

$$t_l = \sqrt{\frac{4h^2}{c^2 - v^2}} = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{t_s}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Což je v porovnání s L. t.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t' \xrightarrow{\Delta x=0} \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t \gamma \quad (4)$$

2.1.2 Kontrakce délek

Uvažujme opět vzájemně se pohybující soustavy. V té, která se zrovna pohybuje rychlostí v , máme předmět délky l' . Ze středu našeho předmětu vyšleme rychlostí c impuls, při jehož zaznamenání na koncích onoho předmětu si poznamenejme polohu obou konců. Využijeme Lorentzovy transformace:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{a} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Máme tedy

$$l' = x'_2 - x'_1 \quad \text{pohybující se délka}$$

$$t' = t'_2 - t'_1 = 0$$

$$l = x_2 - x_1 \quad \text{klidová délka}$$

$$l' = \frac{l - v(t_2^* - t_1^*)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kde časy s^* jsou časy transformované do nepohybující se soustavy
Přičemž ze transformace času lze vyvodit

$$0 = [(t_2^* - t_1^*) - \frac{v}{c^2}l]\gamma$$

$$t_2^* - t_1^* = \frac{v}{c^2}l$$

takže

$$l' = \frac{l - \frac{v^2}{c^2}l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{\gamma} \quad (5)$$

kde l je vlastní délka předmětu a l' relativní délka
(ve skriptech jsou počáteční podmínky naopak, tj. $t' \leftrightarrow t$)

2.1.3 Skládání rychlostí

Opět budeme vycházet z L. t.:

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{a} \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pak mějme nějaký předmět pohybující se rychlostí u' v systému, který se pohybuje rychlostí v . Předmět se oproti systému v klidu pohybuje rychlostí u

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(\frac{dx'}{dt'} + v)dt'}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'})dt'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad (6)$$

$$v \rightarrow c \quad \wedge \quad u' \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad u \rightarrow c$$

Rychlost tak nemůže překročit rychlost světla c .

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Jako jakousi kontrolu lze použít následující postup

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\sinh(a+b)}{\cosh(a+b)} = \frac{\sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a}{\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b} \frac{\frac{1}{\cosh a \cosh b}}{\frac{1}{\cosh a \cosh b}} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$$

$$\frac{u_x}{c} = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2} = \frac{1}{c} \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Při skládání rychlostí se už nezachovávají ostatní složky rychlosti, ale mění se také

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{(dt' + \frac{v}{c^2} dx')\gamma} = \frac{dy'}{(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)\gamma dt'} = \frac{u'_y}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})\gamma}$$

tedy $y' = y \Rightarrow u'_y \neq u_y$

Pro z -tovou složku rychlosti platí obdobný vztah

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \leq c^2$$

Tyto transformace nemají vliv na kauzalitu, následek tedy vždy následuje příčinu a nikoliv naopak.

2.2 Lorenzovy transformace obecně v časoprostoru

Zatím jsme se zabývali jen zvláštním případem, a to v jednom směru. Transformace pro libovolný směr získáme následovně

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad y' = y \quad z' = z$$

$$vr_{\parallel} = \vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel} = \vec{v} \cdot (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = \vec{v} \cdot \vec{r}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vr_{\parallel}}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2}\right)$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t)$$

$$\vec{r}_{\parallel} = r \cos \theta \frac{\vec{v}}{v} \quad \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{vr} \quad \vec{v} \cdot \vec{r} = vr \cos \theta$$

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{r(\vec{v} \cdot \vec{r})}{vr} \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v}}{v^2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v^2} = \vec{v} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}_{\parallel} - \gamma \vec{v}t = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v}t = \vec{r} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v^2} - \gamma t \right] \vec{v} \quad (7)$$

Dilatace času obecně

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \quad (8)$$

Skládání rychlostí obecně

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r} + [(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot d\vec{r}}{v^2} - \gamma dt] \vec{v}}{\gamma \left(dt - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{r}}{c^2} \right)} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}{v^2} - \gamma \right] \vec{v} \right) dt}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}{c^2} \right) dt} = \frac{\vec{u} + [(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{v^2} - \gamma] \vec{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2} \right)} \quad (9)$$

Pro případ, kdy $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$$u' = \frac{u + \gamma \frac{v^2 u}{v^2} - \gamma v - \frac{v^2 u}{v^2}}{\gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right)} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Ukázali jsme si tedy korektnost takto vyjádřeného skládání rychlostí v prostoru

2.3 Něco o vlnách, Dopplerův jev

Vlna je charakterizovaná hlavně svojí vlnovou délkou λ , která charakterizuje délku jedné vlny (míst se stejnou fází) v prostoru, a periodou T , která je víceméně totéž ale v čase. Z těchto hlavních parametrů se dá určit mnoho dalších.

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \quad \vec{k} \equiv \frac{2\pi \vec{v}}{\lambda v} \quad \frac{\lambda}{T} = v = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Elektrická intenzita vlnění se mění takto

$$E = E_0 e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} = e^{i\omega t} e^{\phi(t; \vec{r})}$$

Fáze je v inerciální soustavě stejná

$$\omega' t' - k' x' = \omega t - k x$$

$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \gamma$$

$$x' = (x - vt) \gamma$$

Když tyto rovnice vzájemně dosadíme, dostaneme

$$\omega' \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \gamma - k' (x - vt) \gamma = \omega t - k x$$

$$\omega' t \gamma - \omega' \frac{v}{c^2} x \gamma - k' x \gamma - k' v t \gamma = \omega t - k x$$

Rozdělíme na dvě rovnice podle členů t a x

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega' + k' v) \gamma & \text{a} & & \omega' &= (\omega + k v) \gamma \\ k &= \left(\omega' \frac{v}{c^2} + k' \right) \gamma & \text{a} & & k' &= \left(\omega \frac{v}{c^2} - k \right) \gamma \\ & & & & \left(\frac{\omega}{k} \right)' &= \Lambda \left(\frac{\omega}{k} \right) \end{aligned}$$

Vzniká nám invariantní vlnový čtyřvektor

$$k^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k \end{pmatrix}$$

takže ($\eta_{\alpha\beta}$ viz Minkowského časoprostor výše (3 str. 16))

$$k^\alpha k^\beta \eta_{\alpha\beta} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (-1) + k^2 (1) = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$$

Uvažujme tedy zdroj vlnění v soustavě S' pohybující se rychlostí v . Vlnění je charakterizováno ω a $\vec{k}$. Ozn. α úhel směrem k pozorovateli, který je v soustavě S . Takže

$$\begin{aligned} k'_x &= k' \cos \alpha' \\ \omega &= (\omega' + v k'_x) \gamma \\ \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma & 0 & 0 \\ \beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix}' \\ \frac{\omega}{c} &= \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'_x \right) \gamma \\ k_x &= \left(\frac{\omega'}{c} \beta + k'_x \right) \gamma \\ k' &= \frac{\omega'}{c} & \beta &= \frac{v}{c} \\ \frac{\omega}{c} &= \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \frac{v}{c} k' \cos \alpha' \right) \\ \omega &= \gamma \left(\omega' + v \frac{\omega'}{c} \cos \alpha' \right) \\ \cos \alpha &= \frac{u_x}{c} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha' = \frac{u'_x}{c} = \frac{1}{c} \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}}$$

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}} \right) = \gamma \omega' \left(\frac{1 - \cos \alpha \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}} \right) = \gamma \omega' \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}} \right)$$

Což je už konečná rovnice Dopplerova jevu. ω' nazýváme klidová frekvence tedy taková, kterou vnímáme, když jsme vzájemně v klidu. Příklad, kdy se pozorovaná soustava pohybuje směrem k pozorovateli, nastává když $\alpha = 0$ (vlevo), při pohybu od pozorovatele je $\alpha = \pi$ (vpravo).

$$\omega = \gamma \omega' \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \right) \quad \omega = \gamma \omega' \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v}{c}} \right)$$

2.4 Další invariantní čtyřvektory

Hustota náboje

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

Oproti rychlosti je náboj (Q) invariantní. I je elektrický proud.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = I$$

$$dI = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial V} \frac{dl \cdot dS}{\partial t} = \rho v dS$$

$$\begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix} \equiv j^\alpha$$

Když si rozepíšeme hustotu náboje, tak s použitím kontrakce délek (5) (vlivem kontrakce se mění i objem) dostaneme následující vztah

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{dV_0} \frac{dV_0}{dV} = \rho_0 \gamma$$

$$j^\alpha j^\beta \eta_{\alpha\beta} = \rho_0^2 \gamma^2 c^2 (-1) + \rho_0^2 \gamma^2 v^2 = \rho_0^2 \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2 \rho_0^2$$

pak podle (2)

$$\begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

což je proudový čtyřvektor

Další příklady jsou rozptýlené všude okolo

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{m}{c} \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

2.5 Disperzní relace

Udává rychlost složek světla v závislosti na prostředí, ve kterém se šíří. Říká

$$\omega = c \left| \vec{k} \right| \quad \omega^2 = c^2 k^2$$

Zavedme si grupovou a fázovou rychlost (v_g a v_f).

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \leq c$$

Fázová rychlost sice může být nadsvětelná (rychlost pohybu „prasátka“ po stěně), ale nenese žádnou informaci, takže není v rozporu s konečnou rychlostí šíření informace.

2.6 Dynamika ve speciální teorii relativity

$$dS^2 \equiv -c^2 dt^2 + dr^2 \equiv -c^2 d\tau^2$$

kde τ je vlastní čas - čas měřený v klidu. Toto označujeme jako časový invariant.

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Což je vlastně dilatace času (4)

Derivací čtyřvektoru polohy podle vlastního času získáme čtyřvektor rychlosti

$$u^\alpha = \frac{dr^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{cdt}{d\tau}; \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = (c\gamma; \vec{v}\gamma)$$

$$u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -\frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + v^2 \gamma^2 = -c^2$$

2.6.1 Hybnost

$$p^\alpha = m_0 u^\alpha = (m_0 c \gamma; m_0 \vec{v} \gamma)$$

$$p^i = \vec{p} = m \vec{v} \quad \rightarrow \quad m \equiv m_0 \gamma$$

kde $\alpha = 0, 1, 2, 3$ a $i = 1, 2, 3$. „Klasická“ hmotnost m_0 je jen geometrická záležitost, která závisí jen na velikosti, popř. složení, zatímco m je již fyzikální záležitost, mění se v závislosti na rychlosti. Sílu můžeme psát jako v klasické mechanice nebo (zatím nevyvráceno) následovně

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{klasická mechanika}) \quad = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} = F \quad \rightarrow \quad \int \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv = \int F dt = Ft$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) &= F \quad \rightarrow \quad \int d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = Ft \\ \vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} \gamma + m_0 \vec{v} \left(-\frac{1}{2} \right) \gamma^3 \left(-2 \frac{\vec{v}}{c^2} \right) \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &= m\vec{a} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v}\vec{a}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\vec{v}}{c^2}\end{aligned}\tag{10}$$

$$|(10) \quad \vec{v}||\vec{a}| = m\vec{a} + \frac{m v^2 \vec{a}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{c^2} = m\vec{a} \left(1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2} \right) = m\vec{a} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \vec{a} \gamma^3$$

kde $m_0\gamma^3$ nazýváme podélnou hmotností

$$|(10) \quad \vec{v} \perp \vec{a}| = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a} = m_0 \gamma \vec{a}$$

kde $m_0\gamma$ nazýváme příčnou hmotností

2.6.2 Kinetická energie

$$dT = \vec{F} d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{p} = \vec{v} d(m\vec{v})$$

Ted' jsou tři možnosti jak se dostat celkové energii:

1. zintegrovat to (per partes...)

$$T = \int \vec{v} d(m\vec{v}) = m_0 \int \vec{v} d(\gamma\vec{v}) = m_0 v^2 \gamma - m_0 \int \gamma \vec{v} d\vec{v} = \dots$$

2. přes diferenciály

$$dT = v d(mv) = v^2 dm + m v dv$$

$$dm = d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \gamma^3 \frac{-2v}{c^2} dv = m_0 \gamma \frac{v}{c^2} \gamma^2 dv = \frac{m v dv}{c^2 - v^2}$$

$$dT = \frac{v^2 m v dv}{c^2 - v^2} + m v dv = m v dv \frac{v^2 + c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2 m v dv}{c^2 - v^2} = c^2 dm$$

$$T - T_0 = c^2(m - m_0) \quad \text{kde} \quad T_0 \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0 \quad \text{takže} \quad T = c^2(m - m_0)$$

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = E - m_0 c^2$$

$$E = T + m_0 c^2 = mc^2 = m_0 \gamma c^2$$

Když si vyjádříme T a aproximujeme pomocí Taylorova rozvoje $((1 + \varepsilon)^n \doteq 1 + n\varepsilon)$ dostaneme nerelativistickou kinetickou energii.

$$T = m_0\gamma c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) \doteq m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1) = \frac{1}{2}m_0v^2$$

Ke stejnému výsledku dojdeme i z transformace hmotnosti

$$m = m_0\gamma \quad \rightarrow \quad c^2m^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2 \quad /d$$

$$c^2 2m dm - 2m(dm)v^2 - m^2 2v dv = 0$$

$$c^2 dm - (dm)v^2 - mv dv = 0$$

3. a do třetice

$$p^\alpha = (mc; m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}; \vec{p} \right)$$

$$u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -c^2 \quad u^\alpha = \frac{dr^\alpha}{d\tau}$$

$$a^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = 0 \quad a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} \quad a^\alpha \perp u^\alpha \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$$

Zavedeme čtyřsílu

$$K^\alpha = \frac{d}{d\tau}(m_0 u^\alpha) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 u^\alpha) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c; m_0 \gamma \vec{v})$$

$$K^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = m_0 \frac{du^\alpha}{d\tau} u^\beta \eta_{\alpha\beta} = 0 = -K^0 u^0 + K^i u^i$$

$$K^0 = \gamma \frac{d}{dt}(mc) \quad K^i = \gamma \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad F^i = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad K^i = \gamma F^i$$

$$K^0 u^0 = K^i u^i$$

$$\gamma \frac{d}{dt}(mc) \gamma c = \gamma F^i v^i \gamma \quad \rightarrow \quad K^0 = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \gamma \quad \vec{F}\vec{v} = \frac{dE}{dt} \quad \text{je výkon}$$

$$K^0 = \frac{dE}{dt} \frac{\gamma}{c} = \gamma \frac{1}{dt}(mc) \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2)$$

$$E = mc^2 + konst \quad \rightarrow \quad konst = 0 \quad \text{experimentálně prokázáno}$$

Energetický invariant (nebo jak se tomu říká :-)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad \rightarrow \quad E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -\frac{E_0^2}{c^2} \quad \text{- invariantní} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{r} \vec{v} c^2}{v^2 c} - \gamma t c \right] \frac{\vec{v}}{c}$$

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{\vec{v} \vec{r}}{c} \right)$$

Tyto dvě poslední rovnice pasují do podoby čtyřvektoru

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{r} \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma t c \right] \vec{\beta} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}' = \vec{p} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{p} \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma \frac{E}{c} \right] \vec{\beta}$$

$$ct' = \gamma \left(ct - \vec{\beta} \vec{r} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \vec{\beta} \vec{p} \right)$$

$$\vec{F}' = \frac{dE}{\vec{u}' dt'} = \frac{d\vec{p}'}{dt} = \frac{d\vec{p} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} d\vec{p}}{v^2} - \gamma \frac{dE}{c^2} \right] \vec{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2} \right) dt} = \frac{\vec{F} + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \vec{F}}{v^2} - \gamma \frac{\vec{F} \vec{u}}{c^2} \right] \vec{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2} \right)}$$

Záměnou $\vec{v}$ za $-\vec{v}$ získáme pohled z druhé soustavy na tu první

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}' + \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \vec{F}'}{v^2} + \gamma \frac{\vec{F}' \vec{u}}{c^2} \right] \vec{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2} \right)}$$

Postup k dopracování se k následující rovnici je na <http://aldebaran.cz/~bren/elmag/> nebo na konci dokumentu.

$$\vec{F} = \gamma \vec{F}' + (1 - \gamma) \frac{\vec{F}' \vec{v} \vec{v}}{v^2} + \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{F}' \right) \right)$$

$$\vec{F}' = k \frac{\vec{r}'}{r'^3} = k \frac{1}{r'^2} \vec{r}'_0$$

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{v} \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma t \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \vec{r} + \vec{v} \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{k}{r'^3} \gamma \left[\vec{r} + \frac{1}{c^2} (\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{r})) \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\vec{F'} + \vec{v} (\gamma - 1) \frac{\vec{F'} \cdot \vec{v}}{v^2} + \frac{\gamma}{c^2} (\vec{F'} \cdot \vec{u'}) \vec{v}}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{u'} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)}$$

3 Obecná teorie relativity

Obecná teorie relativity je spíše teorií gravitace. Gravitace je vysvětlena zakřivením časoprostoru (víceméně geometrické pojednání).

Literatura: *G. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler: Gravitation*

Vychází ze dvou principů:

1. Všechny fyzikální děje mají stejný tvar ve všech vztažných soustavách.
2. Princip ekvivalence - v inerciálním systému se zrychlením dopadnou všechny děje stejně jako v systému neinerciálním pohybujícím se se zrychlením $-g$.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m_s \vec{a} && \text{setrvačná hmotnost} \\ \vec{F} &= -G \frac{m_g M}{r^2} \vec{r}_0 && \text{gravitační hmotnost}\end{aligned}$$

Lokální inerciální systémy (LIS)

LIS jsou systémy volně padající klece. Cokoliv s nenulovou energií zakřivuje časoprostor.

$$\begin{aligned}dS^2 &= -c^2 dt_{LIS}^2 + dr_{LIS}^2 + r_{LIS}^2 (d\Omega_{LIS})^2 = -c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 + dr^2 \gamma^2 + r^2 (d\Omega)^2 dr^2 = \\ &= dr_{LIS} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ E &= \frac{1}{2} v^2 - G \frac{M}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{2GM}{r} \quad \text{ozn.} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (rd\Omega)^2 = r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 \\ dS^2 &= -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2 (d\Omega)^2 dr^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 (d\Omega)^2 dr^2\end{aligned}$$

Tento vztah se nazývá Schwarzschildova metrika a r_g Schwarzschildův poloměr. Jedná se o poloměr, kdy je nejvyšší úniková rychlost rychlost světla. Je-li poloměr menší, bylo by potřeba vyvinout nadsvětelnou rychlost, takže se z takového průměru už nic nedostane. Dalším důsledkem je, že okolo gravitačně hmotných těles plyne čas pomaleji a dochází ke zpomalení frekvence. Podle této metriky se lze „vrátit v čase“, pokud $r < r_g$, to však má své úskalí, že se z této vzdálenosti již nelze vrátit.

Klasická fyzika operuje s pojmy absolutní čas a prostor. Speciální teorie relativity místo nich zavádí absolutní časoprostor a obecná relativita operuje se vztahem mezi tenzory zakřivení časoprostoru a tenzoru energie a hybnosti.

$$(\text{křivost časoprostoru})^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \text{energie} \\ \text{hybnost} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}$$

Když ono těleso rotuje, chová se jinak, začne na sebe časoprostor „navíjet“ a Schwarzschildův poloměr je tím také ovlivněn a vzniká oblast ze které se dá vymanit ještě podsvětelnou rychlostí.

4 Elektrostatika

Předpokládá, že se děje odehrávají nekonečně pomalu, chybí dynamika. Z toho plyne, že se neprojevují relativistické jevy.

4.1 Elektrický náboj

Elektrický náboj se značí povětšinou Q a jednotkou je „coulomb“ C . Má několik základních vlastností:

- nikdy nemůže existovat samostatně, vždy je vázaný na částici
- je invariantní vůči Lorentzovým transformacím
- je kvantovaný, tj. existuje nejmenší (elementární) náboj ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$)
- je buď kladný nebo záporný
- nevzniká ani nezaniká (zachovává se)
- Vesmír je kvazineutrální ($N_{\oplus} : N_{\ominus} \doteq 1$)

4.2 Coulombův zákon

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \vec{r}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \vec{r}_{0,1,2}$$

$$k \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2} \quad (G = 6,67 \cdot 10^{-11})$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \left| c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} c^2 = \left[\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} 9 \cdot 10^{16} \right] = [9 \cdot 10^9]$$

Platí princip superpozice, jednotlivé síly vzájemně působící na jednotlivé náboje se tedy skládají.

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

Pro některé situace je dobré si zavést hustotu náboje. Tu máme ve třech variantách:

1. objemová hustota náboje

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

2. plošná hustota náboje

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

3. lineární hustota náboje

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}$$

4.3 Elektrostatická energie

Jedná se o formu potenciální energie, tedy práce konané proti poli.

$$\Delta A = \vec{F} \Delta \vec{s} \quad F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}}$$

kde A je práce konaná silou

$$\Delta V = -\vec{F}_{21} \Delta \vec{s} = -F_{21} \Delta r$$

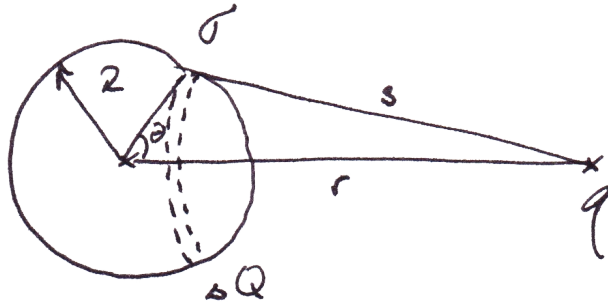
$$V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \Delta V = \int_{\infty}^R -k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \left[\frac{k q_1 q_2}{r} \right]_{\infty}^R = k \frac{q_1 q_2}{R}$$

Energii systému získáme jako součet všech energií.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\Delta V = -\vec{F} \Delta \vec{s} = -\vec{F} \vec{e}_s \Delta s \quad \rightarrow \quad \vec{F} \vec{e}_s = \frac{\Delta V}{\Delta s} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla V$$

4.3.1 Potenciál v okolí nabité kulové plochy



Mějme kulovou plochu o poloměru R a Θ polohový úhel mezi spojnici středu kulové plochy a náboje q ve vzdálenosti r od středu kulové plochy. Hustotu náboje považujeme za konstantní a rovnu $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$. Pak

$$\Delta V = k \frac{q_1 q_2}{s}$$

$$\Delta Q = 2\pi \sigma R \sin \Theta R \Delta \Theta$$

kde ΔQ přísluší pásu na kulové ploše šířky $R \Delta \Theta$ ve vzdálenosti $R \sin \Theta$ od středu ve směru podél spojnice q a Q

$$s = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \Theta}$$

$$V = \sum \Delta V = k \int_0^\pi \frac{q \pi \sigma R^2 \sin \Theta d\Theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \Theta}} = \left[2\pi \sigma k q R^2 \frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \Theta}}{Rr} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2\pi\sigma kqR^2}{Rr} (r + R - |r - R|)$$

$$1. \quad R > r \quad V = 4\pi\sigma kqR \quad \text{uvnitř koule } ((R - r) > 0)$$

$$2. \quad r > R \quad V = \frac{4\pi\sigma kqR^2}{r} \quad \text{vně koule } ((r - R) > 0)$$

4.3.2 Hypotetický poloměr elektronu

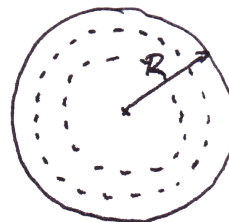
Mějme kouli, kterou si rozdělíme na jednotlivé elementární slupky. pak je potenciál

$$V = \int_0^Q k \frac{q dq}{R} = \frac{1}{2} k \frac{Q^2}{R}$$

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad dq = 4\pi r^2 dr$$

$$V = \sum k \frac{q \Delta q}{r} = \int_0^R k \frac{4\pi r^3 \rho 4\pi r^2 \rho dr}{3r} = \frac{16}{15} k \pi^2 \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} k V_{obj}^2 \rho^2 R^{-1} = \frac{3}{5} k \frac{Q^2}{R}$$

$$E = mc^2 \rightarrow R \doteq 2,85 \cdot 10^{-15} m$$



Jedná se jen o hypotetický poloměr elektronu, a to v případě, že by se veškerá potenciální energie soustředila v kouli.

4.4 Elektrostatické pole

$$\int_s \vec{F} d\vec{s} = \text{konst} \rightarrow \oint_l \vec{F} d\vec{l} = 0$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) d\vec{S} = 0 \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

Síla $\vec{F}$ je závislá na všech nábojích a jejich velikostech a polohách. Zavádíme tedy intenzitu elektrického pole, která je mnohem vhodnější pro popis pole.

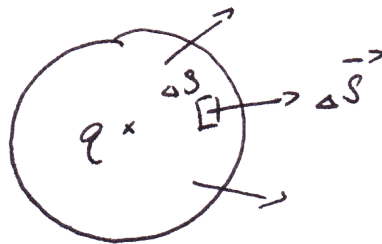
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \oint_l \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Siločára - křivka, po které by se pohyboval nehmotný náboj, nebo by se pohyboval velice pomalu, aby se zamezilo vlivu setrvačných sil. Intenzita elektrického pole je k této křivce tečná.

4.5 Gaussův zákon elektrostatický

Platí jen pro pole závislé na $\frac{1}{r^2}$. Zavedeme si pojem *permitivita vakua*, kterou budeme značit ε_0 . Mějme kulovou plochu S s nábojem q ve středu.

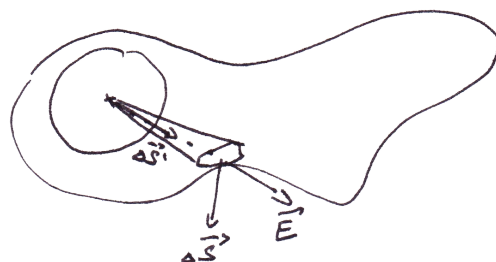
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = k \frac{qe}{r^2} \vec{e}_{12}$$



kde e je jednotkový náboj a $\vec{e}$ směrový vektor $\vec{E}$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{r^2} 4\pi r^2 \right] = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

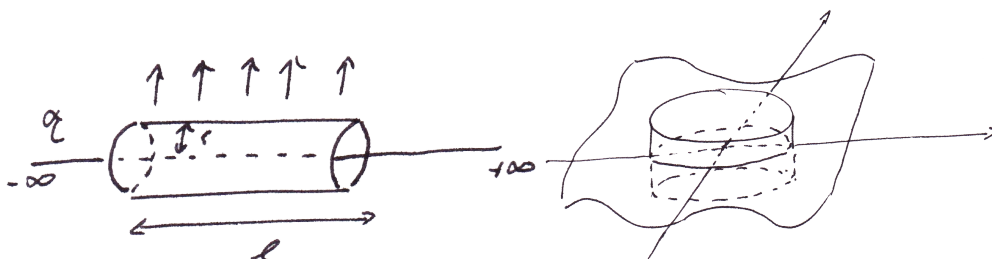
Pro případ libovolné uzavřené plochy S s nábojem q někde uvnitř náleží k normále elementu naší libovolné plochy $\Delta\vec{S}$ připadá normála elementu plochy promítnuté na kulovou plochu $\Delta\vec{S}'$. Dostáváme tak tedy pro libovolnou uzavřenou plochu stejný výsledek jako v předchozím případě kulové plochy. Náboj q je celkový náboj uvnitř uzavřené plochy.



$$\Delta S = \cos \alpha \Delta S' \quad \Delta\vec{S}\vec{E} = E \Delta S \cos \alpha = E \Delta S'$$

$$\Phi = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4E\pi r^2 = 0$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint dS = 4E\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Pro nekonečně dlouhý drát procházející nekonečně dlouhým válcem platí

$$\Phi = \oint_{valce} \vec{E} d\vec{S} = 2 \int_p + \int_{pl} = 2\pi r l E = \frac{l\tau}{\varepsilon_0}$$

kde τ je lineární hustota. Tok přes podstavy se vyruší, protože $\Delta\vec{S} \perp \vec{E}$

V případě roviny použijeme pro změnu zase válec s nekonečným poloměrem

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{pl} + 2 \int_p = 2S_p E = \frac{S_p \sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho(\vec{r})$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}) dV}{\varepsilon_0} = \oint_{S'} \vec{E} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (\text{což je jedna z Maxwellových rovnic})$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (\text{jedná se o práci po uzavřené křivce})$$

$$\int_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = 0 = \int \vec{0} d\vec{S} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{pro elektrostatiku})$$

A protože platí, že rotace gradientu je nula, můžeme intenzitu psát

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad \vec{F}_{/1} = -\nabla W_{/1}$$

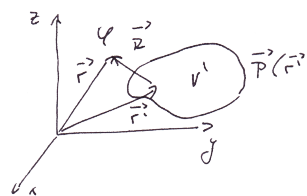
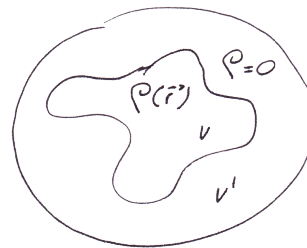
kde index $_{/1}$ značí veličinu působící na jednotkový náboj. Veličinu φ označujeme jako skalární potenciál.

$$W = \sum_i k \frac{q_i q}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \rightarrow \varphi = \sum_i k \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \pm konst \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

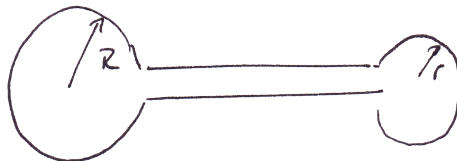
Rovnovážná poloha v elektrostatičce nemůže být stabilní (jen labilní). Ve stabilizované poloze musí být 2. derivace kladná.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi = \int_{V'} k \frac{\rho dV'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$



Vsuvka



Mějme jednu malou (o hmotnosti m a náboji q) a druhou velkou (o hmotnosti M a náboji Q) kouli, obě vzájemně vodivě spojené. Pak na malé kouli bude větší intenzita, tzn. pokud začnou lítat blesky, tak z malé koule. Hroty se chovají podobně.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

(gradient je kolmý na konstantní plochy)

$$\varphi_{povrch} = konst \quad \varphi_R = k \frac{Q}{R} \quad \varphi_r = k \frac{q}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{E_r}{E_R} = \frac{R}{r}$$

4.6 Energie elektrostatického pole



Mějme obecně nabitou bramboru a dva různé elementy jejího povrchu ΔV_i a ΔV_j , pak potenciální energie je

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i < j} k \frac{\rho(r_i) \Delta V_i \rho(r_j) \Delta V_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k \frac{\rho(r_i) \Delta V_i \rho(r_j) \Delta V_j}{r_{ij}} \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_V \int_V k \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV' = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) \nabla^2 \varphi(\vec{r}) dV' = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dV' = \end{aligned}$$

Dále využijeme upravený vzoreček pro derivaci součinu

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$f'g = fg' - (fg)'$$

$$\begin{aligned}
f &= \varphi' & g &= \varphi \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dV' + \\
&+ \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV' = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV' + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV' = \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_S (\varphi \nabla \varphi) d\vec{S} + \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV' \xrightarrow{S \rightarrow \infty} W = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV' = \int_{\mathbb{R}^3} w dV'
\end{aligned}$$

kde w je hustota energie elektrického pole.

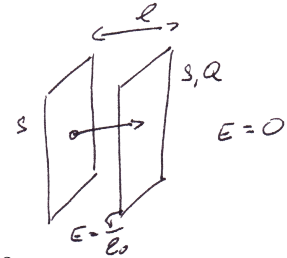
Mějme deskový kondenzátor o ploše S , vzdálenosti l nábojem Q a elektrickou intenzitou mezi deskami $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, kde $\sigma = \frac{q}{S}$.

$$Fl = A(S) = -W(S)$$

kde A je práce.

$$-dW = Eldq = \frac{q}{S\varepsilon_0} ldq$$

$$|W| = \int_0^Q \frac{\sigma}{\varepsilon_0 S} q ldq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} l = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 V = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$$



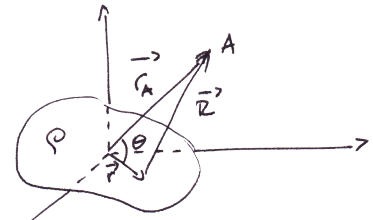
4.7 Polarizace aneb dielektrikum v elektrostatickém poli

Dielektrikum je nevodič, materiál ve kterém nejsou žádné volné nosiče náboje (jako ve vodičích elektrony popřípadě díry).

Mějme útvar s hustotou náboje ρ a objemem V , bod A daný polohovým vektorem $\vec{r}_A$ a vystředění $\vec{r}$.

$$\vec{R} = \vec{r}_A - \vec{r}$$

$$\varphi = k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}_A - \vec{r}|}$$



$$|\vec{R}| = \sqrt{r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \Theta} = r_A \left(1 - 2 \frac{r}{r_A} \cos \Theta + \left(\frac{r}{r_A} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = r_A (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Dále použijeme aproximaci pomocí Taylorova polynomu (1.7 str. 10)³ pro $\left| \frac{1}{R} \right|$, které později lépe uplatníme.

$$\left| \frac{1}{R} \right| = \frac{1}{r_A} (1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}} \doteq \frac{1}{r_A} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{3\alpha^2}{4(1 - \alpha)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right) =$$

³Pozdě :-)

$$= \frac{1}{r_A} \left(1 + \frac{1}{2} \left(2 \frac{r}{r_A} \cos \Theta - \left(\frac{r}{r_A} \right)^2 \right) - \frac{3}{8} 4 \frac{r^2}{r_A^2} \cos^2 \Theta + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r_A} \right)^3 \right)$$

kde $\mathcal{O}(x) \equiv \exists k, f(x) < k, \forall x \in D_f$

$$\begin{aligned} \varphi &= k \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r_A} dV + k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \cos \Theta r}{r_A^2} dV + k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) r^2}{2r_A^3} (3 \cos^2 \Theta - 1) dV = \\ &= |\vec{r} \cdot \vec{r}_A = r r_A \cos \Theta| = k \frac{Q}{r_A} + k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3} dV + k \int_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_A)^2}{r_A^5} - \frac{r^2}{r_A^3} \right) dV = \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \end{aligned}$$

Jedná se o multipólový rozvoj. φ_0 označuje působení celkového náboje a ostatní členy jen posunutí (zpřesnění).

$$\varphi_1 = k \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3} dV = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3}$$

kde $\vec{p}$ nazýváme dipólový moment.

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= k \int_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_A)^2}{r_A^5} - \frac{r^2}{r_A^3} \right) dV = k \frac{1}{2r_A^5} \sum_{ij} \int_{V'} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho dV x_{Ai} x_{Aj} = \\ &= k \frac{1}{2r_A^5} \sum_{ij} Q_{ij} x_{Ai} x_{Aj} \end{aligned}$$

kde Q_{ij} je (symetrický) tenzor quadrpólového momentu. x_i a x_j jsou souřadnice $\vec{r}$ a x_{Ai} a x_{Aj} jsou souřadnice $\vec{r}_A$.

4.7.1 Dipól

$$\begin{aligned} \varphi &= k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_A}{r_A^3} \quad E = -\nabla \varphi = \\ &= -k \left[(\vec{p} \cdot \vec{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \nabla (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right] = k \left[(\vec{p} \cdot \vec{r}) \left(-\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) + \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = k \left[\left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \\ \vec{p} &= \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \sum_i q_i (\vec{r}_i + \vec{R}) \stackrel{\sum_i q_i = 0}{=} \sum_i q_i \vec{r}_i \end{aligned}$$

Mějme dipól o délce l složený z nábojů q a $-q$ ve vzdálenostech $\vec{r}$ a $-\vec{r}$ od počátku soustavy souřadnic. S osou z svírá úhel α . Na dipól působí elektrické pole ve směru osy z .

$$\vec{p} = q\vec{r} - (-q\vec{r}) = q2\vec{r}$$

$$\vec{F}_+ = q\vec{E} \quad \vec{F}_- = -q\vec{E}$$

$$|N| = qEl \sin \alpha$$

kde N je moment síly.

$$\vec{N} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$dA = dx F = d\varphi N \quad \text{práce}$$

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$W = \int_0^\alpha pE \sin \beta d\beta = -pE(\cos \alpha + 1) \doteq -pE \cos \alpha$$

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = Fr d\varphi \cos \Theta = Nd\varphi$$

Mějme záporný náboj $-q$ s polohou danou $\vec{r}$ a kladný náboj q posunutý od $-q$ o l .

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \vec{E}(\vec{r} + \vec{l})q - \vec{E}(\vec{r})q =$$

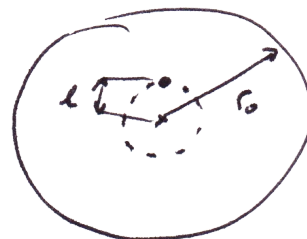
$$= q\vec{E}(x + l_x; y + l_y; z + l_z) - q\vec{E}(x; y + l_y; z + l_z) + q\vec{E}(x; y + l_y; z + l_z) -$$

$$- q\vec{E}(x; y; z + l_z) + q\vec{E}(x; y; z + l_z) - q\vec{E}(x; y; z)$$

$$\vec{F} \approx ql_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + ql_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + ql_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = (\vec{p} \cdot \nabla) \cdot \vec{E}$$

4.7.2 Dipólové momenty atomů

Mějme navenek elektricky neutrální molekulu. Uvažujme jádro jako bodový náboj a obal jako kouli s rovnoměrným rozložením náboje ρ . Vzhledem k tomu, že je jádro uprostřed kulového rozložení, je výsledná síla nulová. Pokud umístíte onu molekulu do elektrického pole, začnou na jádro a na obal působit vzájemně opačné elektrické síly tak, že se jádro vychýlí ze středu obalu o vzdálenost l . Začne tak na něj silově působit i obal, a to silou závislou na poloměru l koule (nábojem q_s), na které se nachází jádro. Vzdálenost l je právě taková, aby se vnitřní a vnější síly vyrušily.



$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_o^3}$$

$$q_s = \frac{4}{3}\pi l^3 \rho$$

$$F = k \frac{q_s q}{l^2} = qE$$

$$k \frac{q_s}{l^2} = E = k \frac{\frac{4}{3}\pi l^3 \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_o^3}}{l^2} = \frac{klq}{r_o^3} \quad kql = Er_o^3$$

$$q\vec{l} = \vec{E}4\pi\epsilon_0 r_o^3 \rightarrow \vec{p} = \alpha \vec{E}$$

kde α označuje polarizovatelnost.

4.7.3 Objemově rozložený dipólový moment

Indukované momenty v molekulách bývají řádově menší než vlastní momenty molekul (např. voda apod.). Mějme rozptýlené dipólové momenty v prostoru rozděleném na elementy objemu ΔV_i . Pak je $\Delta\varphi_i$ příspěvek od příslušného ΔV_i a φ_A celkový potenciál v bodě A .

$$\Delta\varphi = k \frac{p_{\Delta V_i} \vec{r}_i}{r_i^3}$$

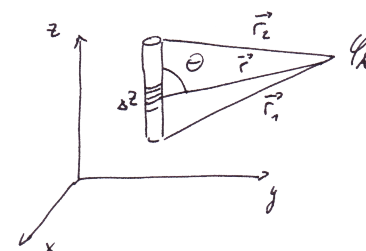
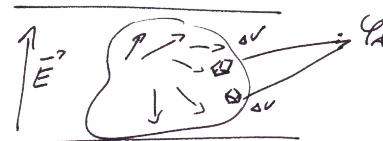
$$p_{\Delta V_i} = N_i \vec{p} \Delta V_i$$

kde N_i je objemová hustota dipólů.

Mějme tyčku ve směru osy z o průřezu S a bod A mimo tyčku. Rozdělme si tyčku na úseky Δz vzdálené r od A . Vzdálenost od dolního konce tyčky k A je r_1 a od horního konce tyčky k A je r_2 . Ozn. Θ úhel mezi r a tyčkou.

$$\varphi_A = k \sum \frac{\Delta z N S p r \cos \Theta}{r^3} = k N p S \sum \frac{\Delta z \cos \Theta}{r^2} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta r = -\Delta z \cos \Theta| = -k N p S \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k N p S \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Vektor polarizace

- hustota dipólového momentu v daném místě.

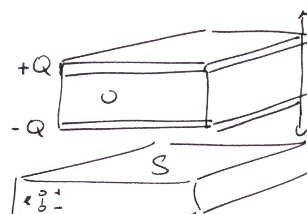
Uvažujme dvě překrývající se krystalické mřížky. Jedna nese kladný náboj, druhá záporný. Při posunutí obou mřížek v opačném směru se na koncích celé soustavy vytvoří póly. Pak

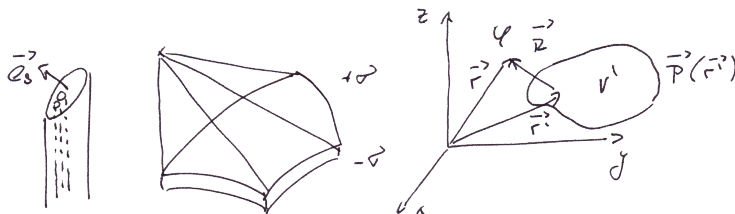
$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta V}$$

$$Q = q N S l = p N S = P S = \sigma S$$

Polarizaci definujeme (na základě měření) takto

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{P} \Delta V}{\Delta V} = N \vec{p}$$





$$\varphi = kPS \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Mějme polarizovanou desku plochy S , tloušťky l , hustotou dipólového momentu N a nejmenším nábojem q . Pak je náboj na jedné straně desky

$$Q_v = lSNq = NpS = PS \rightarrow P = \frac{Q_v}{S} = \sigma$$

kde σ je hustota povrchového náboje. Když nebudou dipólové momenty kolmé na plochu S , dostáváme vztah

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{e}_S$$

kde $\vec{e}_S$ je jednotkový vektor ve směru normály k S .

Mějme něco o objemu V' a polarizaci $\vec{P}(\vec{r}')$ s polohovým vektorem $\vec{r}'$ a nějaký bod mimo ono něco ve vzdálenosti $\vec{r}$.

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x'; y - y'; z - z') \quad \rho_V = -\nabla \vec{P}$$

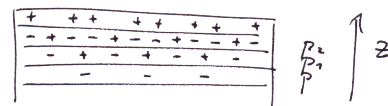
kde ρ_V je vázaný náboj.

$$\nabla \left(\vec{P} \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{P_x}{R} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_y}{R} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{P_z}{R} = \frac{1}{R} \nabla \vec{P} + \vec{P} \nabla \frac{1}{R}$$

$$\varphi(\vec{r}) = k \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dV' = k \int_{V'} \nabla' \left(\vec{P} \frac{1}{R} \right) dV' - k \int_{V'} \frac{\nabla \vec{P}}{R} dV' = k \oint_{S'} \frac{\vec{P}}{R} d\vec{S}' + k \int_{V'} \frac{\rho_V}{R} dV'$$

kde S' je plocha ohraničující V' .

Mějme nehomogenní těleso takové, že hustota dipólového momentu je $N(z)$. Pak se mi vyruší jeden druh náboje téměř v celém objemu až na jednu krajní vrstvu. Rozdělme si tedy ono těleso na vrstvy $\Delta V = S\Delta z$



$$Q(\Delta V) = (P(z + \Delta z) - P(z)) S$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta V} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} -\frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{S\Delta z} S \approx -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Homogenně polarizovaná dielektrická koule

Mějme tedy kouli. Pak se na jejím povrchu polarizovaný náboj rozloží nerovnoměrně, a to jakoby byly koule dvě s opačnými náboji vzájemně posunutě.

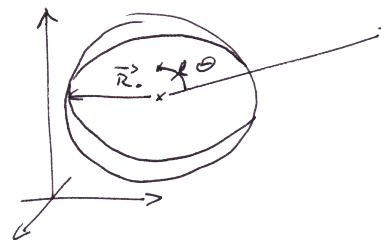
$$\vec{P} = \text{konst} \quad \vec{p} = q\vec{l}$$

$$\varphi_{\text{vně}} = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = k \frac{p \cos \Theta}{r^2}$$

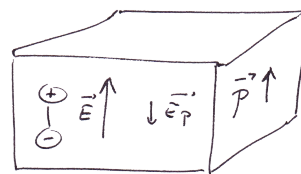
$$\nabla \cdot (\nabla \varphi_{\text{uvnitř}}) = 0 \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\varphi(r = R_0) = k \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3 P \cos \Theta}{R_0^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} R_0 P \cos \Theta = \frac{1}{3\varepsilon_0} Pz$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \varphi = \frac{Pz}{3\varepsilon_0}$$



Mějme dielektrikum v elektrostatickém poli o intenzitě $\vec{E}_0$. V dielektriku se vlivem momentů vytvoří pole o intenzitě $\vec{E}_p$. Tato intenzita oslabuje vnější elektrické pole působící na dielektrikum a tím oslabuje i sebe sama. Tím se opět zvýší intenzita vnějšího pole. Tak se začne harmonicky měnit elektrické pole až se ustálí na určité hodnotě $\vec{E}$.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E}_0 - \chi\vec{P} \rightarrow \vec{P} = \frac{\varepsilon_0\chi}{1+\chi}\vec{E}_0 \quad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \quad \varepsilon_r = 1+\chi$$

Claudiův-Mosottiho vztah

$$E_{\text{v dutině}} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0}$$

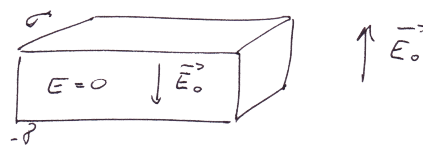
Pro Áčkaře povinné (viz skripta).

Debyeův-Langevinův vztah

Řeší rotování dipólu kolem různých os.

4.8 Vodič v elektrostatickém poli

Mějme vodivou krychli v elektrostatickém poli tak, že její podstavy jsou kolmé na vnější pole o intenzitě $\vec{E}$. Vzhledem k tomu, že ve vodiči jsou volné nosiče náboje, se všechny volné náboje přemístí na jednu stranu danou vnějším polem.

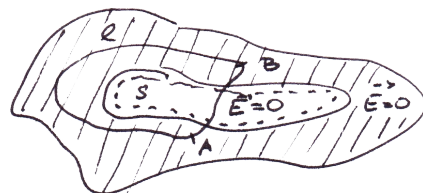


Dojde tak tedy k „polarizaci“ (není to polarizace, protože ve vodiči není vázaný náboj) vodiče. Na jedné straně se hromadí kladný a na druhé straně záporný náboj. výsledné elektrostatické pole uvnitř vodiče pak má stejnou intenzitu, jako pole, které ji vyvolalo, ale jen opačně orientovanou. Uvnitř vodiče je tak výsledná elektrická intenzita nulová. Intenzita na povrchu bude přibližně

$$E_{povrch} \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

kde σ je povrchová hustota náboje. Když se vodič náhle ocitne v elektrostatickém poli, nosiče náboje se začnou urychlovat, až narazí na povrch tělesa a odrazí se. Začnou tak tlumeně kmitat, až se nakonec ustálí v rovnovážné poloze.

Mějme nějaké obecné těleso s dutinou uvnitř. Nechť S uzavřená plocha uvnitř dutiny ohraničující objem jdoucí k objemu dutiny a l uzavřená křivka procházející dutinou. Pak platí



1. $\oint_S \vec{E} dS = 0$ (uvnitř dutiny není náboj)
2. $\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = 0 = A$ (práce vykonaná po křivce l je nulová)

z toho plyne, že i intenzita elektrostatického pole uvnitř dutiny musí být nulová.

Máme

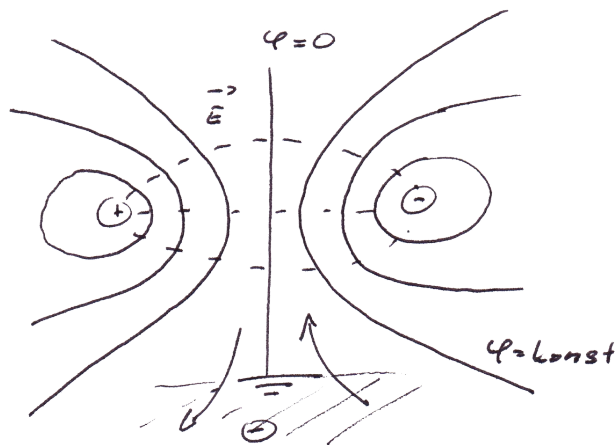
$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{p} \Delta V}{\Delta V}$$

Když na vodič přivedeme náboj, rozprostře se po povrchu tak, aby $\varphi = konst$. Když do jeho blízkosti přiblížíme další vodič, náboj se na něm rozprostře tak, aby $\varphi = konst$, tedy volné nosiče náboje se přesunou na stranu od resp. k druhému tělesu podle znamének náboje.

4.9 Elektrostatické zobrazení

Mějme dva opačně nabitě náboje. V jejich okolí se vytvoří hladiny konstantního potenciálu, přičemž v poloviční vzdálenosti mezi nimi se vytvoří rovina s nulovým potenciálem. Když tuto rovinu proložíme kovovou uzemněnou deskou, bude se na ní indukovat takový náboj, aby na ní zůstal nulový potenciál, a to i při změně polohy jednoho z nábojů.

Když jeden z oněch nábojů odstraníme, naindukuje se na desce nenulový náboj tak, aby na ní zůstal nulový potenciál. Na druhé straně desky se mi na místě odstraněného

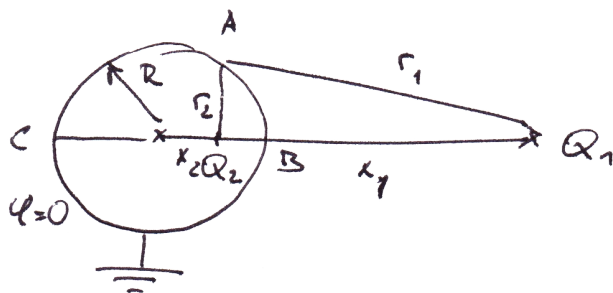


náboje vytvoří fiktivní náboj. Celá soustava se tak chová, jakoby na druhé straně zůstal již odstraněný náboj.

Když by deska uzemněná nebyla, vytvářel by se na desce konstantní, ale ne nutně nulový, potenciál, jehož velikost je závislá na poloze desky mezi náboji. Tento potenciál pak deformuje elektrické pole mezi oběma náboji.

Když bych měl libovolné uzemněné těleso v okolí jiného neuzemněného a nabitého tělesa, vytváří se na něm nulový potenciál.

Kulové zobrazení



Mějme uzemněnou kouli o poloměru R se středem v počátku soustavy souřadnic. Na jejím povrchu se vytvoří nulový potenciál φ . Dále mějme náboj Q_1 ve vzdálenosti x_1 od středu koule. Pak se nám bude v kouli indukovat fiktivní náboj Q_2 ve vzdálenosti x_2 od středu. Vemme si body $A[R; \varphi]$, $B[R; 0]$, $C[R; \pi]$. Vzdálenost A od nábojů Q_1 (resp. Q_2) ozn. r_1 (resp. r_2).

$$\varphi_B = 0 = k \frac{Q_1}{x_1 - R} - k \frac{Q_2}{R - x_2}$$

$$\varphi_C = 0 = k \frac{Q_1}{R + x_1} - k \frac{Q_2}{R + x_2}$$

Když z každé rovnice vyjádřím poměr nábojů, získám

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{x_1 - R}{R - x_2} = \frac{x_1 + R}{R + x_2}$$

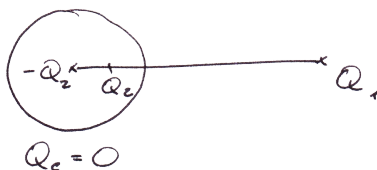
Roznásobením této rovnice a následnou úpravou získám $x_1 x_2 = R^2$. Snásobením obou poměrů nábojů dostanu

$$\frac{Q_1^2}{Q_2^2} = \frac{x_1^2 - R^2}{R^2 - x_2^2} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Když pak vyjádříme Q_2

$$Q_2 = \sqrt{Q_1^2 \frac{x_1}{x_2}} = \sqrt{Q_1^2 \frac{x_1 x_2}{x_2^2}} = \sqrt{Q_1^2 \frac{R^2}{x_2^2}} = -Q_1 \frac{R}{x_2}$$

Pro uzemněnou kouli by pak platilo $Q_c = Q_2 + (-Q_2)$. Pokud bych měl koule dvě, dojde k nerovnoměrnému rozdělení náboje.



4.10 Kondenzátor

Mějme dvě desky o rozměrech $a \times b$ a ploše S , povrchových nábojích σ a $-\sigma$ a potenciálech φ_1 a φ_2 , ve vzdálenosti z .

$$\sigma \approx \frac{z}{S} \quad a, b \gg z$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{skoro všude})$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ez = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} z$$

Zavedme si kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{z}$$

$$S_{ef} = \left(a + \frac{3}{8}z\right) \left(b + \frac{3}{8}z\right)$$

Energie kondenzátoru

$$W = Vw = Sz \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{S\varepsilon_0}{z} z^2 E^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

kde w je hustota energie. Síla je pak

$$\vec{F} = -\nabla W$$

Mějme soustavu (dejme tomu tří) nabitých objektů (s náboji Q_k).

$$\varphi_1 = B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2 + B_{13}Q_3 + \dots$$

$$\varphi_2 = B_{21}Q_1 + B_{22}Q_2 + B_{23}Q_3 + \dots$$

kde B_{ii} jsou potenciálové koeficienty

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \dots$$

$$Q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \dots$$

$$Q'_i = Q_i t \quad \Delta Q'_i = Q_i \Delta t \quad \varphi'_i t$$

kde t je parametr $t \in \langle 0; 1 \rangle$. Pak je energie této soustavy

$$\begin{aligned} W &= \lim \sum_i \sum_{\Delta} \varphi'_i \Delta Q'_i = \sum_i \int_0^1 \varphi'_i Q_i dt = \sum_i \int_0^1 \varphi_i Q_i t dt = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j C_{ij} \varphi_j \right) \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j \end{aligned}$$

Mějme tedy vodič v elektrostatickém poli. Ve vodiči se indukují elektrostatické pole, jehož intenzita se vyrovná s intenzitou vnějšího pole. Výsledná kapacita tak vzroste o tloušťku onoho vodiče. Když bude l vzdálenost desek, pak

$$El = U \quad \frac{Q}{U} = \frac{Q}{El}$$

V případě dielektrika se výsledná kapacita zachová podobně, ale vzroste jen úměrně k relativní permitivitě ε_r .

4.11 Elektrostatické pole v dielektriku

$$\rho_{celkova} = \rho_{volne} + \rho_{polarizovane}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = (\rho_v - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$$

kde $\vec{D}$ je vektor elektrostatické indukce.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

což je další z Maxwellek.

Pro nehomogenní látky se využívá tenzor relativní permitivity ε_{ij} , k nim se řadí například opticky aktivní látky. Ve vakuu $\varepsilon_r = 1$

$$E = \frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

5 Stacionární elektrické pole

Oproti elektrostatickému poli už zde existuje pohyb nábojů. Tento pohyb však zůstává stále stejný a ani elektrické pole se nemění.

5.1 Elektrický proud

$$I = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Protože se samotný elektrický proud hodí spíše do technické praxe a neříká skoro nic o samotném pohybu náboje, zavádí se hustota proudu. Mějme plochu S tak, že $S = \int dS$, kteroužto teče proud I . Ozn. $\vec{j}$ hustotu náboje.

$$\vec{j} = \lim_{\substack{j=\max \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{e}_\perp$$

Když budeme mít vodič, v němž se pochybují nosiče s kladným i záporným nábojem, bude výsledný proud součtem proudů obou nábojů. Proud můžeme psát jako

$$I = qvSN$$

kde q je náboj jednotlivých nosičů, N počet nosičů proteklý plochou S při rychlosti v (jinak řečeno hustota nosičů náboje). Takže

$$\vec{j} = qN\vec{v} = \rho\vec{v}$$

kde ρ je hustota pohybujícího se náboje.

$$j = |\rho_+ v_+| + |\rho_- v_-| \quad \vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$$

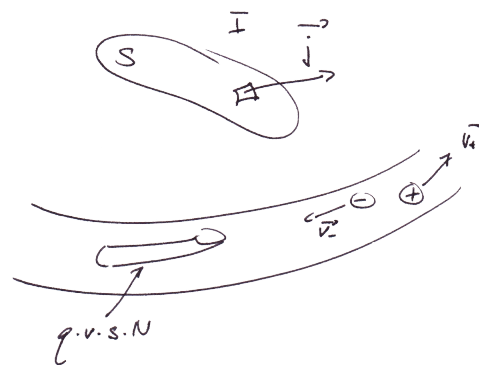
5.1.1 Druhy proudů

- Volné - vodivostní
- Vázané - polarizační, vznikají působením elektrického pole na dielektrikum do ustálení rovnováhy.

$$\vec{j}_p = Nq\vec{v} = Nq \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{\partial Nql}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

parciálně lze psát, protože se nepředpokládá změna geometrické konfigurace.

- Konvenční - pohyby iontů
- Maxwellův proud - fiktivní proud tekoucí kondenzátorem bez dielektrika (v obvodu se střídavým proudem)



5.1.2 Uzavřená plocha a smyčka

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(- \int_V \rho dV \right) = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \stackrel{Gauss}{=} \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

v případě stacionárního pole $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

V případě uzavřené smyčky

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

mimo proud. Jinak by docházelo ke ztrátám energie a proud by nebyl stacionární.

5.2 Ohmův zákon

$$U = IR$$

(neplatí ve všech prostředích, např. supravodiče) kde R je elektrický odpor. Vztah pro proud můžeme psát

$$I = GU \quad \text{kde} \quad G = \frac{1}{R} \quad \text{je vodivost}$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad G = \sigma \frac{S}{l}$$

kde ρ je měrný odpor (rezistivita) - odpor krychle o hraně 1 m - a σ je konduktivita.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\rho \frac{l}{S}}$$

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l} = \sigma E$$

$$U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = RI$$

$$\rho \frac{l}{S} \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_l \vec{E} d\vec{l}$$

$$\rho \frac{l}{S} \langle j \rangle \int_{\vec{S} \parallel \vec{j}} dS = \langle E \rangle \int_l d\vec{l}$$

$$\rho \langle j \rangle = \langle E \rangle \left/ \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \right.$$

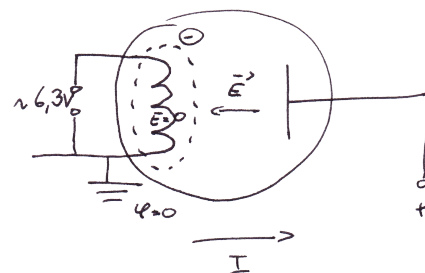
$$\xrightarrow{\vec{j} \parallel \vec{E}} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \vec{j} = \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{e}_\perp \right)_{max} \quad (\text{na plochu, kde je } \vec{j} \text{ maximální})$$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

5.3 Fotonka

Fotonka je skleněná baňka s vakuem a dvěma elektrodami, přičemž záporná elektroda je žhavená (standardně 6,3 V). Žhavením se v jejím okolí vytvoří elektronový oblak (volné nosiče náboje). Vybuzené elektrony jsou pak urychlovány ke kladné elektrodě. Vzhledem k tomu, že se volné elektrony uvolňují jen na jedné z elektrod, může fotonkou protékat proud jen jedním směrem (lze ji tedy využít jako usměrňovač). Protože je záporná elektroda obklopena volnými elektrony, můžeme uvažovat elektrickou intenzitu na jejím povrchu nulovou.



Na žhavené elektrodě se vytváří nulový potenciál a na kladné elektrodě je potenciál φ . Intenzita E mezi elektrodami působí ve směru od té kladné. Pro energii elektronů pak platí

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad j_x = -v\rho \quad \frac{1}{2} m_e v^2 = e\rho \quad j_x = konst \quad \varphi(0) = 0, \quad E(0) = 0$$

Když to do sebe vzájemně dosadíme, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{j_x}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow I = U^{\frac{3}{2}} = konst$$

$$\varphi'' \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

5.4 Elektromotorické napětí

„Napětí naprázdno“; to, co „žene“ proud obvodem. Značíme ho ε . Uvažujme ustálený proud

$$\frac{\partial j}{\partial t} = 0$$

Elektrický obvod:

1. uzavřený - U je rozdíl potenciálů
2. $I = f(U)$ - dodávám energii ($\times$ supravodiče)

$$q\varepsilon = \oint_l \vec{F} d\vec{l} \quad (\text{bodový zdroj})$$

Zdroj napětí je charakterizován svým elektromotorickým napětím a vnitřním odporem. Výsledný zdroj si pak můžeme představit jako zdroj složený z ideálního zdroje s napětím ε a k němu sériově zapojeným odporem R_i . Výsledné svorkové napětí pak bude

$$U = \varepsilon - R_i I$$

Tady můžu odkázat na obrázek 3.9 ze skript (u mě na str. 103)⁴, který jsem sice moc nepochopil, ale ukazovali jsme si ho na přednášce a něco na něm je. Když z něj vyjdu, tak

$$\varepsilon = \varphi_1 - \varphi'_1 + \varphi_2 - \varphi'_2$$

Když budu mít zdroj a k němu připojený odpor R , tak

$$\varepsilon = (R_i + R)I$$

tedy součet úbytků napětí na obou odporech R a R_i .

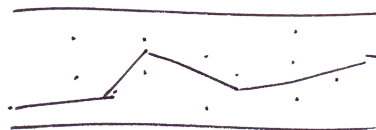
5.5 Kirhoffova pravidla

Pojednávají o vlastnostech závislostí v obvodech. Jsou dvě:

1. $\sum I_\alpha = 0$ pro proudy vtékající a vytékající z uzlů
2. $\sum R_\alpha I_\alpha = \sum \varepsilon_\alpha$ v libovolné smyčce, ve zvoleném směru
 $\sim$ zákon zachování energie

5.6 Klasická teorie vodivosti

Předpokládejme $\langle U \rangle = \text{konst.}$ Elektron se ve vodiči pohybuje svojí tepelnou rychlostí ($v_t \approx 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) a naráží do jader, která potká po cestě. Tím se odráží a vychyluje z dráhy. Výsledná unášivá rychlost se pak pohybuje někde kolem $u \approx 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Předpokládáme, že platí Ohmův zákon ($\times$ supravodiče). Práce vykonaná pole je pak



$$A = qU$$

⁴Nevím tady, ale u mechaniky se mi trochu lišila třeba čísla příkladů.

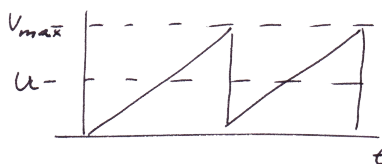
$$\frac{1}{2}m_e v_t^2 = \frac{3}{2}kT \quad (\text{z definice teploty - kinetická teorie})$$

$$\vec{j} = nq\vec{u} = \sigma\vec{E}$$

kde n je hustota nosičů a q náboj nosiče.

$$E = \frac{nqu}{\sigma} \quad \langle \vec{F} \rangle = m \langle \vec{a} \rangle = q\vec{E} + \vec{F}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{j} = konst \Rightarrow u = konst)$$

Když si vyneseme závislost rychlosti na čase, dostaneme pilovité píky s výškou v_{max} se střední hodnotou u . Tyto píky se budou opakovat s periodou τ , a to podle toho, kdy pohybující se elektron narazí do nějakého jádra. Ozn. $\nu = \tau^{-1}$ frekvenci srážek, $\nu \sim v_t$.



$$qE = 2m\nu v \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}q^2 n \frac{1}{m\nu} \quad \left(E = \frac{nqu}{\sigma} \right)$$

$$\nu = \frac{v_t}{\lambda} \rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \frac{q^2 n \lambda}{m v_t} \quad R \sim \sqrt{T} \sim v_t$$

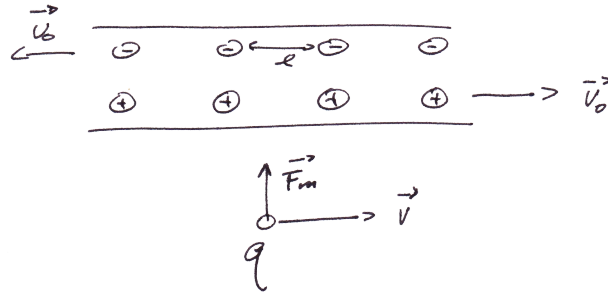
+ (snad jenom) pro Áčkaře:

- Feynman - Kinetická teorie
- Boltzmannova atmosféra
- skripta

6 Vznik magnetického pole

Vzhledem k tomu, že elektrická síla je o mnoho řádů silnější než síla gravitační, se mnohem výrazněji projevují relativistické jevy.

6.1 Pohyb nabité částice v okolí vodiče s proudem



Mějme drát, kterým protéká proud (uvažujme pohyb i kladných i záporných nábojů). Podél onoho drátu prolétá nabitá částice (prozatím rovnoběžně) rychlostí v , ve vzdálenosti r od drátu. Pro lepší představu možná může být vhodnější si představit drát jako dva řetízky nesoucí opačné náboje a pohybující se opačným směrem, a to rychlostí v_0 . Vzdálenost nábojů je l . Ozn. τ lineární hustotu náboje, tedy náboj rozložený na nějakou vzdálenost.

Vlivem kontrakce délek se bude prolétající částici jevit jeden z „řetízků“ hustší než ten druhý. Drát se tak jeví jako elektricky nabitý a začne silově působit na prolétající částici.

Uvažujme tedy souhlasný směr proudu v drátu a pohybu částice. Ozn. τ_0 hustotu kladného i záporného náboje v drátu, když neprotéká proud, τ_+ a τ_- hustotu nábojů v drátu, když proud protéká, a τ'_+ a τ'_- transformovanou hustotu náboje vzhledem k prolétající částici, v'_+ a v'_- relativisticky složené rychlosti v a v_0 ,

$$\gamma_{\square}^{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\square}^{\Delta 2}}{c^2}}} \quad \beta_{\square}^{\Delta} = \frac{v_{\square}^{\Delta}}{c}$$

toto značení budu používat i v dalších kapitolkách. Pak platí (podle (6) na straně 17)

$$v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + \frac{v_0 v}{c^2}} \quad v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}}$$

$$\tau_0 = \frac{\tau_+}{\gamma_0} = \frac{\tau_-}{\gamma_0}$$

$$\tau'_+ = \tau_0 \gamma'_+ = \tau_+ \frac{\gamma'_+}{\gamma_0} \quad \tau'_- = \tau_0 \gamma'_- = \tau_- \frac{\gamma'_-}{\gamma_0} \quad |\tau_+| = |\tau_-|$$

τ'_+ a τ'_- si pak můžeme vyjádřit

$$\tau'_\pm = \tau_0 \gamma'_\pm = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_\pm'^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0 \mp v}{c \mp \frac{v_0 v}{c}}\right)^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2 - \left(v_0^2 - \frac{v_0^2 v^2}{c^2}\right)}{c^2 \mp 2v_0 v + \frac{v_0^2 v^2}{c^2}}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{c^2 \gamma^{-2} - v_0^2 \gamma^{-2}}{c^2 \left(1 \mp \frac{v_0 v}{c^2}\right)^2}}} = \tau_\pm \gamma \left(1 \mp \frac{v_0 v}{c^2}\right)$$

$$\tau'_+ + \tau'_- = \tau_+ \gamma \left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right) + \tau_- \gamma \left(1 + \frac{v_0 v}{c^2}\right) = -2 |\tau_+| \frac{\gamma v_0 v}{c^2}$$

$$E' = -\frac{\tau_+ v_0 v}{\pi \varepsilon_0 r c^2} \gamma = -\frac{I}{2\pi c^2 \varepsilon_0 r} \gamma = -\frac{I \mu_0}{2\pi r} \gamma$$

$$E_{ef} = -\frac{\mu_0 v I}{\pi r} = -Bv \quad |F| = |qvB|$$

Kondenzátor

Mějme desky kondenzátoru v osách

1. y a z a ve směru x jím začneme pohybovat. Pak se vlivem kontrakce délek zmenší vzdálenost desek a $U' < U$.
2. x a z a ve směru x jím začneme pohybovat. Pak se vlivem kontrakce délek zmenší plocha kondenzátoru a $E' > E$.

$$E'_y = E_y \gamma$$

6.2 Vzájemné působení nábojů

Mějme dva náboje Q a q . Uvažujme následující situace:

1. Oba v klidu

$$\vec{F}_e = k \frac{qQ}{r^3} \vec{r}$$

2. Celá soustava v pohybu (vzájemně jsou v klidu) - náboj je invariantní

$$\vec{F}_e = k \frac{qQ}{r^3} \vec{r}$$

3. Q v pohybu a q v klidu

Mějme Q v počátku soustavy S' pohybující se rychlostí $\vec{v}$. V klidové soustavě S je q od Q vzdálen $\vec{r}$ se směrnici (vůči ose x) Θ . Na q působí intenzita $\vec{E} = (E_x; E_y)$. Totéž, ale čárkovaně, platí v S' .

$$o = o' \quad t = t' = 0$$

$$E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = kQ \frac{\gamma x}{r'^3}$$

$$E'_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} = kQ \frac{y}{r'^3}$$

$$\frac{E'_x}{E'_y} = \frac{x'}{y'} \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{x}{y}$$

což naznačuje, že se jedná o radiální pole.

$$r'^3 = ((\gamma x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\vec{E} = \gamma kQ \frac{\vec{r}}{r'^3}$$

$$\begin{aligned} E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} &= \frac{Q^2 \gamma^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{x^2 + y^2}{(y^2 + \gamma^2 x^2)^3} = (kQ)^2 \frac{\gamma^2 r^2}{\gamma^6 \left(\frac{y^2}{\gamma^2} + x^2\right)^3} = (kQ)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 r^2}{r^6 \left(\frac{\sin^2 \Theta}{\gamma^2} + \cos^2 \Theta\right)^3} = \\ &= (kQ)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{r^4 \left(\frac{\sin^2 \Theta}{\gamma^2} + 1 - \sin^2 \Theta\right)^3} = (kQ)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{r^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta\right)^3} \\ \Rightarrow E &= Qk \frac{1}{r^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{E} = \Gamma k \frac{Q}{r^3} \vec{r} \end{aligned}$$

kde Γ je

$$\Gamma(\Theta = 0) = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Gamma\left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right) = \gamma$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

4. Oba náboje v pohybu

Mějme zase dvě soustavy S a S' ... kde Q je v počátku S' pohybující se rychlostí v a q se pohybuje rychlostí u . Pak

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (1 - \gamma) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v} \frac{\vec{v}}{v} + \gamma \vec{F}' + \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{F}' \right) \right) = \\ &= k \frac{qQ}{r'^3} \left[(1 - \gamma) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v} \frac{\vec{v}}{v} + \gamma \vec{r}' + \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \frac{qQ}{r'^3} \left[(1 - \gamma) (x'; 0; 0) + \gamma (x'; y'; z') + \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) \right] = \\
&= k \frac{qQ}{r'^3} \left[(x'; \gamma y'; \gamma z') + \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) \right] = k \frac{qQ}{r'^3} \gamma \left[\left(\frac{x'}{\gamma}; y'; z' \right) + \frac{1}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) \right] = \\
&= k \frac{qQ}{r'^3} \gamma \left[\vec{r} + \frac{1}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) \right] = q\vec{E} + k \frac{qQ}{r'^3 c^2} \gamma \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{r}' \right) \right) =
\end{aligned}$$

kde E je intenzita vyvolaná pohybujícím se nábojem v soustavě v klidu

$$= q\vec{E} + k \frac{q\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{E}' \right) \right)$$

Když nyní použijeme poznatky z chování pohybujícího se kondenzátoru, tj.

$$\gamma E'_y = E_y \quad \gamma E'_z = E_z \quad E'_x = E_x$$

dostaneme

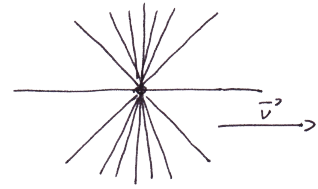
$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{E} + \frac{q\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \times \left((v; 0; 0) \times \left(E_x; \frac{E_y}{\gamma}; \frac{E_z}{\gamma} \right) \right) \right) = \\
&= q\vec{E} + \frac{q}{c^2} (\vec{u} \times (0; -vE_z; vE_y)) = q\vec{E} + \frac{q}{c^2} \left(\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{E} \right) \right)
\end{aligned}$$

což je Lorentzova síla. Magnetickou indukci si můžeme vyjádřit následovně

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \times \vec{E} \right) \approx \frac{kQ}{c^2 r^3} (\vec{v} \times \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ a $[B] = \text{T}$

Když mám náboj v klidu, vychází (resp. vchází) z něj siločáry radiálně rovnoměrně rozprostřené. Když se však začne pohybovat, tak v okolí směru pohybu zřídnou a naopak zhoustnou v okolí normály ke směru pohybu.



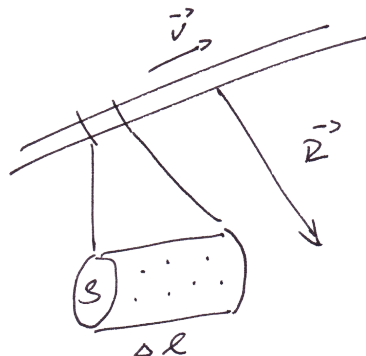
6.3 Biotův-Savartův zákon

Mějme vodič (drát) s proudem o průřezu S naporcovaný na Δl , $\vec{R}$ vzdálenost našeho bodu, ve kterém hledáme magnetickou indukci. Ozn. q velikost jednotlivých náboj, n jejich hustotu, ρ jejich hustota když se pohybují. Uvažujme $\Delta \vec{l} \parallel \vec{v}$. Vyjdeme ze vztahu pro magnetickou indukci

$$\vec{B} = \frac{Q\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{v} \times \vec{r})$$

Dostáváme tedy

$$\Delta \vec{B}_{\Delta l} = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3}$$



$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho v S \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \Big/ \lim_{\Delta l \rightarrow 0}$$

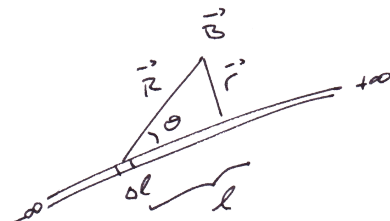
$$\vec{B} = \sum \Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\rho \vec{v} = \vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} dV$$

6.4 Magnetické pole v okolí nekonečného drátu s proudem

Mějme nekonečný drát, kterým protéká proud I , a bod ve vzdálenosti r . Rozdělme si tento drát na úseky Δl vzdálené od našeho bodu R . Ozn. Θ úhel mezi drátem a $\vec{R}$ a l vzdálenost příslušného úseku Δl od průmětu našeho bodu na drát.

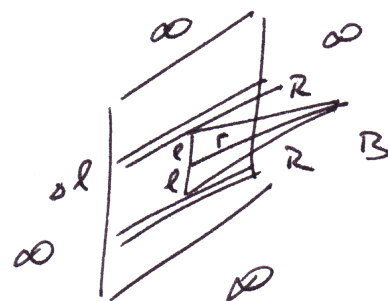
$$|R| = \frac{r}{\sin \Theta} \quad l = \frac{r}{\tan \Theta} \quad dl = \frac{r}{\sin^2 \Theta} d\Theta$$



$$|B| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\vec{l} \times \vec{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{rd\Theta}{\sin^2 \Theta} \frac{r}{\sin \Theta} \sin \Theta}{\frac{r^3}{\sin^3 \Theta}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

6.5 Magnetické pole v okolí nekonečné desky s proudem

Mějme nekonečnou desku (to by člověk potom, co si přečetl nadpis, asi nečekal) kterou protéká proud (další nečekaná věc). Pro výpočet magnetické indukce využijeme výsledek z předchozí kapitoly (to by trochu duchapřítomný čtenář asi čekal). Rozdělíme si tedy naši desku na proužky šířky Δl , na které tento vztah můžeme aplikovat. Těmito proužky protéká proud ΔI . Nás zajímá bod ve vzdálenosti r od desky a R od příslušného proužku. Ozn. Θ úhel mezi $\vec{R}$ a $\vec{r}$, l vzdálenost proužku od



kolmého průmětu našeho místa v $\vec{R}$ na desku a α měrný proud deskou ($\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$). Budeme počítat B jako součet působení dvou symetrických proužků.

$$\begin{aligned}\Delta I &= \alpha \Delta l & R &= \frac{r}{\cos \Theta} & l &= r \tan \Theta & dl &= \frac{r d\Theta}{\cos^2 \Theta} \\ \Delta B_{(2\Delta I)} &= 2 \frac{\mu_0 \Delta I}{2\pi R} \cos \Theta = \frac{\mu_0 \alpha \Delta l}{\pi R} \cos \Theta \Big/ \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \\ dB &= \frac{\mu_0 \alpha r d\Theta \cos \Theta}{\cos^2 \Theta \pi r} \cos \Theta = \frac{\mu_0 \alpha d\Theta}{\pi} \\ B &= \frac{\mu_0 \alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta = \frac{\mu_0 \alpha}{2}\end{aligned}$$

Jak je vidět, tak magnetická indukce nezávisí na vzdálenosti od desky. Chadzi říkal, že je nějak prohodil nebo co, tak jsem je prohodil taky. Snad mi nikde nic neuteklo, ale asi to dává smysl.

6.6 Něco, co bych asi označil jako pohybující se kondenzátor

Mějme dvě desky kondenzátoru rovnoběžné s osami x a z a pohybující se podél x rychlostí u (resp. u').

$$\begin{aligned}S \quad \alpha &= \sigma u & B_z &= \mu_0 \alpha = \mu_0 \sigma u & E_y &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ S' \quad \alpha' &= \sigma' u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} & B'_z &= \mu_0 \alpha' & E'_y &= \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \\ \sigma_0 &= \sigma \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \sigma' \sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}} \\ \sigma' &= \frac{\sigma \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \sigma \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(u-v)^2}{(1-\frac{uv}{c^2})^2 c^2}}} = \sigma \frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sigma \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \\ E'_y &= \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma (\sigma - \sigma \frac{uv}{c^2})}{\varepsilon_0} = \gamma (E_y - v B_z) \\ E'_z &= \dots = \gamma (E_z - v B_y) & E'_x &= E_x \\ B'_z &= \mu_0 \sigma' u' = \mu_0 \sigma \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \frac{u'}{c} = \mu_0 \sigma \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \\ B'_y &= \dots = \gamma \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_z\right) & B'_x &= B_x \\ \vec{E}' &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right)$$

U zkoušky se z toho vyklubala jenom jedna deska. Chadzi u toho navíc prohlásil něco jako, že jestli to vykládal s kondenzátorem, tak to vykládal pěkně blbě.

6.7 Invariantní veličiny

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{E}' \perp \vec{B}'$$

$$B'^2 - \frac{1}{c^2} E'^2 = B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = konst$$

$$\frac{B'^2}{2\mu_0} - \frac{\varepsilon_0 E'^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = konst$$

6.8 Vzájemné působení dvou vodičů s proudem

Mějme dva rovnoběžné dráty vzájemně vzdálené r , délky l_1 a l_2 a s průřezem S , kterými protéká proud. Rozdělme si oba dráty na úseky dl_i .

$$\Delta F_{12} = \rho \Delta v \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}_{12} \right) = I_1 \left(\Delta \vec{l} \times \vec{B}_{12} \right)$$

$$|\Delta F_{12}| = I_1 \Delta l_1 \frac{\mu_0}{2\pi r} I_2$$

$$F/l_m = \frac{\Delta F_{12}}{\Delta l_1} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2$$

Na základě této závislosti je definována jednotka Ampér.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times d\vec{R}}{R^3}$$

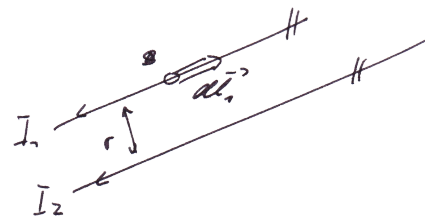
$$\vec{F} = \int_{l_1} \int_{l_2} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2 \times \vec{R}}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi}$$

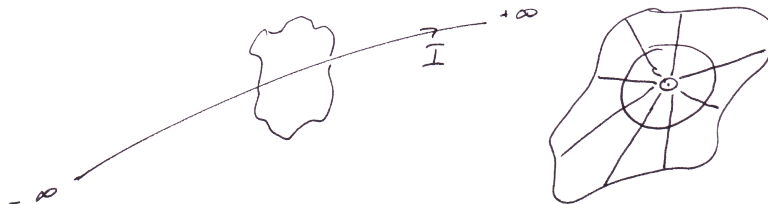
což je konečně Ampérův vzorec.

6.9 Ampérův zákon

Jedná se vlastně o ekvivalent Gaussovu zákonu v elektrostatice. Mějme zase nekonečný drát s proudem. Pak na kružnici kolem drátu je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$





což jsme si ukázali dříve. Cirkulace je pak

$$\Gamma = \oint_{\bigcirc} \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_{\bigcirc} dl = \mu_0 I$$

Když teď budeme uvažovat různě deformované křivky, můžeme si ji rozdělit na úseky a každý z nich promítnout na kružnici. V případě nahnuté křivky lze místo kružnice použít válec apod⁵. Dostáváme tak z cirkulace pro kružnici cirkulaci pro obecnou křivku.

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \sum_i \mu_0 I_i$$

Když budeme mít případ dvou propletený kroužků, mezi kterými prochází vodič s proudem. Pak je cirkulace v obou kroužcích stejná a rovna

$$\Gamma_1 = \oint_{l_1} \vec{B}_{1\infty} d\vec{l}_1 = \oint_{l_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}_{\infty} \times \vec{R}}{R^3} \right] d\vec{l}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{R}}{R^3} \right] d\vec{l}_{\infty}$$

$$\Gamma_2 = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \oint_{l_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{R}}{R^3} \right] d\vec{l}_{\infty} = \Gamma_1$$

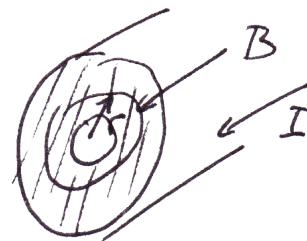
To nám víceméně ukazuje platnost

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \sum_i \mu_0 I_i$$

Trubka s proudem

Mějme trubku, kterou protéká proud. Pak je cirkulace magnetické indukce uvnitř hmoty trubky

$$\Gamma = 2\pi r B$$



6.10 Závit v okolí cívky s proudem

⁶ Mějme cívku (solenoid), kterou protéká proud. Když jí

⁵Já za to nemůžu. Chadzi to takhle nějak odflák taky (aspoň jsem si nevšiml, že by řekl něco navíc).

⁶Ve skriptech je to prý lépe popsáno



proložíme smyčkou (pro lepší představu obdélníkovou) tak, že její dvě hrany cívkou procházejí a zbylé dvě leží mimo cívku, pak platí

$$\Gamma = 2lB = 0 \quad B = 0$$

Když budu mít tutéž smyčku, ale do cívky jí umístím tak, že jedna hrana leží uvnitř cívky a druhá mimo cívku, přičemž zbylé dvě hrany vstupují kolmo do cívky. V tomto případě platí

$$\Gamma = NI\mu_0$$

Když budeme mít toroidální cívku (do kruhu) a dovnitř jí vložíme kruhovou smyčku, dostáváme

$$2\pi rB = \mu_0 NI$$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) d\vec{S}$$

$$\rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{1 z Maxwelllek}$$

6.11 Vektorový potenciál magnetického pole

Shrňme si tedy, co víme

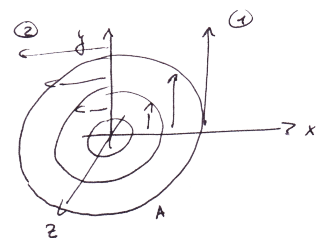
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vzhledem k tomu, že $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, můžeme nalézt takové $\vec{A}$ (tj. vektorový potenciál magnetického pole), že platí $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$. Pro speciální případy, které jak tak na ně koukám, tak nevím, jak bych popsal, platí následující

$$\vec{B} \equiv (0; c; B_z)$$

$$\vec{A}_1 \equiv (0; xB_z; 0)$$

$$\vec{A}_2 \equiv (-yB_z; 0; 0)$$



Z všelijakých vztahů...

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}'' \quad \nabla \cdot \vec{A}' = 0 \quad \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} \quad \nabla \times \vec{A}'' = 0$$

...se dá vycucát závěr

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \sim \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_x}{r} dV'$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_y}{r} dV'$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_z}{r} dV'$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dV'$$

Kdežto tedy znamená, že $\vec{A}$ lze psát ve vektorovém tvaru následovně

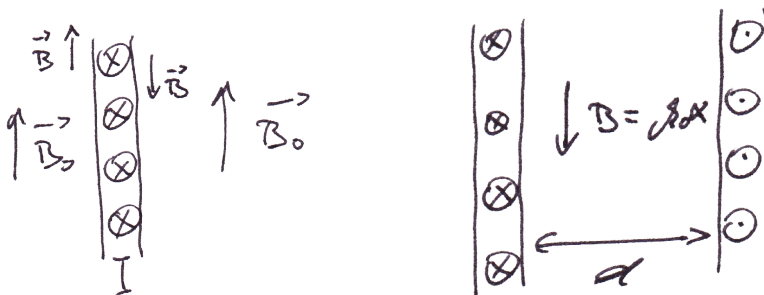
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_S \frac{\vec{j} dS dl}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}}{R} dV'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Plošný proud

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{\alpha}}{R} dS$$

kde α je plošná hustota náboje.



Když tedy budeme mít nekonečnou desku (tzn. můžete hledat jak chcete, ale konec prostě nenajdete), kterou protéká proud. Kolmo na směr proudu působí na desku vnější magnetické pole s indukcí B_0 . Na obou stranách desky se vlivem proudu uvnitř desky vytváří vlastní magnetické pole s velikostí $B = \frac{\alpha\mu_0}{2}$. Pokud proud poteče směrem od nás a

vnější magnetické pole bude působit směrem nahoru, tak bude výsledná velikost magnetické indukce na pravé a levé straně následující

$$B_P = B_0 - \frac{\mu_0 \alpha}{2} \quad B_L = B_0 + \frac{\mu_0 \alpha}{2}$$

Výsledný tlak působící na desku je pak

$$p = \frac{F}{S} = \frac{I \left(\Delta \vec{l} \times \vec{B}_0 \right)}{\Delta S} = \frac{\alpha L \Delta l B_0}{\Delta S} = \alpha B_0$$

kde $\Delta S = L \Delta l$

$$p = \frac{1}{\mu_0} (B_L - B_P) \frac{B_P + B_L}{2} = \frac{B_L^2 - B_P^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Mějme takovéto desky dvě, a to ve vzdálenosti d a indukce vzniklá vlivem proudu je $B = \mu_0 \alpha$. Energii (W) a hustotu energie (w) si pak můžeme vyjádřit následovně

$$W = Fd \quad w = \frac{W}{V} = \frac{Fd}{Sd} = p$$

Celková hustota energie elektromagnetického pole je

$$w = \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

Z hustoty energie magnetického pole lze multipólovým rozvojem (poměrně bubák) dostat vztah pro dipól.

6.12 Magnetický dipólový moment

Mějme kruhovou smyčku v rovině xy se středem v počátku soustavy souřadnic, hustotou proudu $\vec{j}$ a poloměrem r' . Dejme tomu, že nás zajímá nějaký bod $\vec{r} \equiv (0; y; z)$ (prý se tam něco požere, a i kdyby ne, tak si soustavu můžeme vhodně natočit). Ozn. $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_x}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{V'} \frac{dx'}{R}$$

Mějme $r \gg r'$, pak můžeme zanedbat rozdíly mezi různě velkými r .

$$R = r - r' \sin \Theta \quad \frac{j}{dl} = \frac{j_x}{dx'} \quad \oint dx' = 0$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{y' \sin \Theta}{r} \right)$$

$$A_x \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\sin \Theta}{r^2} y' dx' = \frac{\mu_0 I \sin \Theta}{4\pi r^2} S = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{S} \times \vec{r}}{r^3} \right)_x = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right)_x$$

kde $\vec{m} = I\vec{S}$ je magnetický dipólový moment. Pro srovnání vektorového potenciálu magnetického pole a skalárního potenciálu elektrického pole

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{r^3} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \nabla \frac{1}{R} \right)$$

Síla působící na dipól

Mějme kroužek tloušťky Δz v kolmý na osu z v nehomogenním magnetickém poli. Kroužkem protéká proud I , takže tvoří magnetický dipól. Divergence magnetické indukce je tak nulová. Síla působící na dipól je

$$F = B_r I 2\pi r$$

Tok F plochou kroužku Φ_r a ploch ohraničených jeho horní Φ_+ a dolní Φ_- délkou kroužku je

$$0 = \Phi = \Phi_r + \Phi_+ + \Phi_-$$

$$\Phi_+ + \Phi_- = [B_z(z + \Delta z) - B_z(z)] \pi r^2 = \pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta z = -\Phi_r = 2\pi r \Delta z B_r$$

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad |F_z| = 2\pi r I \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{B}$$

6.13 Homogenní magnetické pole

Mějme závit v homogenním magnetickém poli. Pokud jím poteče proud, pak ho magnetické síly budou stáčet tak, aby byla rovina závitu kolmá na magnetické pole, které ji vyvolalo. Takže, pokud budeme mít obdélníkovou smyčku (aby se to lépe počítalo) o stranách b , skloněnou pod úhlem α , a l , platí

$$N = IlBb \sin \alpha = \left| \vec{m} \times \vec{B} \right| \quad W = \int N d\alpha = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Když si vezmu libovolnou smyčku, tak ji můžu libovolně naporcovat na obdélníky. Tento vztah tak lze aplikovat pro libovolnou smyčku.

6.14 Vektor magnetizace

Jedná se o hustotu magnetických dipólových momentů v daném bodě.

$$\vec{M} = N\vec{m}$$

Když budeme mít opět magnetizovanou hroudu čehosi s objemem V' , bod $\vec{r}'$ v rámci oné hroudy, bod $\vec{r}$ ve kterém nás zajímá potenciál a R vzdálenost obou bodů, pak

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' \\ \left(\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) \right)_x &= \left(\frac{\partial}{\partial y'} \frac{M_z}{R} - \frac{\partial}{\partial z'} \frac{M_y}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y'} - \frac{\partial M_y}{\partial z'} \right) + \left(M_z \frac{y - y'}{R^3} - M_y \frac{z - z'}{R^3} \right) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[- \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dV' + \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{R} dV' \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\oint_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{R} + \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{R} dV' \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\oint_{S'} \frac{\vec{\alpha}_m(\vec{r}')}{R} dS' + \int_{V'} \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{R} dV' \right]\end{aligned}$$

kde $\vec{j}_m$ je (pomocný) magnetizační proud.

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad \vec{j} = \vec{j}_v + \vec{j}_m + \vec{j}_p + \vec{j}_M$$

kde $\vec{j}_v$ je volný proud, $\vec{j}_p$ polarizační proud a $\vec{j}_M$ Maxwellův proud.

6.15 Pohyb nabité částice v magnetickém poli

viz skripta

6.16 Kvazistacionární pole

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) &= 0 = \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

toto bylo podnětem k zavedení Maxwellova proudu. Mějme rovný vodič a smyčku v rovině xy , kolmo na homogenní magnetické pole, pohybující se rychlostí v ve směru y .

$$F_L = qvB = qE \quad E = qB$$

$$U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = lvB$$

V případě, že magnetické pole je nehomogenní, se vytvoří rozdíl potenciálu, který vybudí elektrický proud tekoucí smyčkou.

$$E_1 = vB_1 \quad E_2 = vB_2 \quad v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\varepsilon^{mn} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = (E_2 - E_1)l = -v(B_2 - B_1)l = -\frac{B_2 \Delta y l - B_1 \Delta y l}{\Delta t} = -\frac{B_2 \Delta S - B_1 \Delta S}{\Delta t} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} \quad \int_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Indukčnost

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

6.17 RLC obvody, impedance, přechodové jevy...

Samostudium...

viz skripta (někde okolo strany 200) a internet (za sebe bych asi doporučil [MEF](#), na Ečko to určitě stačí, a s nejvyšší pravděpodobností by se z toho dalo naučit i na C)

Slovo závěrem

Ve skriptech jsou některé části mnohem lépe ztvárněny, než to zvládl Chadzi (kdo chodil na přednášky, tak se tomu skoro asi ani nediví). Sice to nedokážu objektivně posoudit, protože jsem se z nich skoro neučil, ale pevně tomu věřím.

A téhle věty si važte nejvíc, protože je úplně poslední. ☺

Všem čtenářům přeji veleúspěšnou zkoušku, jako jsem měl já. Tahle věta byla ale opravdu poslední, alespoň za předpokladu, že už nepočítám tuhle, některé potenciální bonusové materiály a tu, která by se mohla někdy v budoucnu objevit za ní (se závěrečnou úvahovou statí na téma „*Poslední věta: Jak moc si jí vážit?*“ zatím nepočítám, ale nevylučuji, že se někdy budu nudit).

PS: Mám rád (nejen) oříškovou čokoládu

$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{F}' &= \frac{\vec{F} + \gamma \vec{v} \left[(\gamma-1) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{F} \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)} \\
\vec{F}' &= \frac{\vec{F}' + \gamma \vec{v} \left(\gamma-1 \right) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \gamma \vec{F}' \left(\frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right) \vec{v}}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)} \\
&= \gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \left(\vec{F}' + \gamma \vec{v} \left(\gamma-1 \right) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right) + \gamma \left(\vec{F}' + \gamma \vec{v} \left[(\gamma-1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma \right] \vec{v} \right) \\
&= \gamma^2 \left(c^2 - \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \gamma \vec{v} \left(\vec{v} + \gamma \left[(\gamma-1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma \right] \vec{v} \right) \\
c^2 \vec{F}' + c^2 (\gamma-1) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - (\gamma \vec{v}) \vec{F}' - (\gamma-1) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} + (\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v} + (\gamma-1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \gamma \vec{v} \left(\frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right) \vec{v} \\
\gamma^2 c^2 - \gamma \vec{v} \cdot \vec{v} + \gamma \vec{v} \cdot \vec{v} + \gamma^2 \vec{v} \cdot \vec{v} - \gamma^2 v^2 \\
\gamma^2 \vec{F}' + \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - (\gamma \vec{v}) \frac{\vec{F}'}{c^2} - \gamma \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} + \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \gamma \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} \\
\gamma^2 \vec{F}' - \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} + \gamma \vec{v} + \gamma \vec{v} - \gamma \vec{v} - \gamma \frac{v^2}{c^2} \\
\vec{F}' + (\gamma-1) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - (\gamma \vec{v}) \frac{\vec{F}'}{c^2} + \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} - \gamma \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} \\
\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^{-1} \\
= \gamma \left(\vec{F}' - \vec{F}' + \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} + \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} - \gamma^2 \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} \right) \\
= \gamma \left(\vec{F}' + (1-\gamma) \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} + \gamma \left(\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{F}') \right) \right)
\end{aligned}$$

$\left(\frac{2}{2}\right) F \rightarrow$ coulomb. sikel $\rightarrow$ Max. pole

$(t' = \gamma(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2}))$ -- negative, Eigen. m' $\rightarrow$ $\vec{r}'$ mod $\underline{t=0}$

$\vec{F}' = \frac{q}{r'^3} \vec{r}'$
 $t=0 \leftrightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \gamma \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v}$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} - \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right]$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} - \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right] = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right]$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right] = 0$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right]$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right]$

$\vec{F} = \frac{q}{r^3} \left[\gamma \vec{r} + \frac{\gamma \vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} \right]$

① Zustand