Inversní matice a inversní operátor

Matice s prvky z číselného tělesa T

Definice

Nechť A je matice, Pokud existuje matice B splňující

$AB = BA = I$

Potom B nazveme inversní k A

Pozn. ① A, B musí být čtvercové stejného řádu

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B}}_{m\times p} \overset{A\cdot B = I}{\Longrightarrow} m = p$$

$$\underbrace{\underset{n\times m}{B} \cdot \underset{m\times n}{A}}_{n\times n} \overset{A\cdot B = I}{\Longrightarrow} m = n$$

② A, B musí být regulární.

Označme řád n

$$n = h(I) = h(A\cdot B) < \begin{matrix} \leq h(A) \\ \leq h(B) \end{matrix}$$

Pokud má matice A k sobě inverse, pak A je regulární

Otázka: Je-li A regulární, existuje k A inversní matice?

Věta Nechť A je regulární matice, ~~[illegible]~~
Pak existuje právě jedna matice k ní inversní

Důkaz ① Existence

Definujme $A: T^n \to T^n : (\forall \vec{x} \in T^n)(A\vec{x} := A\vec{x})$

víme ze ZS: $A \in \mathcal{L}(T^n)$

A je regulární $(h(A) = h({}^{\varepsilon}A) = h(A))$

A je bijektivní zobrazení a tedy existuje A^{-1}

$B := {}^{\varepsilon}(A^{-1})$

$A \cdot B = {}^{\varepsilon}A \cdot {}^{\varepsilon}(A^{-1}) = {}^{\varepsilon}(AA^{-1}) = {}^{\varepsilon}I = I_n$

$B \cdot A = {}^{\varepsilon}(A^{-1}) \cdot {}^{\varepsilon}A = {}^{\varepsilon}(A^{-1}A) = {}^{\varepsilon}I = I_n$

② Jednoznačnost

Nechť X je inversní k A

to znamená $XA = AX = I$

$B = B \cdot I = B(AX) = (BA)X = IX = I$

Důsledek

Nechť A je čtvercová matice.

Pak A je regulární $\Leftrightarrow$ existuje inversní matice k A

Značíme A^{-1}

Věta Vlastnosti inversních matic

Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného řádu

① $A \cdot B = I \Rightarrow A$ je regulární a $B = A^{-1}$.

② $B \cdot A = I \Rightarrow A$ je regulární a $B = A^{-1}$

③ $I^{-1} = I$

Důkaz

Víme, že A^{-1} existuje díky regularitě A

$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$

④ A regulární, pak $(A^{-1})^{-1} = A$

⑤ A regulární, $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, pak $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Důkaz

$(\alpha A)(\frac{1}{\alpha} A^{-1}) = 1 \cdot A \cdot A^{-1} = I$

⑥ A regulární, pak A^T je regulární a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

⑦ A, B regulární, pak AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Důkaz

$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I$

$(A \cdot B)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

⑧ $\vec{b} \in T^n$, A regulární, pak soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ má jediné řešení a to $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Jak hledat inverzní matici?

① Možnost. Z důkazu o existenci $A^{-1} = {}^{\varepsilon}(A^{-1})$

② Možnost. $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I} \iff A(\vec{x}_1\, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n) = (\vec{e}_1\, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$

Řešíme soustavy $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$ po všechna $i \in \hat{n}$

Věta Ekvivalentní řádkové úpravy a násobení matic

Nechť $A \in T^{m,n}$ a nechť $\tilde{A}$ vznikla z A konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav.

Potom $\tilde{A} = M \cdot A$

kde M je matice, která vznikla z $\mathbb{I} \in T^{m,m}$ provedením stejných ekvivalentních řádkových úprav.

Důkaz

Buď A taková, že $(\forall i \in \hat{m}, j \in \hat{n})([A]_{ij} = a_{ij} \in T)$

Nechť $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \alpha a_{14} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{21}+a_{41} & a_{22}+a_{42} & a_{23}+a_{43} & a_{24}+a_{44} & \dots & a_{2n}+a_{4n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Pak } M \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \alpha a_{14} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{21}+a_{41} & a_{22}+a_{42} & a_{23}+a_{43} & a_{24}+a_{44} & \dots & a_{2n}+a_{4n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

To je to co jsme chtěli dostat.

Takto můžeme libovolný počet úprav získat ekvivalentně vynásobením vhodnou maticí.

Věta | Úplná Gaussova eliminace

Nechť $A \in T^{n,n}$ a A regulární. Nechť dále $B \in T^{n,p}$.

Potom platí ① A lze ekvivalentními řádkovými úpravami převést na $\mathbb{I}$

② $(A|B) \sim (\mathbb{I}|X)$, pak $X = A^{-1} \cdot B$

Důkaz

① $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

② $(A|B) \sim (\mathbb{I}|X)$

$\mathbb{I} = M \cdot A \Rightarrow A^{-1} = M$

$X = M \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Důsledky

Nechť $A \in T^{n,n}$ a A regulární

① $A^{-1} \cdot B$

② A^{-1} $\quad B := \mathbb{I}$: $(A|\mathbb{I}) \sim (\mathbb{I}|A^{-1})$

③ $B := \vec{b} \in T^n$: $(A|\vec{b}) \sim (\mathbb{I}|A^{-1}\vec{b})$

④ Nechť $C \in T^{m,n}$, hledáme $C A^{-1}$: $(C A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot C^T = (A^T)^{-1} \cdot C^T$

$(A^T|C^T) \sim (\mathbb{I}|(A^T)^{-1} \cdot C^T)$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbb{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzní matice k horní (dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (dolní) trojúhelníková matice.

Domácí úkol 1.12 a 1.18 do středy 24:00 lubomira.balkova@gmail.cz

Inverzní operátor

$A \in \mathcal{L}(V)$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T
pokud A je regulární $\Rightarrow$ $A^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ a je také regulární $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Věta Levý a pravý $\overset{*}{\text{inverzní}}$ operátor $\qquad$ * inverzní

Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, kde V je vekt. prostor nad T

1. Pokud existuje $B \in \mathcal{L}(V)$, že $AB = I \Rightarrow A$ je epimorfní
2. Pokud existuje $C \in \mathcal{L}(V)$, že $CA = I \Rightarrow A$ je monomorfní
3. Pokud platí 1 a 2, potom A je regulární operátor a $B = C = A^{-1}$

Důkaz

1. Předpokládejme, že $AB = I$ a A není epimorfní.
   Zřejmě ale platí $\dim V = h(I) = h(AB) = h(A(B(V))) \leq h(B(V)) \leq \dim V$
   To může být pravda pouze v případě, že $B(V) = V$ a $h(A(B(V))) = \dim V$
   To je ale spor, že A není epimorfní

2. Předpokládejme, že $CA = I$ a A není monomorfní.
   To znamená, že existuje $\vec{x} \in \ker A$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
   To znamená, že $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow C(A\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \ker C \Leftrightarrow \vec{x} \in \ker I$.
   To už je, ale spor, neboť I je regulární operátor, a proto už nutně $\vec{x} = \vec{0}$.

3. • Z definice plyne, že pokud A je epimorfní a A je monomorfní, tak A je regulární operátor.

   • $B = IB = A^{-1}AB = A^{-1}I = A^{-1}$
   $C = CI = CAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

   a to jsme chtěli dokázat.

Chceme-li ověřit, že $D \in \mathcal{L}(V)$ je inverzní k A, tak ověřujeme, že $DA = AD = I$
Pokud $\dim V < +\infty$, tak existence levého (pravého) inverzního operátoru okamžitě implikuje existenci pravého (levého) -||- operátoru.

Věta Vlastnosti inverzních operátorů
Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, kde V je vekt. prostor nad T
① A regulární, $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, pak $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
② A, B regulární, pak $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
③ A regulární, pak $(A^{-1})^{-1} = A$
④ $\dim V < +\infty$, nechť $\mathcal{X}$ báze, pak ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = ({}^{\mathcal{X}}A)^{-1}$
SAMI: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ báze V ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})^{\mathcal{Y}} = ({}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{X}})^{-1}$?

Permutace a determinanty

Definice
Každou bijekci $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$ nazýváme permutací na $\hat{n}$. Množinu všech permutací na $\hat{n}$ značíme S_n.

Zapisujeme $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Definice
Nechť $\pi \in S_n$, potom (i, j) nazveme inverzí v π, pokud $i, j \in \hat{n}$ takové, že
- $i < j$
- $\pi(i) > \pi(j)$

Počet inverzí v π značíme I_π.
Znaménkem permutace π nazveme číslo $\operatorname{sgn} \pi := (-1)^{I_\pi}$.
Jde o sudou permutaci, pokud $\operatorname{sgn} \pi = 1$.
Jde o lichou permutaci, pokud $\operatorname{sgn} \pi = -1$.

Jak počet inverzí hledat?

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, v úvahu podle první podmínky připadají tyto možnosti
$(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$
$I_\pi = 6$, $\operatorname{sgn} \pi = 1$ poté se podíváme je-li splněn druhý bod.

Definice

Nechť $n \geq 2$ a $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$.
Řekneme, že $\tau_{ij} \in S_n$ je transpozicí čísel i a j, pokud platí

$$\tau_{ij}(k) = k \quad , i \neq k \neq j$$
$$\tau_{ij}(i) = j$$
$$\tau_{ij}(j) = i$$

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Věta Znaménko transpozice

Každá transpozice je lichá

Důkaz

Nechť $n \geq 2$, $i, j \in \hat{n}$ a BÚNO $i < j$.
Z tabulky transpozice je jasné, že inverzí jsou všechny permutace taková ~~že~~

$$(i, i+1) \quad (\cancel{j+1}, j)$$
$$(i, i+2) \quad (i+2, j)$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$(i, j) \quad (j-1, j)$$

Tedy (i, k), kde $i < k < j$ a (k, j), kde $i < k < j$.
To je celkem $2(j-i-1)+1$ a to je liché číslo

Věta Znaménko složené permutace

Nechť $\pi, \rho \in S_n$ pak platí $sgn(\pi \circ \rho) = sgn\,\pi \cdot sgn\,\rho$.

Důkaz

Určeme počet inverzí v $\pi \circ \rho$ v souvislosti na počtu inverzí v π a ρ.
Pro $i, j \in \hat{n}$, že $i < j$ vyjmenujme všechny možnosti, které mohou nastat

a) $\rho(i) > \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j))$
b) $\rho(i) > \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j))$
c) $\rho(i) < \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j))$
d) $\rho(i) < \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j))$

Označme A, B, C počet uspořádaných dvojic (i, j), pro které nastává možnost a), resp. b), resp. c).
Potom $I_{\pi\circ\rho} = A + C$
$I_{\pi} = B + C$
$I_{\rho} = A + B$
a platí $I_{\pi\circ\rho} + 2B = I_{\pi} + I_{\rho}$

a tedy platí $\operatorname{sgn}(\pi\circ\rho) = (-1)^{I_{\pi\circ\rho}} = (-1)^{I_{\pi\circ\rho}+2B} = (-1)^{I_{\pi}+I_{\rho}} = (-1)^{I_{\pi}} \cdot (-1)^{I_{\rho}} =$
$= \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\rho$

Důsledek
Nechť $\pi \in S_n$. Pak $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}$

Důkaz
Jelikož $\pi\circ\pi^{-1} = id$ a identita je sudá permutace, tak z předchozí věty plyne

$$1 = \operatorname{sgn}(\pi\circ\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\pi^{-1} \left\langle \begin{matrix} (-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 \end{matrix} \right\rangle \operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}.$$

Determinant matice

Definice
Nechť $A \in T^{n,n}$
Pak determinantem matice A nazveme číslo

$$\det A := \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \, A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \cdots A_{n\pi(n)}$$

Sčítance v sumě nazýváme členy determinantu

Věta Determinant transponované matice
Nechť $A \in T^{n,n}$.
Pak $\det A^T = \det A$

Důkaz
$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, [A^T]_{1\pi(1)} [A^T]_{2\pi(2)} \dots [A^T]_{n\pi(n)}$, definice determinantu

$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \dots A_{\pi(n)n}$

Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ a $i \in \hat{n}$ platí, že

$A_{\pi(i)i} = A_{j\pi^{-1}(j)}$, kde $j = \pi(i)$

Jelikož π zobrazuje $\hat{n}$ na $\hat{n}$, dostáváme

$A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \dots A_{\pi(n)n} = A_{1\pi^{-1}(1)} A_{2\pi^{-1}(2)} \dots A_{n\pi^{-1}(n)}$

přičemž činitelé v součinech nejsou nutně ve stejném pořadí
Můžeme proto psát

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi^{-1}(1)} A_{2\pi^{-1}(2)} \dots A_{n\pi^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} A_{1\pi^{-1}(1)} A_{2\pi^{-1}(2)} \dots A_{n\pi^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)} = \det A$$

Definice

Nechť $A \in T^{n,n}$.
Matici A nazveme horní trojúhelníkovou maticí, jestliže pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde $i > j$ platí
$[A]_{ij} = 0$.

Matici A nazveme dolní trojúhelníkovou maticí pokud pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i < j$ platí
$[A]_{ij} = 0$

Věta Determinant trojúhelníkových matic
Nechť $A \in T^{n,n}$ a A je horní nebo dolní trojúhelníková matice.

Pak $\det A = A_{11} A_{22} A_{33} \dots A_{nn}$

Důkaz
Dokažme tvrzení pro horní trojúhelníkovou matici.
Podíváme se jak musí vypadat permutace π na $\hat{n}$, aby jí odpovídající člen determinantu
$\operatorname{sgn} \pi \; A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \dots A_{n\pi(n)}$ nebyl nutně nulový.

Zcela jistě $\pi(n) = n$, neboť jakákoliv jiná permutace, kdy $\pi(n) = j < n$ by dala nulu.

Také $\pi(n-1) = n-1$. Kdyby $\pi(n-1) = j < n-1$, tak by permutace byla nulová (součin).
Kdyby $\pi(n-1) = n$, tak by π nebyla permutace

Analogickým úvahami zjistíme, že $\pi = id$.
Všem ostatním permutacím odpovídá nulový člen.

Proto nutně $\det A = A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$

Věta Řádkové a sloupcové úpravy determinantů
Nechť $A \in T^{n,n}$
Pak platí ① Vznikne-li B vynásobením některého řádku (sloupce) matice A číslem $\alpha \in T$,
pak $\det B = \alpha \cdot \det A$

② Je-li některý ~~sloupec~~ řádek (sloupec) A nulový,
pak $\det A = 0$

③ Vznikne-li B z A prohozením dvou řádků (sloupců), potom $\det B = -\det A$

④ Má-li A dva řádky (sloupce) stejné,
pak $\det A = 0$

⑤ Označme $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1}\ \vec{p}\ \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$
$B = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1}\ \vec{q}\ \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$
Pak $\det A + \det B = \det(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} (\vec{p} + \vec{q}) \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$

⑥ Přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice A libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.

Důkaz
Ukážeme tvrzení pro řádkovou variantu, pro sloupce tvrzení plyne z věty o determinantu transponované matice
Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem $\alpha \in T$
① $\det B = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, B_{1\pi(1)} B_{2\pi(2)} \dots B_{n\pi(n)} =$

$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, A_{1\pi(1)} \dots (\alpha A_{i\pi(i)}) \dots A_{n\pi(n)} =$

$= \alpha \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, A_{1\pi(1)} \dots A_{i\pi(i)} \dots A_{n\pi(n)} =$

$= \alpha \det A$

② Má-li A i-tý řádek nulový řádek nulový, pak pro každou permutaci π na $\hat{n}$ je
$A_{i\pi(i)} = 0$ a tedy $\det A = 0$.
(Plyne ~~zase~~ z předchozí věty)

③ Nechť B vznikne z A záměnou i-tého a j-tého řádku potom platí

$$\det B = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, B_{1\pi(1)} \cdots B_{i\pi(i)} \cdots B_{j\pi(j)} \cdots B_{n\pi(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi(1)} \cdots A_{j\pi(i)} \cdots A_{i\pi(j)} \cdots A_{n\pi(n)} =$$

$$= -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi \circ \tau_{ij}) A_{1(\pi\circ\tau_{ij})(1)} \cdots A_{i(\pi\circ\tau_{ij})(i)} \cdots A_{j(\pi\circ\tau_{ij})(j)} \cdots A_{n \ldots}$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{1\sigma(1)} \cdots A_{i\sigma(i)} \cdots A_{j\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)} =$$

$$= -\det A$$

④ Má-li A stejný i-tý a j-tý sloupec, pak podle předchozí věty (bodu) jejich záměnou dostaneme $\det A = -\det A$. ~~tj~~
To lze splnit jen pokud $\det A = 0$.

⑤ Označme $\vec{p}^T = (p_1\ p_2 \ldots p_n)$ i-tý řádek A^T a $q^T (q_1\ q_2 \ldots q_n)$ ~~j~~-tý řádek B^T
Jako X označme matici, která má v i-tém řádku $(\vec{p} + \vec{q})^T$

Pak $\det X = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, X_{1\pi(1)} \cdots X_{i\pi(i)} \cdots X_{n\pi(n)} =$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi(1)} \cdots (p_{\pi(i)} + q_{\pi(i)}) \cdots A_{n\pi(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi(1)} \cdots p_{\pi(i)} \cdots A_{n\pi(n)} +$$

$$+ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi(1)} \cdots q_{\pi(i)} \cdots A_{n\pi(n)} = \det A + \det B$$

⑥ Tvrzení plyne z pátého, prvního a čtvrtého bodu

Definice

Nechť V nad T, pak zobrazení $w : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to T$ nazveme

- n-lineární formou na V, pokud pro každé $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{z}, \vec{y} \in V$, $\alpha \in T$ a každé $i \in \hat{n}$ platí

$$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \alpha z + y, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) = \alpha\, w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots \vec{x}_n) + w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, y, \vec{x}_{i+1}, \ldots \vec{x}_n)$$

- antisymetrickou formou na V, pokud pro každé $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$ platí

$$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n)$$

Důsledek

Vnímáme-li determinant jako funkci sloupců matice, tj. jako $\det \underbrace{T^n \times \ldots \times T^n}_{n} \to T$, pak je determinant n-lineární antisymetrickou formou.

Důkaz

Antisymetrie je důsledkem třetího bodu předchozí věty. n-linearita je důsledkem prvního a páté věty.

Domácí úkol 2.23

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|, \quad V = \left| \det (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \right|$$

středa 7. 2. 24:00

Determinant součinu matic

$\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$

Lemma

Nechť $\mathbb{M}$ vznikla z $\mathbb{I} \in T^{n,n}$ konečným počtem E.Ř.Ú.
nechť $\mathbb{B} \in T^{n,n}$.
Potom $\det(\mathbb{M}\mathbb{B}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{B}$

Důkaz

① Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}$ vynásobením řádku nenulovým číslem $\alpha \in T$, pak $\mathbb{M}\mathbb{B}$ odpovídá stejné úpravě v matici $\mathbb{B}$ a tedy platí

$\det(\mathbb{M}\mathbb{B}) = \underbrace{\det \mathbb{M}}_{\alpha} \cdot \det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{B}$

② Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}$ přičtením násobku jiného řádku, pak $\mathbb{M}\mathbb{B}$ odpovídá stejné úpravě v matici $\mathbb{B}$.
Pak platí $\det(\mathbb{M}\mathbb{B}) = \underbrace{\det \mathbb{M}}_{1} \cdot \det \mathbb{B} = \det \mathbb{B}$

③ Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}$ prohozením dvou řádků, pak opět $\det(\mathbb{M}\mathbb{B}) = \underbrace{\det \mathbb{M}}_{-1} \cdot \det \mathbb{B} = -\det \mathbb{B}$

Věta

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a nechť $\mathbb{M}$ vznikla z $\mathbb{I} \in T^{n,n}$ konečným počtem E.Ř.Ú.
Pak $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \cdot \det \mathbb{B}$

Důkaz

Nechť $\mathbb{M}_i$ je matice, která vznikla z $\mathbb{I}$ provedením i-té E.Ř.Ú. Pak podle lemmatu platí
~~det~~ $\mathbb{M} = \mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_{k-1} \cdots \mathbb{M}_2 \mathbb{M}_1 \mathbb{I}$ a podle předchozího lemmatu platí $\det(\mathbb{M}_k(\mathbb{M}_{k-1} \cdots \mathbb{M}_1 \mathbb{I})) = \det \mathbb{M}_k \det(\mathbb{M}_{k-1}(\mathbb{M}_{k-2} \cdots \mathbb{I})) =$
$= \ldots = \det \mathbb{M}_k \cdot \det \mathbb{M}_{k-1} \cdots \det \mathbb{M}_1 \det \mathbb{I}$

Pak pak platí $MA = M_k M_{k-1} \dots M_1 A$ tak
$\det(MA) = \det(M_k) \det(M_{k-1}(M_{k-2} \dots M_1 A)) = \dots =$
$= \det M_k \cdot \det M_{k-1} \dots \det M_1 \cdot \det A = \det M \cdot \det A$

Věta
Nechť $A, B \in T^{n,n}$.
Potom A je regulární $\iff \det A \neq 0$

Důkaz
$\Rightarrow$ Nechť A je regulární. Pak lze E.Ř.Ú převést na I.
a proto existuje M vzniklá z I stejnými E.Ř.Ú a platí
$MA = I$ a $\det(MA) = \det M \cdot \det A = \det I = 1$.
Proto $\det A \neq 0$

$\Leftarrow$: Nechť $\det A \neq 0$. Matici A lze určitě převést do horního stupňovitého tvaru, označme ji $\tilde{A}$.
$\det \tilde{A} \neq 0$, a proto na diagonále jsou nenulová čísla a tedy $h(A) = n \iff A$ je regulární

Věta
Nechť $A, B \in T^{n,n}$
Pak platí $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Důkaz
① A je singulární, $\det A = 0$, $h(A) < n$.
Víme, že $h(AB) \leq h(A) < n \Rightarrow \det(AB) = 0$, platí.

② A je regulární. Pak A vznikla z I konečným počtem E.Ř.Ú. Z toho máme $A = M$ z ~~…~~ předchozí věty.
Pak $\det(AB) = \det(MB) = \det M \cdot \det B = \det A \cdot \det B$

Věta

Nechť $A \in T^{n,n}$, A regulární.
Pak $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Důkaz

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$
$\Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1$
$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Rozvoj determinantu

Definice

Nechť $A \in T^{n,n}$, $n \geq 2$.
Označme $A^{(i,j)}$ matici, která vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.
Pak číslo

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det A^{(i,j)}$$

nazveme algebraickým doplňkem prvku A_{ij}

Věta Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce

Nechť $A \in T^{n,n}$, $n \geq 2$,
Pak pro každé $i \in \hat{n}$ platí

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot D_{ij} \quad (\text{podle } i\text{-tého řádku})$$

respektive pro každé $j \in \hat{n}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} D_{ij} \quad (\text{podle } j\text{-tého sloupce})$$

Lemma

Nechť $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$. Nechť A má v i-tém řádku samé nuly kromě A_{ik}, tj. $A_{il} = 0$ po každé $l \in \hat{n}$, $l \neq k$.
Pak platí $\det A = A_{ik} D_{ik}$.

Důkaz

① $i = k = n$

Pak z definice $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \dots A_{n\pi(n)}$

Aby daný v sumě nebyl nulový, tak nutně musí platit, že $\pi(n) = n$

Proto $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, A_{1\pi(1)} \dots A_{n-1\,\pi(n-1)} A_{nn} = A_{nn} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\, A_{1\pi(1)} \dots A_{n-1\,\pi(n-1)}$

navíc permutace $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n-1) & n \end{pmatrix}$ a $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n-1) \end{pmatrix}$ mají stejné znaménko

Odtud už plyne $\det A = A_{nn} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{1\pi(1)} \dots A_{n-1\,\pi(n-1)} =$

$= A_{nn} \det A^{(n,n)} \cdot 1 = A_{nn} \det A^{(n,n)} (-1)^{n+n} =$

$= A_{nn} D_{nn}$

$k \dots n-1 \quad n = k \dots n-k$

② $(i,k) \neq (n,n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{ik} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i-1 \\ n-1 \\ n \end{matrix} \; = i + n - i$$

Pak $\det A = (-1)^{n-i} (-1)^{n-k} \det A^{(i,k)} A_{ik} = A_{ik} (-1)^{i+k} \det A^{ik} =$

$= A_{ik} D_{ik}$

Důkaz věty

Ukážeme platnost po rozvoj podle i-tého řádku
Označme matici A^j takovou, že se shoduje s A, pouze v i-tém řádku má kromě A_{ij} samé nuly.
Díky lemmatu a větě o úpravě determinantů už plyne, že
$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} D_{ij}$

Definice

Nechť $A \in T^{n,n}$, $n \geq 2$.
Adjungovanou matici k A nazveme matici A^{adj} splňující pro každé $i,j \in \hat{n}$.

$$[A^{adj}]_{ij} := D_{ji}$$

Věta Inverzní a adjungovaná matice
Nechť $A \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, pak platí
① $(\det A)\,\mathbb{I} = A^{adj} \cdot A$
② pokud A je regulární, tak $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{adj}$

Důkaz

① Nechť $i,j \in \hat{n}$ pak platí

$$[A^{adj}A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki} \cdot A_{kj}$$

- $i = j$: $[A^{adj}A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki} A_{ki} = \det A$

- $i \neq j$: Uvažujme matici $\mathbb{B}$, která vznikne nahrazením i-tého sloupce j-tým. $\mathbb{B}$ má dva stejné sloupce.
Rozvojem podle i-tého sloupce dostaneme
$\det \mathbb{B} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki} A_{kj}$. Proto $[A^{adj}A]_{ij} = 0$

② $(\det A) \cdot \mathbb{I} = A^{adj} A^{-1}$
$\Leftrightarrow (\det A)\,\mathbb{I}\,A^{-1} = A^{adj} A\, A^{-1}$
$\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \frac{A^{adj}}{\det A}$

~~Důsl~~

Cramerovo pravidlo

Nechť $A \in T^{n,n}$, $n \geq 2$ a $\vec{b} \in T^n$.
Pokud A je regulární, potom pro každé $j \in \hat{n}$ je j-tá složka řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ rovna

$$x_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det A}$$, kde $B^{(j)}$ je matice, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice A vektorem $\vec{b}$

Důkaz

Víme, že řešení splňuje $A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$.
Pomocí předchozí věty dostáváme

$$x_j = A^{-1}_{j\bullet}\vec{b} = \frac{1}{\det A} A^{adj}_{j\bullet}\vec{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{kj} b_k}{\det A} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k D_{kj}}{\det A} = \frac{\det B^{(j)}}{\det A}$$

Determinant operátoru

Definice

Nechť V_n vekt. prostor nad T dimenze $n \in \mathbb{N}$.
Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$.
Pak determinant operátoru A značíme $\det A$ a klademe jej roven $\det A := \det({}^{\mathcal{X}}A)$

Ověřme korektnost této definice, tj. že není závislá na volbě báze.
Nechť $\mathcal{Y}$ je také báze V_n, pak ${}^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{Y},\mathcal{X}}I\, {}^{\mathcal{Y}}A\, {}^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}I$
Víme, že ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ a ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ jsou k sobě inverzní, neboť ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\,{}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{Y}}I = \mathbb{I}$,
a proto $\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) \cdot \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}) = \det \mathbb{I} = 1$

Celkově máme $\det({}^{\mathcal{X}}A) = \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} \cdot {}^{\mathcal{Y}}A \cdot {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}) \cdot \det({}^{\mathcal{Y}}A) \cdot \det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) =$
$= \det({}^{\mathcal{Y}}A)$

Spektrální teorie

Definice

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, potom číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazvu vlastním číslem, pokud existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$.

Takový vektor nazveme vlastním vektorem příslušejícím λ.

$\sigma(A)$ ... spektrum A := množina vlastních čísel A

P_λ ... vlastní podprostor k λ, $P_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n / A\vec{x} = \lambda \vec{x}\}$

$\nu_g(\lambda)$ ... geometrická násobnost, $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$

Definice

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, definujeme charakteristický polynom, $p_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \forall t \in \mathbb{C} \quad p_A(t) = \det(A - \lambda I)$

Vlastnosti

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

1. p_A je polynom st $p_A = n$, koeficient u λ^n je $(-1)^n$, koeficient u λ^0 je $\det A$, koeficient u λ^{n-1} je $(-1)^{n-1} Tr(A)$

Důkaz

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

λ^n se vyskytuje v členu $(A_{11}-t)\dots(A_{nn}-t)$

λ^0 : $p_A(0) = \det A$

λ^{n-1} : $(-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} Tr(A)$

Věta
Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$

Důkaz
$\lambda \in \sigma(A) \iff \exists \vec{x} \neq \vec{0} \quad (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$
$\iff (A - \lambda I)$ je singulární $\iff \det(A - \lambda I) = 0 = p_A(\lambda)$

Kdy existuje báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů A?

Definice
Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(A)$, pak algebraickou násobností λ rozumíme jeho násobnost jakožto kořene p_A
Značíme $\nu_A(\lambda)$
Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vzájemně různá vl. čísla A
$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\nu_A(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_A(\lambda_k)}$

Věta Determinant a vlastní čísla
Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak $\det A = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{\nu_A(\lambda_i)}$

Důkaz
$p_A(0) = \det A = (-1)^n \cdot (0 - \lambda_1)^{\nu_A(\lambda_1)} \dots (0 - \lambda_k)^{\nu_A(\lambda_k)} =$
$= \lambda_1^{\nu_A(\lambda_1)} \dots \lambda_k^{\nu_A(\lambda)}$

Důsledek Regularita a vlastní čísla
Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak A je regulární $\iff 0 \in \sigma(A)$

Věta
Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak $Tr(A) = \sum_{i=1}^{k} \nu(\lambda_i) \cdot \lambda_i$

Důkaz
$\lambda^{n-1} (-1)^{n-1} (\nu_A(\lambda_1)\lambda_1 + \nu_A(\lambda_2)\lambda_2 + \dots + \nu_A(\lambda_k)\lambda_k)$

V trojúhelníkových maticí jejich vlastní čísla jsou diagonální prvky

Věta / geometrická a algebraická násobnost

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, nechť $\lambda \in \sigma(A)$

Pak $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$

Důkaz /

Nechť λ libovolné vlastní číslo

$k = \nu_g(\lambda)$, najdu k LN vlastních vektorů k λ

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ doplníme na bázi $\mathbb{C}^n$

tj. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$

$$\mathbb{X} = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$$

~~uvažujme~~ určitě platí $\mathbb{X}^{-1}$

$$\det(\mathbb{X}^{-1}(A - t\mathbb{I})\mathbb{X}) = \det(A - \lambda\mathbb{I})$$

$$p_A(t) = \det\left(\mathbb{X}^{-1}(A\vec{x}_1 - \lambda\vec{x}_1) \dots \mathbb{X}^{-1}(A\vec{x}_k - \lambda\vec{x}_k) \dots \mathbb{X}^{-1}(A\vec{x}_n - \lambda\vec{x}_n) \right) =$$

$$= \det\left(\mathbb{X}^{-1}(\lambda x_1 - \lambda x_1) \dots \mathbb{X}^{-1}(\lambda x_k - \lambda x_k) \dots \mathbb{X}^{-1}(A x_n - \lambda \vec{x}_n) \right) =$$

$$= \det\left((\lambda - t)\vec{e}_1 \dots (\lambda - t)\vec{e}_k \;\; \mathbb{X}^{-1} A\vec{x}_{k+1} - \lambda\vec{x}_{k+1} \dots \mathbb{X}^{-1}A\vec{x}_n - \lambda\vec{x}_n \right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} (\lambda - t) & & & \\ & (\lambda - t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda - t) \\ \hline & & & & -1 \quad -1 \end{pmatrix} = (\lambda - t)^k \underbrace{q(t)}_{\text{st } q = n-k}$$

$$\nu_a(\lambda) \geq k$$

Věta

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vzájemně různá vlastní čísla a k nim $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

Pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN

Důkaz

SPOREM

předpokládáme, že $\exists j \in \hat{k}$ $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} d_i \vec{x}_i$ a beru minimální index j.

$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}$ LN$)$

$$A\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} d_i \lambda_j \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{j-1} d_i A\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{j-1} d_i \lambda_i \vec{x}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{j-1} d_i \underbrace{(\lambda_j - \lambda_i)}_{\neq 0} \vec{x}_i = \vec{o} \Rightarrow d_i = 0, \forall i \in \widehat{j-1}, \text{ SPOR, že } \vec{x}_j \text{ je vl. vektor}$$

Věta ⊙ Existence báze z vlastních vektorů

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

Báze z vlastních vektorů existuje $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A)\ \nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$

Důkaz

$:\Rightarrow$ $\sum_{\lambda \in \sigma(A)}$ počet vl. vektorů ~ k λ $\leq \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \nu_g(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \nu_a(\lambda)$

$$n \leq \sum \nu_g(\lambda) \leq \sum \nu_a(\lambda) = n$$

$\Leftarrow:$

$\lambda_1 \dots \vec{x}_1^{(1)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_1)}^{(1)}$

$\lambda_2 \dots \vec{x}_1^{(2)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_2)}^{(2)}$

$\vdots$

$\lambda_k \dots \vec{x}_1^{(k)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_k)}^{(k)}$

$\sum_{i=1}^{k} \nu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \nu_a(\lambda_i) = n$, stačí ověřit LN

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\nu_g(\lambda_1)} \alpha_i^{(1)} \vec{x}_i^{(1)}}_{\in P_{\lambda_1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu_g(\lambda_2)} \alpha_i^{(2)} \vec{x}_i^{(2)}}_{\in P_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu_g(\lambda_k)} \alpha_i^{(k)} \vec{x}_i^{(k)}}_{\in P_{\lambda_k}} = \vec{o} \Rightarrow \alpha_i^{(j)} \text{ triviální LK}$$

Pozorování! $\mathbb{X} = \underbrace{(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \dots\ \vec{x}_n)}_{\text{báze z vl. vektorů } \mathbb{A}}$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = (\mathbb{A}\vec{x}_1\ \mathbb{A}\vec{x}_2\ \dots\ \mathbb{A}\vec{x}_n) =$$
$$= (\lambda\vec{x}_1\ \lambda\vec{x}_2\ \dots\ \lambda\vec{x}_n) =$$
$$= \mathbb{X}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathbb{X}^{-1}$$

$$\mathbb{A}^j = \mathbb{X}\begin{pmatrix}\lambda_1^j & & & \\ & \lambda_2^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^j\end{pmatrix}\mathbb{X}^{-1}$$

Domácí úkol

Nechť $\mathbb{A},\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$

Jaký je vztah mezi vl. čísly a vl. vektory matic

1. $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^2$
2. $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$, pokud existuje
3. $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}+\alpha\mathbb{I}$, kde $\alpha\in\mathbb{C}$
4. $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^T$
5. $\mathbb{A},\mathbb{B}$ a $\mathbb{A}+\mathbb{B}$
6. $\mathbb{A},\mathbb{B}$ a $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$

Podobnost, diagonalizovatelnost

Definice

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$
A je podobná B, pokud $\exists$ regulární matice $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ taková, že $A = XBX^{-1}$

Věta Vlastnosti podobných matic

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ podobné

Platí ① $p_A = p_B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$ a stejné $\nu_a(\lambda)$

② $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad \nu_g^A(\lambda) = \nu_g^B(\lambda)$

③ $\det A = \det B$, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$

Pozn.: Podobnostní transformace zachovávají spektrální vlastnosti

!E.Ř.Ú ne!

Důkaz

① $p_A(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = \det(XBX^{-1} - tXX^{-1}) =$
$= \det(X(B - t\mathbb{I})X^{-1}) = \det X \cdot \det(B - t\mathbb{I}) \cdot \det X^{-1} =$
$= \det(B - t\mathbb{I}) = p_B(t)$

② $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
$XBX^{-1} \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$
$B(X^{-1}\vec{x}) = \lambda(X^{-1}\vec{x})$

③ platí $p_A(t) = p_B(t)$, $\forall t \in \mathbb{C}$, proto se rovnají i jejich koeficienty

Pozn.: Stejné spektrální vlastnosti $\not\Rightarrow$ A podobná B

Definice

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

A nazveme diagonalizovatelnou, pokud je podobná nějaké diagonální matici

tj. $\exists X$ regulární, $X \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\exists D$ diagonální, $D \in \mathbb{C}^{n,n}$

$A = X \cdot D X^{-1}$

Je každá matice podobná diagonální matici?

NE!

Věta Ekvivalentní def. diagonalizovatelnosti

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak následující tvrzení ekvivalentní

1. A je diagonalizovatelná
2. Existuje báze z vl. vektorů A
3. $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$

Př

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Je diagonaliz.? Pokud ano, najděte X, D: $A = XDX^{-1}$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & i-t \end{vmatrix} = (i-t)(t^2+1)$$

$\sigma(A) = \{-i, i\}$, $\nu_a(i) = 2$, $\nu_a(-i) = 1 = \nu_g(-i)$

$$A - i\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_i = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$$

$$A + i\mathbb{I} = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{-i} = \left[\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Do jaké nejjednodušší podoby lze převést podobnostní transformacemi každou matici?

Jordanův kanonický tvar

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\#\lambda$ na diagonále $\mathbb{J} = \nu_a(\lambda)$

$\#$ bloků s λ na diagonále $= \nu_g(\lambda)$

Jordanův kanonický tvar je dán jednoznačně až na pořadí bloků

Domácí úkol

Najděte Jord. k. tvar pro a rozhodněte, jestli jsou si podobné:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Věta | Hamilton-Caylyho věta

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$,

Pak A je kořenem svého charak. polynomu

$p_A(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$

tj. $p_A(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 \cdot \mathbb{I} = \Theta$

* A^T a A podobné (je potřeba Jord. k. tvar)

Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

Úskalí ① $\dim V = +\infty$
② V nad T, $T \neq \mathbb{C}$ => problémy

Definice!
Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, V nad T,
$\lambda \in T$ nazveme vl. číslem operátoru A pokud
$\exists \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}$, takže $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

$\vec{x}$ nazveme vlastní vektor A příslušející λ
$\sigma(A)$ ... množina vl. čísel, spektrum A
$P_\lambda = \{ \vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda \vec{x} \}$ ... vlastní podprostor
* $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$
<=> $\ker(A - \lambda I)$
$\nu_g(\lambda) = \dim P_\lambda$

Věta! (LN vl. vektorů příslušejícím různým vl. číslům)
Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, V nad T,
nechť dále $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různá čísla a
k nim příslušející vl. vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$
Pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN

Důkaz!
Jasné

Př. $S \in \mathcal{L}(P)$

existuje $x \in P$, že $Sx = \lambda x$?

$\iff Sx(t) = \lambda x(t)$, ozn. $x(t) = d_n t^n + d_{n-1} t^{n-1} + \dots + d_1 t + d_0$

$\iff \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{t^{i+1}}{i+1} = \lambda \sum_{i=0}^{n} d_i t^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda d_i t^i$

$\lambda = \frac{1}{i+1}$, $\forall i \in \hat{n}$, nutně $d_n = d_{n-1} = \dots = d_1 = d_0 = 0$

SAMI: $A, D \in \mathcal{L}(P)$

$Ax(t) = x(t+1)$, D operátor derivování

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T, $\mathcal{X}$ báze V_n

Pak charakteristickým polynomem operátoru A

rozumíme $p_A = p_{{}^{\mathcal{X}}A}$

tj. $p_A(t) = \det({}^{\mathcal{X}}A - t\mathbb{I})$

Korektnost definice

$${}^{\mathcal{X}}A = \underbrace{{}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}}_{X}\ {}^{\mathcal{Y}}A\ \underbrace{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}}_{X^{-1}} \Rightarrow {}^{\mathcal{X}}A \text{ a } {}^{\mathcal{Y}}A \text{ podobné}$$

Věta Vlastní čísla operátoru a p_A

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T,

λ je vlastní číslo $A \iff p_A(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in T$

Důkaz

$\sigma(A) = p^{-1}(0) \cap T$

$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda \in T \wedge \exists \vec{x} \neq \vec{0}, A\vec{x} = \lambda \vec{x} \iff$

$\iff \lambda \in T \wedge \exists \vec{x} \neq \vec{0}\ {}^{\mathcal{X}}A(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda (\vec{x})_{\mathcal{X}} \iff$

$\iff \lambda \in T \wedge \lambda \in \sigma({}^{\mathcal{X}}A) \iff \lambda \in T \wedge p_{{}^{\mathcal{X}}A}(\lambda) = 0$

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, $p_A^{-1}(0) = \{-i, +i\}$

$\sigma(A) = p_A^{-1}(0) \cap T = \emptyset$

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T

$\nu_a(\lambda)$... algebraická násobnost
$\Leftrightarrow$ násobnost jakožto kořene p_A

Pozn.: $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T, $\mathcal{X}$ báze V_n a $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}\!A$

1. $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(A) \cap T$
2. $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $A\vec{x} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda (\vec{x})_{\mathcal{X}}$
3. $\lambda \in \sigma(A)$, $\nu_a^A(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$, $\nu_g^A(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$

Př. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; p_A(t) = p_{{}^{\mathcal{X}}\!A}(t) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (*)$$

$(*) = (2-t)(t^2+1)$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{2\}$, $\nu_a(2) = 1 = \nu_g(2)$

$$({}^{\mathcal{X}}\!A - 2\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2 = [\vec{y}]_\lambda$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = [\vec{x}_3]_\lambda$

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T

A nazveme diagonalizovatelný operátor, pokud $\exists$ báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n, tak že ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice

„$^{\mathcal{X}}\!A$ je diagonalizovatelná nad T"

Pozorování

$${}^{\mathcal{Y}}\!A = \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \left((A\vec{y}_1)_{\mathcal{Y}} \dots (A\vec{y}_n)_{\mathcal{Y}} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Věta | Diagonalizovatelnost operátorů a násobnost

Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T

A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ ① $p_A^{-1}(0) \subset T$

② $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$

1. KONTROLNÍ TEST
16. 4. 2018

$A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T, $\mathcal{X}$ báze V_n, ozn. $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}\!A$

① $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(A) \cap T$

② $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $\quad A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, pro $\vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda(\vec{x})_{\mathcal{X}}$

③ $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $\quad \nu_a^{A}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$

$\nu_g^{A}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$

A je diagonalizovatelný $\overset{DEF}{\Leftrightarrow} \exists \mathcal{Y}$ báze V_n ${}^{\mathcal{Y}}\!A = \mathbb{D}$

$\Leftrightarrow$ ① $p_A^{-1}(0) \subset T$

DŮKAZ $\rightarrow$ ② $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$

Příklad

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X}$ báze $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)(t-1)(t+1)$$

$\sigma(A) = \{-1, 1\}$, $\nu_a(-1) = 2$, $\nu_a(1) = 1 \Rightarrow \nu_g(1) = 1$

$$\lambda = -1: \quad {}^{\mathcal{X}}A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_{-1}^{{}^{\mathcal{X}}A} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P_{-1}^{A} = \left[\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \right]_\lambda$

$$\lambda = 1: \quad {}^{\mathcal{X}}A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_{1}^{{}^{\mathcal{X}}A} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $P_1^A = \left[\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \right]_\lambda$

$\mathcal{Y} = (\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 + \vec{x}_2)$

${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad

c) $\overset{x}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma(A) = \{1, 2\}$

$\nu_a(2) = 1 \Rightarrow \nu_g(2) = 1$

$\nu_a(1) = 2$

$\overset{x}{A} - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_1^{\overset{x}{A}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$, $P_1^A = [\vec{x}_1]_\lambda$

A není diagonalizovatelný

Hermitovské a kvadratické formy

$T = \mathbb{R} \vee T = \mathbb{C}$

DÚ: Najděte číselné těleso T, které není uzavřené na komplexní sdružování, tj. $\exists \alpha \in T, \bar{\alpha} \notin T$

Definice

Nechť $h: V \times V \to T$, pak h nazveme hermitovskou formou, jestli platí ① $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}$ hermitovskost (nad $\mathbb{R}$ symetrie)

② $h(\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z})$ linearita v 1. argumentu

Nechť $Q: V \to T$, def. $Q(\vec{x}) := h(\vec{x}, \vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$, pak Q nazveme diagonálou h

Věta vlastnosti h a Q

Nechť h je hermitovskou formou ve V_n nad T, Q její diagonála

Pak platí ① $h(\vec{x}, \alpha\vec{x} + \vec{z}) = \bar{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z})$ antilinearita ve 2. argumentu

② $Q: V \to \mathbb{R}$

③ $Q(\alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 Q(x)$

④ $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + Q(\vec{y}) + 2\operatorname{Re} h(\vec{x}, \vec{y})$

⑤ $Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y}))$, Rovnoběžníková rovnost

⑥ Polarizační identity

nad $\mathbb{R}$ $h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(Q(x + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y}))$

nad $\mathbb{C}$ $h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})) + \frac{i}{4}(Q(\vec{x} + i\vec{y}) - Q(\vec{x} - i\vec{y}))$

Definice

Nechť h je hermitovská forma ve V_n nad T,
pak nulpostorem nazvu $N_h := \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x},\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V\}$
$\dim N_h$ nazveme nulita, pokud $\dim N_h = 0$, pak
h nazveme regulární.
pokud $\dim N_h > 0$, pak h nazveme singulární

Polární báze

• V jaké bázi má h, resp. Q jednodušší tvar?

h ve V_n nad T, $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V_n

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$$

$$h(\vec{x},\vec{y}) = h\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(\vec{x}_i, \vec{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j}\, h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j}\, Q(\vec{x}_i)$$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 Q(\vec{x}_i)$$

Pokud $h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ pro $i \neq j$, potom bázi x nazveme polární

„Q má tvar součtu čtverců souřadnic"

Věta Existence polární báze

Nechť h je hermitovská forma ve V_n nad T, pak
polární báze hermitovské formy h existuje

Důkaz

$n = 1$: triviálně platí

$n \geq 2$: $n-1 \to n$ (I) $h(\vec{x},\vec{y}) = 0, \forall \vec{x},\vec{y} \in V_n$ triviálně platí

(II) $\exists \vec{x},\vec{y} \in V_n$, $h(\vec{x},\vec{y}) \neq \vec{0} \Rightarrow \exists \vec{a} \in V_n\ Q(\vec{a}) \neq 0$

polarizační identity

def: $\varphi(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{a})$; $\forall \vec{x} \in V$, $\varphi \in V_n^{\#}$, $\varphi \neq \theta\ (\varphi(\vec{a}) \neq 0)$
$h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = n-1$

$h|_{\ker\varphi} : \ker\varphi \times \ker\varphi \to T$
existuje polární báze $h|_{\ker\varphi}$, ozn $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$

Ukážeme, že $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \underset{\vec{a}_n}{\overset{\shortparallel}{\vec{a}}})$ je < báze V_n, polární báze

① $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$
② $h(\vec{a}_i, \vec{a}_n) = 0$, neboť $h(\vec{a}_i, \vec{a}_n) = \varphi(\vec{a}_i)$, $\vec{a}_i \in \ker\varphi$

Kdyby $\vec{a}$ byl LK $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$, $\Rightarrow \vec{a} \in \ker\varphi$, SPOR

DÚ: Za jaké podmínky lze vektor $\vec{x} \in V_n$ doplnit na polární bázi hermitovské formy h ve V_n nad T?

Věta Hledání polární báze

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ báze V_n nad T, h hermitovská forma ve V_n nad T, Q její diagonála.
Pokud existují $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall \vec{x} \in V_n$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} q_i |\alpha_i|^2, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Pak $\mathcal{X}$ je polární báze

Důkaz
$Q(\vec{a}_i) = q_i \cdot |1|^2 = q_i$, $(\vec{a}_i)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i$
nad $\mathbb{R}$:
$h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \frac{1}{2}(Q(\vec{a}_i + \vec{a}_j) - Q(\vec{a}_i) - Q(\vec{a}_j)) = \frac{1}{2}((q_i + q_j) - q_i - q_j)$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y}, \quad h \text{ v } \mathbb{R}^3$$

$$h(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y} = \vec{y}^T A^T \vec{x} = \vec{y}^T A \vec{x} = h(\vec{y},\vec{x}) =$$

$$= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1+x_2)^2 + x^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2 =$$
$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

$$\alpha_1 = x_1 + x_2, \quad x_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$$
$$\alpha_2 = x_2 - x_3, \quad x_2 = \alpha_2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$$
$$\alpha_3 = \sqrt{2}x_3 \quad x_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$$

$$\vec{x} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid Q(\vec{x}) = 1\} = \left\{\vec{x} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1\right\} =$$

$$= \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1\right\}$$

Lemma

Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze herm. formy ve V_n nad T

Pakud $Q(\vec{a}_i) = 0 \iff \vec{a}_i \in N_h$

Důkaz

① $\Leftarrow$: triviálně platí

② $\Rightarrow$ $h(\vec{a}_i, \vec{y}) = h(\vec{a}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j h(a_i, a_j) = \bar{\alpha}_i Q(\vec{a}_i) = 0$

Věta Nulový prostor a polární báze

Stejné předpoklady

① Pakud $Q(\vec{a}_i) \neq 0 \ \forall i \in \hat{n} \Rightarrow N_h = \{\vec{o}\}$

② Pakud $\left.\begin{array}{l} Q(\vec{a}_i) = 0 \ \forall i \in \hat{r} \\ Q(\vec{a}_j) \neq 0 \ j > r \end{array}\right\} N_h = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]_\lambda$

Důkaz

② $N_h \supset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]_\lambda$ ✓

$N_h \subset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]_\lambda$

$\vec{x} \in N_h$, $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$

$i \in \hat{n}$: $h(\vec{x}, \vec{a}_i) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(\vec{a}_j, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i) \overset{i>r}{\Rightarrow} \alpha_i = 0$

Kvadratické formy

Nechť h ve V_n nad T ($T=\mathbb{R} \vee T=\mathbb{C}$), $\mathcal{X} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n, $\mathcal{X}$ polární, pokud $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ $i \neq j$

$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 Q(\vec{a}_i)$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Pokud $\left.\begin{array}{ll} Q(\vec{a}_i) = 0 & i \in \hat{r} \\ Q(\vec{a}_i) \neq 0 & i > r \end{array}\right\} N_h = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]_\lambda$, $\dim N_h = r$

Definice

Nechť $Q: V_n \to \mathbb{R}$ nazveme kvadr. formou, pokud existuje hermitovská forma h ve V taková, že Q je její diagonálou.

Formu h nazýváme polární Q

Věta

Zákon setrvačnosti kv. forem

Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T a $\mathcal{X} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze Q

Označíme p = # vektorů z báze, pro které $Q > 0$

q = -//- $Q < 0$

r = -//- $Q = 0$

kladný index setrvačnosti

záporný index setrvačnosti

nulita

Pak (p, q, r) nezávisí na volbě polární báze

signatura $sg(Q)$

Důkaz

$r = \dim N_h \Rightarrow r$ nezávisí na volbě pol. báze

ukážeme, že p nezávisí na volbě polár. báze $\Rightarrow q$ nezávisí

- $p = 0$: $Q(\vec{a}_i) \leq 0$ $\forall i \in \hat{n}$

  $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\geq 0} \underbrace{Q(\vec{a}_i)}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow$ i v jiné pol. bázi $p = 0$

- $p = n$: $Q(\vec{a}_i) > 0$ $\forall i \in \hat{n}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$: $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\substack{\geq 0 \\ \text{alespoň } 1 > 0}} \underbrace{Q(\vec{a}_i)}_{> 0} > 0$

  $\Rightarrow$ pak vš. v jakékoliv bázi to platí

$0 < p < n$

přeznačení: $Q(\vec{a}_i) > 0 \quad i \in \hat{p}$

$Q(\vec{a}_i) \leq 0 \quad i \geq p+1$

Jiná polární báze $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

$Q(\vec{b}_i) > 0 \quad i \in \hat{p}'$

$Q(\vec{b}_i) \leq 0 \quad i \geq p'+1$

$P := [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p]_\lambda \subset\subset V_n \quad , \dim P = p$

$Q := [\vec{b}_{p'+1}, \dots, \vec{b}_n]_\lambda \subset\subset V_n \quad , \dim Q = n - p'$

$\vec{x} \in P \Rightarrow Q(\vec{x}) > 0$
$\vec{x} \neq \vec{0}$

$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|^2 Q(\vec{a}_i)$

$\vec{x} \in Q \Rightarrow Q(\vec{x}) = \sum_{i=p'+1}^{n} |\beta_i|^2 Q(\vec{b}_i)$, kde $\vec{x} = \sum_{i=p'+1}^{n} \beta_i \vec{b}_i$

$P \cap Q = \{\vec{0}\}$

$n \geq \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q = p + n - p' \Rightarrow p' \geq p$

$\tilde{P} := [\vec{a}_{p+1}, \dots, \vec{a}_n]_\lambda \quad , \dim \tilde{P} = n - p$

$\tilde{Q} := [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p'}]_\lambda \quad , \dim \tilde{Q} = p'$

$\vec{x} \in \tilde{P}: \quad Q(\vec{x}) \leq 0 \quad , \vec{x} = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$

$Q(\vec{x}) = \sum_{i=p+1}^{n} |\alpha_i|^2 Q(\vec{a}_i)$

$x \in \tilde{Q}: \quad Q(\vec{x}) > 0 \quad , \vec{x} = \sum_{i=1}^{p'} \beta_i \vec{a}_i$
$x \neq \vec{0}$

$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p'} |\beta_i|^2 Q(\vec{a}_i)$

$\tilde{P} \cap \tilde{Q} = \{\vec{0}\}$

$n \geq \dim(\tilde{P} + Q) = \dim \tilde{P} + \dim \tilde{Q} = n - p + p' \Rightarrow p \geq \tilde{p}$

celkem tedy $p = p'$, pro samozřejmě $q = n - \pi - p = q'$

Definice

Nechť Q je kv. forma na V.

Řekne, že Q je pozitivně definitní, pokud $Q(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

Q je negativně definitní, pokud $Q(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

Q je pozitivně semi-definitní, pokud $Q(\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in V \wedge \exists \vec{x}_0 \in V, \vec{x}_0 \neq \vec{0}, Q(\vec{x}_0) = 0$

Q je negativně semidefinitní, pokud $Q(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in V \wedge \exists \vec{x}_0 \in V, \vec{x} \neq \vec{0}, Q(\vec{x}_0) = 0$

Q je indefinitní, pokud $\exists \vec{x}_1 \in V, Q(\vec{x}_1) > 0 \wedge \exists \vec{x}_2 \in V, Q(\vec{x}_2) < 0$

Věta Charakter a signatura

Nechť Q je kvadratická forma na V_n

$sg\, Q = (p, q, r)$

1. PD $\Leftrightarrow q = r = 0$
2. ND $\Leftrightarrow p = r = 0$
3. PSD $\Leftrightarrow q = 0 \wedge r \neq 0$
4. NSD $\Leftrightarrow p = 0 \wedge r \neq 0$
5. D $\Leftrightarrow p \neq 0 \wedge q \neq 0$

Důkaz

1. $\Rightarrow$ Q je PD $\Leftrightarrow Q(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \in V$, proto $p = n \Rightarrow q = 0 = r$

$\Leftarrow$ $p = n \wedge q = 0 = r$, to znamená, že polárovou bázi $t = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ platí: $Q(\vec{a}_i) > 0, \forall i \in \hat{n}$.

Pak pro každé $\vec{x} \neq \vec{0} : \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$ platí:

$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 Q(a_i) > 0$

Použití při vyšetřování extrémů více proměnných:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F = 7 + 2(x+y)^2 - y\sin y - x^3$

kandidát na extrém (nutná podmínka)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$$

$(0,0)$ je stacionární bod

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4(x+y) - 3x^2 \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4(x+y) - \sin y - y\cos y \Big|_{(0,0)} = 0$$

$F(0,0) = 7$, $z = 7$, tečná rovina F v $(0,0)$

Matice kvadratické formy

Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T, h její polára.
Pak maticí Q (resp. h) v bázi $\mathcal{X}$ rozumíme matici ${}^{\mathcal{X}}Q$ (resp. ${}^{\mathcal{X}}h$) def.

$$[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} = h(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \forall i,j \in \hat{n}$$

Věta (Vlastnost ${}^{\mathcal{X}}Q$)
Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T, h její polára, $\mathcal{X}$ báze V_n

1. ${}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H$
2. $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$
3. $Q(\vec{x}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$, $\forall \vec{x} \in V_n$
4. ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}$

Věta ($h(Q)$ a $h({}^{\mathcal{X}}Q)$)
Nechť Q kv. forma ve V_n, $\mathcal{X}$ báze V_n
Pak $h(Q) = h({}^{\mathcal{X}}Q)$

Důkaz
$\mathcal{U}$ polární báze
$${}^{\mathcal{U}}Q = \begin{pmatrix} Q(\vec{a}_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\vec{a}_n) \end{pmatrix}$$

$$[{}^{\mathcal{U}}Q]_{ij} = h(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$$

$$h({}^{\mathcal{X}}Q) = h({}^{\mathcal{U}}Q) = p + q = h(Q)$$

Věta Sylvestrovo kritérium
Nechť Q je kvadr. forma ve V_n nad T a $\mathcal{X}$ je báze V_n.
Označme Δ_i, $i \in \hat{n}$ hlavní subdeterminanty
Pak Q je PD $\iff \Delta_i > 0, \forall i \in \hat{n}$
ND $\iff \Delta_i < 0$, i liché, $\Delta_i > 0$ i sudé

JAK VYPADAJÍ VŠECHNY HERM. A KVADR. FORMY V $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

$\mathcal{X} = \mathcal{E}$

- $h: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $h(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q \, \vec{y}$

- je-li $A = A^H \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak $h(\vec{x},\vec{y}) := \vec{x}^T A \vec{y}$ je herm. forma

- $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad h(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q \, \vec{y}$

- je-li $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$, pak $h(\vec{x},\vec{y}) := \vec{x}^T A \vec{y}$ je herm. forma

Domácí úkol

Hledání polární báze pomocí současných řádkových a sloupcových úprav

nad $\mathbb{R}$: $\quad {}^{\mathcal{U}}Q = \underbrace{({}^{\mathcal{U}}I^{\mathcal{X}})^T}_{\text{matice } M \text{ z II ERÚ}} \, {}^{\mathcal{X}}Q \, \underbrace{({}^{\mathcal{U}}I^{\mathcal{X}})}_{M^T \text{ vznikla z } I \text{ stejnými ESÚ}}$

Př.

$${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Najděte polární bázi Q

$$\overset{\check{R}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{S}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\check{R}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \overset{S}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{U}}Q$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{{}^{\mathcal{U}}I^{\mathcal{E}} = (\vec{a}_1 \, \vec{a}_2 \, \vec{a}_3)}$$

$\boxed{DÚ}$ $\mathbb{R}^3$ $\quad {}^{\mathcal{E}}Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Najděte pol. bázi Q a ověřte z definice

Domácí úkol

Nechť V množina hermitovských forem, ~~ktere~~ $V_n \times V_n \to T$ a definujeme operace $\oplus$ a $\odot$ „tradičně"

$\forall h_1, h_2 \in V, \forall \alpha \in T$ $(h_1 \oplus h_2)(\vec{x}, \vec{y}) = h_1(\vec{x}, \vec{y}) + h_2(\vec{x}, \vec{y})$

$(\alpha \odot h_1)(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha\, h_1(\vec{x}, \vec{y})$

Je V vektorový prostor?

Pokud ano, najděte dim V a bázi V, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Skalární součin

Definice

Nechť $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to T$, $T = \mathbb{R} \vee T = \mathbb{C}$ je hermitovská forma s pozitivně definitní diagonálou, pak $\langle \cdot | \cdot \rangle$ nazveme skalární součin.

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$$

$$\langle \alpha\vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$$

$$\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0$$

Normou nazveme $\|\cdot\| : V \to T : \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$

(indukovanou skalárním součinem)

$\mathcal{H} := (V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ... pre-Hilbertův prostor

Věta Vlastnosti sk. součinu a normy

Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{H}, \alpha \in T$

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$
2. $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$
3. antilineární ve druhém argumentu
   $\langle \vec{x} | \alpha\vec{y} + \vec{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} + \vec{z} \rangle$
4. rovnoběžníková rovnost
   $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$

⑤ Polarizační identity

$T = \mathbb{R}$: $\langle \vec{x} + \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2)$

$T = \mathbb{C}$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-i\vec{y}\|^2)$

Př. $V = \mathbb{C}^n$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ standardní skalární součin

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

Unitární prostor $\mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{R}^n$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standardní skalární součin

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Eukleidovský prostor

v $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ odpovídá norma délce vektoru

Domácí úkol

P prostor polynomů a $\forall x, y \in P$: $\langle x | y \rangle := x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$

Je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalární součin?

Definice

Nechť $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H$ nad $\mathbb{R}$, $\vec{x} \neq \vec{o}, \vec{y} \neq \vec{o}$.

Pak úhlem ~~mezi~~ mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$

splňující

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

korektnost, pokud $\frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \in \langle -1, 1 \rangle$ (plyne ze Schwarzovy-Cauchyho nerovnosti)

$\varphi = 0 \iff \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = 1$

$\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, ostrý $\iff \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle > 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \iff \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$

$\varphi \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, tupý $\iff \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle < 0$

$\varphi = \pi$, přímý $\iff \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = -1$

$\varphi \in \{0, \pi\} \iff \vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ $\iff \frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = 1$

Schwarzova-Cauchyho nerovnost

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in H$

Pak $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ LZ

Důkaz

Pro lib. $\alpha \in T$: $0 \leq \langle \vec{y} - \alpha\vec{x} | \vec{y} - \alpha\vec{x} \rangle = \|\vec{y}\|^2 - \alpha\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle - \bar{\alpha}\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle + |\alpha|^2 \|\vec{x}\|^2$

① $\vec{x} = \vec{0}$, platí triviálně

② $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\alpha := \frac{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2}$

$$0 \leq \|\vec{y}\|^2 - \frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{x}\|^2} - \frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{x}\|^2} + \frac{|\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle|^2}{\|\vec{x}\|^2}$$

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

rovnost: $\vec{x} = \vec{0}$, nebo $\exists \alpha \in T: \vec{y} = \alpha\vec{x} \iff \vec{x}$ a $\vec{y}$ LZ

Věta trojúhelníková nerovnost

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, pak $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Leftrightarrow (\exists \alpha \geq 0)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x})$$

Dk

① $0 \leq \langle \vec{x}+\vec{y} | \vec{x}+\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\| + \underbrace{\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle \vec{y}|\vec{x}\rangle}_{2\mathrm{Re}\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle} \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\| + 2|\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle| \leq$

C-S ≠

$\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

② $\vec{x} = \alpha\vec{y}, \alpha \geq 0$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\alpha\vec{y}+\vec{y}\| = \|(1+\alpha)\vec{y}\| = (1+\alpha)\|\vec{y}\| = \|\vec{y}\| + \alpha\|\vec{y}\| = \|\vec{y}\| + \|\alpha\vec{y}\| =$
$= \|\vec{y}\| + \|\vec{x}\|$

nechť platí rovnost v △ ≠ ⇒ platí rovnost v Cauchy - Schwarzově nerovnosti
$\Leftrightarrow \vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ $\Rightarrow (\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha\vec{y} \vee \vec{y} = \alpha\vec{x})$

z důkazu věty: $\mathrm{Re}\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = |\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle|$

$\mathrm{Re}(\alpha\|\vec{y}\|^2) = |\alpha|\,\|\vec{y}\|^2$

- buď $\vec{y} = \vec{0} \wedge \vec{x} = \vec{0}$
- nebo $\vec{y} \neq \vec{0}$: $\mathrm{Re}\,\alpha = |\alpha| \Rightarrow \mathrm{Im}\,\alpha = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \geq 0$

Ortogonalita

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Řekneme, že $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou ortogonální (kolmé), pokud $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$

Věta Pythagorova věta

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in H$ $\quad \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2$

Dk

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$

- H nad $\mathbb{R}$: implikaci lze otočit

Definice

Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in H$. Řekneme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou ortogonální, pokud $\langle x_i | x_j \rangle = 0$, $i \neq j$

Řekneme, že $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou ortonormální, pokud jsou ortogonální a zároveň $\|\vec{x}_i\| = 1$, $\forall i \in \hat{n}$

Pozn: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nenulové OG $\Rightarrow \frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1, \dots, \frac{1}{\|\vec{x}_n\|}\vec{x}_n$ jsou ON

Pozn: OG báze H je zároveň polární báze sk. součinu

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ON báze H $\quad {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \mathbb{I}$

Věta LN ortogonálních vektorů

Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou nenulové a OG v H, pak jsou LN

Dk

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0},\ \forall j \in \hat{n}: 0 = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \underbrace{\|\vec{x}_j\|^2}_{\neq 0}$$

Věta Souřadnice v OG (ON) bázi

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je OG báze H_n

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\| \vec{x}_i \|^2}$$

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ON báze

$x_i^{\#}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle$ ... Fourierův koeficient

Dk

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, $\forall j \in \hat{n}$: $\langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \| \vec{x}_j \|^2$

Věta Existence ortonormální báze

Nechť H_n nad T, Pak existuje ON báze H_n

Dk

OG báze = polární báze $\langle \cdot | \cdot \rangle$ a ta existuje $\Rightarrow$ „vydělením normou dostaneme ON bázi"

Praktické hledání ON báze Gramovým-Schmidtovým OG(ON) procesem

Věta Gramova-Schmidtova

Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN v H_n nad T,

Pak existují $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ OG(ON) tak, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]_\lambda$

„LN vektory lze ortogonalizovat"

Dk

$$\vec{y}_k = \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{x}_k | \vec{y}_i \rangle}{\| \vec{y}_i \|^2} \vec{y}_i$$

$\vec{y}_1 := \vec{x}_1$,

indukce: nechť $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{k-1}$ OG a $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{k-1}]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}]_\lambda$, $k \geq 2$

$\vec{y}_k := \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{y}_i \quad \Rightarrow [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda$

$\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ OG $\leftarrow$ chci

$0 = \langle \vec{x}_k | \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{x}_k | \vec{y}_j \rangle - \sum_{i=1} \alpha_i \langle \vec{y}_i | \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_k | \vec{y}_j \rangle - \alpha_j \| \vec{y}_j \|^2$

$\alpha_j = \frac{\langle \vec{x}_k | \vec{y}_j \rangle}{\| \vec{y}_j \|^2}$, $\forall j \in \widehat{k-1}$

Pozorování: $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ OG, pak $\vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{x} | \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2}$ je kolmý na $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$

Věta Besselova nerovnost

Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ ON v $\mathcal{H}$:

Pak $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$ $\|\vec{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2$

Dk

$$0 \leq \langle \underbrace{\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i}_{} \,|\, x - \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j \rangle =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \,|\, \vec{x} \rangle = (*) = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \,|\, \vec{x} \rangle$$

je kolmý na $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, tedy i na jejich LK

$\langle \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 | \vec{x} \rangle =$

$= \alpha_1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_2 | \vec{x} \rangle$

$$(*) = \|x^2\| - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \langle \vec{x}_i | \vec{x} \rangle}_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{x}_i | \vec{x} \rangle}$$

Věta

Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ON soubor v $\mathcal{H}_n$, následující výroky jsou ekvivalentní

1. $\mathcal{X}$ je báze
2. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \langle \vec{y} | \vec{x}_i \rangle}_{}$

   Standardní sk. součin souřadnic v bázi $\mathcal{X}$ (Fourierových koeficientů)
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}_{}|^2$

   norma daná st. sk. součinem ze souřadnic v $\mathcal{H}$

Domácí úkol

Ve V_n lze zadat skalární součin, tím, že řekneme o nějaké bázi X, že je ortonormální

Nechť $X = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right)$ je ON báze $\mathbb{R}^4$

Jak vypadá $\langle \vec x | \vec y \rangle$ pomocí složek a dokažte, že jde o sk. součin

Ortogonální doplněk

Definice

Nechť $M \subset \mathcal{H}$, $M \neq \emptyset$.
Pak OG doplňkem M rozumíme $M^\perp = \{ \vec x \in \mathcal{H} \,|\, (\forall \vec y \in M)(\langle \vec x | \vec y \rangle = 0) \}$

Věta vlastnost $M^\perp$

1. $M^\perp \subset\subset \mathcal{H}$
2. $(M^\perp)^\perp \supset M$

Dk

2. $(M^\perp)^\perp = \{ \vec x \in \mathcal{H} \,|\, (\forall \vec y \in M^\perp)(\langle \vec x | \vec y \rangle = 0) \}$

~~Definice~~ **Věta** OG rozklad

Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$, $\dim P < +\infty$

1. $P \oplus P^\perp = \mathcal{H}$
2. $(P^\perp)^\perp = P$

Dk • $P = \{\vec 0\}$, $P^\perp = \mathcal{H}$

• $\dim P = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ ON báze P, $X = (\vec x_1, \dots, \vec x_n)$

OG průmět $\vec x$ do P

ukážeme, že $\forall \vec x \in \mathcal{H}$ najdeme $\vec x_P \in P$, $\vec x_{P^\perp} \in P^\perp$ tak, že $\vec x = \vec x_P + \vec x_{P^\perp}$

$\vec x_P := \sum_{i=1}^{n} \langle \vec x | \vec x_i \rangle \vec x_i$

$\underbrace{\vec x - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec x | \vec x_i \rangle \vec x_i}$ (Bessel) ~~[illegible]~~ $\perp \vec x_j$, $j \in \hat n$

$\perp$ na všechny LK $\vec x_1, \dots, \vec x_n$

$\perp$ na všechny vektory z P

$P \oplus P^{\perp} = \mathcal{H} \Leftarrow\Rightarrow P \cap P^{\perp} = \{\vec{o}\}$

$\vec{x} \in P \cap P^{\perp}: \; 0 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \Leftarrow\Rightarrow \vec{x} = \vec{o}$

② $(P^{\perp})^{\perp} = P$

$\supseteq$ ✓

$\subseteq: \vec{x} \in (P^{\perp})^{\perp}, \vec{x} \in \mathcal{H} \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_{p\perp} : 0 = \langle \vec{x} | \vec{x}_{p\perp} \rangle = \langle \vec{x}_p | \vec{x}_{p\perp} \rangle + \|x_{p\perp}\|^2$

$\Rightarrow \vec{x}_p = \vec{o}$

$$\boxed{\vec{x}_p := \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i}$$

SAM!!

Věta OG průmět je nejlepší aproximace

Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$, $\dim P < +\infty$,

$\forall \vec{x} \in \mathcal{H}: \forall \vec{y} \in P: \|\vec{x} - \vec{x}_p\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$

Metrická geometrie

* V celé kapitole uvažujeme $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$

• Vzdálenost

Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$, $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$.
Pak vzdáleností množin M_1 a M_2 nazveme číslo

$$\rho(M_1, M_2) := \inf \{ \|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}$$

Věta Vzdálenost bodu od podprostoru

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad T a nechť $\vec{a} \in \mathcal{H}$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$.
Pak $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P\perp}\|$

Důkaz

Podle definice je $\rho(\vec{a}, P) = \inf \{ \|\vec{a} - \vec{x}\| \mid \vec{x} \in P \}$.
Ukažme nejprve, že $\rho(\vec{a}, P) \geq \|\vec{a}_{P\perp}\|$.
Konečnou dimenzi potřebujeme, abychom mohli použít větu o OG rozkladu.
Pro každé $\vec{x} \in P$ platí podle Pythagorovy věty:

$$\|\vec{a} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{a}_{P\perp} + (\vec{a}_P - \vec{x})\|^2 = \|\vec{a}_{P\perp}\|^2 + \|\vec{a}_P - \vec{x}\|^2 \geq \|\vec{a}_{P\perp}\|^2$$

Proto platí také nerovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}_{P\perp}\|$

Při volbě $\vec{x} = \vec{a}_P$ dokonce nastává rovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| = \|\vec{a}_{P\perp}\|$, proto je infimum rovno minimu, a to $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P\perp}\|$

21.5. Pondělí	24.5. Čtvrtek
II. kontrolní test	Předtermín

Bez afinních obalů u ZKOUŠKY, bez Sylvestrova kritéria,

Domácí úkol

Nechť jsou dány vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$. Gramovou maticí vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazveme $G \in T^{n,n}$, kde $G_{ij} = \langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle$.

Speciálně: je-li $\underbrace{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}_{\mathcal{X}}$ báze $\mathcal{H}$, pak $G = {}^{\mathcal{X}}Q$

Dokažte: a) $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LZ $\Rightarrow \det G = 0$

b) $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN $\Rightarrow \det G > 0$

c) $P \subset\subset \mathcal{H}$ ($\dim P < +\infty$) a $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je báze P

Je-li $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_{p\perp}$, pak platí $\|\vec{x}_{p\perp}\|^2 = \dfrac{\det G(\vec{x}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)}{\det G(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)}$

Rieszova věta

Nechť $\varphi \in \mathcal{H}_n^{\#}$. Pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$, tak, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n$

Důkaz

① $\varphi = \theta \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{o}$

② $\varphi \neq \theta \Rightarrow h(\varphi) = 1$, $d(\varphi) = n-1$

$\Rightarrow \mathcal{H}_n = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^{\perp}$

$\forall \vec{x} \in \ker\varphi$: $\varphi(\vec{x}) = 0 = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \Rightarrow \vec{y} \in (\ker\varphi)^{\perp} = [\vec{u}]_\lambda$, kde $\|\vec{u}\| = 1$

tj.: $\vec{y} = \alpha\vec{u}$ pro nějaké $\alpha \in T$

$\vec{x} := \vec{u}$: $\varphi(\vec{u}) = \langle \vec{u} | \alpha\vec{u} \rangle = \bar{\alpha}\underbrace{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}_{1}$

$\Rightarrow \alpha = \overline{\varphi(\vec{u})}$

existuje jediný kandidát $\vec{y} = \overline{\varphi(\vec{u})} \cdot \vec{u}$

$\forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n$: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$

$\varphi(\vec{x}_{\ker\varphi} + \vec{x}_{(\ker\varphi)^\perp}) = \underbrace{\varphi(\vec{x}_{\ker\varphi})}_{0} + \varphi(\beta\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{u})$

$\langle \vec{x}_{\ker\varphi} + \beta\vec{u} | \overline{\varphi(\vec{u})} \cdot \vec{u} \rangle = \langle \vec{x}_{\ker\varphi} | \overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u} \rangle + \beta \langle \vec{u} | \overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u} \rangle =$

$= \beta\varphi(\vec{u}) \underbrace{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}_{1}$

Sdružený operátor

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$.
Pak $B \in \mathcal{L}(H_n)$ nazveme sdružený operátor k A, pokud $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H_n$ platí: $\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle$.
Značíme A^*

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$.
Pak existuje právě jeden sdružený operátor k A.

Lemma

Nechť $\vec{y} \in H_n$. $\forall \vec{x} \in H_n \ \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$
$\forall \vec{x}, \vec{z} \in H_n \ \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle \Rightarrow \vec{y} = \vec{z}$

Důkaz

Existence: beru libovolné $\vec{y} \in H_n$ a definuji $\varphi(\vec{x}) = \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle \overset{\text{RIESZ}}{=} \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$,

kde $\vec{z}$ je jednoznačně určený vektor z H_n
$A^*\vec{y} := \vec{z}$
Je pravda, že $A^* \in \mathcal{L}(H_n)$ a $\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A^*\vec{y} \rangle$

Beru $\alpha \in T$, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in H_n$
$A^*(\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) \overset{?}{=} \alpha A^* \vec{y}_1 + A^* \vec{y}_2$

$\langle A\vec{x} | \alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle \overset{\text{Z DEF}}{=} \langle \vec{x} | A^*(\alpha \vec{y}_1 + \vec{y}_2) \rangle$
$\overline{\alpha} \langle A\vec{x} | \vec{y}_1 \rangle + \langle A\vec{x} | \vec{y}_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle \vec{x} | A^* \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x} | A^* \vec{y}_2 \rangle =$
$= \langle \vec{x} | \alpha A^* \vec{y}_1 + A^* \vec{y}_2 \rangle$

Jednoznačnost: Nechť B je také sdružený operátor k A:
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H_n \ \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A^* \vec{y} \rangle$
$= \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle$ $\Big\} \ B = A^*$

Normální operátory a matice

Definice

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$

	nad $\mathbb{C}$	nad $\mathbb{R}$
• $AA^* = A^*A$	normální	normální
• $AA^* = I$	unitární	ortogonální
• $A = A^*$	hermitovský	symetrický

Definice

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

• $A \cdot A^H = A^H A$ normální
• $A \cdot A^H = \mathbb{I}$ unitární
• $A = A^H$ hermitovská

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

• $AA^T = A^T A$ normální
• $A \cdot A^T = I$ ortogonální
• $A = A^T$ symetrický

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, $\mathcal{X}$ je ON báze H_n

Pak platí: ① (nad $\mathbb{C}$) A normální $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}\!A$ normální
② A unitární $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}\!A$ unitární
③ A hermitovský $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}\!A$ hermitovský

* A je unitární $\Leftrightarrow$ sloupce (řádky) jsou ON při st. skalárním součinu

Lemma

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, A je hermitovský.
Pokud $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$, $\forall \vec{x} \in H_n \Rightarrow A = \Theta$

Domácí úkol

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$.
Pokud $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{H} \Rightarrow A = \Theta$
Hint: polarizační identita platí pro každou sesquilineární formu
Najděte $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $A \neq \Theta \wedge \langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Důkaz lemmatu

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H_n$

$$0 = \langle A(\vec{x}+\vec{y}) | \vec{x}+\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle}_{0} + \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle + \underbrace{\langle A\vec{y} | \vec{x} \rangle}_{\langle \vec{y} | A\vec{x} \rangle} + \underbrace{\langle A\vec{y} | \vec{y} \rangle}_{0}$$

$\hat{}$ A hermitovský

$0 = 2\mathrm{Re}\langle Ax | y \rangle$

speciálně zvolím $y = Ax$: $0 = 2\mathrm{Re}\langle Ax | Ax \rangle \Rightarrow Ax = 0, \forall x \in H_n$

$\Rightarrow A = \Theta$

Věta: Charakterizace normálních operátorů

Nechť H_n nad $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(H_n)$.

Pak A je normální $\Leftrightarrow \|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ po každé $\vec{x} \in H_n$.

Důkaz

$\Rightarrow$: $\langle A\vec{x} | A\vec{x} \rangle = \langle \cancel{A}\vec{x} | A^*A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | AA^*\vec{x} \rangle = \langle A^*\vec{x} | A^*\vec{x} \rangle$

$\Leftarrow$: Ukážeme nejdříve, že $AA^* - A^*A$ je hermitovský operátor.

$$(AA^* - A^*A)^* = (A^*)^*A^* - A^*(A^*)^* = AA^* - A^*A$$

$$\langle (AA^* - A^*A)\vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle AA^*\vec{x} | \vec{x} \rangle - \langle A^*A\vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle A^*\vec{x} | A^*\vec{x} \rangle - \langle A\vec{x} | A\vec{x} \rangle = 0$$

Podle lemmatu je $AA^* - A^*A = \Theta$, tedy A je normální.

Věta Vlastní vektory normálních operátorů:
Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, H_n nad $\mathbb{R}$, A je normální.
Pak ① $\vec{x}$ je vlastní vektor op. A k $\lambda \Leftrightarrow \vec{x}$ je vlastní vektor op. A^* k λ
② vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz
① Ukážeme, že $A-tI$ je normální operátor, $\forall t \in \mathbb{R}$. Pak podle předchozí věty platí:

$$\|(A-tI)\vec{x}\| = \|(A^*-tI)\vec{x}\|$$

$$\begin{aligned}(A-tI)(A^*-tI) &= (A-tI)A^* - (A-tI)tI = \\ &= AA^* - tIA^* - AtI + tItI = \\ &= A^*A - A^*tI - tIA + tItI = \\ &= A^*A - tIA - A^*tI + tItI = \\ &= (A^*-tI)A - (A^*-tI)(tI) = \\ &= (A^*-tI)(A-tI)\end{aligned}$$

② Nechť $\lambda, \nu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \nu$ a nechť $\vec{x}$ je vl. vektor k λ a nechť $\vec{y}$ je vl. vektor k ν.

Pak platí: $\lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\lambda\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|A^*\vec{y}\rangle = \nu\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$

Proto $(\lambda-\nu)\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$, a protože $\lambda \neq \nu$ tak musí platit $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$

Věta | Diagonalizovatelnost normálních operátorů

Nechť $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

Je-li A normální, pak A je diagonalizovatelný.

Důkaz

Jelikož $T = \mathbb{C}$, platí automaticky, že $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$.

Zbývá tedy ověřit, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$, pro každé $\lambda \in \sigma(A)$

Uvažujme libovolné $\lambda \in \sigma(A)$

Víme, že vlastní podprostor P_λ příslušný λ splňuje, že $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$.

Ukažme, že také $A(P_\lambda^\perp) \subset P_\lambda^\perp$.

K tomu stačí ověřit, že pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ a pro každé $z \in P_\lambda$ platí $\langle A\vec{x} | \vec{z} \rangle = 0$

S využitím předchozí věty máme

$$\langle A\vec{x} | \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | A^*\vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | \overline{\lambda} \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle = 0$$

Označme $k = \nu_g(\lambda)$,

$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ báze P_λ

$\hat{\mathcal{X}}\ (\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ báze $P_\lambda^\perp$

Potom $\cancel{\mathcal{X}}$ $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathcal{H}_n$

$$^{\mathcal{X}}A = \left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{X}} \dots (A\vec{x}_k)_{\mathcal{X}}\ (A\vec{x}_{k+1})_{\mathcal{X}} \dots (A\vec{x}_n)_{\mathcal{X}} \right) =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad k \quad & \quad n-k \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 & & & \\ & 0 & \ddots & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & ^{\hat{\mathcal{X}}}B & \end{array} \right) \end{array}$$

$B \in \mathcal{L}(P_\lambda^\perp)$, $B = A|_{P_\lambda^\perp}$

Vidíme, že $p_A(t) = (\lambda - t)^k p_B(t)$.

Ukážeme, že $p_B(\lambda) \neq 0$. Potom bude jasné, že $\nu_a(\lambda) = k$

Kdyby $p_B(\lambda) = 0$, pak $\lambda \in \sigma(B)$, tj. existoval by nenulový vektor $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ takový, že by platilo: $\lambda\vec{x} = B\vec{x} = A\vec{x} \Rightarrow \vec{x} \in P_\lambda$.

To je ale spor, neboť $P_\lambda \cap P_\lambda^\perp = \{0\}$

Věta Normální operátory a ON báze z vlastních vektorů
Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, H_n nad $\mathbb{C}$.
Pak A je normální $\Leftrightarrow$ existuje ON báze H_n z vlastních vektorů

Důkaz

$\Rightarrow$: Z předchozí věty plyne, že existuje báze H_n z vlastních vektorů. Tu můžeme podrobit Gram-Schmidtovým OG procesem a poté vynásobit jednotlivé vektory převrácenou hodnotou normy a získáme ON bázi

$\Leftarrow$: Nechť $\mathcal{X}$ je báze z vlastních vektorů.
Pak ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{D}$ je diagonální matice:

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^H = \mathbb{D}(\overline{\mathbb{D}^T}) = \mathbb{D}\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}}\mathbb{D} = (\overline{\mathbb{D}^T})\mathbb{D} = \mathbb{D}^H\mathbb{D}$$

Je-li navíc $\mathcal{X}$ ortonormální, pak A je normální operátor.

Věta Charakterizace unitárních operátorů
Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$
Pak následující výroky jsou ekvivalentní

1. A je unitární
2. $A^{-1} = A^*$
3. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí: $\langle A\vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$
4. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí: $\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \|$

Důkaz
Stačí dokázat cyklus implikací

1 => 2: Plyne přímo z definice unitárního operátoru, neboť jsme na konečné dimenzi.

2 => 3: Pokud $A^{-1} = A^*$ pak: $\langle A\vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A^* A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$

3 => 4: Stačí zvolit $\vec{y} := \vec{x}$

4 => 1:

Spektrální kritérium

Věta

Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, H_n nad $\mathbb{C}$

A je normální $\Leftrightarrow \exists$ ON báze H_n z vl. vektorů A

Věta

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

A je normální $\Leftrightarrow \exists$ ON báze unitárního $\mathbb{C}^{n,n}$ z vl. vektorů A

Důkaz

Definuji $A \in \mathcal{L}(\overset{\mathbb{C}^n}{H_n}) : {}^{\mathcal{E}}A = A$

A je normální $\overset{\mathcal{E} \text{ je ON báze}}{\Longleftrightarrow}$ A je normální $\Leftrightarrow \exists$ ON báze $\mathbb{C}^n$ z vl. vektorů A

Věta

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

A je normální $\Leftrightarrow \exists D$ diagonální, $\exists U$ unitární: $A = UDU^H$

$(A = UDU^{-1})$

Věta

Nechť Q je kv. forma ve V_n nad $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$ báze V_n.

Ozn. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vl. ${}^{\mathcal{X}}Q$ ($\lambda_i \in \mathbb{R} \Leftarrow$ hermitovskost)

Pak existuje báze $\mathcal{Z}$:

$$ {}^{\mathcal{Z}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

Důkaz

${}^{\mathcal{X}}Q$ je hermitovská $\Rightarrow {}^{\mathcal{X}}Q$ je normální $\Rightarrow \exists U$ unitární (složená z vl. vektorů ${}^{\mathcal{X}}Q$)

$$ {}^{\mathcal{X}}Q = U \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{{}^{\mathcal{Z}}Q} U^H \overset{U \text{ unit.}}{\Longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{{}^{\mathcal{Z}}Q} = U^H \, {}^{\mathcal{X}}Q \, U $$

$\circledast$: ${}^{\mathcal{I}t}Q = ({}^{t}I^{x})^{T\,x}Q\,\overline{{}^{\mathcal{I}t}I^{x}}$

definujeme: ${}^{t}I^{x} := \overline{U}$

Důsledek | Spektrální kritérium

Definice

Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ (ruzné).

Pak vektorovým součinem $\vec{x} \times \vec{y}$ rozum $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$:

① $\vec{z} \perp \vec{x}, \vec{y}$

② $\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2$

③ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0$

$\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ LZ

$\vec{x}, \vec{y}$ LN: $\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \left(1 - \underbrace{\frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2}}_{\cos^2 \varphi}\right) \Rightarrow \|\vec{z}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \varphi$

SAMI: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ LN

3. podmínka $\Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je pravotočivá báze