Číselné těleso T

Def $T \subset \mathbb{C}$ nazveme číselným tělesem, pokud má alespoň 2 prvky a splňuje pro každé $\alpha, \beta \in T$

① $\forall \alpha, \beta \in T,\ \alpha + \beta \in T$
② $\forall \alpha, \beta \in T,\ \alpha \cdot \beta \in T$
③ $\forall \alpha \in T,\ -\alpha \in T$
④ $\forall \alpha \in T, \alpha \neq 0,\ \frac{1}{\alpha} \in T$

V každé těleso T obsahuje 0 a 1

Dk Nechť T číselné těleso, $\alpha \in T$

podle ① $-\alpha \in T\ (3) \Rightarrow \alpha + (-\alpha) \in T (1) \Rightarrow 0 \in T$
② $\frac{1}{\alpha} \in T\ (4), \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \in T\ (2) \Rightarrow 1 \in T$

Vektorový prostor V

Nechť ① T číselné těleso
② V neprázdná množina
③ existuje zobrazení ⊕, sčítání, $\oplus : V \times V \to V$
④ existuje zobrazení ⊙; $T \times V \to V$

Pak V nazveme vektorovým prostorem nad číselným tělesem T, pokud je splněno 8 axiomů:

8 axiomů vektorového prostoru

1. $(\forall \vec{x},\vec{y}\in V)(\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x})$
2. $(\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V)((\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}))$
3. $(\exists \vec{o}\in V)(\forall \vec{x}\in V)(\vec{o}+\vec{x}=\vec{x})$
4. $(\forall \vec{x}\in V)(\exists -\vec{x}\in V)(\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{o})$
5. $(\forall \alpha,\beta\in T)(\forall \vec{x}\in V)((\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x}))$
6. $(\forall \vec{x}\in V)(1\cdot\vec{x}=\vec{x})$
7. $(\forall \alpha,\beta\in T)(\forall \vec{x}\in V)((\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x})$
8. $(\forall \alpha\in T)(\forall \vec{x},\vec{y}\in V)(\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y})$

Vlastnosti vektorového prostoru nad tělesem T

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor
2. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden opačný vektor
3. $(\forall \vec{a},\vec{b}\in V)(\exists!\,\vec{x}\in V)(\vec{a}+\vec{x}=\vec{b})$, $\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$
4. $(\forall \alpha\in T)(\forall \vec{a}\in V)(\alpha\cdot\vec{o}=\vec{o}=0\cdot\vec{a})$
5. $(\forall \alpha\in T)(\forall \vec{a}\in V)(\alpha\vec{a}=\vec{o}\Rightarrow(\vec{a}=\vec{o}\vee\alpha=0))$
6. $(\forall \alpha\in T)(\forall \vec{a}\in V)((-\alpha\vec{a})=(-\alpha)\vec{a}=\alpha(-\vec{a}))$

Dk ① předpokládejme opak, existují alespoň 2 různé!

$\vec{a} + \vec{o}_1 = \vec{a}$ $\wedge$ $\vec{b} + \vec{o}_2 = \vec{b}$

$\vec{o}_2 + \vec{o}_1 = \vec{o}_2$ $\quad$ $\vec{o}_1 + \vec{o}_2 = \vec{o}_1$

komutativní zákon $\Rightarrow \vec{o}_1 = \vec{o}_2$ - SPOR

Dk ② Předpokládejme, že existují alespoň 2 různé!

$\vec{a} + \vec{b}_1 = \vec{o}$ $\quad$ $\vec{a} + \vec{b}_2 = \vec{o}$

$\vec{a} + \vec{b}_1 = \vec{a} + (-\vec{a})$ $\wedge$ $\vec{a} + \vec{b}_2 = \vec{a} + (-\vec{a})$

$\vec{b}_1 = -\vec{a}$ $\quad$ $\vec{b}_2 = -\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{b}_1 = \vec{b}_2 = -\vec{a}$ - SPOR

Dk ③ I ověříme, že $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$ je řešením rce, tedy $LS = RS$

$\vec{a} + ((-\vec{a}) + \vec{b}) = \vec{b}$

$\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{x}$ je řešením

II Ukážeme, že je právě jedno, budeme předpokládat, že existují dvě různá!

$\vec{a} + \vec{y} = \vec{b}$, $\vec{y} \neq \vec{x}$

$\vec{y} = \vec{b} - \vec{a}$, komutativita

$\vec{y} = -\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{y} = \vec{x}$ SPOR

Dk ④ Víme, že $\alpha \cdot \vec{a} + \vec{x} = \alpha \cdot \vec{a}$ má jediné řešení, $\vec{x} = \vec{o}$

$\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{o} = \alpha(\vec{a} + \vec{o}) = \alpha \cdot \vec{a} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{o}$ je řešením a tedy nulový $\vec{o}$

$\alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a} = (\alpha + 0)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a}$ -//-

Dk ⑤

I $\alpha = 0$ (viz 4)

II $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} = \vec{o}$

$\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha})\vec{a} = \alpha \cdot (\frac{1}{\alpha}\vec{a}) = \alpha \cdot \vec{o} = \vec{o}$, spor!

Dk (6)

$$-\alpha\cdot\vec{a} = (-1\cdot\alpha)\vec{a} = (-\alpha)\vec{a}$$
$$-\alpha\vec{a} = \alpha\cdot((-1)\cdot\vec{a}) = \alpha\cdot(-\vec{a})$$

Věta Mějme $(V, T, \oplus, \odot)$ vektorový prostor

$W \subset V$, $W \neq \emptyset$

takovou, že $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in W)(\vec{x} + \vec{y} \in W)$

$(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x} \in W)(\alpha\vec{x} \in W)$

$(W, T, \oplus_W, \odot_W)$ je vektorový prostor, kde

$\oplus_W$ a $\odot_W$ jsou zúžení $\oplus$ a $\odot$ na W

$\oplus_W : W \times W \Rightarrow W, (\forall \vec{x}, \vec{y} \in W)(\vec{x} \oplus_W \vec{y} := \vec{x} \oplus \vec{y})$

Dk nulový vektor je stejný pro oba prostory

$\vec{x} \in W \Rightarrow \in V$

$\vec{0} = 0\cdot\vec{x} \in W$

$\vec{x} + 0\vec{x} = \vec{x} \in W \Rightarrow \in W$

Dk opačný vektor je stejný pro oba prostory

$\vec{x} \in W \Rightarrow \vec{x} \in V$

$(-1)\vec{x} \in W \Rightarrow (-1)\vec{x} \in V$

Lineární kombinace

Def V nad T, nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$
vektor $\vec{x}$ nazveme lineární kombinací (LK)
vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, pokud existují $\alpha_i \in T$
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i \in T)$
α_i nazveme koeficienty lineární kombinace

Pokud $\alpha_i = 0, \forall i \in \hat{n}$ nazveme LK triviální, v opačném případě $(\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0)$ je LK netriviální

Lineární obal

Def Nechť V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$
Množinu všech LK vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazveme lineárním obalem vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$
$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazveme generátory LO
$[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \mid \alpha_i \in T\}$

Věta V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$

1. $\vec{0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$
2. Je-li $(l_1, \dots, l_n)$ permutace $\hat{n}$, pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_{l_1}, \dots, \vec{x}_{l_n}]_\lambda$
3. $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$
4. $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$
5. $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow \forall \alpha \in T, \alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$
6. $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je vektorový prostor

Dk ① $\vec{o} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow (\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n))(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o})$

zvolíme $\alpha_i = 0 \ \forall i \in \hat{n}$

Dk ② Protože platí komutativní zákon, nezáleží na pořadí sčítaných vektorů, tedy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i}$

Dk ③ $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

a) ukážeme, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] \subseteq [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$

$\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{x}_{n+1} \Rightarrow x \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$

b) ukážeme, že $[\vec{x}_1, \dots, x_{n+1}]_\lambda \subseteq [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

$x \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i + \beta_{n+1} \vec{x}_{n+1} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i + \beta_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} (\beta_{n+1} \alpha_i) \vec{x}_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \beta_{n+1} \alpha_i) \vec{x}_i \Rightarrow x \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$

Dk ④ $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \ \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$

$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

Dk ⑤ $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

$\alpha \vec{x} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i \Rightarrow \alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

Dk ⑥ LO je uzavřený na sčítání vektorů a násobení číslem z tělesa, obsahuje $\vec{o}$ a viditelně také opačný vektor. Také platí všechny axiomy, neboť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ a V je samo o sobě vektorový prostor

Lineární závislost a nezávislost

Def Nechť V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$

Řekneme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN, pokud

$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o} \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \hat{n}\right)$,

tedy pouze triviální LK dává nulový vektor

Řekneme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ, pokud

$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o} \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0)\right)$

Věta Nechť V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, potom platí

1. $\vec{x}_1$ je LZ $\Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{o}$
2. pokud je mezi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ obsažen $\vec{o}$, pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ
3. jsou-li $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$, pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ
4. nechť $n \geq 2$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ $\Leftrightarrow (\exists k \in \{2, \dots, n\})(\vec{x}_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$
5. pokud $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN $\forall k \in \hat{n}$
6. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LZ $\Leftrightarrow (\vec{x}_1 = \vec{o}) \vee (\exists k \in \{2, \dots, n\})(\vec{x}_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}]_\lambda)$

Dk 1. $\vec{x}_1$ je LZ $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in T)(\alpha \vec{x}_1 = \vec{o})$

$\alpha \vec{x}_1 = \vec{o} \Leftrightarrow (\alpha = 0) \vee (\vec{x}_1 = \vec{o})$, víme, že $\vec{x}_1 = 0$, α můžeme volit libovolné

Dk 2. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o} \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0)$, víme, že $(\exists j \in \hat{n})(\vec{x}_j = \vec{o})$

BUNO: $j < n$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o} \Leftrightarrow 0\vec{x}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 1 \cdot \vec{o} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \dots + 0\vec{x}_n = \vec{o}$

našli jsme tedy netriviální LK dávající $\vec{o}$

Dk ③ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ LZ po $k \in \hat{n} \Leftrightarrow ((\exists i \in \hat{k})(d_i \neq 0) \wedge \sum_{i=1}^{k} d_i \vec{x}_i = \vec{0})$

pak $\sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i \vec{x}_i + \vec{0} \cdot \vec{x}_{k+1} + \dots + 0 \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ.

Dk ④ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i = \vec{0} \wedge (\forall i \in \hat{n})(d_i = 0)$

pak pro libovolné $k \in \hat{n}$ $\sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^{k} d_i x_i + \vec{0} x_{k+1} + \dots + 0 \vec{x}_n = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ LN

Dk ⑤ Ukážeme dvě implikace

$:\Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i = \vec{0} \wedge (\exists k \in \hat{n})(d_k \neq 0)$

$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} d_i \vec{x}_i = -d_k \vec{x}_k \Leftrightarrow x_k = \frac{-1}{d_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} d_i \vec{x}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{-1}{d} d_i\right) \vec{x}_i$

$\Rightarrow x_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k+1}, \dots \vec{x}_n]_\lambda$

$\Leftarrow:$

$x_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k+1}, \dots \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} d_i \vec{x}_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} d_i \vec{x}_i - \vec{x}_k = \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i, d_k = -1 \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ

Dk ⑥ Opět ukážeme dvě implikace

$:\Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{x}_i = \vec{0} \wedge (\exists j \in \hat{n})(d_j \neq 0)$

a) $\vec{x}_1 = \vec{0}$ (dokázáno výše)

b) $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \Rightarrow (\exists k \in \{2, \dots n\})(\vec{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} d_i \vec{x}_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i \vec{x}_i = \vec{0}, d_k = -1 \Rightarrow x_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}]_\lambda$

$\Leftarrow:$ a) $\vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ

b) $x_k \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}]_\lambda$ pro nějaké $k \in \{2, \dots, n\} \Leftrightarrow x_k = \sum_{i=1}^{k-1} d_i \vec{x}_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} d_i \vec{x}_i = \vec{0}, d_k = -1 \Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ

Vektorový prostor polynomů

Polynom

Def Funkce $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme polynom, pokud $n \in \mathbb{N}_0$
a $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_n t^n$$

- $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ nazveme koeficienty polynomu
- n nazveme stupeň (řád) polynomu $st\ p = \max\{i \in \hat{n} \mid \alpha_i \neq 0\}$
- kořen polynomu p, $t \in \mathbb{C}$, $p(t) = 0$
- reálný polynom – polynom s reálnými koeficienty

nulový polynom σ je takový, že $\sigma(t) = 0, \forall t \in \mathbb{C}$

Věta Všechny koeficienty nulového polynomu jsou nuly, tj. $(\alpha_i = 0)(\forall i \in \hat{n})$

Dk Lemma

$$\sigma(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$$

víme, že $\sigma(t) = 0, \forall t \in \mathbb{C}$

$\sigma(0) = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$$\Rightarrow \sigma(t) = t\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_n t^{n-1})}_{= 0 \text{ pro každé } t \neq 0}$$

Z Matematické analýzy: polynom je spojitá funkce

$\Rightarrow$ pokud $\sigma(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow \sigma(t) = 0$ pro $t = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \dots$

Věta koeficienty polynomu jsou určeny jednoznačně

Předpokládejme, že existují dva způsoby jak zapsat tentýž polynom

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_n t^n$$

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_{n-1} t^{n-1} + \beta_n t^n, \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq \beta_i)$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i t^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i - \sum_{i=0}^{n} \beta_i t^i = \sigma(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) t^i = \sigma(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i\ \forall i \in \hat{n}, \text{SPOR}$$

Základní věta algebry

Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Bezoutova věta

Nechť $p(t)$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{C}$. Potom existuje polynom $q(t)$ stupně $n-1$, takový, že

$$p(t) = p(t_0) + (t-t_0)q(t), \; \forall t \in \mathbb{C}$$

Dk: $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_n t^n$

$$p(t) - p(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t_0^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t^i - t_0^i) =$$

$$= t - t_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i}_{=\beta} \sum_{i=0}^{n-1} t^i t_0^{n-1-i} \overset{*}{=} (\alpha_i \in \mathbb{C})(\forall i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i := \beta \in \mathbb{C}$$

$$\overset{*}{=} (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (\beta t_0^{n-1-i}) \cdot t^i}_{= q(t) \text{ - polynom st. } n-1}$$

$$\Rightarrow p(t) = p(t_0) + (t-t_0) q(t)$$

Důsledky Bezoutovy věty

Věta: Každý polynom stupně n má nejvýše n různých kořenů

Dk: $n = 0$: platí triviálně

$n \to n+1$, polynom $p(t)$ stupně $n+1$, ZVA $\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{C}, p(t_0) = 0$

z Bezoutovy věty $p(t) = p(t_0) + (t-t_0)q(t) = (t-t_0)q(t)$

$q(t)$ polynom stupně n - dle indukčního předpokladu má n různých kořenů, což společně s kořenem $t_0 \in \mathbb{C}$ dává celkem $n+1$ různých kořenů polynomu $p(t)$

Věta Nechť $p(t)$ polynom stupně $n \in \mathbb{N}$

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \alpha_n t^n ; \ \alpha_n \neq 0$$

a nechť dále $t_1, \dots, t_k$ jsou všechny navzájem různé kořeny $p(t)$

Potom existují jednoznačná čísla $n_1, \dots, n_k$ tak že

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

$$p(t) = \alpha_n (t-t_1)^{n_1} (t-t_2)^{n_2} \dots (t-t_k)^{n_k}$$

n_i - násobnost kořene t_i

$(t-t_i)$ - kořenové polynomy

Dk $n = 1$: $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t = \alpha_1 \left(t + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)$

$n \to n+1$

$p(t)$ polynom stupně $n+1$, $t_0 \in \mathbb{C}$ kořen $p(t)$, víme, že existuje (ZVA)

$$p(t) = p(t_0) + (t-t_0) q(t) = (t-t_0) q(t),$$

$q(t)$ polynom stupně n, podle indukčního předpokladu

$$q(t) = \alpha_n (t-t_1)^{n_1} (t-t_2)^{n_2} \dots (t-t_k)^{n_k}$$

① $t_0 \neq t_i \ \forall i \in \hat{k}$ pak $p(t) = \alpha_n (t-t_1)^{n_1} (t-t_2)^{n_2} \dots (t-t_k)^{n_k} (t-t_{k+1})^{n_{k+1}}$ kde $t_{k+1} = t_0$ a $n_{k+1} = 1$ a tedy $\sum_{i=1}^{k+1} n_i = n+1$

② $t_0 = t_i$ pro nějaké $i \in \hat{k}$ pak $p(t) = \alpha_n (t-t_1)^{n_1} \dots (t-t_i)^{n_i+1} \dots (t-t_k)^{n_k}$ a tedy $\sum_{i=1}^{k} n_i = n+1$

Báze a dimenze

Def/ Nechť V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ a nechť dále $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

Potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ generují V.

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazveme generátory V

SOUBOR

Nechť V nad T, $n \in N$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$

) uspořádanou n-tici $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme soubor vektorů

BÁZE

Nechť V nad T, $n \in N$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$

Pokud $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ splňují:

1. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN
2. generují V, tj. $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

Potom soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme bází V.

DIMENZE

Nechť V nad T, $V \neq \{\vec{o}\}$

Pokud ve V existuje n LN nezávislých vektorů

- každých $n+1$ vektorů ve V je LZ

pak řekneme, že dimenze V je n ($\dim V = n$)

V opačném případě řekneme, že V má nekonečnou dimenzi ($\dim V = +\infty$)

Pro $V = \{\vec{o}\}$ $\dim V = 0$

Steinitzova věta o výměně

Nechť V vektorový prostor nad číselným tělesem T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN. Nechť dále $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ vektory z V takové, že $(\forall i \in \hat{n})(\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda)$

Pak ① $n \leq m$

② existují vzájemně různé indexy $i_1, \dots, i_n \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}\}]_\lambda$$

Dk Označme $L := [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$

Pak dle předpokladu $\vec{x}_1 \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ to podle věty o LO znamená, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ a to znamená, že $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LZ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_1 = \vec{0}$ $\vee$ existuje index i_1 takový, že $\vec{y}_{i_1} \in [\vec{x}_1, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1\}]_\lambda$ a tedy jej lze z LO vynechat aniž by se měnil. Dostáváme $L = [\vec{x}_1, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1\}]_\lambda$

Pokud $n \geq 2$ pak nutně $m \geq 2$, kdyby $m = 1$, pak by $\vec{x}_2 \in [\vec{x}_1]_\lambda$ a to je SPOR.

Dle předpokladu tedy $\vec{x}_2 \in [\vec{x}_1, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} \mid i \neq i_1\}]_\lambda$ z toho plyne, že $[\vec{x}_1, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1\}]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1\}]_\lambda$. To ovšem znamená, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1\}$ nutně jsou LZ a mohou nastat tyto možnosti:

① $\vec{x}_1 = \vec{0}$, SPOR, že $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN

② $\vec{y}_1 \in [\vec{x}_2]_\lambda$, SPOR, že $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN

③ to nutně vynucuje existenci indexu i_2 takového, že

$\vec{y}_{i_2} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1, i \neq i_2\}]_\lambda$ pak jej lze vyjmout z LO, aniž bychom ho změnili, dostáváme, že $L = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{m}, i \neq i_1, i \neq i_2\}]_\lambda$

Takto pokračujeme dokud nevyčerpáme vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nebo $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$.
Ukažme nyní, že druhá možnost nemůže nastat.

Kdyby $m < n$, pak by po m krocích existoval alespoň jeden vektor $\vec{x}_{m+1}$ takový, že $\vec{x}_{m+1} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$ a to je SPOR s předpoklady

Věta | Nechť V nad T

$\dim V = n \iff$ ve V existuje n-členná báze
Ukážeme obě implikace

$\Rightarrow$: $\dim V = n \iff \exists\, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN, ukažme, že generují V a tedy tvoří bázi. Předpokládejme, že existuje $\vec{x}_{n+1}$ takový, že $\vec{x}_{n+1} \notin [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$, pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ LN, a protože

a) $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$

b) $(\forall i \in \widehat{n+1})(\vec{x}_i \notin [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}]$, to je SPOR, že $\dim V = n$, a proto musí platit, že $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

$\Leftarrow$: ve V existuje n-členná báze $\iff \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN $\wedge$ $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$
Steinitz: počet LN vektorů ve V je menší nebo roven počtu generátorů, pokud všechny generátory V jsou LN pak už není sporu (?)
$\dim V = n$

Důsledek Nechť V nad T, $n \in \mathbb{N}$, $\dim V = n$

① každá báze je n-členná

② každý soubor n LN vektorů z V generuje V a tedy je bází

③ každý n členný soubor generátorů je LN a tedy je bází

Dk ① Předpokládejme, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V

$(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze V, $n \neq m$

pak dle Steinitzovy věty: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN a $V = [\vec{y}_1 \dots \vec{y}_m]_\lambda$

$\Rightarrow n \leq m$

$\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN a $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

$\Rightarrow m \leq n$

tedy dostáváme, že $n = m$, to je SPOR s naším předpokladem $n \neq m$

② Dokážeme v předchozí větě ($\dim V = n \Leftrightarrow$ ve V existuje n členná báze)

③ Předpokládejme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ pak musí platit

a) $\vec{x}_1 = \vec{o}$

b) $(\exists j \in \hat{n}, j \neq 1)(\vec{x}_j \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$

v obou případech lze říct, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\{\vec{x}_i \mid i \in \hat{n} \setminus \{1 \vee j\}\}]_\lambda = V$

tedy maximálně $n-1$ vektorů ve V je LN

$\Rightarrow$ každých n vektorů je LZ $\Rightarrow$ SPOR s předpokladem, že $\dim V = n$

Věta Nechť V nad $\mathbb{C}$, $\dim V = n$, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V

Potom prostor $V_{\mathbb{R}}$, $V_{\mathbb{R}} = (V, \mathbb{R}, \oplus, \odot_{|\mathbb{R}})$

má bázi $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n)$ a $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$

Dk Ukážeme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n$ jsou LN

$\Leftrightarrow$ existuje pouze triviální LK dávající nulový vektor

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k i\vec{x}_k = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)\vec{x}_k = \vec{0}$, to je LK bazických (LN) vektorů dávajících nulový vektor

$\Rightarrow \alpha_k + i\beta_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = \beta_k = 0$

Ukážeme, že generují V

Víme, že $V = [\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n] \Leftrightarrow$ libovolný vektor $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \vec{x}_k$, $\gamma_k \in \mathbb{C}$.

$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k \cdot i)\vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k i\vec{x}_k$, kde $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$,

našli jsme tedy LK vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, i\vec{x}_1, \dots, i\vec{x}_n$, která dává libovolný vektor z V

Věta Nechť V nad T, $\dim V = n$, a nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ jsou generátory V, tedy $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$.

~~Poznámky~~ Pak existují indexy $k_1, k_2, \dots, k_n \in \hat{m}$ tak, že $(\vec{x}_{k_1}, \dots \vec{x}_{k_n})$ je báze V

- Z generátorů lze vybrat bázi

Dk Prodiskutujme nejdřív v jaké relaci jsou n a m

① $m < n$ - nemůže nastat, SPOR, že $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda \wedge \dim V = n$

② $m = n$ - $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ je báze V

③ $m > n$ $\Rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ jsou LZ $\Rightarrow$ a) $x_1 = \vec{0}$

b) $(\exists k_j \in \hat{m})(\vec{x}_{k_j} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k_j - 1}]_\lambda)$

$\Rightarrow$ v obou případech lze tento vektor z LO vyjmout, aniž by se změnil, tedy $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda = [\{x_{k_i} \mid k_i \in \hat{m}, k_i \neq k_j\}]_\lambda$, LO teď obsahuje $m-1$ vektorů, takto opakujeme dokud $m = n$

Věta Nechť V nad T, $\dim V = n$, $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ LN z V

Potom existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ tvoří bázi V

- LN soubor lze doplnit na bázi

Dk ① $k = n$, pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ tvoří bázi V

② $k < n$,

$\dim V = n \iff$ existuje n-členná báze $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$

tedy $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda$

pak podle Steinitzovy věty existují vzájemně různé

indexy $i_1, \dots, i_k \in \hat{n}$ takové, že

$$V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\}]_\lambda$$

a tedy $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \{\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\})$ je báze V

Souřadnice

Věta Nechť V nad T, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V

~~Potom~~ Pak $\forall \vec{x} \in V$ existuje právě jedna n-tice $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

Dk Existence takové n-tice plyne z definice báze, $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují dvě takové n-tice $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\beta_1, \dots, \beta_n$ takové, že $(\exists k \in \hat{n})(\alpha_k \neq \beta_k)$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i$$

, to je LK bázických (LN) vektorů dávající nulový vektor, tedy musí triviální LK

$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \forall i \in \hat{n}$, to je SPOR

Def Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V_n nad T, $\vec{x} \in V$

- Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, potom α_i je i-tá souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$
- Zobrazení $x_i^{\#}: V \to T$, které vektoru $\vec{x}$ přiřadí jeho i-tou souřadnici v bázi $\mathcal{X}$ nazveme i-tý souřadnicový funkcionál v bázi $\mathcal{X}$ tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, pak $x_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$
- Zobrazení $(\ )_{\mathcal{X}}: V \to T^n$, které vektoru $\vec{x}$ přiřadí n-tici jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$ nazveme souřadnicový izomorfismus

tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, pak $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\#}(\vec{x}) \\ x_2^{\#}(\vec{x}) \\ \vdots \\ x_n^{\#}(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Vlastnosti

Věta Nechť V nad T, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V

① $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)(\forall i \in \hat{n})(x_i^{\#}(\vec{x}+\vec{y}) = x_i^{\#}(\vec{x}) + x_i^{\#}(\vec{y}))$ - Aditivita

② $(\forall \vec{x} \in V)(\forall i \in \hat{n})(\forall \alpha \in T)(x_i^{\#}(\alpha \vec{x}) = \alpha\, x_i^{\#}(\vec{x}))$ - Homogenita

③ Pro bazické vektory platí $x_i^{\#}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$ $\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}}$

Dk ①

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i, \quad \vec{x}+\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i$$

$$x_i^{\#}(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha_i + \beta_i = x_i^{\#}(\vec{x}) + x_i^{\#}(\vec{y})$$

② $$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \quad \alpha \vec{x} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i$$

$$x_i^{\#}(\alpha \vec{x}) = \alpha \alpha_i = \alpha \cdot x_i^{\#}$$

③ $\vec{x}_j$ j-tý bazický vektor, $\vec{x}_j = 0\vec{x}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \dots + 0\vec{x}_n$, BÚNO, $\vec{x}_j \neq \vec{x}_1 \neq \vec{x}_n$

Pak $x_i^{\#}(\vec{x}_j) = \left.\begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases}\right\} \delta_{ij}$

Důsledek Nechť V nad T, $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

① $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)((\vec{x}+\vec{y})_X = (\vec{x})_X + (\vec{y})_X)$

② $(\forall \vec{x} \in V)(\forall \alpha \in T)((\alpha \vec{x})_X = \alpha(\vec{x})_X$

③ $(\vec{x}_i)_X = \vec{e}_i$, kde $\vec{e}_i$ je i-tý kanonický vektor standardní báze T^n

DK

① $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\vec{x}_i$

$$(\vec{x}+\vec{y})_X = \begin{pmatrix} x_1^{\#}(\vec{x}+\vec{y}) \\ x_2^{\#}(\vec{x}+\vec{y}) \\ \vdots \\ x_n^{\#}(\vec{x}+\vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = (\vec{x})_X + (\vec{y})_X$$

② Analogicky

③ $\vec{x}_i = 0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 1 \vec{x}_i + \dots + 0 \vec{x}_n$

$$(\vec{x}_i)_X = \begin{pmatrix} x_1^{\#}(\vec{x}_i) \\ x_2^{\#}(\vec{x}_i) \\ \vdots \\ x_n^{\#}(\vec{x}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_i$$

Podprostory

Nechť V nad T,

~~Pa~~ P nazveme podprostorem V, ozn. $P \subset\subset V$

pokud platí:

① $P \subset V$

② $P \neq \emptyset$

③ $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\vec{x}+\vec{y} \in P)$

④ $(\forall \vec{x} \in P)(\forall \alpha \in T)(\alpha \vec{x} \in P)$

Věta Nechť V nad T, $P \neq \emptyset$, $P \subset V$

Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $P \subset\subset V$
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\alpha \vec{x} + \vec{y} \in P)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \in P)$

Dk Ukážeme, že 1 => 2 => 3 => 1 a tím lucdejomé, že si jsou všechny výroky rovny

I. 1 => 2 Víme, že $P \neq \emptyset \wedge P \subset V$, podle 2. bodu definice $\alpha \vec{x} \in P$ a podle 3. bodu definice tedy $\alpha \vec{x} + \vec{y} \in P$

II. 2 => 3 Dokážeme indukcí, nechť výrok platí pro n, tedy že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \in P$, ukážeme, že platí i pro $n+1$:

$$P \ni \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1}$$

, podle IP víme, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \in P$, pokud ukážeme, že $\alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1} \in P$, pak jsme tvrzení dokázali.

Víme, že pokud $\vec{x}_{n+1} = \vec{o}$, tak $\alpha_{n+1} \cdot \vec{x}_{n+1} \in P$, tímto jsme ukázali, že po nějaké n výrok platí, tedy $\sum_{i=1}^{1} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\vec{x}_1 = \vec{o}$.

Pak tedy víme, že $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1} \in P$, $\forall n \in \mathbb{N}$

III. 3 => 1 Opět potože víme, že $P \neq \emptyset \wedge P \subset V$

zvolme si $n = 1$, $\alpha \in T$, $\vec{x} \in P$, tedy $\sum_{i=1}^{1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha \vec{x} \in P$,

nyní zvolme $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\vec{x}_1 = \vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{y}$, pak $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{x} + \vec{y} \in P$

Věta Nechť V nad T, $P \subset\subset V$, pak platí

1. $\vec{o} \in P$
2. $\{\vec{o}\} \subset\subset P$, $V \subset\subset V$
3. P je vektorový prostor nad T
4. Pokud $Q \subset\subset P$, pak $Q \subset\subset V$
5. $\dim P \leq V$
6. po $\dim < +\infty$, pak pokud $\dim P = \dim V \Rightarrow P = V$

Dk 1. Protože $P \neq \emptyset$, tak musí existovat alespoň jeden vektor $\vec{x} \in P$, protože $(\forall \vec{x} \in P)(\forall \alpha \in T)(\alpha \vec{x} \in P)$, tak pokud zvolíme $\alpha = 0$, víme, že v každém tělese je obsažena nula, tak $0 \cdot \vec{x} = \vec{o} \in P$

2. a) $P = \{o\}$
   1. $P \subset V$
   2. $P \neq \emptyset$
   3. triviální $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\vec{x} + \vec{y} \in P)$
   4. triviální $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x} \in P)(\alpha \vec{x} \in P)$

   b) $P = V$
   1. očividně $V \subset V$
   2. $V \neq 0$, protože V vektorový prostor
   3. } triviální
   4. }

3. Protože je $P \subset\subset V$, je tedy uzavřený na $\oplus$ a $\odot$ a triviálně platí ostatní axiomy

4. $Q \subset\subset P \Leftrightarrow$
   1. $Q \subset P \Rightarrow Q \subset V$
   2. $Q \neq \emptyset$
   3. } $\vec{x} \in Q \Rightarrow \vec{x} \in P \Rightarrow \vec{x} \in V$
   4. }

Dk ⑤ a) BÚNO: $\dim V = n$, $n \in N \Leftrightarrow \exists \chi, \chi = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V,

zcela určitě platí: $\vec{x} \in P \Rightarrow \vec{x} \in V$, neboť $P \subset V$

Ukažme sporem: Předpokládejme $\dim P > \dim V$, z toho

plyne $\dim P \geq n+1$, ~~proto~~ BÚNO: $\dim P = n+1 \Leftrightarrow P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ ne nutně stejné bazické vektory,

Pak ale ~~[illegible]~~ $\vec{x}_{n+1}$ není LK jiných vektorů, tedy

$\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow \vec{x}_{n+1} \in V$, tj. SPOR

b) $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{\vec{o}\}$, triviálně $\dim P \leq 0$ pro $P \subset V$

c) $\dim V = +\infty$, pak triviálně $\dim P \leq +\infty$

⑥ a) $\dim V < +\infty \Rightarrow \dim V = n$, $n \in N \Leftrightarrow V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, kde

$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V,

dále víme, že $\dim P = n \Leftrightarrow P = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda$, kde $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$,

víme, že každý LN n-členný soubor je báze a tedy generuje prostor,

proto $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = P$

b) triviálně platí pokud $V = \{\vec{o}\}$

c) triviálně platí pokud $P = V$

Operace s podprostory

Nechť V nad T a nechť $P, Q \subset V$

- $P \cup Q = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \in P \vee \vec{x} \in Q\}$
- $P \cap Q = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \in P \wedge \vec{x} \in Q\}$
- $P + Q = \{\vec{x} + \vec{y} \in V \mid \vec{x} \in P \wedge \vec{y} \in Q\}$
- Řekneme, že součet $P + Q$ je <u>direktní</u>, ozn. $P \oplus Q$, pokud
  $(\forall \vec{z} \in P+Q)(\exists! \vec{x} \in P)(\exists! \vec{y} \in Q)(\vec{z} = \vec{x} + \vec{y})$

Věta Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$, pak platí

1. $(P \cap Q) \subset (P \cup Q) \subset (P + Q)$
2. $P + Q \subset\subset V$
3. $P + Q$ je direktní $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{o}\}$
4. $P \cap Q \subset\subset V$
5. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V, pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V, který obsahuje $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

Dk ① $\vec{x} \in (P \cap Q) \Leftrightarrow \vec{x} \in P \wedge \vec{x} \in Q \overset{\text{z DEF}}{\Rightarrow} \vec{x} \in (P \cup Q) \Leftrightarrow \vec{x} \in P \vee \vec{x} \in Q$

víme, že $P + Q = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in P, \vec{x} \in Q\}$, BÚNO: nechť $\vec{x} \in P$, pak

zvolíme $\vec{y} = \vec{o}$, ~~[illegible]~~ víme, že $\vec{o} \in Q$, neboť $Q \subset\subset V$

Dk ②

① $P+Q \subset V$, neboť $P \subset V$, $Q \subset V$

② $P+Q \neq \emptyset$, neboť $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$

③ Nechť $\vec{x} \in P+Q$, $\vec{y} \in P+Q \Rightarrow$ pak nutně existují $\vec{p}_1 \in P$, $\vec{q}_1 \in Q$, že $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$ a stejně nutně existují $\vec{p}_2 \in P$, $\vec{q}_2 \in Q$, že $\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$

potom $\vec{x} + \vec{y} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 + \vec{p}_2 + \vec{q}_2 = \underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}_{\in P} + \underbrace{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}_{\in Q} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in P+Q$

④ Nechť $\vec{x} \in P+Q$, pak $\exists \vec{p}_1 \in P, \vec{q}_1 \in Q$, nechť dále $\alpha \in T$,

pak $\alpha\vec{x} = \alpha(\vec{p}_1 + \vec{q}_1) = \underbrace{\alpha\vec{p}_1}_{\in P} + \underbrace{\alpha\vec{q}_1}_{\in Q} \Rightarrow \alpha\vec{x} \in P+Q$

③

Ukážeme obě implikace

$\Leftarrow$: $(P \cap Q) = \{\vec{o}\} \Leftrightarrow (\forall \vec{x} \in P)(\forall \vec{y} \in Q)(\vec{x} \neq \vec{y})$ ($\vec{x} \neq \vec{o}$, $\vec{y} \neq \vec{o}$) pak nutně platí, že

$(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P)^{\otimes}(\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q)^{\otimes}(\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \neq \vec{x}_2 + \vec{y}_2) \Leftrightarrow P \oplus Q$ direktní součet

$\Rightarrow$: $(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P)^{\otimes}(\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q)^{\otimes}(\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \neq \vec{x}_2 + \vec{y}_2) \Leftrightarrow (\forall \vec{x} \in P)(\forall \vec{y} \in Q)(\vec{x} \neq \vec{y}) \Leftrightarrow$ ($\vec{x} \neq \vec{o}$, $\vec{y} \neq \vec{o}$)

$\otimes$ $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, $\vec{y}_1 \neq \vec{y}_2$

$\Leftrightarrow (P \cap Q) = \{\vec{o}\}$

④

① $P \cap Q \subset V$, neboť $P \subset V$, $Q \subset V \wedge (\vec{o} \in P \wedge \vec{o} \in Q)$

② $P \cap Q \neq \emptyset$, $\vec{o} \in P$, $\vec{o} \in Q$

③ $\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in P \cap Q \Leftrightarrow \vec{x} \in P \wedge \vec{x} \in Q \\ \vec{y} \in P \cap Q \Leftrightarrow \vec{y} \in P \wedge \vec{y} \in Q \end{array}\right\} \vec{x} + \vec{y} \in P \wedge \vec{x} + \vec{y} \in Q \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in P \cap Q$

④ $\vec{x} \in P \cap Q \Leftrightarrow \vec{x} \in P$, $\vec{x} \in Q$, nechť $\alpha \in T$

$\Rightarrow \alpha\vec{x} \in P \wedge \alpha\vec{x} \in Q \Leftrightarrow \alpha\vec{x} \in P \cap Q$

Dk ⑤ Chceme ukázat, že každý podprostor obsahující $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

① $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$, z věty o LO víme, že každá LO tvoří vekt. prostor,

② Pokud $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P \subset\subset V$, pak také díky uzavřenosti $\oplus, \odot$ obsahuje i všechny LK $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, tedy $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

Věta Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$

Potom $P+Q$ je nejmenší podprostor V (ve smyslu inkluze) obsahující $P \cup Q$

Dk ~~...~~ Víme, že $P+Q \subset\subset V$, dále víme, že $P \cup Q \subset P+Q$

Nechť $S \subset\subset V$ takový, že $P \cup Q \subset S \subset\subset V$

S obsahuje všechny $\vec{x} \in P$ i všechny $\vec{y} \in Q$ to ... znamená, že obsahuje všechny jejich součty $\Rightarrow P+Q \subset S$

1. věta o dimenzi

Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$

Pak $\dim(P+Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q$

Lemma

Nechť V nad T, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m \in V$

$P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, $Q = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$

Potom ① $P + Q = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$

② jsou-li $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN a $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN potom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{o}\}$

Dk ① $\vec{x} \in P + Q \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$, kde $\vec{p} \in P$, $\vec{q} \in Q$

$\vec{p} \in P \Leftrightarrow \vec{p} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

$\vec{q} \in Q \Leftrightarrow \vec{q} \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda \Leftrightarrow \vec{q} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{x}_i$

$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{q} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{x}_i \Leftrightarrow \vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$$

Protože $\vec{x}$ jsme si zvolili libovolně, tedy pro libovolný vektor $\vec{x}$ z $P+Q$ musí platit, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ tak musí platit, že

$P + Q = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$

Dk ② Jsou-li $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN a $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN pak platí, že
$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{o}\}$

Ukážeme dvě implikace

$\Rightarrow$: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN $\Leftrightarrow$ žádný z vektorů není násobkem jiného, ani LK ostatních, proto $(\forall \vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n], \vec{x} \neq \vec{o})(\vec{x} \notin [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda)$
$\wedge (\forall \vec{y} \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda, \vec{y} \neq \vec{o})(\vec{y} \notin [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$.
Pak už není složité a z definice $P \cap Q$ vyplývá, že $P \cap Q = \{\vec{o}\}$

$\Leftarrow$: Víme, že $P \cap Q$, pak nutně platí, že žádný vektor z P není LK
žádných vektorů z Q a že žádný vektor z Q není LK
žádných vektorů z P. Tedy nutně $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ LN

Věta Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$, potom

$$\dim(P+Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q$$

Dk ① BÚNO: $P = \{\vec{o}\}$, pak $P + Q = Q$, $P \cap Q = \{o\}$
$Q = [x_1, \dots, x_n]$, $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze Q
dosazováme $\dim Q + \dim\{o\} = \dim\{\vec{o}\} + \dim Q$
evidentně platí

② BÚNO: $\dim P = +\infty$, pak $\dim(P+Q) = +\infty$
$+\infty = +\infty$ evidentně také platí

③ $\dim P = n$, $\dim Q = m$, $n, m \in \mathbb{N}$

Pak existují báze $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P

$Y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze Q

a) $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, dokázáno v lemmatu

b) $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$

Označme $Z = (\vec{z}_1, \dots \vec{z}_k)$ báze $P \cap Q$

Víme, že podle Steinitzovy věty lze nahradit vektory v bázi X a Y vektory z báze Z a nechť jsou to BÚNO ty poslední

máme tedy $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-k})$ báze P

a máme $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k})$ báze Q

víme, že $P + Q = [\underbrace{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots \vec{x}_{n-k}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k}}_{\text{generátory } P+Q}]$

Ukažme, že $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots \vec{x}_{n-k}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k}$ LN a tedy tvoří bázi $P + Q$

Chceme ukázat, že $\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_k,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-k},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-k}$ LN a tvoří bázi podprostoru $P+Q$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m-k} \gamma_i \vec{y}_i = \vec{o} \text{ a pouze triviální LK dá } \vec{o}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \vec{x}_i}_{\in P \text{ (báze } P)} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{m-k} \gamma_i \vec{y}_i}_{\in Q}$$

vektory z báze y

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{m-k} \gamma_i \vec{y}_i \in P \cap Q = [\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_k]_\lambda$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{m-k} \gamma_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \vec{z}_i \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \xi_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{m-k} \gamma_i \vec{y}_i}_{\text{báze } Q} = \vec{o} \Leftrightarrow$$

dostáváme LK bázických vektorů Q $\Rightarrow$ nutně triviální

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \vec{x}_i \in P \cap Q = [\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_k]_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \delta_i \vec{z}_i \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \delta_i) \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \vec{x}_i}_{\text{báze } P} = \vec{o}$$

dostáváme LK bázických vektorů P $\Rightarrow$ nutně triviální

$\Rightarrow \vec{z}_1,\dots,\vec{z}_k,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-k},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-k}$ jsou LN a tedy tvoří bázi $P+Q$

$$\dim(P+Q) + \dim(P \cap Q) = (n+m-k)+k = n+m$$

$$\dim P + \dim Q = n+m$$

Doplněk podprostoru Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$ takové, že $P \oplus Q = V$

Pak Q nazveme doplňkem P do V. Jeho dimenzi nazveme kodimenzí P, ozn. $\operatorname{codim} P$

Věta Nechť V nad T, $P \subset\subset V$, $\dim V < +\infty$

Potom doplněk P do V existuje.

- $P = V$, pak $\{\vec{o}\}$ je doplněk P do V
- $P = \{\vec{o}\}$, pak V je doplněk P do V
- $P \neq \{\vec{o}\}$, pak $\dim P < \dim V$

Nechť BÚNO $\dim P = m$, $\dim V = n$, $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$

Pak existuje $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V

$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze P

Víme, že soubor LN vektorů lze doplnit na bázi vektorového prostoru s jeho generátorů, nechť jsou to BÚNO $\mathcal{X}$ poslední, tedy

$V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m, \vec{x}_1, \dots \vec{x}_{n-m}]_\lambda$

pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-m}$ je doplněk P do V

$Q := [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-m}]_\lambda$

Jednoznačnost kodimense

$\dim P + \operatorname{codim} P = \dim P + \dim Q = m + (n-m) = n$

$\dim (P+Q) + \dim (P \cap Q) = \dim V + \dim \{\vec{o}\} = n$

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Nechť P, Q vektorové prostory nad číselným tělesem T

Řekneme, že zobrazení $A: P \to Q$ je lineární, pokud

① $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$ Aditivita

② $(\forall \vec{x} \in P)(\forall \alpha \in T)(A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x}))$ Homogenita

- Nechť $A: P \to Q$, nulový vektor se vždy zobrazí na nulový vektor

Dk $\vec{0}_P \in P$, $A(\vec{0}_P) = A(0 \cdot \vec{0}_P) = 0 \cdot A(\vec{0}_P) = \vec{0}_Q$, $\vec{0}_Q \in Q$

Věta Nechť P, Q vektorové prostory nad T, nechť $A: P \to Q$

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

① A je lineární

② $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \alpha \in T)(A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$

③ $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P)(A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(\vec{x}_i))$

Dk Ukážeme, že ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ① a tím bude jasné, že jsou výroky ekvivalentní

① $\Rightarrow$ ② Z definice ① víme, že $A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = A(\alpha\vec{x}) + A(\vec{y})$

a definice ② víme, že $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$

celkově tedy $A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y})$

② ⇒ ③ Předpokládáme, že po nějaké n platí $A\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i A(\vec{x}_i)$ a ukážeme že platí i po $n+1$

Víme dotiž $A(\vec{O}_P) = O_Q$: $A(-\vec{x}+\vec{x}) = \vec{O}_Q$

$$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} d_i\vec{x}_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\vec{x}_i + d_{n+1}\vec{x}_{n+1}\right) \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} A\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\vec{x}_i\right) + A(d_{n+1}\vec{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} d_i A(\vec{x}_i) + d_{n+1}A(\vec{x}_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} d_i\vec{y}_i$$

③ ⇒ ①

① Zvolíme $n=2$, $d_1 = 1 = d_2$, $\vec{x}_1 = \vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{y}$

pak $A\left(\sum_{i=1}^{2} d_i\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} d_i A(\vec{x}_i) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$

② zvolíme $n=1$, $d_1 = d$, $\vec{x}_1 = \vec{x}$

pak $A\left(\sum_{i=1}^{1} d_i\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{1} d A(\vec{x}_i) = d\,A(\vec{x})$

Množinu všech LZ $P \to Q$ označíme $\mathcal{L}(P,Q)$

Def Nechť P, Q vekt. prostory nad T.

Pak definujeme 2 operace na $\mathcal{L}(P,Q)$

① $(\forall A,B \in \mathcal{L}(P,Q))(\forall \vec{x} \in P)((A+B)(\vec{x}) = A\vec{x} + B\vec{x})$

② $(\forall A \in \mathcal{L}(P,Q))(\forall \vec{x} \in P)(\forall d \in T)((Ad)(\vec{x}) = d A\vec{x})$

Věta Nechť P, Q vekt. prostory nad T

Pak $\mathcal{L}(P,Q)$ tvoří vekt. prostor.

Dk ① $(\forall A, B \in \mathcal{L}(P,Q))((A+B) \in \mathcal{L}(P,Q))$

- Chceme ukázat, že $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \alpha \in T)((A+B)(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(A+B)\vec{x} + (A+B)\vec{y})$

Z definice: $(A+B)(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) + B(\alpha\vec{x}+\vec{y}) =$

$= A(\alpha\vec{x}) + A\vec{y} + B(\alpha\vec{x}) + B\vec{y} =$

$= \alpha A\vec{x} + A\vec{y} + \alpha B\vec{x} + B\vec{y} =$

$= \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) + A\vec{y} + B\vec{y} =$

$= \alpha(A+B)\vec{x} + (A+B)\vec{y}$

② $(\forall A \in \mathcal{L}(P,Q))(\forall \alpha \in T)(\alpha A \in \mathcal{L}(P,Q))$

- Chceme ukázat, že $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\forall \beta \in T)((\alpha A)(\beta\vec{x}+\vec{y}) = \beta(\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y})$

Z definice: $(\alpha A)\vec{x} = \alpha \cdot A\vec{x}$

$: (\alpha A)(\beta\vec{x}+\vec{y}) = \alpha \cdot A(\beta\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\beta A\vec{x} + \alpha A\vec{y} =$

$= \beta(\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y}$

Def • nulové zobrazení $\Theta: P \to Q$, tož že $(\forall \vec{x} \in P)(\Theta\vec{x} = \vec{O}_Q)$

linearita Θ: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(\Theta(\vec{x}+\vec{y}) = \Theta\vec{x} + \Theta\vec{y})$

$(\forall \vec{x} \in P)(\forall \alpha \in T)(\Theta(\alpha\vec{x}) = \alpha\Theta\vec{x})$

$\Theta(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \vec{O}_Q = \alpha \cdot \vec{O}_Q + \vec{O}_Q = \alpha\Theta\vec{x} + \Theta\vec{y}$

$\Rightarrow$ Neprázdná množina

Axiomy

① $(\forall A, B \in \mathcal{L}(P,Q))(A+B = B+A)$

$(\forall \vec{x} \in P)((A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = B\vec{x} + A\vec{x} = (B+A)\vec{x})$

② $(\forall A, B, C \in \mathcal{L}(P,Q))(A+(B+C) = (A+B)+C)$

$(\forall \vec{x} \in P)((A+(B+C))\vec{x} = A\vec{x} + (B+C)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} + C\vec{x} = (A+B)\vec{x} + C\vec{x} =$

$= (A+(B+C))\vec{x}$

③ $(\exists B \in \mathcal{L}(P,Q))(\forall A \in \mathcal{L}(P,Q))(A+B = A)$

zvolíme: $B = \Theta$

$(\forall \vec{x} \in P)((A+\Theta)\vec{x} = A\vec{x} + \Theta\vec{x} = A\vec{x} + \vec{0}_Q = A\vec{x})$

④ $(\forall A \in \mathcal{L}(P,Q))(\exists B \in \mathcal{L}(P,Q))(A+B = \Theta)$

Víme, že $(-1)A \in \mathcal{L}(P,Q)$ tedy:

$(\forall x \in P)((A-A)\vec{x}) = A\vec{x} - A\vec{x} = A(\vec{x}-\vec{x}) = A\vec{0}_P = \Theta\vec{x}$

Def • Je-li $A \in \mathcal{L}(P,P)$ nazveme A lineárním operátorem
• Je-li $A \in \mathcal{L}(P,T)$ nazveme A lineárním funkcionálem (forma)

Def Nechť P, Q vektorové prostory nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$
• Je-li A prosté, pak řekneme, že A je monomorfní
• Je-li A na Q, pak řekneme, že A je epimorfní
• Je-li A bijektivní, pak řekneme, že A je izomorfní
• Je-li A izomorfní a $P = Q$, nazveme A regulárním operátorem

Věta Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, je-li A izomorfní, pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(P,Q)$

Dk $A: P \to Q$ izomorfní $\Rightarrow$ A bijektivní $\Rightarrow \exists A^{-1}, A^{-1}: Q \to P$

$(\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q)(\forall \alpha \in T)(A^{-1}(\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2)$

Pak existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, že $\vec{x}_1 = A^{-1}\vec{y}_1$, $\vec{x}_2 = A^{-1}\vec{y}_2$

$\Leftrightarrow \vec{y}_1 = A\vec{x}_1, \vec{y}_2 = A\vec{x}_2$

$\Rightarrow \alpha\vec{y}_1 + y_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$

z definice inverzního zobrazení

$\Rightarrow A^{-1}(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1} y_2$

Věta Nechť P, Q, R ~~vekt~~ vekt. prostory nad T

$B \in \mathcal{L}(P,Q)$, $A \in (Q,R)$

Potom $(AB) \in \mathcal{L}(P,R)$

Dk $(\forall \vec{x},\vec{y} \in P)((AB)(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(AB)\vec{x} + (AB)\vec{y})$

Z definice složeného zobrazení: $(AB)(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = A(B(\alpha\vec{x}+\vec{y})) =$

$= A(\alpha B\vec{x} + B\vec{y}) = A(\alpha B\vec{x}) + A(B\vec{y}) = \alpha(AB)\vec{x} + (AB)\vec{y}$

Definice P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$

$M \subseteq P$, $N \subseteq Q$

Obraz množiny M při zobrazení A

$A(M) = \{A\vec{x} \in Q \mid \vec{x} \in M\}$

Vzor množiny N při zobrazení A

$A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$

Věta P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $M \subset\subset P$, $N \subset\subset Q$

Potom $A(M) \subset\subset Q$, $A^{-1}(N) \subset\subset P$

Dk $A(M) \subset\subset Q$

① $A(M) \subset Q$

② $A(M) \neq \emptyset$ $\Big\}$ $\{\vec{0}\} \in Q$, neboť $M \subset\subset P$

③ $(\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in A(M))(\forall \alpha \in T)(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in A(M))$

$(\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2)(A\vec{x}_1 = \vec{y}_1 \wedge A\vec{x}_2 = \vec{y}_2)$
$\in M \subset\subset P$

$\to \alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in A(M)$
$\in M \subset\subset P$

Dk $A^{-1}(N) \subset\subset P$

① $A^{-1}(N) \subset P$, pooož $N \subset\subset P$, vzor sedy existuje

② $A^{-1}(N) \neq \emptyset$, nebot $\vec{o} \in A^{-1}(N)$

③ $(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(N))(\forall \alpha \in T)(\alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N))$

$\Downarrow$

$(\exists \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in N)(A^{-1}(\vec{y}_1) = \vec{x}_1 \wedge A^{-1}(\vec{y}_2) = \vec{x}_2) \Rightarrow \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha A^{-1}(\vec{y}_1) + A^{-1}(\vec{y}_2) =$

$= A^{-1}(\underbrace{\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2}_{\in N \subset\subset Q}) = \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$

Def P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

- hodnost A, ozn. $h(A)$, nazveme $\dim A(P)$
- jádrem A, ozn. $\ker A$

$\ker A = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{o}_Q\} = A^{-1}(\vec{o}_Q)$

- defektem A, ozn. $d A$ nazveme $\dim \ker A$

Věta Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P$

$A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$

Dk $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \Rightarrow A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(\vec{x}_i)$

$\Leftrightarrow A\vec{x} \in [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$

Důsledek Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a nechť $S \subset P$

Potom platí $\dim A(S) \leq \dim S$

Speciální případ: $\dim A(P) \leq \dim P \Leftrightarrow h(A) \leq \dim P$

Dk
① $S = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim A(\{\vec{0}\}) \leq \dim \{\vec{0}\}$, triviálně pravda $0 \leq 0$

② $\dim S = +\infty$ jež triviálně $\dim A(S) \leq +\infty$

③ $\dim S = n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ existuje $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze S

Pak $A(S) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$

$\Rightarrow \dim A(S) = \dim [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda \leq n = \dim S$

Věta P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$

A je monomorfní $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{0}\}$

Z mat. analýzy víme: A je prosté $\Leftrightarrow (\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y})$

Dk A je monomorfní $\Leftrightarrow A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\Leftrightarrow A\vec{x} - A\vec{y} = \vec{0}_Q \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_Q \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_P \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{0}_P\}$ ∎

Věta Nech' P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $S \subset\subset P$

Nech' ďalej A monomorfné, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN vektory z P

Potom ① $A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n$ LN

② $\dim A(S) = \dim S$

Dk ① Nech' $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{o}_Q$

$\Leftrightarrow A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \vec{o}_Q$, A je monomorfné $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{o}\}$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \in \ker A \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{o}_P$, $\alpha_i = 0, \forall i \in \hat{n}$, nebol'

$\vec{x}_i$ LN, $\forall i \in \hat{n}$

② a) $S = \{\vec{o}\} \Rightarrow A(S) = \{\vec{o}\}$ triviálne platí

b) $\dim S = +\infty$, podľa definície teda v S existuje pre každé n n LN vektorov, a pretože A monomorfné, tak ich je LN i v $A(S)$ $\Rightarrow \dim A(S) = +\infty$

c) $\dim S = n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ existuje báza $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

teda $S = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$

$A(S) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$, pretože A monomorfné, tak

$A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n$ LN $\Rightarrow \dim A(S) = n = \dim S$

Špeciálne $S = P$: $h(A) = P$

Důsledek Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$

Je-li A izomorfní pak $\dim P = h(A) = \dim Q$

Dk A izomorfní $\Leftrightarrow$ A monomorfní $\wedge$ A epimorfní

A epimorfní $\Leftrightarrow h(A) = \dim Q$

navíc A monomorfní $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{o}\} \Rightarrow h(A) = \dim P$

Věta Nechť P, Q, R nad T, $A \in \mathcal{L}(Q,R)$, $B \in \mathcal{L}(P,Q)$

Pak ① $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$

② je-li B epimorfní pak $h(AB) = h(A)$

③ je-li A monomorfní pak $h(AB) = h(B)$

Dk ① $h(AB) = \dim (AB)(P) = \dim A(B(P)) \leq \dim A(Q) = h(A)$,

je-li B epimorfní $\Leftrightarrow h(B) = \dim Q$, tak je jasné, že $h(AB) = h(A)$

② $h(AB) = \dim A(B(P)) \leq \dim B(P) = h(B)$

je-li A monomorfní $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{o}\}$ je jasné, že $h(AB) = h(B)$

Věta Nechť P, Q nad T, $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P, $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \in Q$

Potom existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že $(\forall i \in \hat{n})(A\vec{x}_i = \vec{y}_i)$

Dk Ukážeme, že takové zobrazení existuje

Mějme $\vec{x} \in P \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

pak $A\vec{x} = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i$

pro lib. vektor z P jsme našli obraz pomocí obrazu bazických vektorů

Ukážeme dále, že A je lineární

$(\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in P)(\forall \alpha \in T)(A(\alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \alpha A\vec{r}_1 + A\vec{r}_2)$

$\vec{r}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, $\vec{r}_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$

$\Rightarrow \alpha\vec{r}_1 = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{x}_i$

$\Rightarrow \alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i)\vec{x}_i$

$\Rightarrow A(\alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta_i)\vec{y}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{y}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{y}_i =$

$= \alpha A\vec{r}_1 + A\vec{r}_2$

Nyní ukážeme jednoznačnost takového zobrazení A

Uvažujme zobrazení $B \in \mathcal{L}(P, Q)$, $B \neq A$ takové, že $(\forall i \in \hat{n})(B\vec{x}_i = \vec{y}_i)$

$$\vec{x} \in P \iff \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \implies B\vec{x} = B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i \overset{\text{DEF}}{=} A\vec{x}$$

$\implies A = B$, SPOR

Definice Nechť P prostor všech polynomů

$$p(t) \in P \iff p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$$

$$D : P \to P \text{ a } S : P \to P$$

$$(\forall t \in \mathbb{C})((Dp)(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \dots + n \cdot \alpha_n \cdot t^{n-1})$$

$$(\forall t \in \mathbb{C})((Sp)(t) = \alpha_0 t + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 + \dots + \frac{1}{n+1}\alpha_n \cdot t^{n+1})$$

$$D, S \in \mathcal{L}(P, P)$$

Věta P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\vec{b} \in A(P)$

Potom množina všech řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$

kde $\vec{a}$ je tzv. partikulární řešení, $A\vec{a} = \vec{b}$

Dk $\vec{x} \in A^{-1}(\vec{b}) \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A\vec{x} = A\vec{a}$

$A\vec{x} - A\vec{a} = \vec{o}_Q$

$A(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{o}_Q$

$\vec{x} - \vec{a} \in \ker A \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{a} + \ker A$

Druhá věta o dimenzi

Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\dim P < +\infty$

Pak $h(A) + d(A) = \dim P$

Dk ① $h(A) = 0 \Leftrightarrow A(P) = \{\vec{o}\} \Leftrightarrow \ker A = P \Leftrightarrow d(A) = \dim \ker A = \dim P$

② $h(A) \neq 0$, víme, že $h(A) \leq \dim P$

~~[illegible]~~

nechť $h(A) = n, n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ existuje $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze $A(P)$

Pak existují vektory $\vec{y}_1, \ldots \vec{y}_n$ takové, že $A\vec{y}_i = \vec{x}_i$, $\forall i \in \hat{n}$ (z definice)

$\tilde{P} := [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda$, ~~dim~~

$\dim \tilde{P} \leq n$

$n = \dim A(P) = \dim A(\tilde{P}) \leq \dim \tilde{P}$

$\Rightarrow \dim \tilde{P} = n$

Ukážeme, že $P = \tilde{P} \oplus \ker A$

Dk Chceme, aby $(\forall \vec{x} \in P)(\exists! \vec{r} \in \tilde{P} \wedge \exists! \vec{q} \in \ker A)(\vec{x} = \vec{r} + \vec{q})$

$A\vec{x} \in A(\tilde{P}) \Rightarrow A\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} d_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{m} d_i A\vec{y}_i$

zvolíme $\vec{r} = \sum_{i=1}^{m} d_i \vec{y}_i$ a $\vec{q} = \vec{x} - \vec{r}$

zbývá ověřit, že $\vec{q} \in \ker A$

$A\vec{q} = A(\vec{x} - \vec{r}) = A\left(\vec{x} - \sum_{i=1}^{m} d_i \vec{y}_i\right) = A\vec{x} - A\sum_{i=1}^{m} d_i \vec{y}_i = A\vec{x} - \sum_{i=1}^{m} d_i A\vec{y}_i = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{o}_Q$

$\Rightarrow \vec{q} \in \ker A$

Nyní ukážeme direktnost součtu

Chceme ukázat, že $\tilde{P} \cap \ker A = \{\vec{o}_P\}$

$\vec{x} \in \tilde{P} \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{m} d_i \vec{y}_i$, je-li současně $\vec{x} \in \ker A$, pak

$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} d_i A\vec{y}_i = \vec{o}_Q$

$\sum_{i=1}^{m} d_i \vec{x}_i = \vec{o}_Q$, víme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ je báze $A(\tilde{P})$, proto musí

$(\forall i \in \hat{n})(d_i = 0)$, $\vec{x}$ je proto nulový vektor

Proto tedy $\dim P = ~~d~~(A) + d(A)$

Izomorfismus

Def Řekneme, že vektorové prostory P, Q nad T jsou izomorfní, ozn. $P \cong Q$, pokud existuje izomorfní zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

Věta Nechť P, Q nad T, alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi

Potom $P \cong Q \Leftrightarrow \dim P = \dim Q$

Dk Ukážeme obě implikace

$\Rightarrow$: Z definice: existuje izomorfní zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

A izomorfní $\Leftrightarrow h(A) = \dim A(P) = \dim Q$
$\wedge\, d(A) = 0 \Leftrightarrow \ker A = \{\vec{o}\}$

$\dim P = h(A) + d(A) = \dim Q$

$\Leftarrow$: ① $\dim P = \dim Q = 0 \Leftrightarrow P = Q = \{\vec{o}\}$, libovolné zobrazení je izomorfní

② $\dim P = \dim Q = n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ existují báze $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P
$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q

Definujeme zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$: $(\forall i \in \hat{n})(A\vec{x}_i = \vec{y}_i)$

(I) A je monomorfní $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{o}\}$

$\vec{x} \in P \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ a současně $\vec{x} \in \ker A$

$\Rightarrow A\vec{x} = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \vec{o}_Q \Leftrightarrow \vec{o}_Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i$, nutně triviální!
$(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$

(II) A je epimorfní $\Leftrightarrow h(A) = \dim Q$

$\Leftrightarrow A(P) = Q$

$P = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \Rightarrow A(P) = A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [\vec{y}_1, \dots \vec{y}_n]_\lambda$

$\Rightarrow$ A je izomorfní $\Rightarrow P \cong Q$

Věta Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P, Q)$

$\dim P = \dim Q < +\infty$

A je izomorfní $\Leftrightarrow$ A je monomorfní $\vee$ A je epimorfní

Dk Ukážeme opět obě implikace

$\Rightarrow$: zřejmé

$\Leftarrow$: Ukážeme, že z monomorfnosti plyne epimorfnost a naopak

- A je monomorfní $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow d(A) = 0$

  $\dim P = h(A) + d(A) = \dim Q$

  $\dim P = \underline{h(A) = \dim Q}$,

  A je epimorfní

- A je ~~e~~epimorfní $\Leftrightarrow h(A) = \dim Q$

  $\dim P = h(A) + d(A) = \dim Q$

  $\Rightarrow d(A) = 0 \Leftrightarrow \ker A = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$ A je monomorfní

Věta P, Q, R ~~[illegible]~~ cc V nad T

Pakud $P \oplus Q = P \oplus R$ potom $Q \cong R$

Dk $A: Q \to R$

definujme: $A\vec{q} = \vec{r}$, kde $\vec{q} = \vec{p} + \vec{r}$, $\vec{q} \in Q, \vec{p} \in P, \vec{r} \in R$

Díky direktnosti součtu opravdu A je zobrazení

<u>Linearita A</u>

$(\forall \vec{x}, \vec{y} \in Q)(\forall \alpha \in T)(A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y})$

víme, že $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \Rightarrow A\vec{x} = \vec{r}_1$

$\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \Rightarrow A\vec{y} = \vec{r}_2$

$\alpha\vec{x} + \vec{y} = \alpha(\vec{p}_1 + \vec{r}_1) + \vec{p}_2 + \vec{r}_2 = \alpha\vec{p}_1 + \alpha\vec{r}_1 + \vec{p}_2 + \vec{r}_2 = \underbrace{\alpha\vec{p}_1 + \vec{p}_2}_{\in P} + \underbrace{\alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2}_{\in R}$

$A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$

Monomorfnost

$\vec{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{o}_R \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{p} + \vec{o}_R \Rightarrow \vec{x} \in P \wedge \vec{x} \in Q$

$P \cap Q = \{\vec{o}\}$ neboť $P \oplus Q$

Epimorfnost

$(\forall \vec{r} \in R)(\exists \vec{q} \in Q)(A\vec{q} = \vec{r})$

víme $P \oplus Q = P \oplus R \Rightarrow \exists! \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$, $p \in P, q \in Q$

zvolíme $\vec{q} = -p + \vec{r}$

~~[illegible]~~

Def Nechť V je vekt. prostor nad T, P, Q cč V,

tak, že $P \oplus Q = V$

Potom Q nazveme doplňkem P do V a jeho dimenzi kodimenzí P

$$\operatorname{codim} P = \dim Q$$

(I) Pro $\dim V < +\infty$: $\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) + \dim(P \cap Q)$

$$\dim Q = \dim V - \dim P$$

$$\operatorname{codim} P = \dim V - \dim P$$

(II) **Věta** Nechť P, Q nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $h(A) < +\infty$

Potom platí $h(A) = \operatorname{codim} \ker A$

Dk ① $h(A) = 0 \Leftrightarrow \ker A = P$, $\operatorname{codim} \ker A = \{\vec{o}\}$, $A = \Theta$

② $h(A) = n$, $n \in \mathbb{N}$

Víme, že $\dim P = h(A) + d(A) = \operatorname{codim} \ker A + \dim \ker A$

Projektor

Def Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$, $P \oplus Q = V$

Definujeme zobrazení $A_P : V \to P$

$(\forall \vec{x} \in V)(A_P \vec{x} = \vec{p})$, kde $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$, $p \in P, q \in Q$

Zobrazení A_P nazveme projektorem na P podle Q

Věta Nechť V nad T, $P, Q \subset\subset V$, $P \oplus Q = V$

Pak ① $A_P \in \mathcal{L}(V, P)$

② $A_P \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \in P$

③ $A_P \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in Q$

④ A_P je na P (P - surjektivní)

⑤ $\ker A_P = Q$

Dk

① $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)(\forall \alpha \in T)(A_P(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A_P \vec{x} + A_P \vec{y})$

$\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 \Rightarrow A_P \vec{x} = \vec{p}_1$

$\vec{y} = \vec{p}_2 + \vec{q}_2 \Rightarrow A_P \vec{y} = \vec{p}_2$

$\alpha \vec{x} + \vec{y} = \alpha(\vec{p}_1 + \vec{q}_1) + (\vec{p}_2 + \vec{q}_2) = \alpha \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \alpha \vec{q}_1 + \vec{q}_2$

$A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \alpha A_P \vec{x} + A_P \vec{y}$

② $A_P \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{p} + \vec{0}_Q \Leftrightarrow \vec{x} \in P$

③ $A_P \vec{x} = \vec{0}_P \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}_P + \vec{q} \Leftrightarrow \vec{x} \in Q$

④ A_P je na $P \iff h(A_P) = P$

⑤ $\ker A_P = Q \iff \dim V = h(A) + d(A) \Rightarrow d(A) = \dim Q$

$\boxed{\text{Duální báze}}$ Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V nad T

Potom $\mathcal{X}^{\#} := (x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#})$ je báze duálního prostoru $V^{\#}$ a pro každé $\varphi \in V^{\#}$ platí

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}, \quad V^{\#} = \mathcal{L}(V,T)$$

Dk Ukážeme, že $\mathcal{X}^{\#}$ je báze, tj. $x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}$ LN

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\#} = \theta$$

tj. $(\forall \vec{x} \in V)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\#}\right)\vec{x} = \theta\vec{x} = 0\right)$

Postupně dosazujeme $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ místo $\vec{x}$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\#}(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$$

LK je triviální $\Rightarrow x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}$ LN

Nyní ukážeme, že $x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}$ generují $V^{\#}$

Nechť $\varphi \in V^{\#}$, $\vec{x} \in V$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{x}_i) \circledast \quad \alpha_i = x_i^{\#}(\vec{x})$$

$$\circledast = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{x}_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(\vec{x}_i) x_i^{\#}\right)(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\vec{x}_i) \cdot x_i^{\#} \Rightarrow (\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}]_{\lambda}$$

Matice a lineární zobrazení

Def Nechť T je číselné těleso. Nechť $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$ pak součinem matice A a matice B nazveme matici typu $m \times p$, značíme ji AB nebo $A \cdot B$, definovanou

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \text{ pro každé } i \in \hat{m}, j \in \hat{p}$$

Věta Nechť T je těleso. Násobení matic má následující vlastnosti

1. Je asociativní. Tj. pro $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$, $C \in T^{p,s}$ platí
$$A(BC) = (AB)C$$
2. Je distributivní. Tj. pro $A \in T^{m,n}$, $B, C \in T^{n,p}$ platí
$$A(B+C) = AB + AC$$
3. Není obecně komutativní, ani když násobíme čtvercové matice, tj. existují čtvercové matice A a B s prvky z T takové, že
$$AB \neq BA$$
4. Je-li A typu $n \times n$ (nazýváme ji čtvercovou maticí řádu n) a je-li $\mathbb{I}$ jednotková matice, tj. $\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \hat{n}$ potom
$$A\mathbb{I} = A = \mathbb{I}A$$

Dk ① Víme, že $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$

a) $(AB)C$ $\quad [(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kl}C_{lj}$

b) $A(BC) \cdot [A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\sum_{l=1}^{p} B_{kl}C_{lj} =$

$= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kl}C_{lj}$

②

a) $A(B+C) \cdot [A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}$

b) $AB + AC$ $\quad [AB+AC]_{ij} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}C_{kj} =$

$= \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}$

③ Nechť $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ Nechť $A \in T^{m,n}$, $I \in T^{n,n}$ $[I]_{ij} = \delta_{ij}$

a) $[AI]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}I_{kj} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$

analogicky IA ...

Pozn. Mějme SLAR

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Tak tuto soustavu lze zapsat jako $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť P_n, Q_m nad T, $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P_n

$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze Q_m

Matici zobrazení v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značíme ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$

$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} := y_i^{\#}(A\vec{x}_j)$

$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$ nebo ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}\ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} \dots (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}\right)$

Věta Nechť P_m, Q_n nad T

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ báze P_m

$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q_n

Pak ① $(\forall A, B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n))\left({}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}\right)$

② $(\forall A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n))(\forall \alpha \in T)\left({}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)$

Dk

①
$$\left[{}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}}\right]_{ij} = y_i^{\#}((A+B)(\vec{x}_j)) = y_i^{\#}(A\vec{x}_j + B\vec{x}_j) = y_i^{\#}(A\vec{x}_j) + y_i^{\#}(B\vec{x}_j) =$$
$$= \left[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right]_{ij} + \left[{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}\right]_{ij}$$

②
$$\left[{}^{\mathcal{X}}(\alpha A^{\mathcal{Y}})\right]_{ij} = y_i^{\#}((\alpha A)(\vec{x}_j)) = y_i^{\#}(\alpha A\vec{x}_j) = \alpha\, y_i^{\#}(A\vec{x}_j) = \alpha \left[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right]_{ij}$$

Věta Nechť P_m, Q_n nad T, $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ báze P_m

$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ báze Q_n

Pak $(\forall \vec{x} \in P_m)\left((A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \cdot (\vec{x})_{\cancel{\mathcal{Y}}\mathcal{X}}\right)$

Dk $\vec{x} \in P_m \iff \vec{x} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{x}_k$

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \left(A\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{x}_k\right)\right)_{\mathcal{Y}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k A(x_k)\right)_{\mathcal{Y}} \overset{\text{linearita } (\ )_{\mathcal{Y}}}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (Ax_k)_{\mathcal{Y}}$$

$$\underbrace{\left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}\ (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}\ \dots\ (A\vec{x}_m)_{\mathcal{Y}}\right)}_{{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}}_{(\vec{x})_{\mathcal{X}}} = \alpha_1 (A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2 (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \dots + \alpha_m (Ax_m)_{\mathcal{Y}}$$

Věta (Matice složeného zobrazení)

Nechť P_n, Q_m, V_s nad T, Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$,

$\mathcal{X}$ báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_m, $\mathcal{Z}$ báze V_s

Potom platí

$$ {}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} $$

Víme: $(\forall \vec{x} \in P_n)(B\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(x)_{\mathcal{X}}$

Dk
$$ \left[{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}\right]_{\bullet j} = \left((AB)\vec{x}_j\right)_{\mathcal{Z}} = \left(A(B\vec{x}_j)\right)_{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot (B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = $$

$$ = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}(\vec{x}_j)_{\mathcal{X}} = \left[{}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}\,{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}\right]_{\bullet j} $$

Definice

Nechť V nad T, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ báze V, $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$

Pak matici přechodu od báze $\mathcal{X}$ do báze $\mathcal{Y}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}\mathbb{I}^{\mathcal{Y}}$.

$I\vec{x} = \vec{x}$

$(I\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{x})_{\mathcal{Y}}$

${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{x})_{\mathcal{Y}} \Rightarrow \left[{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\right]_{\bullet j} = (\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$, kde $\vec{x}_j$ je j-tý vektor z báze $\mathcal{X}$

Hodnost matice

Nechť $A \in T^{m,n}$, hodnost matice $h(A)$ je definovaná jako

$$\dim [A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{n}]_\lambda = h(A)$$

tedy $h(A)$ je počet LN sloupců matice A

Věta Nechť P_n, Q_m nad T, $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$

$\mathcal{X}$ báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_m

Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$

Dk Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$

$h(A) = \dim A(P_n) = \dim A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = \dim [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$

$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (Ax_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda$

víme, že souřadnicový izomorfismus je monomorfní, a proto ~~~~ zachovává LN vektorů při zobrazení

Regulární a singulární matice

Definice Nechť $A \in T^{m,n}$.

Pak A nazveme regulární, pokud $h(A) = n$,
A nazveme singulární, pokud $h(A) \neq n$.

Tj. A regulární $\Leftrightarrow$ všechny její sloupce jsou LN

Věta Nechť P_n, Q_m nad T, $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$,
$\mathcal{X}$ báze P_n
$\mathcal{Y}$ báze Q_m.

Pak A je izomorfní $\Leftrightarrow$ ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární

Dk A je izomorfní $\Leftrightarrow h(A) = m \Leftrightarrow h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = m \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární

Důsledek Nechť P_n nad T, $A \in \mathcal{L}(P_n)$, $\mathcal{X}$ báze P_n. Pak
A je regulární operátor $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je regulární matice

Frobeniova věta

Nechť $A \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Potom pro soustavu LAR

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

platí ① Soustava má řešení právě tehdy, když $h(A) = h(A|\vec{b})$ ~~tj~~

② Označme $S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$, množinu všech řešení homogenní soustavy, Pak $S_0 \subset\subset T^n$, $\dim S_0 = n - h(A)$

③ Nechť $h(A) = h(A|\vec{b})$. Potom množina všech řešení soustavy
$S = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$

má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde $A\vec{a} = \vec{b}$.
Vektor $\vec{a}$ nazveme partikulárním řešením

Dk ①
Viditelně $h(A|\vec{b}) \geq h(A)$
kdyby $h(A|\vec{b}) > h(A)$ tak by po upravě do horního stupňovitého tvaru (víme, že to je vždy možné) existoval index ~~i~~ $i \in \hat{m}$ takový, že $b_i \neq 0 \wedge$ ~~[illegible]~~ $(\forall j \in \hat{n})([A]_{ij} = 0)$, pak evidentně neexistuje LK dávající b_i

pokud $h(A|\vec{b}) = h(A)$ pak existuje $i \in \hat{m}$, že $b_i \neq 0$ a ~~[illegible]~~ existuje $j \in \hat{n}$ $[A]_{ij} \neq 0$, pak existuje řešení

Frobeniova věta

Dk/ ② Hledáme $\vec{x} \in T^n$, že $A\vec{x} = \vec{o}$, to jest řešení homogenní soustavy.

Nechť $A: T^n \to T^m$ takové, že $A\vec{x} = A\vec{x}$ pro všechna $\vec{x} \in T^n$,

pak pokud platí, že $A\vec{x} = \vec{o}$, tak $A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} \in \ker A$

$$\ker A = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{o}\} = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{o}\} = S_0$$

③ $\dim S_0 = \dim \ker A = \dim T^n - h(A) = n - h(A)$

$A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow A\vec{a} = \vec{b}$

pak tedy platí, že $A\vec{x} = A\vec{a} \Leftrightarrow A\vec{x} - A\vec{a} = A(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{o}$

$\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} \in \ker A$

$\vec{x} \in \vec{a} + \ker A \Leftrightarrow \vec{x} \in \vec{a} + S_0$

$S = \vec{a} + S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$

Věta $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$,

Potom

① $h(AB) \le h(A)$, je-li navíc $m=n$ a A regulární, pak $h(AB) = h(B)$

② $h(AB) \le h(B)$, je-li navíc $n=p$ a B regulární, pak $h(AB) = h(A)$

Dk Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $(\forall \vec{x} \in T^n)(\mathcal{A}\vec{x} = A\vec{x})$

Nechť $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(T^p, T^n)$ takové, že $(\forall \vec{x} \in T^p)(\mathcal{B}\vec{x} = B\vec{x})$

$h(\mathcal{A}) = h(A)$, $h(\mathcal{B}) = h(B)$

$\cancel{h(AB)}$ ${}^{\mathcal{E}_p}(\mathcal{AB})^{\mathcal{E}_m} = {}^{\mathcal{E}_n}\mathcal{A}^{\mathcal{E}_m} \, {}^{\mathcal{E}_p}\mathcal{B}^{\mathcal{E}_n} = AB$ matice složeného zobrazení

$h(AB) \le h(\mathcal{AB}) = \min\{\underbrace{h(\mathcal{A})}_{h(A)}, \underbrace{h(\mathcal{B})}_{h(B)}\}$

$h(AB) \le h(A)$, $h(AB) \le h(B)$

$\mathcal{B}$ je epimorfní $\Leftarrow\Rightarrow h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ je monomorfní $\Leftarrow\Rightarrow h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{B})$

B regulární $\Leftarrow\Rightarrow \mathcal{B}$ izomorfní $\Rightarrow \mathcal{B}$ epimorfní $h(AB) = h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{B}) = h(B)$

A regulární $\Leftarrow\Rightarrow \mathcal{A}$ izomorfní $\Rightarrow \mathcal{A}$ monomorfní $h(AB) = h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{A}) = h(A)$

Hodnost transponované matice

Def Nechť $A \in \mathbb{C}^{m,n}$

- Matice transponovaná k matici A je $A^T \in \mathbb{C}^{n,m}$
  $(\forall i \in \hat{m})(\forall j \in \hat{n})\ [A^T]_{ij} = [A]_{ji}$
- Matice komplexně sdružená k matici A je $\bar{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$
  $(\forall i \in \hat{m})(\forall j \in \hat{n})\ [\bar{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$
- Matice hermitovsky sdružená k matici A je $A^H \in \mathbb{C}^{n,m}$
  $(\forall i \in \hat{m})(\forall j \in \hat{n})\ [A^H]_{ij} = \overline{[A]_{ji}}$

Věta $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $B \in \mathbb{C}^{n,p}$

Pak ① $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$, $(A^T)^T = A$.
$\overline{(\bar{A})} = A$, $(A^H)^H = A$

② $(AB)^T = A^T \cdot B^T$
$\overline{(AB)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
$(AB)^H = A^H \cdot B^H$

Důkaz je triviální

Věta $h(A) = h(A^T)$

Dk **Lemma** $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, pak $h(A^H \cdot A) = h(A)$

Dk $S_A = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

$S_H = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid A^H A\vec{x} = \vec{0}\}$

Ukážeme, že $S_A = S_H$

$S_A \subseteq S_H$: $\vec{x} \in S_A \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^H A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^H\vec{0} = \vec{0} = \vec{0}$

$S_H \subseteq S_A$, $\vec{x} \in S_H \Leftrightarrow A^H A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}^H = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$

$\vec{x}^H A^H A\vec{x} = \vec{0}\vec{x}^H = 0$

$(A\vec{x})^H A\vec{x} = 0$

$A\vec{x} \in \mathbb{C}^m$, $A\vec{x} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$

$(A\vec{x})^H = (\bar{d}_1\ \bar{d}_2 \dots \bar{d}_m)$

$(A\vec{x})^H A\vec{x} = (\bar{d}_1\ \bar{d}_2 \dots \bar{d}_m) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = 0$

$d_1\bar{d}_1 + d_2\bar{d}_2 + \dots + d_m\bar{d}_m = 0$

$|d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_m|^2 = 0$

$\Rightarrow$ z toho už nutně plyne, že $d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0$

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x} \in S_A$

$\Rightarrow S_A = S_H$, Frobenius: $\dim S_A = n - h(A)$

$\dim S_H = n - h(A^H A)$

Lemma Nechť $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, pak $h(A) = h(\bar{A})$

Dk $h(A) \le h(\bar{A})$

- $h(A) = 0$, triviálně platí
- $h(A) = n$, $n \in \mathbb{N}$

$A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, A_{\bullet 3}, \dots, A_{\bullet n}$ LN sloupce A

ukážeme, že i $\bar{A}_{\bullet 1}, \dots, \bar{A}_{\bullet n}$ LN sloupce A

Předpokládejme, že existuje $j \in \hat{n}$ $\alpha_j \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{A}_{\bullet i} = \vec{0} \Rightarrow \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{A}_{\bullet i}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i A_{\bullet i} = \vec{0}$$

netriviální LK LN sloupců dávající $\vec{0}$, SPOR

$h(A) \ge h(\bar{A})$

zvolme $A = \bar{A}$ pak $h(\bar{A}) \ge h(\bar{\bar{A}}) \Leftrightarrow h(\bar{A}) \ge h(A)$

Věta $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, pak $h(A) = h(A^T)$

Dk $h(A) = h(A^H A) \le h(A^H) = h(\bar{A}^T) = h(A^T)$

$h(A^T) = h((A^T)^H A^T) \le h((A^T)^H) = h(\bar{A}) = h(A)$

$\Rightarrow h(A) = h(A^T)$