Datum sestavení dokumentu: 11. června 2012

Lineární algebra 2

Ľubomíra Balková a Emil Humhal

e-mail: `lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz, emil.humhal@fjfi.cvut.cz`

Obsah

1 Matice a lineární zobrazení **2**
1.1 Lineárnímu zobrazení je přiřazena matice v bázích . . . 2
1.2 Matici je přiřazeno lineární zobrazení . . . 2
1.3 V prostorech T^n matice a lineární zobrazení jedno jest . . . 3
1.4 Hodnost matice . . . 4
1.4.1 Vztah hodnosti matice a hodnosti lineárního zobrazení . . . 4
1.4.2 Regulární a singulární matice . . . 5
1.4.3 Frobeniova věta . . . 5
1.4.4 Hodnost součinu matic . . . 7
1.4.5 Hodnost transponované matice . . . 7

2 Inverzní matice a úplná Gaussova eliminace **10**
2.1 Praktický výpočet $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ – úplná Gaussova eliminace . . . 11

3 Permutace a determinanty **13**
3.1 Permutace . . . 13
3.2 Determinanty . . . 15

4 Skalární součin a ortogonalita **24**
4.1 Skalární součin . . . 24
4.2 Ortogonalita . . . 28

5 Spektrální teorie matic **34**
5.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic . . . 34
5.2 Diagonalizace matic . . . 37

6 Vlastnosti, zejména spektrální, vybraných typů matic **40**
6.1 Vlastnosti normálních matic . . . 41
6.2 Vlastnosti unitárních matic . . . 43
6.3 Vlastnosti hermitovských matic . . . 44
6.3.1 $\mathbb{A}$-skalární součin pro hermitovské matice . . . 44

7 Lineární geometrie **46**
7.1 Lineární variety . . . 46
7.1.1 Vzájemná poloha a průnik lineárních variet . . . 50
7.1.2 Popis lineární variety . . . 50
7.2 Konvexní množiny . . . 51
7.3 Metrická geometrie . . . 53

Reference **55**

1 Matice a lineární zobrazení

Zatímco zimní semestr (dále jen ZS) byl z velké části zasvěcen lineárním zobrazením, o letním semestru se dá říci, že je věnován především maticovému počtu. Cílem této kapitoly bude přesvědčit vás, jak úzce spolu pojem matice a lineární zobrazení souvisí, a dokonce ukázat, že v prostorech T^n matice a lineární zobrazení jedno jest.

Předpoklady: V celé kapitole uvažujeme výlučně vektorové prostory konečné dimenze a těleso vždy pouze reálné nebo komplexní, tj. $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

1.1 Lineárnímu zobrazení je přiřazena matice v bázích

To je fakt, který známe ze ZS. Připomeňme definici matice zobrazení v daných bázích.

Definice 1. *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T (indexy značí dimenzi). Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$, jejíž j-tý sloupec je definován jako $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$, nazýváme* **matice zobrazení** A **v bázích** $\mathcal{X}$ **a** $\mathcal{Y}$.

Příklad 1. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované následovně*

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Najděte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. (Uvědomte si, že jednou je $\vec{e}_1$ vektorem z $\mathbb{R}^2$ a podruhé z $\mathbb{R}^3$!)

Definice říká, že pro j-tý sloupec platí $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\cdot j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$. Protože $A\vec{e}_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, tj. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, máme určený první sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Podobně spočteme druhý a dostaneme výsledek.
Závěr:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Matici je přiřazeno lineární zobrazení

Následující věta říká, že také každé matici odpovídá lineární zobrazení a v určitém smyslu je jediné.

Věta 1 (O zobrazení určeném maticí při bázích)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T, nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T (indexy vyjadřují dimenzi) a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $A : P_n \to Q_m$, jehož matice zobrazení v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ splňuje*

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}.$$

Takové zobrazení A nazýváme **zobrazení určené maticí** $\mathbb{A}$ **při bázích** $\mathcal{X}$ **a** $\mathcal{Y}$.

Důkaz. Naznačíme, co je třeba dokázat.

1. Existenci:
   To znamená, že musíme definovat zobrazení, které splňuje podmínky z věty, tj.

   (a) $A : P_n \to Q_m$,

   (b) A je lineární,

   (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}$.

Ověřte sami, že když pro každé $\vec{x} \in P_n$ definujeme $A\vec{x}$ pomocí jeho souřadnic v bázi $\mathcal{Y}$ jako

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} := \mathbb{A} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{X}},$$

získáme zobrazení splňující výše uvedené tři požadavky.

2. Jednoznačnost:
Nechť $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ splňuje ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}$. Pak ze ZS víme, že pro každé $\vec{x} \in P_n$ platí

$$(B\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (A\vec{x})_{\mathcal{Y}}.$$

Pak ale pro každé $\vec{x} \in P_n$ také platí $A\vec{x} = B\vec{x}$, a tedy $A = B$.

□

Důsledek 1. *V příkladech bývá často zadáno lineární zobrazení pomocí své matice v bázích. Právě jsme se dozvěděli, že takové zadání skutečně určuje dané lineární zobrazení jednoznačně.*

Shrnutí

Jsou-li $\mathcal{X}$ báze P_n a $\mathcal{Y}$ báze Q_m. Pak

- každému lineárnímu zobrazení $A : P_n \to Q_m$ je přiřazena matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$,
- každé matici $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ je přiřazeno právě jedno lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

1.3 V prostorech T^n matice a lineární zobrazení jedno jest

Věta 2 (Matice a lineární zobrazení v T^n)**.** *Nechť T je těleso.*

1. *Pro každé lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ existuje matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ s prvky z T, která splňuje $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každý vektor $\vec{x} \in T^n$.*
2. *Naopak, je-li $\mathbb{A}$ matice typu $m \times n$ s prvky z T, pak určuje vztahem $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ lineární zobrazení $A : T^n \to T^m$.*

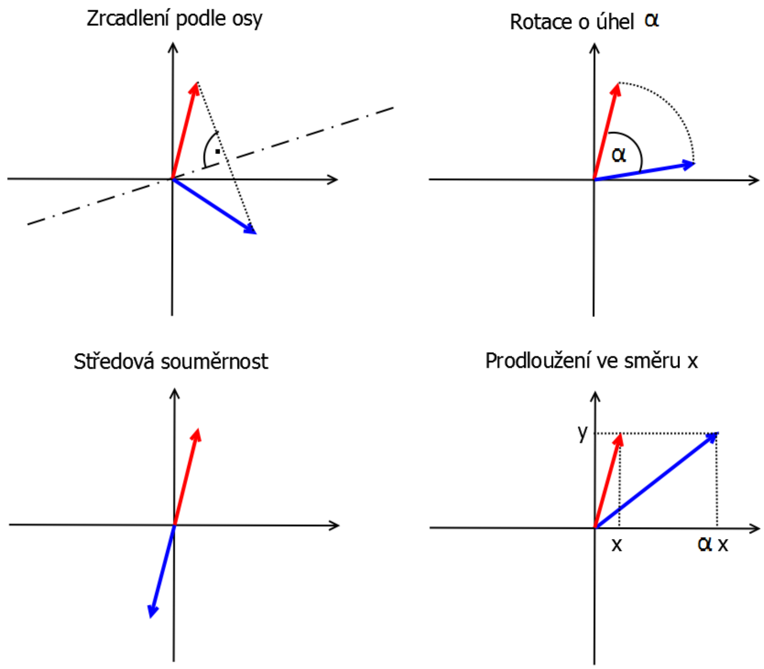
Důkaz. 1. Snadno sami ověříte, že hledanou maticí $\mathbb{A}$ je matice ${}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m}$.

2. Ještě snáze ověříte, že takto definované zobrazení A je skutečně z T^n do T^m a je lineární.

□

Příklad 2. *Již v ZS jsme uváděli nejznámější příklady lineárních zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sami si rozmyslete, že operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je určený maticí $\mathbb{A}$ při standardní bázi $\mathcal{E}_2$ prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.*

1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(A je zrcadlení podle osy x),*
2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(A je zrcadlení podle osy $x = y$),*
3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *(A je rotace o úhel α po směru hodinových ručiček),*
4. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(A je středová souměrnost),*
5. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(A je prodloužení (zkrácení) ve směru x, kde pro $\alpha > 1$ jde o prodloužení a pro $0 < \alpha < 1$ o zkrácení).*



Obrázek 1: Červeně vyznačeny vektory a modře jejich obrazy.

1.4 Hodnost matice

Víme ze ZS, co je hodnost lineárního zobrazení. Nyní si zavedeme tento pojem i pro matice.

Definice 2. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T.* **Hodnost matice** *$h(\mathbb{A})$ je definována jako*

$$h(\mathbb{A}) = dim\,[\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda,$$

kde $\mathbb{A}_{\cdot j}$ značí j-tý sloupec matice $\mathbb{A}$.
Slovy: „$h(\mathbb{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$.“

Vyšetřování hodnosti matice je tedy podobné vyšetřování LZ a LN souboru vektorů. Matici upravíme do horního stupňovitého tvaru (z definice je jasné, že ekvivalentní řádkové úpravy hodnost matice nemění). Pak počet hlavních sloupců je roven hodnosti matice.

Příklad 3. *Spočtěte hodnost matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V horním stupňovitém tvaru jsou první, druhý a čtvrtý sloupec hlavní, tedy $h(\mathbb{A}) = 3$.

1.4.1 Vztah hodnosti matice a hodnosti lineárního zobrazení

Ukažme, jak úzce spolu hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení souvisí.

Věta 3 (Hodnost zobrazení a hodnost matice)**.** *Nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.*

Důkaz. Stačí, abychom rozepsali, co je $h(A)$ (známe ze ZS) a co je $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$.

$$h(A) = \dim\, A(P_n) = \dim\, A[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = \dim\, [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda = \dim\, V,$$

kde $V = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

$$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim\, [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \ldots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda = \dim\, W,$$

kde $W = [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \ldots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda$.

Je snadné nahlédnout, že souřadnicový izomorfismus: $Q_m \to T^m$, který vektoru $\vec{y} \in Q_m$ přiřadí vektor $(y)_{\mathcal{Y}}$, je bijekcí: $V \to W$, proto $W \cong V$ (W je izomorfní s V). Ze ZS z Věty o alternativní definici izomorfismu víme, že pro prostory W, V s $\dim < \infty$ platí $W \cong V \Leftrightarrow \dim\, V = \dim\, W$. $\square$

Důsledek 2. *Zobrazení A určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ splňuje $h(A) = h(\mathbb{A})$.*

Poznámka 1. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z T a $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in T^n$. Pak z předchozího důsledku plyne, že $h(A) = h(\mathbb{A})$. Tedy například všechny operátory z Příkladu 2 mají hodnost 2.*

1.4.2 Regulární a singulární matice

Nyní zavedeme velmi důležitý pojem regulární matice, který se bude objevovat ve většině následujících kapitol. Postupně si budeme vyslovovat tvrzení, která budou regulární matice charakterizovat pomocí různých vlastností (soustava LAR s jediným řešením, inverzní matice, nenulový determinant, nenulová vlastní čísla atd.)

Poznámka 2. *Matici typu $n \times n$ nazýváme také* **čtvercová matice řádu** *n.*

Definice 3. *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ řádu n se nazývá* **regulární***, pokud $h(\mathbb{A}) = n$. V opačném případě se $\mathbb{A}$ nazývá* **singulární***.*

Uveďme větu, která vysvětlí, jak souvisí pojem regulární operátor a regulární matice.

Věta 4 (Regulární operátor a regulární matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T a nechť P_n je vektorový prostor nad T s bází $\mathcal{X}$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární matice, právě když zobrazení A určené maticí $\mathbb{A}$ při bázi $\mathcal{X}$ je regulární operátor.*

Důkaz. Důkaz je hotový, pokud si uvědomíme, že pro $A \in \mathcal{L}(P_n)$ ze ZS z Věty o jednodušším ověření izomorfnosti zobrazení víme, že A je „na“ P_n (tj. $h(A) = n$) právě tehdy, když A je izomorfismus, tedy regulární operátor. Pak už stačí aplikovat Větu 3, která dává rovnost $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = h(\mathbb{A})$. $\square$

Poznámka 3. *Všechny matice z Příkladu 2 byly regulární. A tedy i všechny operátory z Příkladu 2 byly regulární (prosté a „na“).*

1.4.3 Frobeniova věta

Už ze ZS umíme zjistit, zda má soustava lineárních algebraických rovnic (LAR) řešení, zda má více řešení, a jedno řešení umíme najít. Frobeniova věta zformuluje elegantně pomocí pojmu hodnost matice podmínku řešitelnosti soustavy LAR s pravou stranou. Dále se dozvíme, jak určit počet LN řešení homogenní soustavy, a naučíme se najít všechna řešení soustavy LAR. Frobeniovu větu budeme umět dokázat pomocí znalostí řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je lineární zobrazení.

Obvykle tečku $\cdot$ při násobení čísel i vektorů vynecháváme. Ve Frobeniově větě a jejím důkazu nokoliv, protože tak zdůrazňujeme rozdíl mezi součinem matice a vektoru $\mathbb{A} \cdot \vec{x}$ a působením zobrazení na vektor $A\vec{x}$.

Věta 5 (Frobeniova). *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T. Nechť $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

platí:

1. *Soustava* (1) *má řešení* $\Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, *tj. hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*

2. *Označme S_0 množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$, tj. $S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$. Pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.*

3. *Nechť $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Pak množina všech řešení soustavy* (1), *tj. $S = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$, má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde $\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Vektor $\vec{a}$ nazýváme* **partikulárním řešením**.

Důkaz. K důkazu 1. tvrzení nám stačí znalosti ZS. K důkazu 2. a 3. tvrzení navíc využijeme vztahy mezi maticemi a lineárními zobrazeními, které jsme si v této kapitole vysvětlili.

1. V následujících ekvivalencích využíváme mimo jiné teorie LZ a LN.

   (1) má řešení $\Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in T^n$ takový, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow$ existuje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\alpha_1 \mathbb{A}_{\cdot 1} + \alpha_2 \mathbb{A}_{\cdot 2} + \cdots + \alpha_n \mathbb{A}_{\cdot n} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \in [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda \Leftrightarrow [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda = [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\cdot n}, \vec{b}]_\lambda \Leftrightarrow \dim [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda = \dim [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\cdot n}, \vec{b}]_\lambda \Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. V předposlední ekvivalenci jsme využili znalosti ze ZS: Je-li $P \subset\subset Q$ a $\dim P = \dim Q$, pak $P = Q$.

2. Nechť $A : T^n \to T^m$ je lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$, tj. pro každé $\vec{x} \in T^n$ platí $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$. Pak pro S_0 platí:

   $$S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in T^n | A\vec{x} = \vec{0}\} = \ker A.$$

   Ze ZS víme, že jádro lineárního zobrazení tvoří podprostor, tj. $S_0 \subset\subset T^n$, a z 2. věty o dimenzi víme, že $\dim S_0 = d(A) = n - h(A) = n - h(\mathbb{A})$, kde poslední rovnost plyne z Poznámky 1.

3. Uvažujme opět $A : T^n \to T^m$ lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$. Jelikož z předpokladu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ plyne, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení, platí také, že $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení. Ze ZS z Věty o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{b} = A\vec{a}$. A tedy $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{b} = \mathbb{A} \cdot \vec{a}$.

□

Poznámka 4. *Podle definice hodnosti matice říká vlastně 2. tvrzení Frobeniovy věty, že počet LN řešení homogenní soustavy je roven počtu vedlejších sloupců v matici soustavy v horním stupňovitém tvaru.*

Z Frobeniovy věty lze odvodit ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 3. *Homogenní soustava se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n má pouze triviální řešení, tj. pouze nulový vektor je řešením, právě když $\mathbb{A}$ je regulární.*

Důsledek 4. *Nechť $\vec{b} \in T^n$. Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n s prvky z T má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární.*

Příklad 4. *Najděte všechna řešení následujících soustav.*

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} u & + & v & - & 2x & + & y & - & z & = & 6 \\ 2u & + & 2v & - & 4x & - & y & + & z & = & 9 \\ u & + & v & - & 2x & & & & & = & 5 \\ u & - & v & + & x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2u & + & v & + & 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 5u & + & 3v & - & 4x & + & 3y & - & 6z & = & 0 \\ u & + & v & - & 8x & + & y & - & 12z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & 3x & - & y & + & 7 & = & 0 \\ & 6x & - & 2y & + & 14 & = & 0 \\ c) & x & + & y & + & 1 & = & 0 \\ & x & + & 5y & - & 3 & = & 0 \\ & 5x & + & y & + & 9 & = & 0 \end{array}$$

1.4.4 Hodnost součinu matic

Na základě znalosti hodnosti složeného lineárního zobrazení budeme umět dokázat, že pro hodnost součinu matic platí následující věta.

Věta 6 (Hodnost součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbb{B}$ je matice typu $n \times p$ s prvky z tělesa T. Pak platí*

1. $h(\mathbb{AB}) \leq \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$,
2. *je-li $m = n$ a $\mathbb{A}$ regulární, pak $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{B})$,*
3. *je-li $n = p$ a $\mathbb{B}$ regulární, pak $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{A})$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x} \in T^n$ definujme $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ (tedy A je zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při standardních bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$), pak $h(A) = h(\mathbb{A})$. Pro každé $\vec{x} \in T^p$ definujme $B\vec{x} = \mathbb{B} \cdot \vec{x}$, pak $h(B) = h(\mathbb{B})$. Potom $AB\vec{x} = (\mathbb{AB}) \cdot \vec{x}$, a tedy $h(AB) = h(\mathbb{AB})$.
Ze ZS víme:

1. $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,
2. $h(AB) = h(B)$, je-li A izomorfismus ($\Leftrightarrow n = m$ a A je regulární operátor na T^n, což je podle Věty 4 ekvivalentní s regularitou $\mathbb{A}$),
3. $h(AB) = h(A)$, je-li B izomorfismus ($\Leftrightarrow n = p$ a B je regulární operátor na T^n, což je podle Věty 4 ekvivalentní s regularitou $\mathbb{B}$).

Přímo z definic zobrazení A, B, AB získáme tvrzení věty. Vlastně v předchozích vztazích všude nahradíme zobrazení A, B maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. □

Poznámka 5. *Nerovnost v 1. bodě Věty 6 může být ostrá. Nechť* $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, *pak* $\mathbb{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Tedy* $0 = h(\mathbb{AB}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\} = 1$.

1.4.5 Hodnost transponované matice

Velmi zajímavým netriviálním výsledkem je, že v každé matici je počet LN sloupců stejný jako počet LN řádků. K precizní formulaci tohoto tvrzení je třeba nejprve zavést pojem transponovaná matice a k důkazu tohoto tvrzení budeme potřebovat také pojmy komplexně sdružená a hermitovsky sdružená matice.

Definice 4. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T,*

1. *pak matice* **transponovaná** *k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^T$ a je definovaná $\mathbb{A}^T_{ij} := \mathbb{A}_{ji}$,*

$$\textit{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. *pak matice* **komplexně sdružená** *k matici $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, značí se $\overline{\mathbb{A}}$ a je definovaná $\overline{\mathbb{A}}_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ij}}$,*

$$\textit{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -2i & 1-i & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix},$$

3. *pak matice* **hermitovsky sdružená** *k matici* $\mathbb{A}$ *je typu* $n \times m$*, značí se* $\mathbb{A}^H$ *a je definovaná* $\mathbb{A}^H = \overline{\mathbb{A}^T}$*, tj.* $\mathbb{A}^H_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ji}}$*.*

$$\textit{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{A}^H = \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B}^H = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 7 (Vlastnosti transponovaných, komplexně sdružených a hermitovsky sdružených matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je typu* $m \times n$*,* $\mathbb{B}$ *je typu* $n \times p$*, pak*

1. $\overline{\mathbb{A}^T} = \overline{\mathbb{A}}^T$, $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$, $(\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}$,
2. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$,
3. $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\ \overline{\mathbb{B}}$,
4. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H\mathbb{A}^H$.

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Příklad 5. *Ověřte si předchozí větu a vlastnosti na maticích* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Věta 8. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je typu* $m \times n$ *s prvky z* T*. Pak* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$*.*
Slovy: „Každá matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Lemma 1. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je typu* $m \times n$ *s prvky z* T*. Pak* $h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$*.*

Důkaz. Označme

$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\} \text{ a } \tilde{S}_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Ukážeme, že $S_0 = \tilde{S}_0$.

- $\tilde{S}_0 \subset S_0$: Tato inkluze platí, protože splňuje-li $\vec{x}$, že $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, pak $\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{A}^H\vec{0} = \vec{0}$.
- $\tilde{S}_0 \supset S_0$: Nechť $\vec{x} \in S_0$, pak $\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$. Vynásobíme obě strany rovnosti zepředu opruhovaným a transponovaným vektorem $\vec{x}$ (jde tedy o řádek). Potom $\vec{x}^H\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = 0$. Podle Věty 7 máme $\vec{x}^H\mathbb{A}^H = (\mathbb{A}\vec{x})^H$, odkud plyne $(\mathbb{A}\vec{x})^H\mathbb{A}\vec{x} = 0$. Jelikož $\mathbb{A}\vec{x} \in T^m$, označme jeho složky $\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$. Pak $(\mathbb{A}\vec{x})^H = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m})$. Dostáváme

  $$(\mathbb{A}\vec{x})^H\mathbb{A}\vec{x} = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_m|^2 = 0,$$

  odkud plyne, že $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$, a tedy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, což znamená, že $\vec{x} \in \tilde{S}_0$.

Z Frobeniovy věty víme, že $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A}^H\mathbb{A})$ a $\dim \tilde{S}_0 = n - h(\mathbb{A})$. Jelikož $S_0 = \tilde{S}_0$, máme $n - h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = n - h(\mathbb{A})$. □

Lemma 2. *Pro libovolnou matici $\mathbb{B}$ s prvky z T platí $h(\mathbb{B}) = h(\overline{\mathbb{B}})$.*

Důkaz. ponechán čtenáři. $\square$

Důkaz Věty 8. Na jednu stranu máme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^H) = h(\overline{\mathbb{A}^T}) = h(\mathbb{A}^T)$, kde bylo v první rovnosti využito Pomocné lema 1, v nerovnosti Věta 6 o hodnosti součinu matic, v další rovnosti definice hermitovsky sdružené matice a v poslední rovnosti Pomocné lema 2. Na druhou stranu platí $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A}^H) = h(\mathbb{A}\mathbb{A}^H) \leq h(\mathbb{A})$, kde bylo v první rovnosti využito Pomocné lema 2, ve druhé rovnosti Pomocné lema 1 (místo $\mathbb{A}$ jsme v něm uvažovali $\mathbb{A}^H$) a v nerovnosti Věta 6 o hodnosti součinu matic. Dostali jsme tedy $h(\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^T) \leq h(\mathbb{A})$, proto $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$. $\square$

2 Inverzní matice a úplná Gaussova eliminace

Připomeňme, že $\mathbb{I}$ značí jednotkovou matici, tedy čtvercovou matici s jedničkami na diagonále a nulami všude jinde.

Definice 5. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z T. Pokud existuje matice $\mathbb{B}$ tak, že $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{B}$ nazveme* **inverzní** *maticí k $\mathbb{A}$.*

Pozorování 1.

- *$\mathbb{A}$ musí být nutně čtvercová (plyne z pravidel pro násobení matic).*
- *Pro singulární matici inverzní neexistuje (plyne z Věty 6 o hodnosti součinu matic).*

Věta 9. *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.*

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

- Existence:
  Najdeme podobu inverzní matice $\mathbb{B}$ k matici $\mathbb{A}$. Uvažujme lineární operátor A určený maticí $\mathbb{A}$ při standardních bázích. Takový operátor je podle Věty 4 regulární, a existuje tedy operátor k němu inverzní A^{-1}. Položíme-li $\mathbb{B} :=^{\mathcal{E}_n} (A^{-1})$, pak snadno ověříme, že splňuje $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A} = \mathbb{I}$. (Stačí si uvědomit, že $\mathbb{A} :=^{\mathcal{E}_n} A$.)

- Jednoznačnost:
  Nechť $\mathbb{C}$ je také inverzní matice k $\mathbb{A}$, tedy $\mathbb{CA} = \mathbb{AC} = \mathbb{I}$. Pak
  $$\mathbb{C} = \mathbb{CI} = \mathbb{C}(\mathbb{AB}) = (\mathbb{CA})\mathbb{B} = \mathbb{IB} = \mathbb{B}.$$

□

Nyní, když víme, že pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, má smysl ji nějak označit. Obvyklé je značení $\mathbb{A}^{-1}$.

Z Věty 9 a z faktu, že singulární matice nelze invertovat, plyne nová ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 5. *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když existuje $\mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 10 (Vlastnosti inverzních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou čtvercové matice stejného řádu.*

- *Pokud $\mathbb{AB} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
- *Pokud $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
- *Platí $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.*
- *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice. Pak $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$ a $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.*
- *Již víme (Důsledek 4), že soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární. Řešením je pak vektor $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.*

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Věta 11 (Inverzní matice k součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární matice řádu n. Pak také matice $\mathbb{AB}$ je regulární a $(\mathbb{AB})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

Důkaz. Jelikož $\mathbb{AB}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{A}(\mathbb{BB}^{-1})\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{AIA}^{-1} = \mathbb{AA}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle 1. bodu Věty 10, že $\mathbb{AB}$ je regulární a $(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$. □

2.1 Praktický výpočet $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ – úplná Gaussova eliminace

Abychom pochopili, proč funguje úplná Gaussova eliminace, musíme si nejprve uvědomit, že řádkové úpravy v matici odpovídají násobení vhodnou maticí zleva.

Lemma 3. *Nechť $\mathbb{C}$ je matice typu $m \times n$. Provedeme-li ekvivalentní řádkovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{TC}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnou řádkovou úpravou.*

Důkaz. Čtenář snadno ověří, že je tvrzení pravdivé pro všechny ekvivalentní řádkové úpravy:

1. záměna řádků,

2. vynásobení řádku nenulovým číslem,

3. přičtení lineární kombinace ostatních řádků k vybranému řádku.

□

Věta 12 (Ekvivalentní řádkové úpravy a násobení maticí)**.** *Nechť $\mathbb{C}$ je matice typu $m \times n$. Provedeme-li konečný počet ekvivalentních řádkových úprav, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{TC}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými řádkovými úpravami (EŘÚ) ve stejném pořadí.*

Důkaz. Provedeme-li v $\mathbb{C}$ k EŘÚ, je výsledná matice rovna podle Pomocného lematu 3

$$\mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{C},$$

kde $\mathbb{T}_i$ je matice vzniklá z jednotkové i-tou EŘÚ. Označme $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1$, pak $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{I}$ a podle Pomocného lematu 3 vidíme, že $\mathbb{T}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými k EŘÚ provedenými ve stejném pořadí. □

Příklad 6. *V matici $\mathbb{C}$ provádíme EŘÚ: záměna 1. a 2. řádku, přičtení 1. řádku k 2. řádku, vynásobení 3. řádku číslem 2. Ověřte, že vzniklá matice je rovna $\mathbb{TC}$, kde $\mathbb{T}$ vznikla stejnými řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí z jednotkové matice, tj.*

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{TC}, \quad \textit{kde } \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 13 (Úplná Gaussova eliminace)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n a $\mathbb{B}$ je matice typu $n \times m$. Pak $\mathbb{A}$ lze převést ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$. Pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.*

Symbolicky zapsáno

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim \left(\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right).$$

Důkaz. $\mathbb{A}$ po převedení EŘÚ do horního stupňovitého tvaru má na diagonále samá nenulová čísla díky regularitě. Poté každý řádek vydělíme odpovídajícím číslem na diagonále, čímž dostaneme na diagonále jedničky. A nad diagonálou již snadno EŘÚ vyrobíme nuly – nejprve v předposledním řádku (odečtením odpovídajícího násobku posledního řádku), poté ve třetím řádku od konce odečtením vhodné lineární kombinace posledního a předposledního řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že $\mathbb{I}$ vznikla EŘÚ z $\mathbb{A}$ a že $\mathbb{X}$ vznikla stejnými EŘÚ provedenými ve stejném pořadí z $\mathbb{B}$. Z Věty 12 plyne, že existuje $\mathbb{T}$ tak, že $\mathbb{I} = \mathbb{TA}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{TB}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{T} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 6. *Slovíčko úplná naznačuje, že narozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí EŘÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a EŘÚ vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud neskončíme u jednotkové matice.*

Úplnou Gaussovu eliminaci budeme používat k řešení následujících úloh ($\mathbb{A}$ je regulární a ostatní matice jsou správného rozměru):

1. hledání $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$,
2. hledání $\mathbb{A}^{-1}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\mathbb{I}$ v předchozím případě,
3. hledání $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\vec{b}$,
4. hledání $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$, pak využijeme metody:

$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{C}^T\right) \sim \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{C}^T\right) = \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{C}^T\right)$$

a transponováním výsledné matice $(\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{C}^T$ pak získáme hledanou matici $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$.

Příklad 7. *Jsou dány matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste spočetli $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pak pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.

Řešení:

$$(a) \quad (\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad \left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{C}^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad (\mathbb{A} \mid \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8 (Sloupcová analogie úplné Gaussovy eliminace)**.** *Zformulujte a dokažte analogickou větu jako je Věta 12 pro ekvivalentní sloupcové úpravy. Její pomocí vymyslete sloupcovou analogii úplné Gaussovy eliminace.*

3 Permutace a determinanty

Abychom mohli zavést pojem determinant matice, musíme nejprve vysvětlit několik pojmů z teorie permutací.

3.1 Permutace

Definice 6. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Každou bijekci (zobrazení prosté a „na“) $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$ nazýváme* **permutací** *na $\hat{n}$. Množinu všech permutací na $\hat{n}$ značíme S_n.*

Poznámka 7. *Rozmyslete si, že množina S_n má $n!$ prvků.*

Příklad 9. *Permutace obvykle zapisujeme tabulkou s dvěma řádky $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Případně jediným řádkem $\pi_1 = (4, 3, 1, 2)$. Najděte*

$$\pi_1 \circ \pi_2,\ \pi_2^2 = \pi_2 \circ \pi_2,\ \pi_2 \circ \pi_1,$$

kde $\circ$ značí skládání.

Poznámka 8. *Identickou permutaci značíme ϵ. Je zřejmé, že ke každé permutaci existuje permutace inverzní a že se získá prohozením řádků v dvouřádkovém zápisu. Například: $\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.*

Definice 7. *Nechť $\pi \in S_n$, pak* **inverzí** *v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) splňující:*

- $i, j \in \hat{n}$,
- $i < j$,
- $\pi(i) > \pi(j)$.

Počet inverzí v π značíme I_π. **Znaménkem** *permutace π nazveme číslo $sgn\ \pi = (-1)^{I_\pi}$. Říkáme, že π je* **sudá** *permutace, pokud $sgn\ \pi = 1$, a* **lichá***, pokud $sgn\ \pi = -1$.*

Poznámka 9. *Identická permutace je sudá permutace, protože počet inverzí v ní je roven 0.*

Příklad 10. *Rozmyslete si, že S_n pro $n \geq 2$ obsahuje vždy stejný počet sudých a lichých permutací.*

Příklad 11. *Určete počet inverzí v π_1 a najděte $sgn\ \pi_1$.*

Podívejme se na všechny uspořádané dvojice (i, j), kde $i, j \in \hat{4}$ a $i < j$, a ověřme, zda $\pi(i) > \pi(j)$.

(i,j)	$(\pi(i), \pi(j))$	$\pi(i) > \pi(j)$
$(1,2)$	$(4,3)$	✓
$(1,3)$	$(4,1)$	✓
$(1,4)$	$(4,2)$	✓
$(2,3)$	$(3,1)$	✓
$(2,4)$	$(3,2)$	✓
$(3,4)$	$(1,2)$	

.

Závěr: Počet inverzí $I_{\pi_1} = 5$, proto $sgn\ \pi_1 = (-1)^5 = -1$.

Definice 8. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$.* **Transpozicí** *čísel i a j, nazveme permutaci τ_{ij} splňující*

- $\tau_{ij}(k) = k$ *pro* $k \neq i, j$,
- $\tau_{ij}(i) = j$,

- $\tau_{ij}(j) = i$,

tj. zapsáno pomocí tabulky

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Příklad 12. *Napište více způsoby π_1 jako složení transpozic.*

Stačí si uvědomit, že když složíme permutaci s transpozicí, dostaneme

$$\pi \circ \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(i-1) & \pi(j) & \pi(i+1) & \dots & \pi(j-1) & \pi(i) & \pi(j+1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

A teď si představíme, jak získáme π_1 z ϵ.

- $\epsilon \circ \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{13} \circ \tau_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{13} \circ \tau_{24} \circ \tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dostáváme tedy $\pi_1 = \tau_{13} \circ \tau_{24} \circ \tau_{12}$.
Nebo jiný způsob:

- $\epsilon \circ \tau_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{14} \circ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dostáváme tedy $\pi_1 = \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34}$. Také například $\pi_1 = \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34} \circ \tau_{12} \circ \tau_{12}$, protože $\tau_{12} \circ \tau_{12} = \epsilon$.

Věta 14 (Rozklad permutace na transpozice)**.** *Každá permutace je složením konečného počtu transpozic a platí $sgn \pi = (-1)^k$ pro $\pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$, kde τ_i jsou transpozice.*

Důkaz. Bez důkazu. □

Poznámka 10. *Při zapisování π_1 jako složení transpozic jsme viděli, že rozklad na transpozice není jednoznačný a že ani počet transpozic v rozkladu není jednoznačný. Z věty se dozvídáme, že jednoznačná je parita počtu transpozic v rozkladu permutace, tj. sudost či lichost.*

Poznámka 11. *Transpozice je lichá permutace, jak plyne z Věty 14.*

Důsledek 6. *Nechť $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Pak $sgn\ (\pi_1 \circ \pi_2) = sgn\ \pi_1 \cdot sgn\ \pi_2$.*

Důkaz. Nechť π_1 je složením k transpozic $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ a π_2 je složením ℓ transpozic $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_\ell$, tj. $\pi_1 = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$ a $\pi_2 = \hat{\tau}_1 \circ \hat{\tau}_2 \circ \dots \circ \hat{\tau}_\ell$. Pak

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k \circ \hat{\tau}_1 \circ \hat{\tau}_2 \circ \dots \circ \hat{\tau}_\ell$$

a podle Věty 14 máme $\mathrm{sgn}\ \pi_1 = (-1)^k,\ \mathrm{sgn}\ \pi_2 = (-1)^\ell$ a $\mathrm{sgn}\ (\pi_1 \circ \pi_2) = (-1)^{k+\ell}$, odtud plyne $\mathrm{sgn}\ (\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{sgn}\ \pi_1 \cdot \mathrm{sgn}\ \pi_2$. □

Důsledek 7. *Nechť $\pi \in S_n$. Pak $sgn\ \pi = sgn\ \pi^{-1}$.*

Důkaz. Jelikož $\pi \circ \pi^{-1} = \epsilon$ a identita má znaménko 1, máme podle předchozího důsledku $\mathrm{sgn}\ \pi \cdot \mathrm{sgn}\ \pi^{-1} = 1$, a tedy π a π^{-1} mají stejné znaménko. □

3.2 Determinanty

V celé kapitole uvažujeme výhradně čtvercové matice.

Definice 9. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T. Jejím* **determinantem** *nazveme číslo*

$$\det\ \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} sgn\ \pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)}\mathbb{A}_{2\pi(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme **členy determinantu**.

Poznámka 12. *Počet sčítanců je $n!$ (víme, že právě tolik je permutací na $\hat{n}$, tedy prvků množiny S_n). V každém členu se objevuje z každého řádku a každého sloupce matice právě jeden prvek.*

Příklad 13. *Odvoďme podle definice, jak vypadají determinanty matic řádu $1, 2, 3$.*

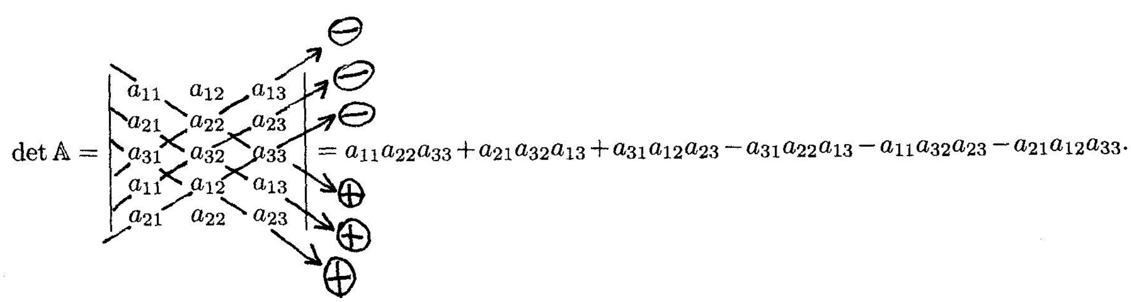
- *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix}\mathbb{A}_{11}\end{pmatrix}$. Na $\hat{1}$ máme jedině identickou permutaci (1) se znaménkem 1, proto $\det\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}$.*
- *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix}\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22}\end{pmatrix}$. Na $\hat{2}$ máme dvě permutace $\epsilon = (12)$, resp. $\tau_{12} = (21)$, se znaménky 1, resp. -1, proto $\det\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}$.*
- *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix}\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{33}\end{pmatrix}$. Na $\hat{3}$ máme šest permutací*

  $$\pi_1 = \epsilon = (123),\ \pi_2 = (312),\ \pi_3 = (231),\ \pi_4 = (132),\ \pi_5 = (321),\ \pi_6 = (213),$$

  se znaménky $sgn\ \pi_1 = sgn\ \pi_2 = sgn\ \pi_3 = 1$ a $sgn\ \pi_4 = sgn\ \pi_5 = sgn\ \pi_6 = -1$, proto

  $$\det\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{33} + \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{32} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32} - \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{33}.$$

Vzorce pro determinanty matic řádu $2, 3$ lze získat také pomocí tzv. **Sarrusova pravidla**, *jak ilustruje obrázek 2 pro matici řádu 3. Pro výpočet determinantu matice řádu 2 stačí nakreslit jednu šipku směrem vpravo dolů a druhou směrem vpravo nahoru a aplikovat stejné pravidlo pro znaménka. Pro matice vyšších řádů pravidlo užít nejde. Sami si rozmyslete, že sepsáním řádků a*



Obrázek 2: Součin prvků matice spojených šipkami směrem vpravo dolů má v determinantu znaménko plus, součin prvků spojených šipkami směrem vpravo nahoru má v determinantu znaménko mínus.

spojováním prvků šipkami už nevyrobíme všechny členy determinantu (např. pro řád 4 dostaneme jen 8 různých součinů, ale členů determinantu je 24).

Věta 15 (Determinant transponované matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice s prvky z tělesa T. Pak $\det\ \mathbb{A}^T = \det\ \mathbb{A}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbb{A}$ je řádu n. Podle definice determinantu máme první rovnost a podle definice $\mathbb{A}^T$ druhou rovnost

$$\begin{aligned} \det\ \mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\ \mathbb{A}^T_{1\pi(1)}\mathbb{A}^T_{2\pi(2)}\dots\mathbb{A}^T_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\ \mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n}. \end{aligned}$$

Protože pro libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ platí $\pi^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi^{-1}(1) & \pi^{-1}(2) & \dots & \pi^{-1}(n)\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n\end{smallmatrix}\right)$, je zřejmé, že $\mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n} = \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)}\mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)}$ (součin stejný je, ale pořadí činitelů nemusí být). Využijeme ještě faktu, že $\operatorname{sgn}\,\pi = \operatorname{sgn}\,\pi^{-1}$, a můžeme psát

$$\begin{aligned} \det\ \mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi^{-1}\ \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)}\mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\,\sigma\ \mathbb{A}_{1\sigma(1)}\mathbb{A}_{2\sigma(2)}\dots\mathbb{A}_{n\sigma(n)} \\ &= \det\ \mathbb{A}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 13. *Z předchozího důkazu si zapamatujme, že vzorec*

$$\det\ \mathbb{A} = \sum_{\pi\in S_n} sgn\ \pi\ \mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n}$$

můžeme také považovat za definici determinantu.

Nyní představíme třídu matic, pro které je snadné spočíst determinant.

Definice 10. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak $\mathbb{A}$ nazveme*

- **horní trojúhelníkovou maticí**, *pokud pro každé $i, j \in \hat{n},\ i > j$ platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$*
  Slovy: „$\mathbb{A}$ má pod diagonálou samé nuly.“

- **dolní trojúhelníkovou maticí**, *pokud pro každé $i, j \in \hat{n},\ i < j$ platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$*
  Slovy: „$\mathbb{A}$ má nad diagonálou samé nuly.“

Poznámka 14. *Rozmyslete si, že pro čtvercovou matici $\mathbb{A}$*

- *platí: Je-li $\mathbb{A}$ v horním stupňovitém tvaru, pak je i v horním trojúhelníkovém tvaru.*

- *neplatí: Je-li $\mathbb{A}$ v horním trojúhelníkovém tvaru, pak je i v horním stupňovitém tvaru.*
  Protipříklad: $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ je v horním trojúhelníkovém, ale není v horním stupňovitém tvaru.

Věta 16 (Determinant trojúhelníkových matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je dolní nebo horní trojúhelníková matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak* $\det\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\dots\mathbb{A}_{nn}$.
Slovy: „Determinant trojúhelníkových matic je součinem diagonálních prvků.“

Důkaz. Dokážeme tvrzení pro horní trojúhelníkové matice, pro dolní trojúhelníkové je důkaz analogický. Určíme, jak musí vypadat permutace π na $\hat{n}$, aby jí odpovídající člen determinantu $\operatorname{sgn}\,\pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)}\mathbb{A}_{2\pi(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)}$ nebyl nutně nulový.

1. Zcela jistě $\pi(n) = n$, kdyby totiž $\pi(n) = j < n$, pak by se ve členu determinantu vyskytoval prvek $\mathbb{A}_{nj}$ nacházející s v matici pod diagonálou, a tedy $\mathbb{A}_{nj} = 0$.

2. Dále $\pi(n-1) = n-1$. $\pi(n-1)$ nemůže být rovno n, protože by π nebyla permutace, a když $\pi(n-1) = j < n-1$, pak $\mathbb{A}_{(n-1)j} = 0$.

3. Analogickými úvahami dostaneme, že $\pi = \epsilon$.

Tedy všem permutacím, které nejsou identické, odpovídá v determinantu nulový člen. Odtud již plyne $\det\ \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\dots\mathbb{A}_{nn}$. □

Determinanty matic řádů vyšších než 3 budeme počítat tak, že matice pomocí řádkových a sloupcových úprav převedeme do trojúhelníkového tvaru, aniž by se determinant změnil, a pak užijeme faktu, že determinant trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále.

Věta 17 (Řádkové a sloupcové úpravy determinantů). *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak platí:*

1. *Vznikne-li $\mathbb{B}$ násobením některého řádku (sloupce) matice $\mathbb{A}$ číslem α, pak* $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.
2. *Je-li některý řádek (sloupec) $\mathbb{A}$ nulový, pak* $\det \mathbb{A} = 0$.
3. *Má-li $\mathbb{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak* $\det \mathbb{A} = 0$.
4. *Připočteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice $\mathbb{A}$ LK jiných sloupců (řádků), determinant se nezmění.*
5. *Vznikne-li $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ prohozením dvou řádků (sloupců),* $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.
6. *Označme $\mathbb{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{p}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$ a $\mathbb{B} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{q}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$, pak* $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{p} + \vec{q}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$. *Analogické tvrzení platí pro řádky.*

Důkaz. U každého tvrzení dokážeme jen řádkovou variantu. Sloupcová varianta pak plyne z Věty 15, tedy z faktu, že determinant matice a matice k ní transponované jsou stejné.

1. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením i-tého řádku číslem α, pak

$$\begin{aligned} \det \ \mathbb{B} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots (\alpha \mathbb{A}_{i\pi(i)}) \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha \det \ \mathbb{A}. \end{aligned}$$

2. Má-li $\mathbb{A}$ i-tý řádek nulový, pak pro každou permutaci π na $\hat{n}$ je prvek $\mathbb{A}_{i\pi(i)} = 0$, proto každý člen determinantu $\mathbb{A}$ je nulový.

3. Má-li $\mathbb{A}$ stejný i-tý a j-tý řádek, kde $i < j$, pak ukážeme, že det $\mathbb{A}$ obsahuje s každým členem $x = \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$ také člen s opačným znaménkem $-x = -\operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$. Odtud už bude jasné, že det $\mathbb{A} = 0$.

   Jelikož $\mathbb{A}_{ik} = \mathbb{A}_{jk}$ pro každé $k \in \hat{n}$, máme první a poslední rovnost, druhá plyne z definice transpozice τ_{ij}:

$$\begin{aligned} -x &= -\operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= -\operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \operatorname{sgn} (\pi \circ \tau_{ij}) \ \mathbb{A}_{1(\pi\circ\tau_{ij})(1)} \ldots \mathbb{A}_{j(\pi\circ\tau_{ij})(j)} \ldots \mathbb{A}_{i(\pi\circ\tau_{ij})(i)} \mathbb{A}_{n\pi(n)}, \\ &= \operatorname{sgn} (\pi \circ \tau_{ij}) \ \mathbb{A}_{1(\pi\circ\tau_{ij})(1)} \ldots \mathbb{A}_{i(\pi\circ\tau_{ij})(i)} \ldots \mathbb{A}_{j(\pi\circ\tau_{ij})(j)} \mathbb{A}_{n\pi(n)}, \end{aligned}$$

   vidíme tedy, že $-x$ je člen det $\mathbb{A}$, který odpovídá permutaci $\pi \circ \tau_{ij}$.

4. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ přičtením LK ostatních řádků k i-tému řádku, pak

$$\begin{aligned} \det \ \mathbb{B} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots (\mathbb{A}_{i\pi(i)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \alpha_k \mathbb{A}_{k\pi(i)}) \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \alpha_k \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{k\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \det \ \mathbb{A}, \end{aligned}$$

   kde poslední rovnost plyne z faktu, že pro každé $k \neq i$ je $\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{k\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$ rovno determinantu matice, která vznikla z $\mathbb{A}$ náhradou i-tého řádku k-tým, a má tedy podle předchozího bodu nulový determinant.

5. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ záměnou i-tého a j-tého řádku, pak

$$\begin{aligned} \det \ \mathbb{B} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{B}_{j\pi(j)} \ldots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} -\operatorname{sgn} (\pi \circ \tau_{ij}) \ \mathbb{A}_{1(\pi\circ\tau_{ij})(1)} \ldots \mathbb{A}_{i(\pi\circ\tau_{ij})(i)} \ldots \mathbb{A}_{j(\pi\circ\tau_{ij})(j)} \mathbb{A}_{n(\pi\circ\tau_{ij})(n)} \\ &= -\textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\sigma(i)} \ldots \mathbb{A}_{j\sigma(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\sigma(n)} \\ &= -\det \ \mathbb{A}. \end{aligned}$$

6. Dokažme tvrzení pro řádky, tedy značme $\vec{p}^{\,T}$ i-tý řádek $\mathbb{A}$, $\vec{q}^{\,T}$ i-tý řádek $\mathbb{B}$, kde $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají ostatní řádky stejné. Jako $\mathbb{C}$ označme matici, která má v i-tém řádku $(\vec{p}+\vec{q})^T$ a všechny ostatní řádky má stejné jako $\mathbb{A}$. Pak

$$\begin{aligned}
\det\ \mathbb{C} &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\ \mathbb{C}_{1\pi(1)}\dots\mathbb{C}_{i\pi(i)}\dots\mathbb{C}_{n\pi(n)}\\
&= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\mathbb{A}_{1\pi(1)}\dots(p_{\pi(i)}+q_{\pi(i)})\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)}\\
&= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\mathbb{A}_{1\pi(1)}\dots p_{\pi(i)}\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)} + \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\,\pi\mathbb{A}_{1\pi(1)}\dots q_{\pi(i)}\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)}\\
&= \det\ \mathbb{A} + \det\ \mathbb{B}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 8. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T a $\alpha\in T$. Nechť $\mathbb{B}=\alpha\mathbb{A}$, pak* $\det\ \mathbb{B}=\alpha^n\det\ \mathbb{A}$.

Důkaz. Vlastně $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ vynásobením každého řádku číslem α, tvrzení tedy plyne z 1. bodu Věty 17. □

Příklad 14. *Pomocí řádkových úprav spočítejte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -54.$$

Lemma 4. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že* $\det\mathbb{B}=\det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$, *kde $\mathbb{T}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnou ekvivalentní řádkovou úpravou.*

Důkaz. S využitím Věty 17 o řádkových a sloupcových úpravách determinantů máme následující tvrzení.

1. Vznikne-li $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ vynásobením nějakého řádku nenulovým číslem α, pak $\det\ \mathbb{B}=\alpha\det\ \mathbb{A}$. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ vynásobením nějakého řádku nenulovým číslem α, pak $\det\ \mathbb{T}=\alpha\det\ \mathbb{I}=\alpha$.

2. Vznikne-li $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ záměnou dvou řádků, pak $\det\ \mathbb{B}=-\det\ \mathbb{A}$. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ záměnou dvou řádků, pak $\det\ \mathbb{T}=-\det\ \mathbb{I}=-1$.

3. Vznikne-li $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ přičtením nějakého řádku k vybranému řádku, pak $\det\ \mathbb{B}=\det\ \mathbb{A}$. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ přičtením nějakého řádku k vybranému řádku, pak $\det\ \mathbb{T}=\det\ \mathbb{I}=1$.

Ve všech třech případech tedy platí $\det\mathbb{B}=\det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$. □

Věta 18. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak* $\det \mathbb{B} = \det \mathbb{T} \det \mathbb{A}$*, kde $\mathbb{T}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými ekvivalentními řádkovými úpravami ve stejném pořadí.*

Důkaz. Nechť $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ provedením k EŘÚ. Nechť $\mathbb{T}_i$ je matice, která vznikla z $\mathbb{I}$ provedením i-té EŘÚ. Pak podle Věty 12 platí $\mathbb{B} = \mathbb{T}_k\mathbb{T}_{k-1}\dots\mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{A}$. Opakovanou aplikací Lemmatu 4 dostaneme

$$\det\ \mathbb{B} = \det\ \mathbb{T}_k \det\ \mathbb{T}_{k-1}\dots\det\ \mathbb{T}_2 \det\ \mathbb{T}_1 \det\ \mathbb{A}.$$

Označme $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k\mathbb{T}_{k-1}\dots\mathbb{T}_2\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_k\mathbb{T}_{k-1}\dots\mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{I}$. Pak podle Věty 12 $\mathbb{T}$ vznikla z $\mathbb{I}$ provedením stejných EŘÚ ve stejném pořadí jako $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$. Opakovanou aplikací Lemmatu 4 dostaneme

$$\det\ \mathbb{T} = \det\ \mathbb{T}_k \det\ \mathbb{T}_{k-1}\dots\det\ \mathbb{T}_2 \det\ \mathbb{T}_1 \det\ \mathbb{I}.$$

Tím je dokázáno, že $\det\ \mathbb{B} = \det\ \mathbb{T} \det\ \mathbb{A}$. □

Poznámka 15. *Z důkazu předchozí věty plyne, že determinant matice, která vznikne z $\mathbb{I}$ konečným počtem EŘÚ je nenulový. Je totiž součinem determinantů matic, které vznikly jednou EŘÚ z $\mathbb{I}$, a tedy jsou rovny -1 (záměna řádků), 1 (přičtení jiného řádku k vybranému) nebo α (vynásobení řádku nenulovým číslem α).*

Věta 19 (Alternativní definice regulární matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice s prvky z tělesa T. $\mathbb{A}$ regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nechť $\mathbb{A}$ je regulární, pak $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{T}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ EŘÚ taková, že $\mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Podle Věty 18 platí $\det\ \mathbb{T} \det\ \mathbb{A} = \det\ \mathbb{I} = 1$. Odtud je jasné, že $\det\ \mathbb{A} \neq 0$.
($\Leftarrow$) : $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na matici $\hat{\mathbb{A}}$ v horním stupňovitém tvaru, existuje tedy $\mathbb{T}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ EŘÚ taková, že $\hat{\mathbb{A}} = \mathbb{T}\mathbb{A}$. Podle Věty 18 a předchozí poznámky platí $\det\ \hat{\mathbb{A}} = \det\ \mathbb{T} \det\ \mathbb{A} \neq 0$. Čtvercová matice v horním stupňovitém tvaru s nenulovým determinantem má na diagonále samá nenulová čísla, a tedy má samé hlavní sloupce a hodnost rovnu n. Odtud už plyne, že hodnost $\mathbb{A}$ je také rovna n, tedy $\mathbb{A}$ je regulární. □

Věta 20 (Determinant součinu matic)**.** *Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ čtvercové matice stejného řádu s prvky z tělesa T, pak* $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dva případy. Označme n řád matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$.

1. Je-li $\mathbb{A}$ singulární, pak podle Věty 6 o hodnosti součinu matic máme

   $$h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{A}) < n.$$

   Proto $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je singulární. Na základě Věty 19 máme $\det\ (\mathbb{A}\mathbb{B}) = 0 = \det\ \mathbb{A} \det\ \mathbb{B}$.

2. Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak $\mathbb{A}^{-1}$ je také regulární, a lze ji tedy převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{T}$ vzniklá EŘÚ z $\mathbb{I}$ taková, že $\mathbb{I} = \mathbb{T}\mathbb{A}^{-1}$. Odtud vidíme, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}$ a podle Věty 18 platí $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\ \mathbb{A} \det\ \mathbb{B}$.

□

Příklad 15. *Nechť*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *a platí* $5 = \det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\ \mathbb{A} \det\ \mathbb{B} = 1 \cdot 5$.

Věta 21 (Determinant inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice s prvky z tělesa T, pak* $\det \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$.

Důkaz. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle Věty 20 o determinantu součinu matic

$$\det\ \mathbb{A} \det\ \mathbb{A}^{-1} = \det\ \mathbb{I} = 1,$$

odkud již tvrzení plyne. □

Příklad 16. *Nechť*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pak $\det\ \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$

Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ *úplnou Gaussovou eliminací a ověřte, že* $\det\ \mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2}$.

Příklad 17. *Geometrický význam determinantu - lépe půjde ověřit, až budeme znát skalární součin.*

1. *Nechť je dán trojúhelník v* $\mathbb{R}^2$ *s vrcholy* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. *Pak pro jeho obsah platí*

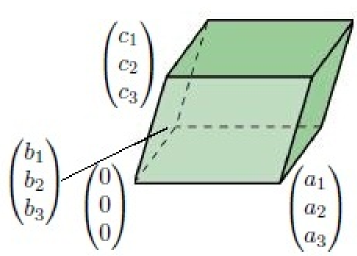
$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \right|.$$

2. *Nechť je dán rovnoběžník v* $\mathbb{R}^2$ *s vrcholy* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. *Pak pro jeho obsah platí*

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

3. *Nechť je dán rovnoběžnostěn s vrcholy* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. *Pak pro jeho objem platí*

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$



Obrázek 3: Rovnoběžnostěn.

Definice 11. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ s prvky z tělesa T, označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikla z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak číslo*

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

se nazývá algebraický doplňek prvku $\mathbb{A}_{ij}$.

Příklad 18. *Najděte algebraické doplňky všech prvků matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

Řešení:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \; .$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Věta 22 (O rozvoji determinantu podle i-tého řádku, resp. j-tého sloupce)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ s prvky z tělesa T. Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$*

$$\det \ \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij}, \quad \textit{rozvoj podle } i\textit{-tého řádku,}$$

respektive pro každé $j \in \hat{n}$

$$\det \ \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij}, \quad \textit{rozvoj podle } j\textit{-tého sloupce.}$$

Důkaz. Bez důkazu. $\square$

Příklad 19. *Spočtěte determinant rozvojem podle řádků či sloupců.*

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Řešení: *Začneme rozvojem podle prvního řádku*

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

První dva determinanty jsou nulové, protože příslušné matice mají LZ sloupce. Dopočteme determinant rozvojem podle posledního sloupce.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6.$$

Věta 23 (Inverzní a adjungovaná matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu $n > 1$ s prvky z tělesa T. Pak*

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matici sestavené z algebraických doplňků se říká **adjungovaná** *nebo* **reciproká** *a značí se $\mathbb{A}^{adj}$.*

Důkaz. Označme $\mathbb{X} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj}$. Ověříme-li, že $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, bude dokázáno, že $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}$. Nechť $i, j \in \hat{n}$. Pak

$$[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_{ik} \mathbb{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det \ \mathbb{A}} D_{ki} \mathbb{A}_{kj}.$$

- Pro $i = j$ aplikujeme Větu 22 a máme

$$[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ii} = \frac{1}{\det \ \mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} D_{ki} \mathbb{A}_{ki} = \frac{\det \ \mathbb{A}}{\det \ \mathbb{A}} = 1.$$

- Pro $i \neq j$ uvažujme matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ náhradou i-tého sloupce j-tým. Determinant matice $\mathbb{B}$ je nulový, a počítáme-li det $\mathbb{B}$ rozvojem podle i-tého sloupce, dostaneme $0 = \det \ \mathbb{B} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki} \mathbb{A}_{kj}$. Proto $[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ij} = 0$.

□

Poznámka 16. *Výhodou vzorce pro výpočet $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí $\mathbb{A}^{adj}$ oproti úplné Gaussově eliminaci je možnost vypočíst konkrétní prvek $\mathbb{A}_{ij} = \frac{1}{\det \ \mathbb{A}} D_{ji}$, aniž bychom počítali celou $\mathbb{A}^{-1}$. Nevýhodou je pomalost, náročnost výpočtu.*

Poznámka 17. *Jak spočteme* det $\mathbb{A}^{adj}$*, známe-li* det $\mathbb{A}$*?*
Řešení: *Jelikož $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \ \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj}$, máme $\frac{1}{\det \ \mathbb{A}} = \det \ \mathbb{A}^{-1} = (\frac{1}{\det \ \mathbb{A}})^n \det \ \mathbb{A}^{adj}$. Číslem $\frac{1}{\det \ \mathbb{A}}$ je vynásobený každý řádek matice $\mathbb{A}^{adj}$, odtud n-tá mocnina. Na závěr dostáváme*

$$\det \ \mathbb{A}^{adj} = (\det \ \mathbb{A})^{n-1}.$$

Poznámka 18. *Vzorec pro zapamatování výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí $\mathbb{A}^{adj}$ podle Cayleyho $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \partial_a \nabla & \partial_{a'} \nabla & \partial_{a''} \nabla \\ \partial_b \nabla & \partial_{b'} \nabla & \partial_{b''} \nabla \\ \partial_c \nabla & \partial_{c'} \nabla & \partial_{c''} \nabla \end{pmatrix}$, kde ∇ značí* det $\mathbb{A}$*. Skutečně algebraický doplněk prvku a, tj. $b'c'' - b''c'$, získáme parciální derivací determinantu $\nabla = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$ podle a.*

Příklad 20. *Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

Řešení: *Algebraické doplňky prvků $\mathbb{A}$ už jsme spočítali v Příkladu 18 a máme spočteno, že* det $\mathbb{A} = -2$*. Odtud*

$$\mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 24 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je regulární matice řádu* n *s prvky z tělesa* T, $\vec{b} \in T^n$. *Pak pro každé* $j \in \hat{n}$ *je* j*-tá složka řešení soustavy* $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ *rovna*

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{B}^{(j)}$ *je matice, která vznikne náhradou* j*-tého sloupce matice* $\mathbb{A}$ *vektorem* $\vec{b}$.

Důkaz. Z posledního bodu Věty 10 víme, že řešení splňuje $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$. Využijeme vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí adjungované z Věty 23 a vypočítáme x_j.

$$x_j = \frac{1}{\det\ \mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}^{adj}_{jk} b_k = \frac{1}{\det\ \mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} b_k D_{kj} = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde v poslední rovnosti jsme využili rozvoje $\det \mathbb{B}^{(j)}$ podle j-tého sloupce. □

Poznámka 19. *Výhodou Cramerova pravidla oproti Gaussově eliminaci je možnost vypočíst konkrétní složku řešení, aniž bychom počítali ostatní složky. Nevýhodou je pomalost, náročnost výpočtu.*

Příklad 21. *Řešte pomocí Cramerova pravidla soustavu s maticí* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *a s vektorem pravé strany* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: *Už víme, že* det $\mathbb{A} = -2$.

$$x_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

řešením soustavy je tedy $\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Příklad 22. *Dokažte, že Vandermondův determinant*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i,j\in\hat{n},\ i<j} (\alpha_j - \alpha_i),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Příklad 23. *Použijte Cramerovo pravidlo a Vandermondův determinant k určení vztahů, které musí splňovat parametry* a, b, c, *aby následující soustava LAR měla právě jedno řešení, a k nalezení tohoto řešení.*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2 z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2 z & = & c^3 \end{array}.$$

4 Skalární součin a ortogonalita

4.1 Skalární součin

Ve vektorovém prostoru V nad tělesem T ($T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$) máme zatím zavedeny operace:

- sčítání vektorů

$$\oplus : V \times V \to V, \text{ kdy vektorům } \vec{x} \text{ a } \vec{y} \text{ přiřadíme vektor } \vec{x} \oplus \vec{y},$$

- násobení vektoru číslem z T

$$\odot : T \times V \to V, \text{ kdy číslu } \alpha \text{ a vektoru } \vec{x} \text{ přiřadíme vektor } \alpha \odot \vec{x}.$$

Nyní zavedeme novou operaci:

$$< .|. >: V \times V \to T, \text{ kdy vektorům } \vec{x} \text{ a } \vec{y} \text{ přiřadíme číslo } < \vec{x}|\vec{y} > .$$

Definice 12. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $< .|. >: V \times V \to T$, které uspořádané dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ přiřadí číslo $< \vec{x}|\vec{y} > \in T$, nazveme* **skalární součin***, pokud jsou splněny* **3 axiomy skalárního součinu***:*

1. **hermitovskost***: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $< \vec{x}|\vec{y} > = \overline{< \vec{y}|\vec{x} >}$,*
2. **linearita v 1. argumentu***: pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a každé $\alpha \in T$ platí*
   - *aditivita v 1. argumentu: $< \vec{x} + \vec{z}|\vec{y} > = < \vec{x}|\vec{y} > + < \vec{z}|\vec{y} >$,*
   - *homogenita v 1. argumentu: $< \alpha\vec{x}|\vec{y} > = \alpha < \vec{x}|\vec{y} >$,*
3. **pozitivní definitnost***: pro každé $\vec{x} \in V$ platí $< \vec{x}|\vec{x} > \geq 0$ a $< \vec{x}|\vec{x} > = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$.*

Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $< .|. >$ značíme $(V, < .|. >)$.

Věta 25 (Vlastnosti skalárního součinu)**.** *Nechť dán $(V, < .|. >)$. Pak*

1. *pro každé $\vec{x} \in V$ platí $< \vec{0}|\vec{x} > = < \vec{x}|\vec{0} > = 0$,*
2. **antilinearita v 2. argumentu***: pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a každé $\alpha \in T$ platí:*
   - $< \vec{x}|\vec{y} + \vec{z} > = < \vec{x}|\vec{y} > + < \vec{x}|\vec{z} >$,
   - $< \vec{x}|\alpha\vec{y} > = \overline{\alpha} < \vec{x}|\vec{y} >$,
3. *je-li V reálný vektorový prostor, pak je skalární součin symetrický, tedy $< \vec{x}|\vec{y} > = < \vec{y}|\vec{x} >$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$, a lineární v obou argumentech.*

Důkaz.

1. $< \vec{0}|\vec{x} > = < 0\vec{x}|\vec{x} > = 0 < \vec{x}|\vec{x} > = 0$, kde jsme využili homogenitu skalárního součinu v 1. argumentu, $< \vec{x}|\vec{0} > = \overline{< \vec{0}|\vec{x} >} = \overline{0} = 0$, kde jsme využili hermitovskost skalárního součinu,
2.
   - s využitím hermitovskosti skalárního součinu a jeho aditivity v 1. argumentu dostaneme

   $$< \vec{x}|\vec{y} + \vec{z} > = \overline{< \vec{y} + \vec{z}|\vec{x} >} = \overline{< \vec{y}|\vec{x} > + < \vec{z}|\vec{x} >} = \overline{< \vec{y}|\vec{x} >} + \overline{< \vec{z}|\vec{x} >} = < \vec{x}|\vec{y} > + < \vec{x}|\vec{z} >,$$

   - s využitím hermitovskosti skalárního součinu a jeho homogenity v 1. argumentu dostaneme

   $$< \vec{x}|\alpha\vec{y} > = \overline{< \alpha\vec{y}|\vec{x} >} = \overline{\alpha < \vec{y}|\vec{x} >} = \overline{\alpha}\,\overline{< \vec{y}|\vec{x} >} = \overline{\alpha} < \vec{x}|\vec{y} >,$$

3. všude si můžeme odmyslet komplexní sdružení, jelikož jde o reálná čísla.

$\square$

Příklad 24. *Nejtypičtějším příkladem skalárního součinu je* **standardní skalární součin**

- *definovaný pro vektory* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *a* $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ *jako*

$$< \vec{x}|\vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k},$$

  $\mathbb{C}^n$ *se standardním skalárním součinem nazýváme* **unitární prostor**,

- *definovaný pro vektory* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *a* $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *jako*

$$< \vec{x}|\vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

  $\mathbb{R}^n$ *se standardním skalárním součinem nazýváme* **eukleidovský prostor**.

Ověřte, že jsou splněny axiomy skalárního součinu.

Definice 13. *Nechť dán* $(V, < .|. >)$*.* **Normou** *vektoru* $\vec{x} \in V$ *nazveme číslo* $\| \vec{x} \| = \sqrt{< \vec{x}|\vec{x} >}$.

Poznámka 20. *Definice má dobrý smysl, protože díky pozitivní definitnosti odmocňujeme nezáporné číslo.*

Věta 26 (Vlastnosti normy)**.** *Nechť dán* $(V, < .|. >)$*.*

1. *Pro každé* $\vec{x} \in V$ *platí* $\| \vec{x} \| \geq 0$ *a* $\| \vec{x} \| = 0$*, právě když* $\vec{x} = \vec{0}$.
2. *Pro každé* $\vec{x} \in V$ *a každé* $\alpha \in T$ *platí* $\| \alpha\vec{x} \| = |\alpha| \, \| \vec{x} \|$.

Důkaz.

1. Plyne z pozitivní definitnosti skalárního součinu a z faktu, že odmocnina z kladného čísla je kladná a odmocnina z nuly je nulová.
2. $\| \alpha\vec{x} \| = \sqrt{< \alpha\vec{x}|\alpha\vec{x} >} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha} < \vec{x}|\vec{x} >} = \sqrt{|\alpha|^2 \| \vec{x} \|^2} = |\alpha| \, \| \vec{x} \|$, využita linearita v 1. a antilinearita ve 2. argumentu skalárního součinu.

$\square$

Příklad 25. *Podívejme se, jak vypadá norma v unitárním a eukleidovském prostoru.*

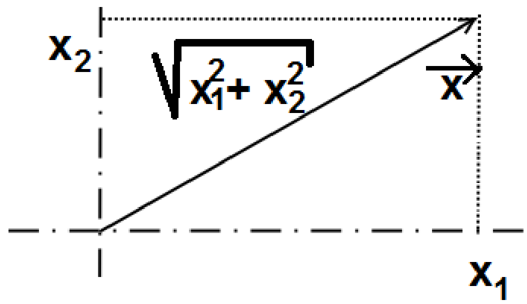
- *Nechť* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *je vektor z unitárního prostoru* $\mathbb{C}^n$*, pak*

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{< \vec{x}|\vec{x} >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

- *Nechť* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *je vektor z eukleidovského prostoru* $\mathbb{R}^n$*, pak*

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{< \vec{x}|\vec{x} >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Poznámka 21. *Norma v eukleidovských prostorech* $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ *má význam velikosti vektoru. Např. v* $\mathbb{R}^2$ *bychom velikost vektoru* $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ *počítali podle Pythagorovy věty jako* $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, *což je rovno* $\| \vec{x} \|$, *viz obrázek 4.*



Obrázek 4: Norma vektoru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá jeho velikosti.

Definice 14. *Nechť dán* $(V, <.|.>)$ *a* V *nad* $\mathbb{R}$. *Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, *pak úhlem mezi* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$ *nazveme číslo*

$$\varphi = \arccos \frac{< \vec{x}|\vec{y} >}{\| \vec{x} \| \| \vec{y} \|}.$$

Poznámka 22. *Funkce* arccos *nabývá hodnot od* 0 *do* π, *proto* $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. *Dále jelikož je* arccos *definován na intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$, *potřebovali bychom pro korektnost definice ověřit, že* $-1 \leq \frac{<\vec{x}|\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1$. *Platnost těchto nerovností vyplyne ze Schwarzovy-Cauchyovy věty.*

Poznámka 23. *Vyšetřeme, kdy je úhel nulový, ostrý, pravý, tupý a přímý.*

- $\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{<\vec{x}|\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = 1$
- φ *ostrý, tj.* $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow < \vec{x}|\vec{y} >> 0$
- φ *pravý, tj.* $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow < \vec{x}|\vec{y} >= 0$
- φ *tupý, tj.* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Leftrightarrow < \vec{x}|\vec{y} >< 0$
- φ *přímý, tj.* $\varphi = \pi \Leftrightarrow \frac{<\vec{x}|\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = -1$

Poznámka 24. *Definice úhlu odpovídá v eukleidovském prostoru* $\mathbb{R}^2$ *definici, kterou známe ze střední školy. Mějme dány vektory* $\vec{x}, \vec{y}$, *viz obrázek 5. Pak z obázku 5 vyčteme*

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\| \vec{x} \|}, \ \sin \alpha = \frac{x_2}{\| \vec{x} \|}, \ \cos \beta = \frac{y_1}{\| \vec{y} \|}, \ \sin \beta = \frac{y_2}{\| \vec{y} \|}.$$

Přímo z definice kosinu a sinu lze ověřit platnost součtového vzorce

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha.$$

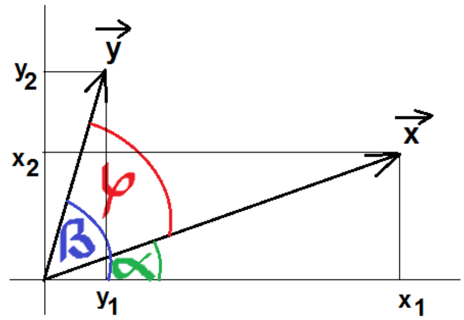
Po dosazení vyjádření pro siny a kosiny dostáváme

$$\cos \varphi = \cos(\beta - \alpha) = \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{\| \vec{x} \| \| \vec{y} \|} = \frac{< \vec{x}|\vec{y} >}{\| \vec{x} \| \| \vec{y} \|}.$$

Věta 27 (Schwarzova-Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in (V, <.|.>)$. *Pak*

$$| < \vec{x}|\vec{y} > | \leq \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| .$$

Rovnost nastává, právě když je soubor $(\vec{x}, \vec{y})$ *LZ.*



Obrázek 5: Úhel mezi vektory v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

- Pro $\vec{y} = \vec{0}$ je platnost nerovnosti evidentní. Uvažujme $\vec{y} \neq \vec{0}$. Pro libovolné $\alpha \in T$ platí
$$0 \leq < \vec{x} - \alpha\vec{y} | \vec{x} - \alpha\vec{y} > = \| \vec{x} \|^2 - \alpha < \vec{y}|\vec{x} > - \overline{\alpha} < \vec{x}|\vec{y} > + |\alpha|^2 \| \vec{y} \|^2 .$$
Položme $\alpha := \frac{<\vec{x}|\vec{y}>}{\|\vec{y}\|^2}$, pak z předchozího vztahu dostáváme
$$0 \leq \| \vec{x} \|^2 - \frac{< \vec{x}|\vec{y} >}{\| \vec{y} \|^2} < \vec{y}|\vec{x} > - \frac{< \vec{y}|\vec{x} >}{\| \vec{y} \|^2} < \vec{x}|\vec{y} > + \left| \frac{< \vec{x}|\vec{y} >}{\| \vec{y} \|^2} \right|^2 \| \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 - \frac{| < \vec{x}|\vec{y} > |^2}{\| \vec{y} \|^2} .$$
Odtud plyne nerovnost $| < \vec{x}|\vec{y} > |^2 \leq \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2$, tedy také $| < \vec{x}|\vec{y} > | \leq \| \vec{x} \| \| \vec{y} \|$.
- Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nastává-li rovnost ve Schwarz-Cauchově nerovnosti, pak z předchozí části důkazu plyne, že buď je $\vec{y} = \vec{0}$, nebo je $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, kde $\alpha = \frac{<\vec{x}|\vec{y}>}{\|\vec{y}\|^2}$.
($\Leftarrow$) : Je-li soubor $(\vec{x}, \vec{y})$ LZ, pak buď $\vec{x} = \vec{0}$ a rovnost zřejmě platí, nebo je $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Pak $| < \vec{x}|\vec{y} > | = | < \vec{x}|\beta\vec{x} > | = |\beta| \, \| \vec{x} \|^2 = \| \beta\vec{x} \| \| \vec{x} \| = \| \vec{y} \| \| \vec{x} \|$.

□

Poznámka 25. *Podle definice úhlu a Schwarzovy-Cauchyovy nerovnosti máme, že vektory svírají nulový nebo přímý úhel, právě když jsou lineárně závislé. To opět odpovídá naší představě z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.*

Poznámka 26. *Pamatujte si, kdy nastává rovnost ve Schwarzově-Cauchyově nerovnosti. Je totiž snazší ověřit, zda jsou dva vektory LZ, než počítat skalární součin a normy.*

Věta 28 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in (V, < .|. >)$. Pak*
$$\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \| .$$
Rovnost nastává, právě když existuje $\alpha \geq 0$ tak, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

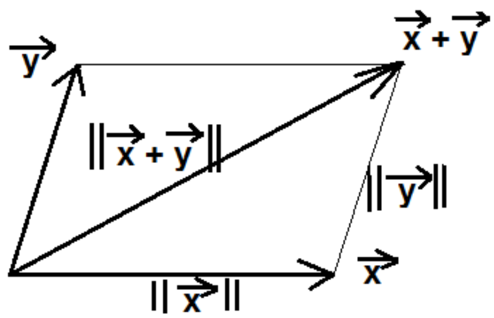
Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

- $$\begin{aligned} \| \vec{x} + \vec{y} \|^2 &= \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + < \vec{x}|\vec{y} > + < \vec{y}|\vec{x} > \\ &= \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + < \vec{x}|\vec{y} > + \overline{< \vec{x}|\vec{y} >} \\ &= \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + 2\mathrm{Re} < \vec{x}|\vec{y} > \\ &\leq \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + 2| < \vec{x}|\vec{y} > | \\ &\leq \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + 2 \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| \\ &= (\| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|)^2 \end{aligned} ,$$
kde předposlední nerovnost je Schwarzova-Cauchyova.

- Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
  $(\Rightarrow)$: Nastává-li rovnost v trojúhelníkové nerovnosti, pak z předchozí části důkazu plyne, že nastává rovnost ve Schwarzově-Cauchyově nerovnosti, tedy $\vec{x} = \vec{0}$ (tedy $\vec{x} = 0\vec{y}$, neboli $\vec{x}$ je nezáporný násobek $\vec{y}$) nebo $\vec{x} \neq \vec{0}$ a $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Dále z předchozí části důkazu plyne, že platí Re$< \vec{x}|\vec{y} > = | < \vec{x}|\vec{y} > |$, odkud máme Re$< \vec{x}|\beta\vec{x} > = | < \vec{x}|\beta\vec{x} > |$, tedy Re$\beta = |\beta|$, proto $\beta \in \mathbb{R}$ a $\beta \geq 0$.
  $(\Leftarrow)$: Platí-li $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$, pak $\| \vec{x} + \vec{y} \| = \| \vec{x} + \alpha\vec{x} \| = \| (1+\alpha)\vec{x} \| = (1+\alpha) \| \vec{x} \| = \| \vec{x} \| + \alpha \| \vec{x} \| = \| \vec{x} \| + \| \alpha\vec{x} \| = \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|$. Podobně dostaneme, že rovnost platí, je-li $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$.

□

Poznámka 27. *Trojúhelníková nerovnost je zobecněním známého faktu, že v trojúhelníku je součet délek dvou stran vždy větší než strana třetí, viz obrázek 6.*



Obrázek 6: V trojúhelníku je součet libovolných dvou stran větší než strana třetí.

Poznámka 28. *Pamatujte si, kdy nastává rovnost v trojúhelníkové nerovnosti. Je totiž snazší ověřit, zda je jeden vektor nezáporným násobkem druhého, než počítat příslušné normy.*

Věta 29 (Rovnoběžníková rovnost)**.** *Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in (V, < .|. >)$. *Pak*

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 + \| \vec{x} - \vec{y} \|^2 = 2(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2).$$

Důkaz. Využitím aditivity skalárního součinu v obou argumentech dostaneme

$$\begin{array}{rcl} \| \vec{x} + \vec{y} \|^2 + \| \vec{x} - \vec{y} \|^2 & = & < \vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y} > + < \vec{x}-\vec{y}|\vec{x}-\vec{y} > \\ & = & < \vec{x}|\vec{x} > + < \vec{y}|\vec{y} > + < \vec{x}|\vec{y} > + < \vec{y}|\vec{x} > + < \vec{x}|\vec{x} > + < \vec{y}|\vec{y} > - < \vec{x}|\vec{y} > - < \vec{y}|\vec{x} > \\ & = & 2(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2) \end{array}.$$

□

Poznámka 29. *Rovnoběžníková rovnost je zobecněním známého faktu, že součet čtverců stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců úhlopříček, viz obrázek 7.*

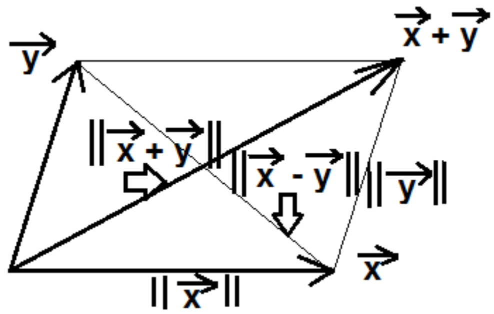
4.2 Ortogonalita

Definice 15.

1. *Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in (V, < .|. >)$. *Řekneme, že* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$ *jsou* **kolmé (ortogonální)**, *platí-li* $< \vec{x}|\vec{y} >= 0$.

2. *Nechť* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ *je soubor vektorů z* $(V, < .|. >)$. *Soubor nazveme*

   (a) **ortogonální (OG)**, *pokud* $< \vec{x}_i|\vec{x}_j >= 0$ *pro každé* $i, j \in \hat{n}, i \neq j$,



Obrázek 7: Součet čtverců stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců úhlopříček.

(b) **ortonormální (ON)**, *pokud* $<\vec{x}_i|\vec{x}_j>=\delta_{ij}$, *kde Kroneckerovo delta* $\delta_{ij}=0$ *pro každé* $i,j\in\hat{n}, i\neq j$, *a* $\delta_{ii}=1$ *pro každé* $i\in\hat{n}$.
Slovy: "Soubor je ON, pokud je OG a vektory mají jednotkové normy."

Poznámka 30. *Pokud* $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ *je OG soubor nenulových vektorů, pak* $(\frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1,\ldots,\frac{1}{\|\vec{x}_n\|}\vec{x}_n)$ *je ON soubor.*

Poznámka 31. *Vektory ON souboru jsou nutně* $\neq\vec{0}$, *pro OG soubor to neplatí.*

Příklad 26. *Nejjednodušším ON souborem v eukleidovském prostoru* $\mathbb{R}^n$ *a v unitárním prostoru* $\mathbb{C}^n$ *je standardní báze.*

Věta 30 (LN OG souboru nenulových vektorů)**.** *Nechť* $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ *je OG soubor nenulových vektorů z* $(V,<.|.>)$. *Pak je* $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ *LN.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0}$. Vynásobme obě strany vektorem $\vec{x}_j$ pro každé $j\in\hat{n}$.

$$<\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i|\vec{x}_j>=\sum_{i=1}^n\alpha_i<\vec{x}_i|\vec{x}_j>=\alpha_j<\vec{x}_j|\vec{x}_j>=<\vec{0}|\vec{x}_j>=0,$$

kde jsme využili linearity skalárního součinu v 1. argumentu, ortogonality souboru a faktu, že skalární součin s nulovým vektorem je vždy 0. Jelikož $\vec{x}_j\neq\vec{0}$, dostáváme $\alpha_j=0$ pro každé $j\in\hat{n}$, čímž je dokázána LN souboru. □

Důsledek 9. *Každý ON soubor je LN.*

Věta 31 (Souřadnice v OG bázi)**.** *Nechť* $\mathcal{X}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ *je OG báze* $(V,<.|.>)$. *Nechť* $\vec{x}\in V$. *Pak i-tá souřadnice* $\vec{x}$ *v bázi* $\mathcal{X}$ *je* $\frac{<\vec{x}|\vec{x}_i>}{\|\vec{x}_i\|^2}$.

Důkaz. Nechť $\vec{x}=\sum_{k=1}^n\alpha_k\vec{x}_k$. Vynásobme obě strany vektorem $\vec{x}_i$.

$$<\vec{x}|\vec{x}_i>=<\sum_{k=1}^n\alpha_k\vec{x}_k|\vec{x}_i>=\sum_{k=1}^n\alpha_k<\vec{x}_k|\vec{x}_i>=\alpha_i<\vec{x}_i|\vec{x}_i>,$$

kde jsme opět využili linearity skalárního součinu v 1. argumentu a ortogonality báze. Odtud dostáváme $\alpha_i=\frac{<\vec{x}|\vec{x}_i>}{\|\vec{x}_i\|^2}$, dělíme nenulovým číslem, protože jde o bázi, tedy nenulové vektory. □

Důsledek 10 (Souřadnice v ON bázi)**.** *Nechť* $\mathcal{X}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)$ *je ON báze* $(V,<.|.>)$. *Nechť* $\vec{x}\in V$. *Pak i-tá souřadnice* $\vec{x}$ *v bázi* $\mathcal{X}$ *je* $<\vec{x}|\vec{x}_i>$.

Důkaz. Tvrzení plyne z předchozí věty užitím faktu, že normy vektorů v ON bázi jsou rovny 1. □

Definice 16. *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $(V, <.|.>)$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme* **Fourierovy koeficienty** *v bázi $\mathcal{X}$.*

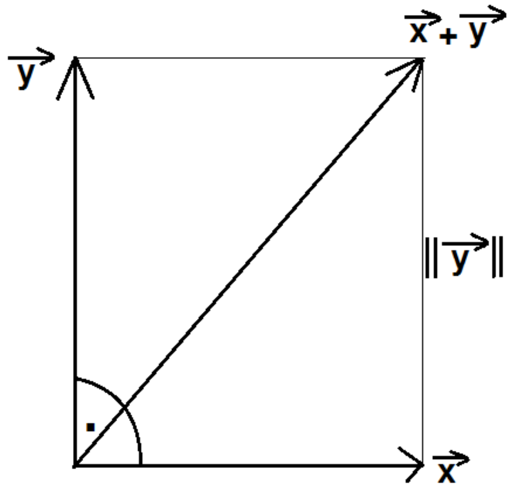
Věta 32 (Pythagorova věta)**.** *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in (V, <.|.>)$. Pokud $(\vec{x}, \vec{y})$ je OG soubor, pak*

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 .$$

Důkaz. Je-li $<\vec{x}|\vec{y}>= 0$, pak $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + <\vec{x}|\vec{y}> + <\vec{y}|\vec{x}> + \| \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$. □

Poznámka 32. *Opačná implikace v Pythagorově větě platí jen v reálných prostorech! Např. v unitárním $\mathbb{C}^2$ splňují vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, že $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$, přesto $<\vec{x}|\vec{y}>= i \neq 0$.*

Poznámka 33. *Tvrzení je zobecněním Pythagorovy věty, která říká, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou, viz obrázek 8.*



Obrázek 8: Součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou.

Věta 33 (Gramova-Schmidtova věta)**.** *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor ve $(V, <.|.>)$. Pak existuje OG (i ON) soubor $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ takový, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$.*
Slovy: "Každý LN soubor lze ortogonalizovat (i ortonormalizovat)."

Důkaz. Pomocí tzv. Gramova-Schmidtova ortogonailzačního procesu vyrobíme OG soubor splňující podmínky věty. Na závěr každý z vektorů vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž podle Poznámky 30 vyrobíme ON soubor splňující podmínky z věty.

Postupujme indukcí podle počtu vektorů v OG souboru. Položme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. Pak je splněno $[\vec{x}_1]_\lambda = [\vec{y}_1]_\lambda$ a $(\vec{y}_1)$ je jistě OG. Nechť je zkonstruován OG soubor $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k)$ splňující $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro nějaké $1 \leq k < n$. Další vektor hledáme ve tvaru

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i .$$

Při takovém předpisu bude zřejmě platit, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}]_\lambda$. Zbývá tedy najít koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, aby $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1})$ byl OG. Koeficienty najdeme z podmínek $< \vec{y}_{k+1}|\vec{y}_j >= 0$ pro každé $j \in \hat{k}$. Dostáváme

$$< \vec{y}_{k+1}|\vec{y}_j >= 0 =< \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i|\vec{y}_j >=< \vec{x}_{k+1}|\vec{y}_j > - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < \vec{y}_i|\vec{y}_j >=< \vec{x}_{k+1}|\vec{y}_j > -\alpha_j < \vec{y}_j|\vec{y}_j >,$$

kde jsme využili linearity skalárního součinu v 1. argumentu a ortogonality souboru $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k)$. Koeficenty α_j jsme našli, mají tvar $\alpha_j = \frac{<\vec{x}_{k+1}|\vec{y}_j>}{\|\vec{y}_j\|^2}$. Dělíme jistě nenulovým číslem, neboť díky rovnosti $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ a LN $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ také LN. □

Poznámka 34. *Můžeme si tedy zapamatovat vzorec* $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{<\vec{x}_{k+1}|\vec{y}_i>}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i$, *pomocí něhož lze vyrábět z LN souborů OG soubory se stejným lineárním obalem. Ovšem na cvičeních si ukážeme metody, které jsou pro praktický výpočet vhodnější než tento vzorec.*

Důsledek 11 (Existence ON báze)**.** *Každý nenulový* $(V, < .|. >)$ *má ON bázi.*

Důkaz. Jelikož je $\dim V < +\infty$ (to předpokládáme ve všech kapitolách letního semestru), má V bázi. To je LN soubor a podle Gramovy-Schmidtovy věty jej lze ortogonalizovat i ortonormalizovat. □

Definice 17. *Nechť* $P \subset\subset (V, < .|. >)$. *Ortogonálním doplňkem* P *do* V *nazveme množinu*

$$P^\perp = \{\vec{x} \in V \;\big|< \vec{x}|\vec{y} >= 0 \textit{ pro každé } \vec{y} \in P\}.$$

Věta 34 (Vlastnosti OG doplňku)**.** *Nechť* $P \subset\subset (V, < .|. >)$. *Pak platí:*

1. $P^\perp \subset\subset V$.
2. *Pro každé* $\vec{x} \in V$ *existuje právě jeden vektor* $\vec{x}_P \in P$ *a právě jeden vektor* $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$ *takové, že* $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, *tj.* $V = P \oplus P^\perp$.
3. $(P^\perp)^\perp = P$.

Důkaz. 1. Musíme ověřit neprázdnost $P^\perp$, jeho uzavřenost na sčítání vektorů a na násobení vektoru číslem.

- $\vec{0} \in P^\perp$, proto $P^\perp \neq \emptyset$.
- Je-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P^\perp$, pak pro každé $\vec{y} \in P$ platí $< \vec{x}_1|\vec{y} >= 0$ a $< \vec{x}_2|\vec{y} >= 0$. Odtud $< \vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y} >=< \vec{x}_1|\vec{y} > + < \vec{x}_2|\vec{y} >= 0$, tedy $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P^\perp$,
- Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in P^\perp$, pak pro každé $\vec{y} \in P$ platí $< \vec{x}|\vec{y} >= 0$. Odtud plyne $< \alpha\vec{x}|\vec{y} >= \alpha < \vec{x}|\vec{y} >= 0$, tedy $\alpha\vec{x} \in P^\perp$.

2. Ošetříme tři případy.

- Je-li $P = \{\vec{0}\}$. Pak $P^\perp = V$ a $V = \{\vec{0}\} \oplus V$.
- Je-li $P = V$. Pak $P^\perp = \{\vec{0}\}$ a $V = V \oplus \{\vec{0}\}$.
- Nechť $P \neq \{\vec{0}\}$ a $P \neq V$.
  (a) $V = P + P^\perp$: Podle Gramovy-Schmidtovy věty existuje ON báze P, označme ji $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$. Opět podle Gramovy-Schmidtovy věty ji umíme doplnit na ON bázi V, označme ji $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \vec{x}_n)$. Uvažujme libovolné $\vec{x} \in V$, pak podle Důsledku 10 víme, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} < \vec{x}|\vec{x}_i > \vec{x}_i$. Dokážeme, že položíme-li $\vec{x}_P = \sum_{i=1}^{k} < \vec{x}|\vec{x}_i > \vec{x}_i$, pak $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} = \vec{x} - \vec{x}_P \in P^\perp$, tedy bude dokázáno, že $P + P^\perp = V$. Je zřejmé, že $\vec{x}_P \in P$, protože je LK bazických vektorů P. Ověřme, že $< \vec{x}_{P^\perp}|\vec{x}_j >= 0$ pro každé $j \in \hat{k}$, tedy pro bazické vektory P. Pak už bude jasné, že $< \vec{x}_{P^\perp}|\vec{y} >= 0$ pro každé $\vec{y} \in P$.

$$< \vec{x}_{P^\perp}|\vec{x}_j >=< \vec{x} - \vec{x}_P|\vec{x}_j >=< \sum_{i=k+1}^{n} < \vec{x}|\vec{x}_i > \vec{x}_i|\vec{x}_j >= \sum_{i=k+1}^{n} < \vec{x}|\vec{x}_i >< \vec{x}_i|\vec{x}_j >= 0,$$

protože $j \leq k$.

(b) $V = P \oplus P^\perp$: Pro direktnost stačí ověřit, že $P \cap P^\perp = \{\vec{0}\}$. To je pravda, protože vektor z průniku $\vec{x} \in P \cap P^\perp$ musí být kolmý sám na sebe, tj. $<\vec{x}|\vec{x}>= 0$, proto $\vec{x} = \vec{0}$.

3. Dokazujeme rovnost dvou množin, tedy dvě inkluze.
$P \subset (P^\perp)^\perp$: Zapišme, jak vypadá $(P^\perp)^\perp = \{\vec{y} \in V \;\big|< \vec{y}|\vec{x}>= 0 \text{ pro každé } \vec{x} \in P^\perp\}$. Je vidět, že vektory z P patří do $(P^\perp)^\perp$.
$(P^\perp)^\perp \subset P$: Podle již dokázaného 2. bodu pro každý $\vec{x} \in (P^\perp)^\perp$ existuje právě jeden $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$. Dokážeme-li, že $\vec{x}_{P^\perp} = \vec{0}$, pak bude jasné, že $\vec{x} \in P$. Násobením vektorem $\vec{x}_{P^\perp}$ dostaneme

$$< \vec{x}|\vec{x}_{P^\perp} >=< \vec{x}_P|\vec{x}_{P^\perp} > + < \vec{x}_{P^\perp}|\vec{x}_{P^\perp} > .$$

Z definice OG doplňku je zřejmé, že $< \vec{x}|\vec{x}_{P^\perp} >= 0$ a zároveň $< \vec{x}_P|\vec{x}_{P^\perp} >= 0$, proto $< \vec{x}_{P^\perp}|\vec{x}_{P^\perp} >= 0$, tedy $\vec{x}_{P^\perp} = \vec{0}$.

□

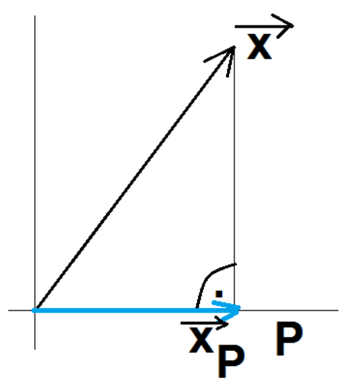
Definice 18. *Nechť $P \subset\subset V$. Je-li $\vec{x} \in V$ zapsáno jako $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, kde $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$, pak vektor $\vec{x}_P$ se nazývá* **ortogonální (OG) průmět** *$\vec{x}$ do P.*

Poznámka 35. *V důkazu 2. bodu Věty 34 je uvedeno, jak lze OG průmět $\vec{x}$ do P konstruovat, známe-li v P ON bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$. Platí*

$$\vec{x}_P = \sum_{j=1}^{k} < \vec{x}|\vec{x}_j > \vec{x}_j. \tag{2}$$

Ovšem stejně jako u Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu i tady platí, že výhodnější bude konstruovat v praktických příkladech OG průměty jinými způsoby. To se naučíme na cvičeních.

Poznámka 36. *V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá průmět vektoru naší představě kolmého promítání. Např. pro podprostor $P = [\vec{e}_1]_\lambda$, tedy přímku odpovídající ose x, je OG průmět vektoru $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ podle vzorce (2) roven $\vec{x}_P =< \vec{x}|\vec{e}_1 > \vec{e}_1 = x_1\vec{e}_1$, viz obrázek 9.*



Obrázek 9: Ortogonální průmět vektoru na přímku.

Poznámka 37. *Vraťme se ještě jednou ke Gramovu-Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu a všimněme si, jak se dá vyjádřit konstrukce OG souboru vektorů pomocí pojmu OG průmět. Připomeňme, že úlohou je konstruovat OG soubor $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ takový, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$, kde $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor. Odvodili jsme vzorec pro výpočet*

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=j}^{k} \frac{< \vec{x}_{k+1}|\vec{y}_j >}{\| \vec{y}_j \|^2}\vec{y}_j = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=j}^{k} < \vec{x}_{k+1}|\frac{1}{\| \vec{y}_j \|}\vec{y}_j > \frac{1}{\| \vec{y}_j \|}\vec{y}_j,$$

kde $(y_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k)$ *je OG soubor, tedy* $(\frac{1}{\|\vec{y}_1\|} y_1, \frac{1}{\|\vec{y}_2\|} \vec{y}_2, \ldots, \frac{1}{\|\vec{y}_k\|} \vec{y}_k)$ *je ON soubor. Tedy pomocí pojmu OG průmět můžeme psát* $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - (\vec{x}_{k+1})_P$, *přičemž* $P = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$. *Neboli* $\vec{y}_{k+1}$ *získáme tak, že si z* $\vec{x}_{k+1}$ *necháme pouze část, která je kolmá na* P, *patří tedy do* $P^\perp$.

5 Spektrální teorie matic

Tímto honosným názvem myslíme vlastní čísla, vlastní vektory a diagonalizaci matic.

5.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

V celé kapitole uvažujeme čtvercové matice s komplexními prvky.

Definice 19. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme* **vlastním číslem** *$\mathbb{A}$, pokud existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme* **vlastním vektorem** *$\mathbb{A}$ příslušným λ. Množinu vlastních čísel nazveme* **spektrem** *$\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$.*

Poznámka 38. *Matice s reálnými prvky nemusí mít reálná vlastní čísla. Například $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo i s vlastním vektorem $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, protože*

$$\mathbb{A}\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = i\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Věta 35 (LK vlastních vektorů jsou vlastní vektory)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Označme $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru. Pak $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$.*

Důkaz. $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0}\}$, tj. P_λ je množinou řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$, tedy podle Frobeniovy věty je $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$. □

Definice 20. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.* **Geometrickou násobností** *λ nazveme $\nu_g(\lambda) = dim\ P_\lambda$.*
Slovy: "$\nu_g(\lambda)$ je počet LN vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ."

Hledat vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ znamená řešit homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$. Ještě je třeba vědět, jak efektivně hledat vlastní čísla. K tomu potřebujeme definovat charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.

Definice 21. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) = det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme* **charakteristický polynom** *$\mathbb{A}$.*

Věta 36 (Hledání vlastních čísel)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, právě když $p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$.*
Slovy: "λ je vlastním číslem $\mathbb{A}$, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu."

Důkaz. $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ homogenní soustava s maticí $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ má netriviální řešení $\Leftrightarrow$ matice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ je singulární $\Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$. □

Příklad 27. *Najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory $\mathbb{A}$, kde*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

- *Vlastní čísla:*
$$p_\mathbb{A}(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t(1-t)^2, \text{ proto } \sigma(\mathbb{A}) = \{0, 1\}.$$

- *Vlastní vektory* $\mathbb{A}$ *příslušné* 0 *řeší homogenní soustavu s maticí* $\mathbb{A}-0\mathbb{I}=\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

  Z Frobeniovy věty plyne, že dimenze množiny řešení $\nu_g(0)=1$ *a množina všech řešení je* $P_0=[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}]_\lambda$. *Vlastními vektory* $\mathbb{A}$ *příslušnými k* 0 *jsou všechny nenulové násobky vektoru* $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- *Vlastní vektory* $\mathbb{A}$ *příslušné* 1 *řeší homogenní soustavu s maticí* $\mathbb{A}-1\mathbb{I}=\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

  Z Frobeniovy věty plyne, že dimenze množiny řešení $\nu_g(1)=2$ *a množina všech řešení je* $P_1=[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}]_\lambda$. *Vlastními vektory* $\mathbb{A}$ *příslušnými k* 1 *jsou všechny netriviální LK vektorů* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Věta 37 (Vlastnosti charakteristického polynomu)**.** *Nechť* $p_\mathbb{A}$ *je charakteristický polynom čtvercové matice* $\mathbb{A}$ *řádu* n *s prvky z* $\mathbb{C}$. *Potom*

1. $p_\mathbb{A}$ *je polynom stupně* n,
2. *koeficient u členu nejvyššího stupně* t^n *v* $p_\mathbb{A}(t)$ *je* $(-1)^n$,
3. *konstantní člen polynomu* $p_\mathbb{A}$ *je roven det* $\mathbb{A}$.

Důkaz. Nejvyšší mocnina t se objevuje ve členu determinantu $p_\mathbb{A}(t)=\det(\mathbb{A}-t\mathbb{I})$ odpovídajícímu identické permutaci, tedy ve členu $(\mathbb{A}_{11}-t)(\mathbb{A}_{22}-t)\dots(\mathbb{A}_{nn}-t)$, což je t^n, a objevuje se s koeficientem $(-1)^n$.

Označme $p_\mathbb{A}(t)=(-1)^n t^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0$. Pak $p_\mathbb{A}(0)=b_0$. Zároveň podle definice charakteristického polynomu máme $p_\mathbb{A}(0)=\det(\mathbb{A}-0\mathbb{I})=\det\mathbb{A}$. Tedy koeficient u konstantního členu $b_0=\det\mathbb{A}$. ☐

Věta 38 (Vlastní čísla a det $\mathbb{A}$)**.** *Nechť* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ *jsou kořeny charakteristického polynomu čtvercové matice* $\mathbb{A}$ *řádu* n *s prvky z* $\mathbb{C}$. *Pak det* $\mathbb{A}=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$.
Slovy: "det $\mathbb{A}$ *je součinem vlastních čísel* $\mathbb{A}$*."*

Důkaz. Známe-li kořeny $p_\mathbb{A}$ a koeficient u nejvyšší mocniny t^n, pak získáme rozklad na kořenové činitele $p_\mathbb{A}(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$ a z něj vidíme, že $p_\mathbb{A}(0)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. Z 3. bodu Věty 37 víme, že $p_\mathbb{A}(0)=\det\mathbb{A}$. Proto $\det\mathbb{A}=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. ☐

Důsledek 12 (Vlastní čísla a regularita matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je čtvercová matice řádu* n *s prvky z* $\mathbb{C}$. *Matice* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $0\notin\sigma(\mathbb{A})$, *tj.* 0 *není vlastním číslem* $\mathbb{A}$.

Důkaz. Jelikož je podle Věty 38 det $\mathbb{A}$ roven součinu vlastních čísel a jelikož $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $\det\mathbb{A}\neq 0$, dostáváme tvrzení důsledku. ☐

Věta 39 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je horní (dolní) trojúhelníková matice řádu* n *s prvky z* $\mathbb{C}$. *Pak vlastní čísla jsou rovna diagonálním prvkům matice.*

Důkaz. Pro horní (dolní) trojúhelníkovou matici víme z Věty 16 o determinantu trojúhelníkové matice, že $p_\mathbb{A}(t)=\det(\mathbb{A}-t\mathbb{I})=(\mathbb{A}_{11}-t)(\mathbb{A}_{22}-t)\dots(\mathbb{A}_{nn}-t)$. Odtud již tvrzení plyne. ☐

Důležitou roli bude hrát kromě geometrické násobnosti vlastního čísla ještě další násobnost.

Definice 22. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.* **Algebraickou násobností** *$\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$.*

Věta 40 (Vztah algebraické a geometrické násobnosti)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí*

$$\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda).$$

Důkaz. Označme $k = \nu_g(\lambda)$. Podle definice geometrické násobností umíme najít k LN vlastních vektorů příslušných λ. Označme je $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Doplňme soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$. Vytvořme matici $\mathbb{X}$ mající sloupce $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, taková matice je jistě regulární, neboť má LN sloupce. Proto existuje $\mathbb{X}^{-1}$. Podle Věty 20 o determinantu součinu matic platí

$$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right).$$

Jelikož $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda\vec{x}_i$ pro každé $i \in \hat{k}$, snadno si rozmyslíme, že

$$\det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right) = \det\left((\lambda - t)\vec{e}_1, \ldots, (\lambda - t)\vec{e}_k,\ \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}_{k+1} - t\vec{e}_{k+1}, \ldots, \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}_n - t\vec{e}_n\right) = (\lambda - t)^k q(t),$$

kde poslední rovnost jsme získali opakovaným rozvojem determinantu podle prvního řádku a $q(t)$ je polynom stupně $n-k$, který je roven determinantu, jenž po rozvoji zbude. Z rovnosti $p_{\mathbb{A}}(t) = (\lambda - t)^k q(t)$ je jasné, že $\nu_a(\lambda) \geq k = \nu_g(\lambda)$. □

Poznámka 39. *Je-li λ vlastní číslo $\mathbb{A}$, pak zřejmě $\nu_a(\lambda) \geq 1$ a $\nu_g(\lambda) \geq 1$. Podle Věty 40 dostáváme, že jakmile $\nu_a(\lambda) = 1$, pak také $\nu_g(\lambda) = 1$.*

Věta 41 (LN vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory $\mathbb{A}$. Pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ je LN soubor.*
Slovy: "Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou LN."

Důkaz. Dokážeme tvrzení sporem. Předpokládáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ je LZ, pak podle alternativní definice LZ je buď $\vec{x}_1 = \vec{0}$ (to ale nenastává, protože $\vec{x}_1$ je vlastní vektor), nebo existuje $j \in \hat{k}$, $j \geq 2$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$ tak, že $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \vec{x}_i$. Bereme nejmenší takové j, pak je zřejmé, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{j-1})$ je LN soubor. Pak $\mathbb{A}\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \mathbb{A}\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i$. Zároveň $\lambda_j \vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_j \vec{x}_i$. Odtud dostáváme

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j)\vec{x}_i = \vec{0}.$$

Jelikož $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$, plyne z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{j-1})$, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$. Odtud plyne, že $\vec{x}_j = \vec{0}$, což je spor s předpokladem, že $\vec{x}_j$ je vlastní, tedy nenulový vektor. □

Věta 42 (Báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. V $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$ právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Uvažujme libovolné vlastní číslo λ. Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$. Seřadili jsme si vektory v bázi tak, aby právě $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ příslušely λ. Odtud je zřejmé, že $\nu_g(\lambda) \geq k$. Označme jako $\mathbb{X}$ matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$. Matice $\mathbb{X}$ je tedy regulární.

$$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}) = \begin{vmatrix} \lambda-t & & & & & \\ & \lambda-t & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda-t & & \\ & & & & \mu-t & \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix},$$

kde vpravo vystupuje determinant matice, která má na diagonále vlastní čísla zmenšená o t (protože $\mathbb{X}$ je sestavená z vlastních vektorů $\mathbb{A}$) a $\lambda - t$ je právě na prvních k diagonálních pozicích (protože $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ přísluší λ). Odtud plyne, že λ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu, tedy $\nu_a(\lambda) = k$. Jelikož $k \leq \nu_g(\lambda) \leq \nu_a(\lambda)$, máme dokázáno, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.
$(\Leftarrow)$: Nechť má matice $\mathbb{A}$ k různých vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Ke každému vlastnímu číslu λ_i lze najít $\nu_g(\lambda_i)$ LN vlastních vektorů $\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \ldots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)}$. Ukažme, že soubor vytvořený z vektorů $\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \ldots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)}$ pro $i \in \hat{k}$ tvoří bázi $\mathbb{C}^n$. Jejich počet je roven $\sum_{i=1}^k \nu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \nu_a(\lambda_i) = n$, kde první rovnost plyne z rovností $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a druhá z faktu, že součet algebraických násobností vlastních čísel je roven stupni charakteristického polynomu, tedy n. Stačí proto ukázat, že soubor je LN. Uvažujme LK souboru rovnou nulovému vektoru, tj.

$$\sum_{j_1=1}^{\nu_g(\lambda_1)} \alpha_{j_1}^{(1)} \vec{x}_{j_1}^{(1)} + \sum_{j_2=1}^{\nu_g(\lambda_2)} \alpha_{j_2}^{(2)} \vec{x}_{j_2}^{(2)} + \cdots + \sum_{j_k=1}^{\nu_g(\lambda_k)} \alpha_{j_k}^{(k)} \vec{x}_{j_k}^{(k)} = \vec{0}.$$

Každá ze sum je buď rovna nulovému vektoru, nebo jde o vlastní vektor $\mathbb{A}$ (jelikož se jedná o LK vlastních vektorů příslušných danému vlastnímu číslu). Jelikož jsou ovšem vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům LN, nutně nastává první možnost, tedy sumy jsou rovny nulovým vektorům. Nulovost koeficientů $\alpha_{j_i}^{(i)}$ pro každé $i \in \hat{k}$ a každé $j_i \in \{1, \ldots, \nu_g(\lambda_i)\}$ pak plyne z LN souboru $(\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \ldots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)})$ pro každé $i \in \hat{k}$. Tím je LN celého souboru dokázána. □

5.2 Diagonalizace matic

Definice 23. *Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jsou čtvercové matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.*

Poznámka 40. *Podobnost je ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n, tj.*

- *$\mathbb{A}$ je podobná sama sobě,*
- *je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{A}$,*
- *je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{C}$, pak $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{C}$.*

Důkaz ponechán čtenáři, plyne snadno z definice podobnosti.

Věta 43 (Vlastnosti podobných matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jsou čtvercové matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Nechť $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$.*

1. *Pak $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, tedy i $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$, kde $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$ značí geometrickou násobnost λ pro matici $\mathbb{A}$ a podobně pro $\mathbb{B}$.*
   Slovy: "Charakteristické polynomy podobných matic se rovnají, tedy i jejich spektra jsou stejná, speciálně algebraické násobnosti stejných vlastních čísel jsou stejné."

2. *Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$, pak $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$, kde $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ značí geometrickou násobnost λ pro matici $\mathbb{A}$ a podobně pro $\mathbb{B}$.*
   Slovy: "Geometrické násobnosti stejných vlastních čísel podobných matic jsou stejné."

Důkaz. Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$, pak

$$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{X}(\mathbb{B} - t\mathbb{I})\mathbb{X}^{-1}) = \det(\mathbb{B} - t\mathbb{I}) = p_{\mathbb{B}}(t).$$

Tím je dokázána rovnost charakteristických polynomů, tedy i spekter a algebraických násobností.

Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou LN vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné λ. Pak $\lambda\vec{x}_i = \mathbb{A}\vec{x}_i = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$, odtud $\lambda\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i = \mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$, proto $\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_1, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_2, \ldots, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou vlastní vektory $\mathbb{B}$ příslušné λ. Díky regularitě $\mathbb{X}$, tedy i $\mathbb{X}^{-1}$, je získaný soubor vlastních vektorů $\mathbb{B}$ příslušných λ LN. Proto $\nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda) \geq \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$. Jelikož $\mathbb{B}$ je zároveň podobná $\mathbb{A}$, dostaneme také $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) \geq \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$. Tím je dokázána rovnost geometrických násobností. □

Poznámka 41. *Implikaci ve Větě 43 nelze obrátit. Rozmyslete si sami, že matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mají stejné charakteristické polynomy a mají stejné geometrické násobnosti vlastních čísel, přesto si nejsou podobné.

Nabízí se otázka, do jaké nejjednodušší podoby lze matici podobnostní transformací převést, tj. jaké nejjednodušší matici je daná matice podobná? Speciálně se ptáme, zda je každá čvercová matice podobná diagonální matici? Odpověď je NE!

Definice 24. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Pak $\mathbb{A}$ nazveme* **diagonalizovatelnou**, *pokud je podobná diagonální matici, tj. existuje $\mathbb{D}$ diagonální a $\mathbb{X}$ regulární řádu n tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.*

Věta 44 (Diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Pak $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Ukážeme, že sloupce matice $\mathbb{X}$ tvoří hledanou bázi $\mathbb{C}^n$. Označme $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ sloupce $\mathbb{X}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diagonální prvky $\mathbb{D}$. Z regularity $\mathbb{X}$ je jasné, že soubor $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$, máme $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Proto $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor z vlastních vektorů. Tím je dokázáno, že $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je hledaná báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů.
($\Leftarrow$) : Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, označme $\mathbb{X}$ matici se sloupci $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$. Matice $\mathbb{X}$ je tedy regulární. Snadno ověříte, že

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ odkud plyne } \mathbb{A} = \mathbb{X}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}\mathbb{X}^{-1},$$

tedy $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. $\square$

Příklad 28. *V příkladu 27 jsme našli vlastní vektory* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\textit{vlastní vektor příslušný } 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ a vlastní vektory přílušné } 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z důkazu Věty 44 plyne, že sestavíme-li matici $\mathbb{X}$ z vlastních vektorů a matici $\mathbb{D}$ z vlastních čísel v odpovídajícím pořadí, tj. např.

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pak $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Ověřte.

Poznámka 42. *Zatímco podobnostní transformace zachovávají vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic, ekvivalentní řádkové úpravy mohou vlastní čísla matice měnit a mohou měnit i diagonalizovatelnost. Například následující matice $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ záměnou řádků a platí*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{má různá vlastní čísla } 0 \textit{ a } 1, \textit{ a je tedy diagonalizovatelná, zatímco}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{má pouze vlastní číslo } 0 \textit{ s } \nu_a(0) = 2 > 1 = \nu_g(0), \textit{ proto není diagonalizovatelná.}$$

Pro zajímavost uveďme bez důkazu slavnou větu spektrální teorie.

Věta 45 (Hamilton-Caley)**.** *Každá čtvercová matice s prvky z $\mathbb{C}$ je kořenem svého charakteristického polynomu, tj. je-li $p_{\mathbb{A}}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, pak*

$$a_n \mathbb{A}^n + a_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbb{A} + a_0 \mathbb{I} = \mathbb{O}.$$

Příklad 29. *V příkladu 27 jsme našli charakteristický polynom $p_{\mathbb{A}}(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že $-\mathbb{A}^3 + 2\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} = \mathbb{O}$.

6 Vlastnosti, zejména spektrální, vybraných typů matic

Neřekneme-li jinak, pak symbol $<\vec{x}|\vec{y}>$ znamená v celé kapitole standardní skalární součin.

Zopakujte si Definici 4, v níž jsme zavedli transponovanou, komplexně sdruženou a hermitovsky sdruženou matici. Poté můžeme zavést speciální typy matic - všechny budou čtvercové.

Definice 25. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice s komplexními prvky.*

1. *$\mathbb{A}$ nazveme* **normální**, *pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$.*
2. *$\mathbb{A}$ nazveme* **hermitovskou**, *pokud $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$.*
   - *Je-li speciálně $\mathbb{A}$ reálná a hermitovská, tedy vlastně $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **symetrickou**.
3. *$\mathbb{A}$ nazveme* **unitární**, *pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$.*
   - *Je-li speciálně $\mathbb{A}$ reálná a unitární, tedy vlastně $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **ortogonální (OG)**.

Poznámka 43. *Přímo z definice plyne:*

- *Symetrické matice jsou hermitovské. Hermitovské matice jsou normální.*
- *OG matice jsou unitární. Unitární matice jsou normální.*

Tedy všechna tvrzení, která platí pro normální matice, platí automaticky také pro hermitovské, a tedy i symetrické, a unitární, tedy i OG matice.

Příklad 30. *Triviálním příkladem normální matice je $\mathbb{I}$.*

- $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ *je symetrická, tedy i hermitovská a normální.*
- $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ *je hermitovská, tedy i normální.*
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *je OG, tedy i unitární a normální.*
- $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$ *je unitární, tedy i normální.*

Než začneme zkoumat vlastnosti speciálních typů matic, uveďme lemma, které nám umožní pracovat se standardním skalárním součinem pomocí maticového násobení.

Lemma 5. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$. Pak pro jejich standardní skalární součin platí*

$$<\vec{x}, \vec{y}> = \vec{y}^H \cdot \vec{x}.$$

Důkaz. Označme $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Pak

$$\vec{y}^H \cdot \vec{x} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = <\vec{x}|\vec{y}> .$$

□

Už víme, že ne každá matice je diagonalizovatelná. Ale aspoň je každá matice podobná horní trojúhelníkové matici (bez dk.):

Věta 46 (Schurova)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Pak existuje unitární matice $\mathbb{U}$ řádu n a $\mathbb{H}$ horní trojúhelníková matice takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^H\mathbb{H}\mathbb{U}$.*

Poznámka 44. *Tvrzení Schurovy věty zůstává v platnosti, nahradíme-li horní trojúhelníkovou matici za dolní trojúhelníkovou matici.*

Poznámka 45. *Jelikož unitární matice $\mathbb{U}$ splňuje $\mathbb{U}\mathbb{U}^H = \mathbb{I}$, je $\mathbb{U}^H = \mathbb{U}^{-1}$, proto ze Schurovy věty plyne, že každá matice je podobná horní trojúhelníkové matici.*

6.1 Vlastnosti normálních matic

Abychom byli schopni charakterizovat normální matice pomocí jejich spektrálních vlastností, využijeme následující lemma.

Lemma 6. *Nechť $\mathbb{A}$ je normální horní trojúhelníková matice. Pak $\mathbb{A}$ je diagonální.*

Důkaz. Víme, že $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$, tedy

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} & \dots & \mathbb{A}_{1n} \\ 0 & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} & \dots & \mathbb{A}_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbb{A}_{33} & \dots & \mathbb{A}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{A}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{A}_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\mathbb{A}_{12}} & \overline{\mathbb{A}_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\mathbb{A}_{13}} & \overline{\mathbb{A}_{23}} & \overline{\mathbb{A}_{33}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\mathbb{A}_{1n}} & \overline{\mathbb{A}_{2n}} & \overline{\mathbb{A}_{3n}} & \dots & \overline{\mathbb{A}_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{A}_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\mathbb{A}_{12}} & \overline{\mathbb{A}_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{\mathbb{A}_{13}} & \overline{\mathbb{A}_{23}} & \overline{\mathbb{A}_{33}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\mathbb{A}_{1n}} & \overline{\mathbb{A}_{2n}} & \overline{\mathbb{A}_{3n}} & \dots & \overline{\mathbb{A}_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} & \dots & \mathbb{A}_{1n} \\ 0 & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} & \dots & \mathbb{A}_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbb{A}_{33} & \dots & \mathbb{A}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

pak prvek součinu matic s indexy $1, 1$ je roven

$$\mathbb{A}_{11}\overline{\mathbb{A}_{11}} + \mathbb{A}_{12}\overline{\mathbb{A}_{12}} + \dots + \mathbb{A}_{1n}\overline{\mathbb{A}_{1n}} = \overline{\mathbb{A}_{11}}\mathbb{A}_{11},$$

tedy

$$|\mathbb{A}_{11}|^2 + |\mathbb{A}_{12}|^2 + \dots + |\mathbb{A}_{1n}|^2 = |\mathbb{A}_{11}|^2,$$

odtud vidíme, že $\mathbb{A}_{12} = \mathbb{A}_{13} = \dots = \mathbb{A}_{1n} = 0$. Podobně spočtením prvku součinu matic s indexy $2, 2$ dostaneme $\mathbb{A}_{23} = \dots = \mathbb{A}_{2n}$. Analogicky dostaneme, že všechny prvky nad diagonálou jsou nulové. ☐

Věta 47 (Schurova věta pro normální matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je normální matice řádu n. Pak existuje unitární matice $\mathbb{U}$ a diagonální matice $\mathbb{D}$ řádu n takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^H\mathbb{D}\mathbb{U}$.*

Důkaz. Ze Schurovy věty plyne, že existuje horní trojúhelníková matice $\mathbb{H}$ a unitární matice $\mathbb{U}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{H}\mathbb{U}^H$. Ukažme, že z normality $\mathbb{A}$ plyne normalita $\mathbb{H}$. Z unitarity $\mathbb{U}$ dostaneme

$$\mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}^H\mathbb{U}\mathbb{H}\mathbb{U}^H\mathbb{U} = \mathbb{H}.$$

Pak podle vlastností hermitovsky sdružených matic dostaneme

$$\mathbb{H}\mathbb{H}^H = \mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U}(\mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U})^H = \mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U}\mathbb{U}^H\mathbb{A}^H\mathbb{U} = \mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{A}^H\mathbb{U}.$$

$$\mathbb{H}^H\mathbb{H} = \mathbb{U}^H\mathbb{A}^H\mathbb{U}\mathbb{U}^H\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}^H\mathbb{A}^H\mathbb{A}\mathbb{U}.$$

Rovnost $\mathbb{H}\mathbb{H}^H = \mathbb{H}^H\mathbb{H}$ plyne z rovnosti $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$. Z Lemmatu 6 plyne, že $\mathbb{H}$ je diagonální matice, čímž je tvrzení dokázáno. ☐

Důsledek 13 (Diagonalizovatelnost normálních matic)**.** *Každá normální matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.*

Důkaz. Jelikož unitární matice $\mathbb{U}$ splňuje $\mathbb{U}\mathbb{U}^H = \mathbb{I}$, je $\mathbb{U}^H = \mathbb{U}^{-1}$, proto ze Schurovy věty pro normální matice plyne, že každá normální matice je podobná diagonální matici. ☐

Věta 48 (ON báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$. Matice $\mathbb{A}$ je normální, právě když v $\mathbb{C}^n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Ze Schurovy věty pro normální matice víme, že existuje unitární matice $\mathbb{U}$ a diagonální matice $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^H$. Díky unitaritě $\mathbb{U}$ dostaneme vynásobením obou stran maticí $\mathbb{U}$ zprava

$$\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li sloupce $\mathbb{U}$ jako $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, plyne z definice maticového násobení, že $\mathbb{A}\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Odtud vidíme, že sloupce matice $\mathbb{U}$ se skládají z vlastních vektorů $\mathbb{A}$. Ze vztahu $\mathbb{U}^H\mathbb{U} = \mathbb{I}$ dostáváme, že pro každé $i, j \in \hat{n}$ splňuje standardní skalární součin $< \vec{u}_i | \vec{u}_j >= \delta_{ij}$, tedy sloupce matice $\mathbb{U}$ tvoří ON soubor, tedy LN soubor. Suma sumárum tvoří sloupce $\mathbb{U}$ hledanou ON bázi $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů.
($\Leftarrow$) : Nechť $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ je ON báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Označme $\mathbb{U}$ matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$. Pak snadno ověříme, že $\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Z ortonormality souboru $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ plyne, že $\mathbb{U}$ je unitární, proto $\mathbb{A} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^H$. Z Věty 7 dostaneme $\mathbb{A}^H = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & \overline{0} \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \mathbb{U}^H$. Snadno pak ověříme, že

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{U} \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \mathbb{U}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A},$$

tedy $\mathbb{A}$ je normální. □

Uveďme ještě některé další typické vlastnosti normálních matic.

Věta 49 (Vlastnosti normálních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je normální matice řádu n. Pak platí:*

1. *pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ je $||\mathbb{A}\vec{x}|| = ||\mathbb{A}^H\vec{x}||$,*
2. *λ je vlastní číslo $\mathbb{A}$ s vlastním vektorem $\vec{x}$, právě když $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo $\mathbb{A}^H$ s vlastním vektorem $\vec{x}$,*
3. *nechť $\lambda, \mu \in \sigma(\mathbb{A})$, $\lambda \neq \mu$, nechť dále $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný λ a $\vec{y}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný μ, pak standardní skalární součin $< \vec{x} | \vec{y} >= 0$.*
   Slovy: "Vlastní vektory normální matice příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé."

Důkaz.

1. $||\mathbb{A}\vec{x}||^2 =< \mathbb{A}\vec{x}|\mathbb{A}\vec{x} >= (\mathbb{A}\vec{x})^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{x}^H\mathbb{A}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{x}^H\mathbb{A}\mathbb{A}^H\vec{x} = \vec{x}^H(\mathbb{A}^H)^H\mathbb{A}^H\vec{x} = (\mathbb{A}^H\vec{x})^H\mathbb{A}^H\vec{x} =< \mathbb{A}^H\vec{x}|\mathbb{A}^H\vec{x} >= ||\mathbb{A}^H\vec{x}||^2$, kde jsme v 2. a předposlední rovnosti využili maticový zápis skalárního součinu z Lemmatu 5, ve 3. a 5. a 6. rovnosti vlastnosti hermitovského sdružování z Věty 7 a ve 4. rovnosti normalitu $\mathbb{A}$.

2. Je-li $\mathbb{A}$ normální matice, $\lambda \in \mathbb{C}$, pak $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^H = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})(\mathbb{A}^H - \overline{\lambda}\mathbb{I}) = (\mathbb{A}^H - \overline{\lambda}\mathbb{I})(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^H(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$, tedy $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$ je také normální. Z již dokázaného 1. bodu víme, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí
$$||(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x}|| = ||(\mathbb{A}^H - \overline{\lambda}\mathbb{I})\vec{x}||,$$
odtud je zřejmé, že je-li λ vlastní číslo $\mathbb{A}$ a $\vec{x}$ příslušný vlastní vektor, pak $||(\mathbb{A}^H - \overline{\lambda}\mathbb{I})\vec{x}|| = 0$, tedy $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo $\mathbb{A}^H$ s vlastním vektorem $\vec{x}$. A podobně opačným směrem.

3. Platí série rovností:

$$\lambda < \vec{x}|\vec{y} > = < \lambda\vec{x}|\vec{y} > = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = \vec{y}^H \mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}^H (\mathbb{A}^H)^H \vec{x} = < \vec{x}|\mathbb{A}^H \vec{y} > = < \vec{x}|\overline{\mu}\vec{y} > = \mu < \vec{x}|\vec{y} >,$$

kde v 1. a poslední rovnosti jsme využili vlastností skalárního součinu, ve 3. a 5. rovnosti jsme využili maticový zápis skalárního součinu z Lemmatu 5, ve 2. a předposlední rovnosti faktu, že $\lambda, \mu \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\vec{x}, \vec{y}$ k nim příslušné vlastní vektory. Dostáváme tedy $(\lambda - \mu) < \vec{x}|\vec{y} > = 0$, a jelikož $\lambda \neq \mu$, máme $< \vec{x}|\vec{y} > = 0$.

□

6.2 Vlastnosti unitárních matic

Připomeňme, že OG matice jsou podmnožinou unitárních. Proto tvrzení o unitárních maticích platí také pro OG matice.

Věta 50 (Vlastnosti unitárních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$.*

1. *$\mathbb{A}$ je unitární, právě když $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^H$.*
2. *$\mathbb{A}$ je unitární, právě když sloupce $\mathbb{A}$ tvoří ON soubor.*
3. *Je-li $\mathbb{A}$ unitární řádu n, pak pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \mathbb{A}\vec{x}|\mathbb{A}\vec{y} > = < \vec{x}|\vec{y} >$.*
   Slovy: "Násobení unitární maticí zachovává skalární součin."
4. *Je-li $\mathbb{A}$ unitární řádu n, pak pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $||\mathbb{A}\vec{x}|| = ||\vec{x}||$.*
   Slovy: "Násobení unitární maticí zachovává normu."
5. *Pro vlastní čísla λ unitárních matic platí $|\lambda| = 1$.*
6. *Je-li $\mathbb{A}$ unitární, pak $|\det \mathbb{A}| = 1$. Je-li $\mathbb{A}$ navíc OG, pak $\det \mathbb{A} = 1$ nebo $\det \mathbb{A} = -1$.*
7. *Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ unitární matice stejného řádu. Pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je unitární matice.*

Důkaz.

1. Plyne z definice unitární matice.
2. Tvrzení plyne z faktu: $\mathbb{A}^H\mathbb{A} = \mathbb{I} \Leftrightarrow < \mathbb{A}_{\bullet i}|\mathbb{A}_{\bullet j} > = \mathbb{A}^H_{\bullet j}\mathbb{A}_{\bullet i} = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde jsme využili maticový zápis standardního skalárního součinu z Lemmatu 5.
3. $< \mathbb{A}\vec{x}|\mathbb{A}\vec{y} > = (\mathbb{A}\vec{y})^H \mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}^H \mathbb{A}^H \mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}^H \vec{x} = < \vec{x}|\vec{y} >$.
4. Tvrzení plyne z předchozího bodu dosazením $\vec{y} := \vec{x}$.
5. Je-li $\vec{x}$ vlastní vektor unitární matice $\mathbb{A}$ příslušný λ, pak

   $$||\vec{x}|| = ||\mathbb{A}\vec{x}|| = ||\lambda\vec{x}|| = |\lambda|||\vec{x}||,$$

   a protože je $\vec{x} \neq \vec{0}$, dostáváme $|\lambda| = 1$.
6. Tvrzení plyne z předchozího bodu, protože determinant je součinem vlastních čísel. OG matice má reálné prvky, proto i její determinant je reálný, tedy je roven ± 1.
7. Unitarita součinu plyne z následujících rovností $(\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}^H\mathbb{A}^H = \mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$.

□

Příklad 31. *POZOR! OG matice může mít komplexní vlastní čísla. Např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ je jistě OG, neboť je reálná a sloupce tvoří ON soubor, ovšem $\sigma(\mathbb{A}) = \{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\}$.*

6.3 Vlastnosti hermitovských matic

Připomeňme, že symetrické matice jsou podmnožinou hermitovských. Proto tvrzení o hermitovských maticích platí také pro symetrické matice.

Věta 51 (Vlastnosti hermitovských matic). *Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice řádu n s prvky z $\mathbb{C}$.*

1. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = < \vec{x}|\mathbb{A}\vec{y} >$.*
2. *Pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ je $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > \in \mathbb{R}$.*
3. *$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$.*
   Slovy: "Hermitovské matice mají všechna vlastní čísla reálná."
4. *$det\ \mathbb{A} \in \mathbb{R}$.*

Důkaz.

1. Tvrzení plyne z faktu: $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = \vec{y}^H\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}^H\mathbb{A}^H\vec{x} = (\mathbb{A}\vec{y})^H\vec{x} = < \vec{x}|\mathbb{A}\vec{y} >$.
2. Dosadíme-li do předchozího bodu $\vec{y} := \vec{x}$, dostaneme $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > = < \vec{x}|\mathbb{A}\vec{x} > = \overline{< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} >}$, kde poslední rovnost platí podle axiomu skalárního součinu. Číslo, které je rovno svému komplexnímu sdružení, musí být reálné, tedy $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > \in \mathbb{R}$.
3. Nechť $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ k vlastnímu číslu λ, pak $\lambda < \vec{x}|\vec{x} > = < \lambda\vec{x}|\vec{x} > = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} >$. Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, je $< \vec{x}|\vec{x} > > 0$ a podle předchozího bodu je $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > \in \mathbb{R}$, odtud máme $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Tvrzení plyne z předchozího bodu, protože determinant je součinem vlastních čísel.

□

6.3.1 $\mathbb{A}$-skalární součin pro hermitovské matice

Se znalostí hermitovských matic a jejich vlastností budeme moci v prostoru $\mathbb{C}^n$ zavést i jiné skalární součiny než standardní. Potřebujeme k tomu ještě jednu definici.

Definice 26. *Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice řádu n. Pokud pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$, platí $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > > 0$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **pozitivně definitní** *(PD).*

Poznámka 46. *V definici PD matice je hermitovskost důležitá, protože pouze pro hermitovské matice platí, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ je $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > \in \mathbb{R}$, a tedy umíme rozhodnout, zda $< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} >> 0$. (Komplexní nereálná čísla neumíme porovnávat.)*

Věta 52 ($\mathbb{A}$-skalární součin). *Nechť $\mathbb{A}$ je PD matice řádu n, pak zobrazení, které každé dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ přiřadí komplexní číslo $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{y} >$ (kde $< .|. >$ je standardní skalární součin) je skalárním součinem na prostoru $\mathbb{C}^n$. Nazýváme jej* $\mathbb{A}$-skalárním součinem *na $\mathbb{C}^n$ a značíme $< .|. >_{\mathbb{A}}$.*

Důkaz. Ověříme, že zobrazení splňuje axiomy skalárního součinu.

1. hermitovskost: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \vec{x}|\vec{y} >_{\mathbb{A}} = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = < \vec{x}|\mathbb{A}\vec{y} > = \overline{< \mathbb{A}\vec{y}|\vec{x} >} = \overline{< \vec{y}|\vec{x} >_{\mathbb{A}}}$, kde ve 2. rovnosti byla využita hermitovskost $\mathbb{A}$,
2. linearita v 1. argumentu:
   - aditivita: pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \vec{x}+\vec{z}|\vec{y} >_{\mathbb{A}} = < \mathbb{A}(\vec{x}+\vec{z})|\vec{y} > = < \mathbb{A}\vec{x}+\mathbb{A}\vec{z}|\vec{y} > = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > + < \mathbb{A}\vec{z}|\vec{y} > = < \vec{x}|\vec{y} >_{\mathbb{A}} + < \vec{z}|\vec{y} >_{\mathbb{A}}$, kde stačilo, že $\mathbb{A}$ je čtvercová řádu n,
   - homogenita: pro každé $\alpha \in \mathbb{C}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \alpha\vec{x}|\vec{y} >_{\mathbb{A}} = < \mathbb{A}(\alpha\vec{x})|\vec{y} > = < \alpha\mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = \alpha < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{y} > = \alpha < \vec{x}|\vec{y} >_{\mathbb{A}}$, kde stačilo, že $\mathbb{A}$ je čtvercová řádu n,

3. pozitivní definitnost: pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \vec{x}|\vec{x} >_{\mathbb{A}} = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > \geq 0$ a $< \vec{x}|\vec{x} >_{\mathbb{A}} = < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} >= 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$, kde je využita PD matice $\mathbb{A}$.

□

Přímo z definice je těžké ověřit, zda je matice PD. Proto uvedeme dvě šikovná kritéria k rozhodování o PD matic.

Věta 53 (PD a vlastní čísla)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice. Pak $\mathbb{A}$ je PD, právě když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Nechť λ je vlastní číslo $\mathbb{A}$ s vlastním vektorem $\vec{x}$. Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, plyne z PD $\mathbb{A}$, že

$$0 < < \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > = < \lambda\vec{x}|\vec{x} > = \lambda < \vec{x}|\vec{x} > .$$

Protože $< \vec{x}|\vec{x} > > 0$, máme $\lambda > 0$.
$(\Leftarrow)$: Jelikož $\mathbb{A}$ je hermitovská, a proto i normální, ze Schurovy věty pro normální matice plyne, že existuje unitární matice $\mathbb{U}$ a diagonální matice $\mathbb{D}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^H$. Na diagonále $\mathbb{D}$ leží vlastní čísla $\mathbb{A}$, která jsou podle předpokladu kladná. Nechť $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$, pak

$$< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > = \vec{x}^H(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^H)\vec{x} = (\mathbb{U}^H\vec{x})^H\mathbb{D}(\mathbb{U}^H\vec{x}).$$

Jelikož $\mathbb{U}^H$ je regulární, je $\mathbb{U}^H\vec{x} \neq \vec{0}$. Označme složky $\mathbb{U}^H\vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ a označme $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, pak

$$< \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x} > = (\mathbb{U}^H\vec{x})^H\mathbb{D}(\mathbb{U}^H\vec{x}) = \lambda_1|y_1|^2 + \cdots + \lambda_n|y_n|^2 > 0.$$

Tedy $\mathbb{A}$ je PD. □

Bez důkazu uvedeme ještě další kritérium.

Věta 54 (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice. Pak $\mathbb{A}$ je PD, právě když všechny její hlavní subdeterminanty jsou kladné.*

Hlavní subdeterminant je det $\mathbb{A}$ a dále determinanty matic, které vznikají postupným ukrajováním posledního řádku a sloupce matice.

Příklad 32. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *má hlavní subdeterminanty rovny:*

$$det\,\mathbb{A},\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ 1.$$

Poznámka 47. *Je důležité nezapomenout v kritériích ověřit hermitovskost. Např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má kladná vlastní čísla a kladné hlavní subdeterminanty, přesto není PD, protože není symetrická.*

7 Lineární geometrie

V této kapitole zobecníme poznatky ze střední školy týkající se analytické geometrie. Uvažujeme eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ (se standardním skalárním součinem). Jeho prvky nebudeme nazývat výhradně vektory, ale častěji budeme hovořit o bodech.

7.1 Lineární variety

K definici lineární variety potřebujeme pojem spojnice bodů.

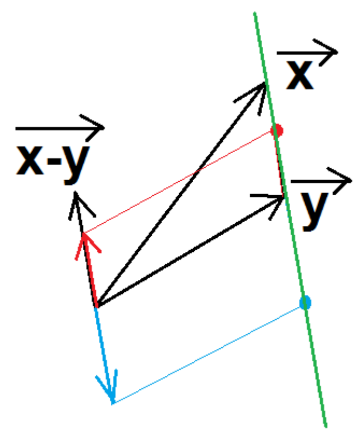
Definice 27. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.* **Spojnicí** *bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu*

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Poznámka 48. *Uveďme ekvivalentní zápisy spojnice*

$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Z posledního zápisu je vidět, že spojnici bodů $\vec{x}, \vec{y}$ získáme přičítáním reálných násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$. Tedy v $\mathbb{R}^2$ odpovídá spojnice tomu, co si pod tímto pojmem každý představí – přímce procházející body $\vec{x}$ a $\vec{y}$, viz obrázek 10.



Obrázek 10: Zeleně vyznačena spojnice bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Definice 28. *Nechť $W \subset \mathbb{R}^n$. W nazveme* **lineární varietou**, *pokud*

- *$W \neq \emptyset$,*
- *W obsahuje s každými dvěma body i jejich spojnici.*

Příklad 33. *Lineární variety v $\mathbb{R}^2$ jsou body, přímky, celé $\mathbb{R}^2$. Lineární variety v $\mathbb{R}^3$ jsou body, přímky, roviny a celé $\mathbb{R}^3$. Za nedlouho ukážeme, že tento výčet je úplný, tj. že žádné jiné variety v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ neexistují.*

S pojmem spojnice úzce souvisí pojem afinní kombinace.

Definice 29. *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell) \in \mathbb{R}^n$. Pak* **afinní kombinací** *souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pro každé $k \in \hat{\ell}$. Množinu všech afinních kombinací souboru nazýváme* **afinní obal** *souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Platí tedy*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \{\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \mid \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1 \ \ a\ \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ pro každé } k \in \hat{\ell}\}.$$

Příklad 34. *Přímo z definice plyne, že afinní obal dvou vektorů je roven jejich spojnici.*

Souvislost afinních obalů a lineárních variet je následující.

Věta 55 (Afinní obal je varieta)**.** *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell) \in \mathbb{R}^n$. Pak $W = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta a W obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Protože $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + \cdots + 1\vec{x}_i + \cdots + 0\vec{x}_\ell$ pro každé $i \in \hat{\ell}$, je $\vec{x}_i$ afinní kombinací souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$, tedy platí $\vec{x}_i \in W$. Proto $W \neq \emptyset$. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 1$. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ je třeba ukázat, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W$.

$$\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i)\vec{x}_i,$$

kde poslední výraz je afinní kombinace souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell)$, protože

$$\sum_{i=1}^{\ell} (\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Tím je dokázáno, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, tedy spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$ je z W, tedy W je lineární varieta.

□

Věta 56 (Varieta obsahuje afinní kombinace)**.** *Nechť W je lineární varieta. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in W$. Pak*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha \subset W.$$

Slovy: "Lineární varieta obsahuje s každou ℓ-ticí svých bodů i jejich libovolnou afinní kombinaci."

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu vektorů ℓ. Pro $\ell = 1$ triviálně platí. Nechť pro nějaké $\ell \geq 1$ platí, že W s každou ℓ-ticí svých vektorů obsahuje i jejich libovolnou afinní kombinaci. Uvažujme nyní $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell+1} \in W$ a jejich libovolnou afinní kombinaci $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i = 1$. Určitě existuje index $i_0 \in \widehat{\ell+1}$ takový, že $\alpha_{i_0} \neq 1$. Pak můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha_{i_0}\vec{x}_{i_0} + (1-\alpha_{i_0}) \sum_{i=1, i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} \vec{x}_i,$$

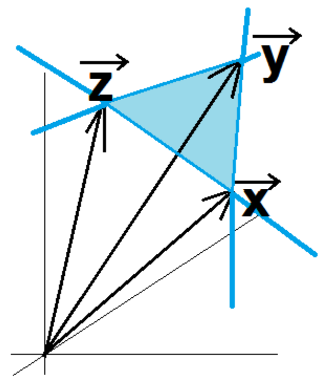
kde $\vec{y} = \sum_{i=1,i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} \vec{x}_i$ je afinní kombinace ℓ vektorů, protože $\sum_{i=1,i\neq i_0}^{\ell} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} = 1$, tedy $\vec{y} \in W$. Dále $\alpha_{i_0}\vec{x}_{i_0} + (1-\alpha_{i_0})\vec{y}$ je vektor ze spojnice $\vec{x}_{i_0}$ a $\vec{y}$, tedy závěrem $\sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \vec{x}_i \in W$. □

Věta 57 (Minimalita afinního obalu)**.** *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{R}^n$. Pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je nejmenší lineární varieta obsahující $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Z Věty 56 víme, že každá lineární varieta obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$. Jelikož zároveň z Věty 55 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_\ell]_\alpha$ je lineární varieta, máme dokázáno, že je to nejmenší lineární varieta obsahující dané vektory. □

Příklad 35. *Podle Věty 57 je řešením úlohy najít minimální lineární varietu W, která obsahuje vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, afinní obal $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.*

Příklad 36. *Rozmyslete si, jak vypadají afinní obaly jednoho, dvou, tří vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Např. $W = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$, kde $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor, tvoří rovinu obsahující $\vec{x}, \vec{y}$ a $\vec{z}$.*
Vysvětlení: Jelikož jde o lineární varietu, musí W obsahovat spojnice $\vec{x}$ a $\vec{y}$, $\vec{x}$ a $\vec{z}$, $\vec{y}$ a $\vec{z}$. Dále musí W také obsahovat spojnice bodů ze tří výše uvedených spojnic. Tedy W obsahuje rovinu, v níž leží trojúhelník s vrcholy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, viz obrázek 11. Jelikož rovina už je lineární varieta, našli jsme nejmenší lineární varietu obsahující $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, tedy jsme našli $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\alpha$.



Obrázek 11: Afinní obal 3 LN vektorů v $\mathbb{R}^2$ je rovina obsahující trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi lineárními varietami a afinními obaly napadnout, zní: "Je každá lineární varieta afinním obalem nějakého souboru vektorů?" Odpověď zní: ANO. Ale musíme nejprve prostudovat vztah mezi varietami a posunutými podprostory, abychom odpověď mohli zdůvodnit.

Následující dvě věty vysvětlují, že variety nepředstavují nic zcela nového, ale jde jen o posunuté podprostory, s kterými jsme se důvěrně seznámili již v zimním semestru.

Věta 58 (Posunutý podprostor je varieta)**.** *Nechť $\mathbb{P} \subset\subset \mathbb{R}^n$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, pak $W = \vec{a} + P$ je lineární varieta.*

Důkaz.

- $W \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, tedy $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \in W$,
- je-li $\vec{x}, \vec{y} \in W$, pak existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{p}_1$ a $\vec{y} = \vec{a} + \vec{p}_2$, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ pak platí $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} = \vec{a} + \alpha\vec{p}_1 + (1-\alpha)\vec{p}_2 \in \vec{a} + P$.

□

Příklad 37. *Speciálně je podle předchozí věty každý podprostor lineární varietou.*

Příklad 38. *Množina řešení soustavy lineárních rovnic je lineární varieta. Víme z Frobeniovy věty, že má tvar $\vec{a} + S_0$, kde S_0 je množina řešení homogenní soustavy, tedy podprostor.*

Věta 59 (Varieta je posunutý podprostor)**.** *Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^n$, pak existuje právě jeden $P \subset\subset \mathbb{R}^n$ takový, že pro každé $\vec{a} \in W$ platí $W = \vec{a} + P$.*

Důkaz. Postup bude mít tři kroky.

1. Existence podprostoru:
   Berme libovolné $\vec{a} \in W$. Položme $P = W - \vec{a} = \{\vec{x} - \vec{a} \mid \vec{x} \in W\}$. Ukážeme, že $P \subset\subset \mathbb{R}^n$.
   (a) $P \neq \emptyset$, protože $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a} \in P$.
   (b) Je-li $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$, pak existují $\vec{x}, \vec{y} \in W$ takové, že $\vec{p}_1 = \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{p}_2 = \vec{y} - \vec{a}$. Pak
   $$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\vec{x} - \vec{a} + \vec{y}) - \vec{a} \in W - \vec{a},$$
   kde jsme využili faktu, že $\vec{x} - \vec{a} + \vec{y}$ je afinní kombinace vektorů z variety, což je podle Věty 56 opět vektor z variety.

(c) Je-li $\vec{p} \in P$, pak existuje $\vec{x} \in W$ takový, že $\vec{p} = \vec{x} - \vec{a}$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ máme

$$\alpha\vec{p} = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{a} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{a} - \vec{a} \in W - \vec{a},$$

kde jsme opět využili faktu, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{a}$ je afinní kombinace vektorů z variety, což je podle Věty 56 opět vektor z variety.

2. Libovolná volba vektoru $\vec{a} \in W$:
Nechť $\vec{b} \in W$. Podle předchozího bodu existuje $\vec{p} \in P$ takový, že $\vec{b} = \vec{a} + \vec{p}$. Odtud máme $\vec{b} + P = \vec{a} + \vec{p} + P = \vec{a} + P = W$.

3. Jednoznačnost podprostoru:
Předpokládejme, že podprostor $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ splňuje $W = \vec{a} + Q$. Zároveň víme, že $W = \vec{a} + P$. Odtud je zřejmé, že $Q = P$.

□

Definice 30. *Podprostor z předchozí věty nazveme* **zaměření** *variety W a značíme $\mathcal{Z}(W)$. Vektor $\vec{a}$ ve vyjádření $\vec{a} + P = W$ nazýváme* **vektorem posunutí**. *Nenulové vektory ze $\mathcal{Z}(W)$ nazýváme* **směrové vektory** *variety W.* **Dimenzí variety** *dim W nazveme dim W = dim $\mathcal{Z}(W)$. Na základě dimenze zobecníme v $\mathbb{R}^n$ i pro $n \geq 3$ pojmy bod, přímka, rovina:*

- *je-li dim $W = 0$, pak W nazýváme* **bod**,
- *je-li dim $W = 1$, pak W nazýváme* **přímka**,
- *je-li dim $W = 2$, pak W nazýváme* **rovina**,
- *je-li dim $W = n-1$, pak W nazýváme* **nadrovina**.

Nenulové vektory ze $\mathcal{Z}(W)^\perp$ nazveme **normálové vektory** *variety W.*

Poznámka 49. *V Příkladu 41 jsme vyjmenovali všechny možné posunuté podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Podle Věty 59 jde o úplný výčet lineárních variet v těchto prostorech.*

Vysvětleme vztah mezi lineárním a afinním obalem.

Věta 60 (Lineární obal a afinní obal). *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{R}^n$. Pak platí*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha = \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

Důkaz. Ukazujeme rovnost dvou množin, tedy dvě inkluze.
$[\;]_\alpha \subset \vec{x}_1 + [\;]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$, tj. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$. Pak

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1) \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda.$$

$\vec{x}_1 + [\;]_\lambda \subset [\;]_\alpha$: Nechť $\vec{x} \in \vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\ell - \vec{x}_1]_\lambda$, tj. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_1)$. Pak platí

$$\vec{x} = (1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i)\vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i \vec{x}_i,$$

přičemž poslední výraz je afinní kombinací souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$, protože součet koeficientů u jednotlivých vektorů v lineární kombinaci je $(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i) + \sum_{i=2}^{\ell} \beta_i = 1$, tedy $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\alpha$.
□

Nyní už máme k dispozici vše potřebné, abychom ukázali, že každá lineární varieta je afinním obalem nějakého souboru vektorů.

Věta 61 (Varieta je afinní obal)**.** *Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^n$ a $\dim W = \ell - 1$. Pak existují vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_\ell$ takové, že*

$$W = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_\ell]_\alpha.$$

Důkaz. Z Věty 59 plyne, že existuje podprostor $\mathcal{Z}(W)$ dimenze $\ell - 1$ takový, že $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$, kde $\vec{a} \in W$. Buď je $\mathcal{Z}(W) = \{\vec{0}\}$, pak $W = [\vec{a}]_\alpha$, nebo existuje báze $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1})$ podprostoru $\mathcal{Z}(W)$. Pak je podle Věty 60

$$W = \vec{a} + [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\ell-1}]_\lambda = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{x}_1, \vec{a} + \vec{x}_2, \dots, \vec{a} + \vec{x}_{\ell-1}]_\alpha,$$

W je tedy afinním obalem ℓ vektorů. □

7.1.1 Vzájemná poloha a průnik lineárních variet

Definice 31. *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že jsou*

1. *rovnoběžné, pokud $\mathcal{Z}(W_1) \subset \mathcal{Z}(W_2)$ nebo $\mathcal{Z}(W_2) \subset \mathcal{Z}(W_1)$,*
2. *mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,*
3. *různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.*

Věta 62 (Průnik variet)**.** *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^n$. Pak průnik $W_1 \cap W_2$ je $\emptyset$, nebo lineární varieta.*

Důkaz. Prázdný průnik jistě variety mít mohou. Například rovnoběžné a různé přímky v prostoru $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ukážeme, že pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ a pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, platí $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. Jelikož $\vec{x}, \vec{y} \in W_1$, je také $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1$. Podobně $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$, proto také $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_2$. Odtud plyne, že $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in W_1 \cap W_2$. □

7.1.2 Popis lineární variety

V předchozí části jsme viděli, že lineární variety lze popsat jako posunuté podprostory a jako afinní obaly. Kromě těchto zápisů představíme ještě další možný zápis pomocí normálových rovnic. Nechť $W = \vec{a} + [\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_\ell]_\lambda$.

1. **Směrovou rovnicí** W nazveme

   $$W = \vec{a} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2 + \dots + t_\ell\vec{s}_\ell.$$

2. **Parametrickými rovnicemi** variety nazveme rovnice, které vzniknou rozepsáním směrové rovnice po složkách.

3. Nechť $(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{n-\ell})$ je báze $\mathcal{Z}(W)^\perp$. Pak **normálovými rovnicemi** W nazveme $n - \ell$ rovnic získaných rozepsáním následujících rovností pro každé $k \in \widehat{n-\ell}$

   $$< \vec{n}_i | \vec{x} > = < \vec{n}_i | \vec{a} > .$$

   Snadno si rozmyslíme, že vektory $\vec{x} \in W$ vyhovují výše uvedeným rovnicím, protože mají tvar $\vec{a} + \sum_{i=j}^{\ell} t_j\vec{s}_j$ a skalární součin $< \vec{n} | \vec{s} > = 0$ pro každý směrový vektor $\vec{s}$ a normálový vektor $\vec{n}$ variety W.

4. Zápis W pomocí **afinního obalu** je roven

   $$W = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{s}_1, \dots, \vec{a} + \vec{s}_\ell]_\alpha.$$

Příklad 39. *Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^2$.*

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

1. *Směrová rovnice W:*
$$W = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

2. *Parametrické rovnice W:*
$$W \equiv \begin{array}{ccc} x & = & 1+t \\ y & = & 1 \end{array}.$$

3. *Normálové rovnice W: najdeme $\mathcal{Z}(W)^{\perp} = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_{\lambda}$, pak vektory $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in W$ splňují*
$$< \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} >,$$
tedy po úpravě dostáváme normálovou rovnici
$$y = 1.$$

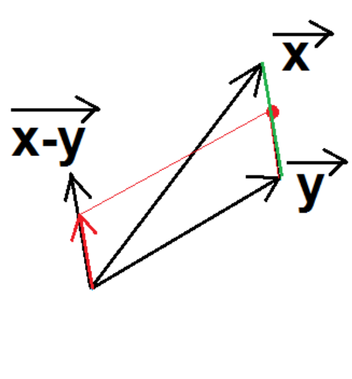
4. *Podle Věty 60 lze zapsat W jako afinní obal*
$$W = [\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}]_{\alpha}.$$

7.2 Konvexní množiny

K definici konvexní množiny potřebujeme pojem úsečka.

Definice 32. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.* **Úsečkou** *mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme množinu*
$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Poznámka 50. *Uveďme ekvivalentní zápisy úsečky*
$$\{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geq 0\} = \{\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\} = \{\vec{y} + \alpha(\vec{x} - \vec{y}) \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$
Z posledního zápisu je vidět, že úsečku mezi body $\vec{x}, \vec{y}$ získáme přičítáním α-násobků vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ k vektoru $\vec{y}$ pro $0 \leq \alpha \leq 1$. Tedy v $\mathbb{R}^2$ odpovídá úsečka tomu, co si pod tímto pojmem každý představí, viz obrázek 12.



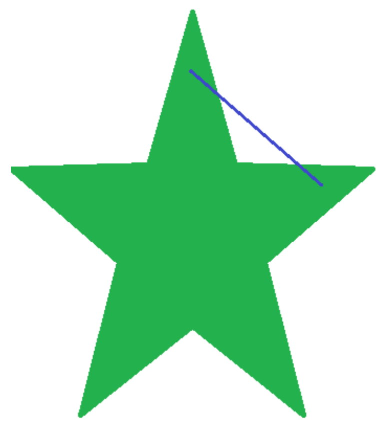
Obrázek 12: Zeleně vyznačena úsečka mezi body $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Definice 33. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. K nazveme* **konvexní množinou***, pokud*

- *$K \neq \emptyset$,*
- *K obsahuje s každými dvěma body i úsečku mezi nimi.*

Příklad 40. *Každá lineární varieta je konvexní množinou, protože s každými dvěma body obsahuje úsečku mezi nimi. Úsečka je totiž podmnožinou spojnice.*

Příklad 41. *Konvexní množiny v $\mathbb{R}^2$ jsou kromě variet (bodů, přímek, celého $\mathbb{R}^2$) také kruhy, čtverce, obdélníky atd. Konvexní množiny v $\mathbb{R}^3$ jsou kromě variet (bodů, přímek, rovin a celého $\mathbb{R}^3$) také koule, krychle, kvádry atd.*



Obrázek 13: Hvězda není konvexní množinou v $\mathbb{R}^2$. Modře vyznačena úsečka mezi body hvězdy, která není ve hvězdě obsažena.

S pojmem úsečka úzce souvisí pojem konvexní kombinace.

Definice 34. *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell) \in \mathbb{R}^n$. Pak* **konvexní kombinací** *souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ nazveme lineární kombinaci $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k$, která splňuje $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1$ a $\alpha_k \geq 0$ pro každé $k \in \hat{\ell}$. Množinu všech konvexních kombinací souboru nazýváme* **konvexní obal** *souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell)$ a značíme $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Platí tedy*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa = \{\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \vec{x}_k \mid \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = 1 \quad a \ \alpha_k \geq 0 \text{ pro každé } k \in \hat{\ell}\}.$$

Příklad 42. *Přímo z definice plyne, že konvexní obal dvou vektorů je roven úsečce mezi nimi.*

Souvislost konvexních obalů a konvexních množin je následující.

Věta 63 (Konvexní obal je konvexní množina)**.** *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell) \in \mathbb{R}^n$. Pak $K = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina a K obsahuje $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$.*

Důkaz. Analogický jako důkaz Věty 55. □

Věta 64 (Konvexní množina obsahuje konvexní kombinace)**.** *Nechť K je konvexní množina. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell \in K$. Pak*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa \subset K.$$

Slovy: "Konvexní množina obsahuje s každou ℓ-ticí svých bodů i jejich libovolnou konvexní kombinaci."

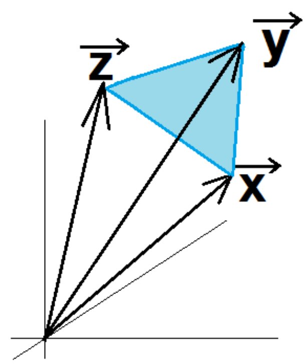
Důkaz. Analogický jako důkaz Věty 56. □

Věta 65 (Minimalita konvexního obalu)**.** *Nechť* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{R}^n$. *Pak* $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ *je nejmenší konvexní množina obsahující* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$.

Důkaz. Z Věty 64 víme, že každá konvexní množina obsahující body $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell$ obsahuje také $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$. Jelikož zároveň z Věty 63 plyne, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\ell]_\kappa$ je konvexní množina, máme dokázáno, že je to nejmenší konvexní množina obsahující dané vektory. □

Příklad 43. *Podle Věty 65 je řešením úlohy najít minimální konvexní množinu* K*, která obsahuje vektory* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$*, konvexní obal* $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.

Příklad 44. *Rozmyslete si, jak vypadají konvexní obaly jednoho, dvou, tří, čtyř, pěti vektorů v* $\mathbb{R}^2$ *a* $\mathbb{R}^3$. *Např.* $K = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$, *kde* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *je LN soubor, tvoří trojúhelník obsahující* $\vec{x}, \vec{y}$ *a* $\vec{z}$.
Vysvětlení: Jelikož jde o konvexní množinu, musí K *obsahovat úsečky mezi* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$, $\vec{x}$ *a* $\vec{z}$, $\vec{y}$ *a* $\vec{z}$. *Dále musí* K *také obsahovat úsečky mezi body ze tří výše uvedených úseček. Tedy* K *obsahuje troúhelník s vrcholy* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$*, viz obrázek 14. Jelikož trojúhelník už je konvexní množina, našli jsme nejmenší konvexní množinu obsahující* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$*, tedy jsme našli* $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\kappa$.



Obrázek 14: Konvexní obal 3 LN vektorů v $\mathbb{R}^2$ je trojúhelník s vrcholy v daných bodech.

Poslední otázka, která by nás mohla v souvislosti se vztahem mezi konvexními množinami a konvexními obaly napadnout, zní: "Je každá konvexní množina konvexním obalem nějakého souboru vektorů?" Odpověď – na rozdíl od lineárních variet – zní: NE. Např. v $\mathbb{R}^2$, jak si snadno rozmyslíte, jsou konvexní obaly mnohoúhelníky. Proto kruh jako konvexní obal konečně mnoha vektorů nezískáme.

7.3 Metrická geometrie

Definice 35. *Nechť* $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$. *Pak* **vzdáleností** *množin* M_1 *a* M_2 *nazveme*

$$\rho(M_1, M_2) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}.$$

Vzdálenost bodu $\vec{a}$ *od množiny* M *značíme* $\rho(\vec{a}, M)$ *místo* $\rho(\{\vec{a}\}, M)$.

Poznámka 51. *Vzdálenost bodů* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$ *je* $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Věta 66 (Vzdálenost bodu od podprostoru)**.** *Nechť* $P \subset\subset \mathbb{R}^n$. *Pak vzdálenost bodu* $\vec{a}$ *od podprostoru* P *je* $\rho(\vec{a}, P) = \| \vec{a}_{P^\perp} \|$, *kde* $\vec{a}_{P^\perp}$ *je OG průmět* $\vec{a}$ *do* $P^\perp$.

Důkaz. $\rho(\vec{a}, P) = \inf\{\| \vec{a} - \vec{p} \| \big| \vec{p} \in P\} = \inf\{\| \vec{a}_{P^\perp} + \vec{a}_P - \vec{p} \| \big| \vec{p} \in P\}$. Platí

$$\| \vec{a}_{P^\perp} + \vec{a}_P - \vec{p} \|^2 = < \vec{a}_{P^\perp} + \vec{a}_P - \vec{p} | \vec{a}_{P^\perp} + \vec{a}_P - \vec{p} > = \| \vec{a}_{P^\perp} \|^2 + \| \vec{a}_P - \vec{p} \|^2 \geq \| \vec{a}_{P^\perp} \|^2,$$

kde jsme využili kolmost vektorů $\vec{a}_{P^\perp} \perp (\vec{a}_P - \vec{p})$. Pro volbu $\vec{p} := \vec{a}_P$ dostaneme rovnost v předchozí nerovnosti, tedy se nabývá minimum

$$\min\{\| \vec{a}_{P^\perp} + \vec{a}_P - \vec{p} \| \big| \vec{p} \in P\} = \| \vec{a}_{P^\perp} \|,$$

proto

$$\rho(\vec{a}, P) = \| \vec{a}_{P^\perp} \| .$$

□

V následující větě uvidíme, že úlohu hledat vzdálenost mezi varietami lze převést na předchozí úlohu, tedy na hledání vzdálenosti bodu od podprostoru.

Věta 67 (Vzdálenost variet)**.** *Nechť jsou dány lineární variety $W_1 = \vec{a}_1 + \mathcal{Z}(W_1)$ a $W_2 = \vec{a}_2 + \mathcal{Z}(W_2)$ v $\mathbb{R}^n$. Pak vzdálenost variet W_1 a W_2 je*

$$\rho(W_1, W_2) = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)).$$

Důkaz. $\rho(W_1, W_2) = \inf\{\| \vec{x} - \vec{y} \| \big| \vec{x} \in W_1,\ \vec{y} \in W_2\} = \inf\{\| \vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2 \| \big| \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1),\ \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\} = \inf\{\| \vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s} \| \big| \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\} = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2))$. □

Příklad 45. *Určete vzdálenost variet $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde*

$$W_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + [\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda \quad a \quad W_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + [\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda.$$

Řešení*:*

$$\rho(W_1, W_2) = \rho(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, [\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda) = \rho(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, [\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda).$$

Snadno najdeme $P^\perp = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda^\perp = [\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}]_\lambda$. *Zbývá určit OG průmět* $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ *do* $P^\perp$ *a spočíst jeho normu. Hledáme γ takové, že*

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

dostaneme

$$-1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Odtud máme $\vec{a}_{P^\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$*, proto*

$$\rho(W_1, W_2) = \frac{1}{2} \| \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Reference

[1] Emil Humhal, *Algebra 2*, http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼humhal/

[2] Jiří Pytlíček, *Lineární algebra a geometrie*, vydavatelství ČVUT, Praha, 2005