Datum sestavení dokumentu: 9. srpna 2012

Lineární algebra 1

Ľubomíra Balková

e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz

Slovo na úvod: Abstraktnost, logická výstavba a univerzálnost lineární algebry jsou výhodami této teorie. Začátečník je zřejmě neocení ihned, ale až postupem času, kdy se v nejrůznějších předmětech budou pojmy z lineární algebry objevovat. Mnohokrát se po vás bude chtít řešit soustavu lineárních algebraických rovnic, mnohokrát budete zkoumat vlastní čísla a vektory matic, které budou odpovídat různým fyzikálním vlastnostem. Budete řešit lineární diferenciální rovnice, což budou rovnice pro jakési lineární zobrazení apod.

Abyste se abstraktnosti lineární algebry příliš nezalekli, je připojena na konci těchto skript kapitola o historii vektorového prostoru, ve které vám má být útěchou, že lineární algebra se učí „proti toku času“ a že tedy vrcholem veškeré abstrakce je pojem vektorového prostoru, se kterým my výuku lineární algebry zahajujeme. Tedy hlavu vzhůru, po prokousání se první kapitolou vězte, že už to bude jenom jednodušší a jednodušší...

Obsah

1 Vektorový prostor

Uveďme nejprve dva pojmy, které budeme v definici vektorového prostoru využívat.

Definice 1. **Kartézským součinem** *množin* A *a* B *nazveme množinu uspořádaných dvojic* (a,b), *kde* $a \in A, b \in B$, *tj.*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Zobrazení $f : A \to B$ *je taková podmnožina* $A \times B$, *pro niž platí:*

$$(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \;\Rightarrow\; b = c.$$

Poznámka 1. *Místo* $(a,b) \in f$ *obvykle píšeme* $f(a) = b$. *Říkáme, že* a *je* **vzorem** b *a* b *je* **obrazem** a *při zobrazení* f.

Poznámka 2. *Můžete si i nadále představovat, že* f *je předpis, který každému prvku z* A *přiřadí nejvýše jeden prvek z* B.

Definice 2. **Číselným tělesem** *nazveme každou podmnožinu* $T \subset \mathbb{C}$, *která má alespoň dva prvky a splňuje:*

1. *pro každé* $\alpha, \beta \in T$ *platí* $\alpha + \beta \in T$ *(hovoříme o* **uzavřenosti** T **na sčítání***),*
2. *pro každé* $\alpha, \beta \in T$ *platí* $\alpha \cdot \beta \in T$ *(hovoříme o* **uzavřenosti** T **na násobení***),*
3. *pro každé* $\alpha \in T$ *platí* $-\alpha \in T$ *(hovoříme o* **uzavřenosti** T **vůči opačnému prvku***),*
4. *pro každé* $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, *platí* $\frac{1}{\alpha} \in T$ *(hovoříme o* **uzavřenosti** T **vůči převrácené hodnotě***).*

Poznámka 3. *Zamysleme se nad tím, které množiny (ne)tvoří těleso.*

1. *Množina přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *netvoří těleso, např.* $3 \in \mathbb{N}$, *ale* $-3 \notin \mathbb{N}$.
2. *Množina celých čísel* $\mathbb{Z}$ *netvoří těleso, např.* $2 \in \mathbb{Z}$, *ale* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. *Množina racionálních čísel* $\mathbb{Q}$ *tvoří těleso. Je to nejmenší těleso ve smyslu inkluze, tj.* $\mathbb{Q}$ *je podmnožinou každého tělesa.*
4. *My budeme téměř výlučně pracovat s tělesy reálných čísel* $\mathbb{R}$ *a komplexních čísel* $\mathbb{C}$. *Mějme ale stále na paměti, že tvrzení, která budeme uvádět, platí pro libovolné číselné těleso, není-li uvedeno jinak.*

Poznámka 4. *Každé těleso obsahuje čísla* 0 *a* 1. *Obsahuje totiž podle definice nějaký prvek* α, *pak také* $-\alpha \in T$ *a dále také* $\alpha + (-\alpha) = 0 \in T$. *Jelikož* T *obsahuje alespoň dva prvky, určitě obsahuje nějaké* $\alpha \neq 0$, *pak také* $\frac{1}{\alpha} \in T$ *a dále také* $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \in T$.

Definice 3. *Nechť jsou dány:*

1. *číselné těleso* T *(prvky nazýváme* **čísla***),*
2. *neprázdná množina* V *(prvky nazýváme* **vektory***),*
3. *zobrazení* $\oplus : V \times V \to V$ *(nazýváme je* **sčítání vektorů***),*
4. *zobrazení* $\odot : T \times V \to V$ *(nazýváme je* **násobení vektoru číslem z tělesa***).*

Řekneme, že V *je* **vektorový prostor nad tělesem** T **s operacemi** $\oplus$ **a** $\odot$, *pokud je splněno* 8 *podmínek (nazýváme je* **axiomy vektorového prostoru***):*

1. *pro každé* $\vec{a}, \vec{b} \in V$ *platí* $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ *(***komutativní zákon** *pro* $\oplus$*),*

2. *pro každé $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ platí $\vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) = (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c}$ (***asociativní zákon** pro $\oplus$),*

3. *existuje $\vec{b} \in V$ takové, že pro každé $\vec{a} \in V$ platí $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{a}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme* ***nulový*** *a značíme $\vec{0}$),*

4. *pro každé $\vec{a} \in V$ existuje $\vec{b} \in V$ takové, že $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{0}$ (vektor $\vec{b}$ s touto vlastností nazýváme* ***opačný*** *k vektoru $\vec{a}$ a značíme $-\vec{a}$),*

5. *pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a})$ (***asociativní zákon** pro $\odot$),*

6. *pro každé $\vec{a} \in V$ platí $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$,*

7. *pro každé $\alpha, \beta \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a})$ (***distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel),*

8. *pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ platí $\alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b})$ (***distributivita** $\odot$ vzhledem ke sčítání vektorů).*

Poznámka 5. *Znovu zdůrazněme, že vektorový prostor je řádně definován, jsou-li dány 4 věci:*

1. *neprázdná množina vektorů V,*

2. *těleso T,*

3. *operace $\oplus$,*

4. *operace $\odot$.*

A zároveň jsou splněny všechny axiomy. Někdy vektorový prostor značíme podrobněji $(V, T, \oplus, \odot)$.

Poznámka 6. *Pro $T = \mathbb{R}$ hovoříme o* **reálném vektorovém prostoru** *a pro $T = \mathbb{C}$ o* **komplexním vektorovém prostoru**.

Poznámka 7. *V definici jsme poctivě rozlišovali operace $\oplus$ pro sčítání vektorů, $+$ pro sčítání čísel, $\odot$ pro násobení vektoru číslem, $\cdot$ pro násobení čísel. V dalším textu už nebudeme používat symboly $\oplus$ a $\odot$, z kontextu bude totiž vždy jasné, zda jde o sčítání ve V nebo v T. Navíc budeme vynechávat symbol pro násobení, a to v obou případech, tedy je-li $\alpha, \beta \in T$ a $\vec{a} \in V$, pak píšeme $\alpha\beta$ místo $\alpha \cdot \beta$ a $\alpha\vec{a}$ místo $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \odot \vec{a}$.*

Poznámka 8. *Prvky tělesa budeme značit obvykle řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ a vektory obvykle písmeny ze začátku a konce abecedy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$. Šipku nad vektory vynecháme jen výjimečně, například v případech vektorů z prostoru polynomů, matic či lineárních zobrazení, kde se ustálilo jiné značení.*

Věta 1 (Vlastnosti vektorového prostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:*

1. *Ve V existuje právě jeden nulový vektor $\vec{0}$.*

2. *Ke každému vektoru z V existuje právě jeden opačný vektor.*

3. *Pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in V$ existuje právě jedno řešení rovnice $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, a to $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$.*

4. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $\alpha\vec{0} = \vec{0} = 0\vec{a}$.*

5. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí implikace*
$$\alpha\vec{a} = \vec{0} \ \Rightarrow \ (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0).$$

6. *Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ platí $-(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a})$.*

Důkaz. 1. Podle 3. axiomu obsahuje V nulový vektor $\vec{0}$. Pokud $\vec{z} \in V$ také splňuje vlastnosti nulového vektoru, pak
$$\vec{z} = \vec{z} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{z} = \vec{0},$$
kde jsme využili vlastnosti nulového vektoru a komutativní zákon.

2. Nechť $\vec{a}$ je libovolný vektor z V. Podle 4. axiomu k němu existuje opačný vektor $-\vec{a}$. Pokud $\vec{b} \in V$ splňuje také vlastnosti opačného vektoru k $\vec{a}$, pak
$$\vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = (\vec{b} + \vec{a}) + (-\vec{a}) = (\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) = \vec{0} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{0} = -\vec{a},$$
kde jsme využili komutativitu, asociativitu, vlastnosti nulového a opačného vektoru.

3. Nejprve se přesvědčíme, že $-\vec{a}+\vec{b}$ je řešením, tj. $\vec{a}+(-\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}+(-\vec{a}))+\vec{b} = \vec{0}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{0} = \vec{b}$. Nechť $\vec{y} \in V$ je také řešením, pak
$$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{y}) = (-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{y} = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{y} = \vec{0} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y},$$
kde jsme využili komutativitu, asociativitu, vlastnosti nulového a opačného vektoru.

4. Z předchozího bodu víme, že pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{a} \in V$ má rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \alpha\vec{a}$ jediné řešení, a to $\vec{x} = \vec{0}$. Ověřme, že také $\alpha\vec{0}$ a $0\vec{a}$ jsou řešením, pak je jasné, že jsou rovny $\vec{0}$.
$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{0} = \alpha(\vec{a} + \vec{0}) = \alpha\vec{a}.$$
$$\alpha\vec{a} + 0\vec{a} = (\alpha + 0)\vec{a} = \alpha\vec{a}.$$
Využili jsme distributivity $\odot$ vůči sčítání vektorů a vůči sčítání čísel.

5. Jde o důkaz výroku
$$(\forall\alpha \in T)(\forall\vec{a} \in V)(\alpha\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0)). \tag{1}$$
Dokážeme výrok sporem, předpokládejme tedy platnost negace
$$(\exists\alpha \in T)(\exists\vec{a} \in V)\rceil(\alpha\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; (\vec{a} = \vec{0} \vee \alpha = 0)).$$
Z tohotu předpokladu odvodíme spor - platnost nepravdivého tvrzení, což znamená, že platil původní výrok (1). Víme, že $A \wedge \rceil B$ je ekvivalentní s negací implikace $A \Rightarrow B$. Můžeme tedy předpoklad přepsat jako
$$(\exists\alpha \in T)(\exists\vec{a} \in V)(\alpha\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \alpha \neq 0).$$
Pak platí
$$\vec{a} = 1\vec{a} = (\tfrac{1}{\alpha}\alpha)\vec{a} = \tfrac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) = \tfrac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0},$$
a to je spor s předpokladem, že $\vec{a} \neq \vec{0}$.

6. Z 3. bodu plyne, že rovnice $\alpha\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ má jediné řešení, a to $\vec{x} = -(\alpha\vec{a})$. Ověřme, že také $(-\alpha)\vec{a}$ a $\alpha(-\vec{a})$ jsou řešením, pak je jasné, že jsou rovny $-(\alpha\vec{a})$.
$$\alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = (\alpha + (-\alpha))\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}.$$
$$\alpha\vec{a} + \alpha(-\vec{a}) = \alpha(\vec{a} + (-\vec{a})) = \alpha\vec{0} = \vec{0}.$$
Využili jsme distributivity $\odot$ vůči sčítání vektorů a vůči sčítání čísel a 4. bod Věty 1.

$\square$

Důkaz Věty 1 se vám asi v první chvíli zdá obtížný, ale nelekejte se. Postupně si zvyknete a na konci semestru zjistíte, že důkazy v lineární algebře jsou bez triků, přímočaré, a tedy velmi jednoduché.

Poznámka 9. *Důkaz Věty 1 není jediný možný. Zkuste dokázat některé její body jiným způsobem.*

Poznámka 10. *Rozmysleme si otázku, kolik vektorů může obsahovat vektorový prostor. Jistě obsahuje alespoň jeden vektor $\vec{x}$, protože předpokládáme neprázdnost V. Může obsahovat pouze jeden vektor? Ano. Definujeme-li operace $\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}$ a pro každé $\alpha \in T$ $\alpha\vec{x}=\vec{x}$, pak $V=\{\vec{x}\}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T. Vektor $\vec{x}$ ve V hraje úlohu nulového vektoru, proto můžeme psát $V=\{\vec{0}\}$ a tento prostor nazýváme* **nulový vektorový prostor**.

Může mít nenulový vektorový prostor konečný počet vektorů? Nemůže. Existuje-li ve V $\vec{x}\neq\vec{0}$, pak také $2\vec{x},3\vec{x},4\vec{x},\dots$ patří do V. Tyto vektory jsou vzájemně různé, protože pro $m\neq n$ platí podle Věty 1 $m\vec{x}-n\vec{x}=(m-n)\vec{x}\neq\vec{0}$.

1.1 Příklady vektorových prostorů

Příklad 1. *Nechť $n\in\mathbb{N}$.*

1. *Nechť T je těleso.*
2. *Položme $V=T^n$, kde T^n je množina uspořádaných n-tic čísel z tělesa zapsaných do sloupců, tj. $T^n=\left\{\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha_i\in T \text{ pro každé } i\in\hat{n}\right\}$, kde $\hat{n}=\{1,2,\dots,n\}$. Číslo α_i nazýváme i-tou* **složkou vektoru** *$\vec{a}$.*
3. *Operaci sčítání definujeme „po složkách“:*
   Pro každé $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\in T^n$ a $\vec{b}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}\in T^n$ definujeme $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\\alpha_2+\beta_2\\\vdots\\\alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$.
4. *Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po složkách“:*
   Pro každé $\alpha\in T$ a každé $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\in T^n$ definujeme $\alpha\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1\\\alpha\alpha_2\\\vdots\\\alpha\alpha_n\end{pmatrix}$.

Úlohu nulového vektoru hraje vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Opačným vektorem k $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ je vektor $\begin{pmatrix}-\alpha_1\\-\alpha_2\\\vdots\\-\alpha_n\end{pmatrix}$.

Sami ověřte, že tato čtveřice $(T^n,T,+,\cdot)$ splní všechny axiomy, tedy T^n nad T s operacemi definovanými po složkách je vektorový prostor.

Poznámka 11. *Značení T^n používáme jak pro množinu uspořádaných n-tic čísel z tělesa, tak pro vektorový prostor T^n, tedy čtveřici $(T^n,T,+,\cdot)$. Je třeba podle kontextu odlišit, o který případ jde.*

Poznámka 12. *Lze ztotožnit prostor T^1 a těleso T.*

Příklad 2. *Nechť $m,n\in\mathbb{N}$.*

1. *Nechť T je těleso.*
2. *Položme $V=T^{m,n}$, kde $T^{m,n}$ je množina uspořádaných mn-tic čísel z T zapsaných do tabulky o m řádcích a n sloupcích a nazývaných* **matice typu** *$m\times n$, tj.*

$$T^{m,n}=\left\{\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\ \middle|\ a_{ij}\in T \text{ pro každé } i\in\hat{m}, j\in\hat{n}\right\}.$$

a_{ij} *nazýváme* ij*-tý* **prvek** *matice* $\mathbb{A}$ *(značíme také* $[\mathbb{A}]_{ij}$ *nebo* $\mathbb{A}_{ij}$*),* i*-tým* **řádkem** $\mathbb{A}$ *nazveme* n*-tici* $(a_{i1}a_{i2}\dots a_{in})$ *a* j*-tým* **sloupcem** $\mathbb{A}$ m*-tici* $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. *Číslu* i *říkáme* řádkový *a číslu* j sloupcový index *prvku* a_{ij}.

3. *Operaci sčítání definujeme „po prvcích":*
   Pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{m,n}$ *a pro každé* $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ *definujeme*

$$[\mathbb{A} + \mathbb{B}]_{ij} = [\mathbb{A}]_{ij} + [\mathbb{B}]_{ij}.$$

4. *Operaci násobení vektoru číslem definujeme „po prvcích":*
   Pro každé $\alpha \in T$ *a* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *a pro každé* $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ *definujeme*

$$[\alpha\mathbb{A}]_{ij} = \alpha[\mathbb{A}]_{ij}.$$

Úlohu nulového vektoru hraje nulová matice $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
Opačným vektorem k $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *je* $-\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.
Sami ověřte, že čtveřice $(T^{m,n}, T, +, \cdot)$ *splní všechny axiomy, tedy* $T^{m,n}$ *nad* T *s operacemi definovanými po prvcích je vektorový prostor, nazýváme jej* **prostorem matic** *(o* m *řádcích a* n *sloupcích).*

Poznámka 13. *Značení* $T^{m,n}$ *používáme pro množinu matic o* m *řádcích a* n *sloupcích s prvky z tělesa a pro vektorový prostor* $T^{m,n}$*, tedy čtveřici* $(T^{m,n}, T, +, \cdot)$*. Je třeba podle kontextu odlišit, o který případ jde.*

Poznámka 14. *Rozmyslete si, že prostory* T^n *a* $T^{n,1}$ *lze ztotožnit.*

Poznámka 15. *Pojem matice je v lineární algebře velmi důležitý. Podstatnou část lineární algebry bude tvořit maticový počet. Prozatím vystačíme s maticí jakožto vektorem z* $T^{m,n}$*, více se dozvíme v budoucnu.*

Příklad 3. *K pochopení tohoto příkladu je vhodné si přečíst Dodatek: Polynomy.*

1. *Nechť* $T = \mathbb{C}$.

2. *Nechť* $V = \mathcal{P}$*, což je množina všech polynomů.*

3. *Operaci sčítání vektorů definujeme „bodově":*
   Pro každé $p, q \in \mathcal{P}$ *definujeme* $(p + q)(t) = p(t) + q(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{C}$.

4. *Operaci násobení vektoru komplexním číslem definujeme „bodově":*
   Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ *a* $p \in \mathcal{P}$ *definujeme* $(\alpha p)(t) = \alpha p(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{C}$.

Úlohu nulového vektoru hraje nulový polynom $\mathcal{O}$ *definovaný* $\mathcal{O}(t) = 0$ *pro každé* $t \in \mathbb{C}$.
Opačným vektorem k $p \in \mathcal{P}$ *je opačný polynom definovaný* $(-p)(t) = -p(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{C}$.
Sami ověřte, že čtveřice $(\mathcal{P}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ *splní všechny axiomy, tedy* $\mathcal{P}$ *nad* $\mathbb{C}$ *s operacemi definovanými bodově je vektorový prostor, nazýváme jej* **prostorem polynomů**.

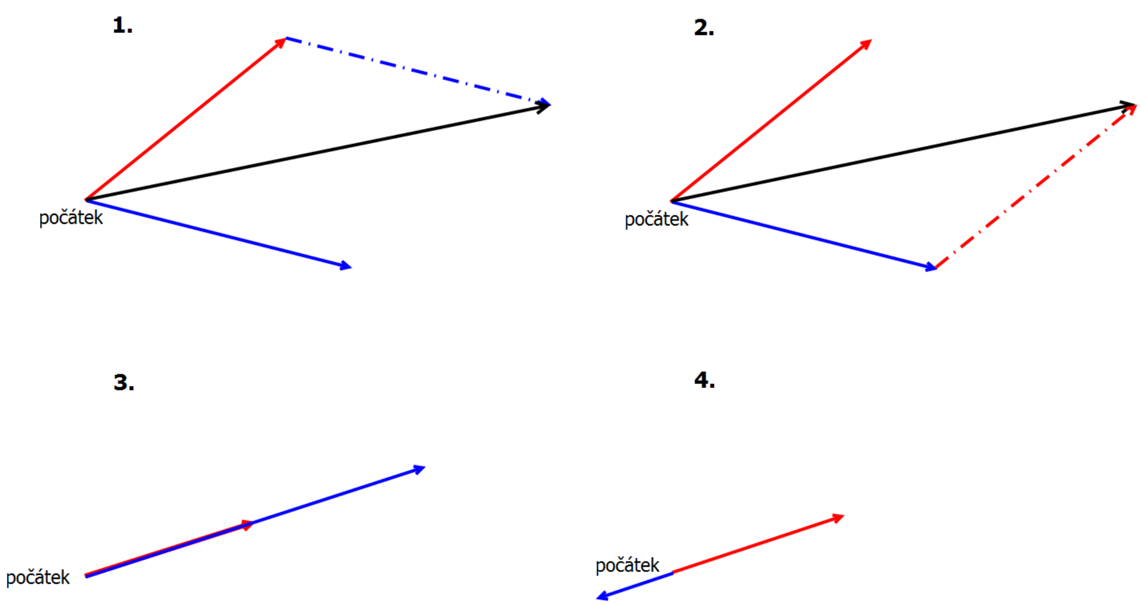
Příklad 4. *Ponechme vše definované stejně jako v prostoru polynomů, pouze změníme množinu* V*. Nechť* $n \in \mathbb{N}$*. Položme* $V = \mathcal{P}_n$*, což je množina polynomů stupně maximálně* $n - 1$ *s přidáním nulového polynomu (který nemá stupeň definovaný). Opět sami ověřte, že* $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ *tvoří vektorový prostor nad* $\mathbb{C}$.

Poznámka 16. *Snadno si rozmyslíme, že bez přidání nulového polynomu není $\mathcal{P}_n$ definovaný výše vektorovým prostorem.*

Příklad 5. *Pro modelování prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ budeme používat orientované šipky. Vysvětleme vizualizaci $\mathbb{R}^2$. V $\mathbb{R}^3$ postupujeme analogicky.*

1. *Tělesem jsou reálná čísla.*
2. *Vektoru $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ odpovídá šipka začínající v počátku $\binom{0}{0}$ a končící v bodě $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$, takové šipce se někdy říká* průvodič *bodu $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$.*
3. *Součet $\vec{a}+\vec{b}$ se získá, když do koncového bodu šipky odpovídající $\vec{a}$ umístíme počátek šipky rovnoběžné a stejně velké jako šipka odpovídající $\vec{b}$. Snadno si rozmyslíme, že takové sčítání odpovídá sčítání vektorů po složkách, jak jsme je zavedli ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Tím získáme koncový bod šipky odpovídající $\vec{a}+\vec{b}$.*
4. *$\alpha\vec{a}$ získáme tak, že velikost šipky odpovídající $\vec{a}$ vynásobíme $|\alpha|$. Poté ji umístíme do počátku a orientaci nezměníme, pokud $\alpha \geq 0$, nebo změníme na opačnou, pokud $\alpha < 0$.*

Snadno ověříme, že platí axiomy. Komutativní zákon ilustruje 1. a 2. bod obrázku 1.



Obrázek 1: **1.** Součet vektorů $\vec{a}+\vec{b}$, kde $\vec{a}$ reprezentuje červená, $\vec{b}$ modrá šipka a $\vec{a}+\vec{b}$ černá šipka. **2.** Součet vektorů $\vec{b}+\vec{a}$, kde $\vec{a}$ reprezentuje červená, $\vec{b}$ modrá šipka a $\vec{b}+\vec{a}$ černá šipka. **3.** $2\vec{a}$, kde $\vec{a}$ reprezentuje červená a $2\vec{a}$ modrá šipka. **4.** $-\frac{1}{2}\vec{a}$, kde $\vec{a}$ reprezentuje červená a $-\frac{1}{2}\vec{a}$ modrá šipka.

Poznámka 17. *Rozmyslete si, že platí tvrzení:*
Nechť V je vektorový prostor nad T a nechť T_1 je těleso splňující $T_1 \subset T$. Pak V je při zachování stejných operací také vektorovým prostorem nad T_1. Například $\mathbb{C}^n$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pokud jsou operace definovány po složkách. Pozor! Jde o jiný vektorový prostor než $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$. Pozor!! Naopak to neplatí, například $\mathbb{R}^n$ při operacích definovaných po složkách netvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

2 Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou soustavu tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ jsou obecně komplexní.
Názvosloví:

- Matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
se nazývá **maticí soustavy**.

- Matice
$$(\mathbb{A}|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
se nazývá **rozšířenou maticí soustavy**.

- Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ se nazývá **sloupec pravých stran**.

- Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, pro nějž je soustava splněna, se nazývá **řešením soustavy**.

- Říkáme, že soustava je **homogenní** nebo **bez pravé strany**, pokud $\vec{b} = \vec{0}$.

- V opačném případě jde o **soustavu s pravou stranou**.

Poznámka 18. *Důležité je si uvědomit, že existují soustavy, jež řešení nemají. Například*

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \end{array}.$$

A naopak existují soustavy, které mají řešení více. Například

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & = & 10 \end{array}$$

má řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *a také* $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Dokonce má nekonečně mnoho řešení.*

Poznámka 19. *Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to řešení* $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. *Toto řešení nazýváme* **triviálním**.

V této kapitole se nebudeme učit hledat všechna řešení, ale budeme se zabývat dvěma trochu lehčími otázkami:

1. **Jak zjistit, zda je daná soustava řešitelná?**
2. **Jak najít alespoň jedno řešení?** (Samozřejmě za předpokladu, že soustava je řešitelná.)

Budeme převádět soustavu do tak jednoduchého tvaru, že z něj bude odpověď na tyto dvě otázky zřejmá. Důležité je, že úpravy budeme provádět tak, že nezměníme množinu řešení. Takovým úpravám se říká **ekvivalentní** a budeme používat tři takové úpravy:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice číslem $\alpha \neq 0$.

Rozmyslete si, že takovými úpravami se skutečně množina řešení soustavy nemění. Dále si uvědomte, že místo abychom tyto úpravy prováděli s rovnicemi, můžeme je provádět přímo v rozšířené matici soustavy. Jde pak o úpravy:

1. záměna dvou řádků,
2. přičtení násobku jiného řádku k vybranému řádku,
3. násobení řádku číslem $\alpha \neq 0$.

Tyto úpravy budeme provádět s cílem dostat rozšířenou matici soustavy do tzv. horního stupňovitého tvaru.

Definice 4. *Matice $\mathbb{A}$ o m řádcích a $n+1$ sloupcích s prvky $a_{ij}, i \in \widehat{m},\ j \in \widehat{n+1}$, je v* **horním stupňovitém tvaru**, *pokud existuje $\ell \in \widehat{n+1}$ a indexy $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ takové, že $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell \leq n+1$ a platí pro každé $i \in \widehat{\ell}$*

1. $a_{ik_i} \neq 0$,
2. $a_{ij} = 0$ *pro* $j < k_i$,
3. $a_{ij} = 0$ *pro* $i > \ell,\ j \in \widehat{n+1}$.

Matice v horním stupňovitém tvaru má tedy tyto vlastnosti: V prvním řádku je první nenulový prvek ve sloupci k_1, ve druhém řádku ve sloupci k_2, až v ℓ-tém řádku ve sloupci k_ℓ. Od $(\ell+1)$-ního řádku počínaje jsou všechny řádky nulové.

Soustava s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru má tedy tvar:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1k_1}x_{k_1} & + & \dots & + & a_{1k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & a_{1k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1(n+1)} \\
 & & & & a_{2k_2}x_{k_2} & + & \dots & + & a_{2k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{2(n+1)} \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & a_{\ell k_\ell}x_{k_\ell} & + & \dots & + & a_{\ell n}x_n & = & a_{\ell(n+1)}
\end{array}.$$

Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ nazýváme **hlavní sloupce**, ostatní sloupce nazýváme **vedlejší**.

Z poslední soustavy snadno vyčteme odpověď na řešené problémy.

1. **Soustava je řešitelná, právě když sloupec pravých stran je vedlejší.**

   Je zřejmé, že když je sloupec pravých stran hlavní, tj. $k_l = n+1$, má poslední rovnice tvar $0 = a_{l(n+1)}$, tedy nula má být rovna nenulovému číslu, což není možné. To, že soustava řešitelná je, když je sloupec pravých stran vedlejší, vyplyne z následujícího tvrzení.

2. Je-li sloupec pravých stran vedlejší, **řešení soustavy nalezneme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.**

   Je jasně vidět, že pokud jsou neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvoleny, dopočítáme z poslední rovnice x_{k_ℓ}, po dosazení do předposlední rovnice dopočítáme $x_{k_{\ell-1}}$ atd.

Poznámka 20. *Není těžké ověřit, že platí následující tvrzení.* **Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší.** *Když totiž neexistují vedlejší sloupce, nelze žádné neznámé volit.*

Důsledkem pak je, že homogenní soustava má jen triviální řešení, právě když má matice soustavy jen hlavní sloupce.

Pokud má matice homogenní soustavy i vedlejší sloupce, pak při hledání netriviálního řešení je třeba zvolit alespoň jednu neznámou odpovídající vedlejšímu sloupci nenulovou.

Zbývá zodpovědět otázku: **Lze každou rozšířenou matici soustavy převést ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru?** Ano! Dokonce stačí 1. a 2. ekvivalentní řádková úprava. Například následujícím algoritmem:

- Prohledáme první sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek zaměníme s prvním řádkem. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, postupujeme stejně s druhým sloupcem. Označíme k_1 index prvního sloupce, ve kterém najdeme nenulové číslo. Od 2. řádku počínaje odečteme takové násobky prvního řádku, abychom ve sloupci s indexem k_1 dostali nuly.

- Prohledáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od druhého řádku počínaje. Index prvního sloupce, v němž najdeme nenulový prvek, označíme k_2. Odpovídající řádek zaměníme s druhým řádkem. Od třetího a dalších řádků odečítáme takové násobky druhého řádku, abychom vyrobili od třetího řádku počínaje ve sloupci s indexem k_2 samé nuly.

- Takto postupujeme tak dlouho, dokud jsou v prohledávaných sloupcích na potřebných místech nenulové prvky.

Příklad 6. *Zjistěte, zda je následující soustava řešitelná. Pokud ano, najděte jedno řešení.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & & & - & 2x_4 & = & 1 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení: *Odpovídající rozšířenou matici soustavy upravíme do horního stupňovitého tvaru:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soustava je řešitelná, protože sloupec pravých stran je vedlejší. Řešení najdeme volbou neznámé v jediném vedlejším sloupci, kterým je třetí sloupec. Zvolíme třeba $x_3 = 0$. Zbylé neznámé dopočítáme ze soustavy odpovídající matici v horním stupňovitém tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & & & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 17x_4 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & = & -1 \end{array}.$$

Dostáváme $x_4 = -1/3,\ x_2 = -1/6,\ x_1 = 5/6$. Řešením je tedy např. $\vec{x} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3 Lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze, souřadnice

Definice 5. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z V. Uspořádanou n-tici $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ nazveme n-členným* **souborem**. **Součet souboru** $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ *značíme* $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i$ *a definujeme*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \Big(\big(((\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3) + \vec{x}_4 \big) + \cdots + \vec{x}_n \Big).$$

Poznámka 21.

Ujasněte si řádně rozdíl mezi pojmy soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, což je uspořádaná n-tice vektorů (členy souboru se mohou opakovat a záleží na jejich pořadí), a množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$, kde se prvky neopakují a nezáleží na jejich pořadí.

Příklad 7. *Uvažujme prostor $\mathbb{R}^2$, pak*

1. $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \neq (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \neq (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Poznámka 22. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V. Pak $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i$ je opět vektorem z V. To plyne z faktu, že s vektory provedeme konečný počet sčítání, přičemž každý mezisoučet je z V, tedy i výsledek je z V.*

Věta 2 (Vlastnosti součtu souboru)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ jsou soubory vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak*

1. *pro každé $k \in \widehat{n-1}$ platí $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \vec{x}_i$ (***zobecněný asociativní zákon pro** $\oplus$*),*
   Slovy: „v součtu souboru nezáleží na uzávorkování“.
2. *pro každou permutaci $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ množiny $\hat{n}$ platí $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_{k_i}$ (***zobecněný komutativní zákon pro** $\oplus$*),*
   Slovy: „v součtu souboru nezáleží na pořadí vektorů“.
3. *pro každé $\alpha \in T$ platí $\alpha \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \vec{x}_i$ (***zobecněný distributivní zákon pro** $\odot$ **vzhledem ke sčítání vektorů***),*
4. $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{y}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x}_i + \vec{y}_i)$.

Důkaz. Lze provést matematickou indukcí. Není těžký, ale technický. Proto jej vynecháváme. Zkuste sami, zda byste uměli důkaz provést. □

Definice 6. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor $\vec{x}$ je* **lineární kombinací** *(LK) souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Čísla $\alpha_i, i \in \hat{n}$, nazýváme **koeficienty LK**.

1. *Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$, nazýváme takovou LK* **triviální**.
2. *V opačném případě (tj. když existuje index $i_0 \in \hat{n}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$) jde o* **netriviální** *LK.*

Poznámka 23. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V. Pak libovolná LK $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je opět vektorem z V (definice LK má tedy dobrý smysl). To plyne z faktu, že každý sčítanec $\alpha_i \vec{x}_i$ je součinem čísla a vektoru, tedy vektorem z V, a součet souboru je z V podle Poznámky 22.*

Poznámka 24. *Někdy užijeme slovního spojení „vektor $\vec{x}$ je LK vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$“ místo „vektor $\vec{x}$ je LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$“. Obě vyjádření mají stejný význam.*

Poznámka 25. *Rozmyslete si, že výsledkem triviální LK je nulový vektor.*

Definice 7. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z V. Množinu všech LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ nazveme* **lineárním obalem** *(LO) souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ a značíme ji $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, tj.*

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \;\middle|\; \text{pro každé } i \in \hat{n} \text{ je } \alpha_i \in T \right\}.$$

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ nazýváme **generátory LO**.

Věta 3 (Vlastnosti LO)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ jsou vektory z V. Pak platí:*

1. *$\vec{0} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.*
2. *Jestliže $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ je permutace množiny $\hat{n}$, pak platí $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \ldots, \vec{x}_{k_n}]_\lambda$. Slovy: „LO nezávisí na pořadí generátorů“.*
3. *Pokud $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak platí $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$. Slovy: „generátor, který je LK ostatních generátorů, lze z LO vyhodit a také do LO přihodit, aniž by se LO změnil“.*
4. *Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Slovy: „LO je uzavřený na sčítání vektorů“.*
5. *Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, potom $\alpha\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Slovy: „LO je uzavřený na násobení vektoru číslem z T“.*
6. *$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ tvoří vektorový prostor nad tělesem T při zachování operací z V.*

Důkaz.

1. Vyplývá z rovnosti $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{x}_i$.
2. Tvrzení plyne z rovnosti
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$
která je důsledkem zobecněného komutativního zákona.
3. Rovnost dvou množin se v matematice obvykle dokazuje tak, že se dokáží dvě inkluze. Budeme postupovat také tak.
   (a) Dokážeme nejprve, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$. Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Potom ale také platí, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + 0\vec{x}_{n+1}$, a to opět podle definice LO znamená, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$.

(b) Zbývá dokázat, že $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, tj. pro libovolný vektor $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$ ukážeme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}]_\lambda$, pak podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \vec{x}_i$. Upravme rovnost následovně

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \vec{x}_{n+1}. \tag{2}$$

Teprve nyní využijeme předpoklad, že $\vec{x}_{n+1} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. To podle definice LO znamená, že existují čísla $\beta_1, \ldots, \beta_n \in T$ taková, že $\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$. Odtud upravíme rovnost (2) následovně

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i + \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{n+1} \beta_i) \vec{x}_i.$$

V poslední úpravě jsme využili Větu 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomy vektorového prostoru. Podle definice LO vidíme, že $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

(c) Je-li $\vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \ldots, \beta_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \quad \text{a} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme díky Větě 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomům vektorového prostoru, že

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\vec{x} + \vec{y} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

(d) Je-li $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Pak platí díky Větě 2 o vlastnostech součtu souboru a axiomům vektorového prostoru, že

$$\alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) \vec{x}_i,$$

což podle definice LO znamená, že $\alpha \vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

(e) Z předchozích dvou bodů víme, že LO je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem z T při zachování operací z V. Zbývá ověřit platnost 8 axiomů vektorového prostoru.

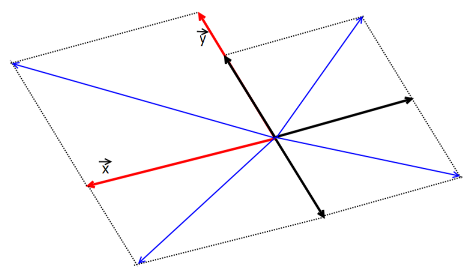
- Jelikož V je vektorový prostor, je jasné, že $\vec{0} \in V$ splňuje pro každý $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$ rovnost
$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}.$$
A jelikož podle 1. vlastnosti LO patří $\vec{0}$ do $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, dokázali jsme tím platnost 3. axiomu o existenci nulového vektoru v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.
- Jelikož V je vektorový prostor, je jasné, že pro každý $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$ leží ve V i $-\vec{x}$ splňující rovnost
$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$
A jelikož podle Věty 1 platí, že $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$, a podle 5. vlastnosti LO (uzavřenost LO na násobení číslem z T) patří $(-1)\vec{x}$ do $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, dokázali jsme tím platnost 4. axiomu o existenci opačného vektoru ke každému vektoru z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.

- Všechny ostatní axiomy jsou splněny pro všechny vektory z V, tím spíše jsou splněny pro všechny vektory z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset V$.

$\square$

Příklad 8. *Rozmyslete si, jak vypadají LO v $\mathbb{R}^2$.*

1. $[\binom{0}{0}]_\lambda$ *je jediný bod* $\binom{0}{0}$*.*
2. $[\vec{x}]_\lambda$*, kde* $\vec{x} \neq \vec{0}$*, je přímka. Obsahuje totiž právě všechny možné reálné násobky vektoru* $\vec{x}$*.*
3. $[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$*, kde* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$ *neleží v jedné přímce, je celá rovina* $\mathbb{R}^2$*. K důkazu, že každý vektor z* $\mathbb{R}^2$ *lze psát jako LK* $(\vec{x}, \vec{y})$*, použijte vizualizaci* $\mathbb{R}^2$ *pomocí šipek.*



Obrázek 2: Ukázka, jak různé vektory z $\mathbb{R}^2$ (vyznačeny modře) získáváme jako LK $(\vec{x}, \vec{y})$ (vyznačeny červeně).

3.1 Lineární závislost a nezávislost

Definice 8. *Nechť* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je soubor vektorů z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T*. Řekneme, že soubor je*

1. **lineárně nezávislý** *(LN), pokud*

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) \left((\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}) \Rightarrow (\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0) \right),$$

slovy: „jedině triviální LK kombinace souboru dává nulový vektor“,

2. **lineárně závislý** *(LZ) v opačném případě, tj. pokud platí negace předchozího výroku*

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) \left((\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}) \wedge (\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0) \right),$$

slovy: „existuje netriviální LK souboru rovná nulovému vektoru“.

Věta 4 (Vlastnosti LN a LZ souborů)**.** *Nechť* V *je vektorový prostor nad tělesem* T *a* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *jsou vektory z* V*. Pak platí:*

1. $(\vec{x}_1)$ *je LZ* $\Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{0}$*.*
2. *Pokud soubor* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *obsahuje* $\vec{0}$*, pak je LZ.*
3. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow (\vec{x}_{k_1}, \vec{x}_{k_2}, \dots, \vec{x}_{k_n})$ *je LZ, kde* $(k_1, \dots, k_n)$ *je libovolná permutace* $\hat{n}$*.*
Slovy: „LZ souboru nezávisí na pořadí vektorů v souboru“.
4. *Pokud* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je LN, pak pro každé* $k \in \hat{n}$ *platí* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ *je LN.*
Slovy: „vyhodíme-li z LN souboru vektory, zůstane LN“.

5. *Je-li* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ *LZ pro nějaké* $k \in \hat{n}$*, pak* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je LZ.*
   Slovy: „přidáme-li do LZ souboru vektory, zůstane LZ“.

6. *„Alternativní definice LZ“*
   Nechť $n \geq 2$. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow (\exists i_0 \in \hat{n})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1} \dots, \vec{x}_n]_\lambda)$.
   Slovy: „v alespoň 2-prvkovém LZ souboru existuje vektor, který je LK ostatních“.

7. *„Alternativní definice LZ“*
   $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *je LZ* $\Leftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{0}$ *nebo* $(\exists i_0 \in \{2, \dots, n\})(\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda)$.
   Slovy: „v LZ souboru je první vektor nulový nebo existuje vektor, který je LK předchozích“.

Důkaz. 1. Ukazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Předpokládáme, že $(\vec{x}_1)$ je LZ. Podle definice existuje $\alpha \in T, \alpha \neq 0$, takové, že $\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$. Podle Věty 1 pak máme $\vec{x}_1 = \vec{0}$.
$(\Leftarrow)$: Předpokládáme, že $\vec{x}_1 = \vec{0}$. Potom $1\vec{x}_1 = \vec{0}$, což je netriviální LK $(\vec{x}_1)$ rovná $\vec{0}$, proto podle definice je $(\vec{x}_1)$ LZ.

2. Nechť $\vec{x}_i = \vec{0}$ pro nějaké $i \in \hat{n}$, pak tvrzení plyne z rovnosti

$$\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_n,$$

tedy z faktu, že $\vec{0}$ dostaneme jako netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, kde v LK jsou všechny koeficienty kromě i-tého rovny 0 a i-tý klademe roven 1, a tedy soubor je LZ.

3. Tvrzení plyne z rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \vec{x}_{k_i},$$

která je důsledkem zobecněného komutativního zákona. Jakmile je na jedné straně netriviální LK dávající $\vec{0}$, pak i na druhé straně je netriviální LK dávající $\vec{0}$.

4. Dokažme tvrzení sporem. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LN a zároveň $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ je LZ pro nějaké $k \in \hat{n}$. Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T$ alespoň jedno nenulové taková, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i$. Pak ale také platí $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0\vec{x}_i$, což je netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ dávající $\vec{0}$, a tedy máme spor s LN $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

5. Toto tvrzení plyne z předchozího užitím faktu, že když platí implikace $A \Rightarrow B$, tak platí také implikace $\rceil B \Rightarrow \rceil A$.

6. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Předpokládáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ, tedy podle definice existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že alespoň jedno z nich je nenulové (označme je α_{i_0}) a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Odtud dostaneme $\alpha_{i_0}\vec{x}_{i_0} = -\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. A na závěr máme

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} (-\alpha_i/\alpha_{i_0})\vec{x}_i.$$

Tedy podle definice LO dostáváme $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$.
$(\Leftarrow)$: Předpokládejme, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0-1}, \vec{x}_{i_0+1}, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Podle definice LO existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_n \in T$ taková, že

$$\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i.$$

Odtud dostáváme $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} (-\alpha_i)\vec{x}_i + 1\vec{x}_{i_0} = \vec{0}$, což je netriviální LK $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ rovná $\vec{0}$, proto $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je LZ.

7. Opět dokazujeme dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je LZ, pak samozřejmě $\vec{x}_1$ může být nulový. Ošetřeme ještě případ, kdy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Pak z definice LZ plyne, že existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$ a alespoň jedno z čísel je nenulové. Označme $i_0 = \max\{i \in \hat{n} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Množina vpravo je neprázdná, protože aspoň jedno z čísel α_i je nenulové. Navíc $i_0 \geq 2$. Kdyby totiž $i_0 = 1$, pak by $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$, což je spor s Větou 1, podle které plyne z $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, že $\alpha_1 = 0$. Odtud dostáváme $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \vec{x}_i$. Dále máme $\alpha_{i_0} \vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ a na závěr $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} (-\alpha_i/\alpha_{i_0}) \vec{x}_i$. Což podle definice LO znamená, že $\vec{x}_{i_0} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i_0-1}]_\lambda$.
($\Leftarrow$) : Nechť $\vec{x}_1 = \vec{0}$, pak podle 2. vlastnosti této věty je soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ LZ. Druhá možnost je, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a $\vec{x}_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i$ pro nějaké $i_0 \geq 2$. Pak platí $\vec{0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i \vec{x}_i + (-1)\vec{x}_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n} 0 \vec{x}_i$, což je netriviální LK souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, který je tedy LZ.

$\square$

Příklad 9. *Rozmyslete si, že soubor dvou vektorů $(\vec{x}, \vec{y})$ je LZ $\Leftrightarrow$ $(\exists \alpha \in T)(\vec{x} = \alpha \vec{y} \vee \vec{y} = \alpha \vec{x})$.*

3.2 Báze a dimenze

Definice 9. *Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V nad tělesem T. Nechť $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Pak říkáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je* **soubor generátorů** *(***generující soubor***) V. Říkáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$* **generuje** *$V$.*

Poznámka 26. *V případě LO už jsme generátory zaváděli, nazývali jsme tak pro LO $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Nyní vidíme, že chápeme-li LO jako vektorový prostor, pak jsme v souladu s novou definicí.*

Definice 10. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ splňuje 2 podmínky*

1. *$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN,*
2. *$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ generuje V.*

Pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ nazveme **bází** *V.*

Poznámka 27. *$V = \{\vec{0}\}$ bázi nemá, protože v něm neexistuje LN soubor.*

Příklad 10. *Rozhodněte o LN či LZ souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ z $\mathbb{R}^4$.*

1.
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení*: Zjišťujeme, zda rovnice $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 + \alpha_4 \vec{x}_4 = \vec{0}$ má jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (pak je soubor podle definice LN) nebo zda existuje netriviální řešení, tedy alespoň jedno z $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ (pak je soubor podle definice LZ). Dostáváme soustavu*
$$\begin{array}{rcl} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 & = & 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 & = & 0 \end{array}.$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má samé hlavní sloupce. Z kapitoly Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic pak víme, že v takovém případě existuje jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. *To jest, dokázali jsme, že soubor* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ *je LN.*

2.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení*: Zjišťujeme, zda rovnice* $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 + \alpha_4\vec{x}_4 = \vec{0}$ *má jen triviální řešení* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ *(pak je soubor podle definice LN) nebo zda existuje netriviální řešení, tedy alespoň jedno z* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \neq 0$ *(pak je soubor podle definice LZ). Dostáváme soustavu*

$$\begin{array}{rcl} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 & = & 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 1\alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 & = & 0 \end{array}.$$

V maticovém zápisu máme homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Upravíme ji ekvivalentními řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice v horním stupňovitém tvaru má poslední sloupec vedlejší. Z kapitoly Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic pak víme, že netriviální řešení získáme, když za neznámou odpovídající vedlejšímu sloupci zvolíme nenulové číslo, například $\alpha_4 = 1$, *a ostatní neznámé dopočítáme. Dostáváme* $\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = -1$. *To jest, zjistili jsme, že* $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$. *Tedy máme netriviální LK souboru* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ *rovnou* $\vec{0}$, *což znamená, že soubor je LZ. Ze vztahu* $(-1)\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = \vec{0}$ *dále vidíme, že* $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$, *tedy podle 3. vlastnosti LO máme* $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. *Označme* $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$ *(z teorie víme, že jde o vektorový prostor). Jelikož z matice soustavy výše uvedené, vyškrtneme-li poslední sloupec, vidíme, že po ekvivalentních řádkových úpravách zůstanou v matici v horním stupňovitém tvaru pouze hlavní sloupce, zjišťujeme, že* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ *je LN generující soubor* V, *je to tedy báze.*

Dalším důležitým pojmem je dimenze, která (jak uvidíme zanedlouho) s bází úzce souvisí.

Definice 11. *Nechť* $V \neq \{\vec{0}\}$ *je vektorový prostor nad tělesem* T. *Nechť existuje* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že jsou splněny 2 podmínky*

1. *ve V existuje n-členný LN soubor,*

2. *každý $(n+1)$-členný soubor z V je LZ,*

pak říkáme, že **dimenze** *V je konečná a rovna n a píšeme $\dim V = n$. V opačném případě říkáme, že dimenze V je nekonečná a píšeme $\dim V = +\infty$. Pro nulový vektorový prostor klademe $\dim V = 0$.*

Poznámka 28. *Rozeberme si, kdy je $\dim V = +\infty$, tj. kdy V nemá konečnou dimenzi. Opačný případ ve výše uvedené definici znamená negaci výroku, tedy: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je buď každý n-členný soubor ve V LZ, nebo existuje $(n+1)$-členný LN soubor. Jelikož $V \neq \{\vec{0}\}$, je jasné, že ne každý 1-členný soubor je LZ, potom ale, má-li negace výroku platit, dostáváme, že existuje 2-členný LN soubor ve V. Poté protože ne každý 2-členný soubor je LZ, dostáváme, že existuje 3-členný LN soubor atd. Neboli nekonečná dimenze znamená, že ve V existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ n-členný LN soubor.*

Příklad 11. *Uvažujme prostor $\mathbb{R}^4$. Nechť $V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. V je LO, tedy je sám o sobě vektorovým prostorem. Snadno nahlédneme, že $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je jeho bází, protože jde o LN a generující soubor. Ve V tedy existuje 3-členný LN soubor, zatím tedy víme, že $\dim V \geq 3$. Abychom dokázali, že $\dim V = 4$, museli bychom ověřit, že každý 4-členný soubor z V už je LZ. Následující věta nám tuto práci ušetří.*

Věta 5 (Steinitzova věta o výměně, 1913)**.** *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T. Nechť dále soubor $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m)$ vektorů z V splňuje, že pro každé $i \in \hat{n}$*

$$\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda.$$

Pak platí:

1. *$m \geq n$,*

2. *existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \hat{m}$ takové, že*

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \ldots, i_n\})]_\lambda.$$

Poznámka 29.

Z 1. bodu Steinitzovy věty plyne, že počet členů LN souboru ve vektorovém prostoru nepřekročí počet generátorů tohoto prostoru.

2. bod věty říká, že v LO existují generátory, které lze nahradit LN vektory (zápis na pravé straně tedy znamená, že z LO obalu byly vyhozeny generátory $\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \ldots, \vec{y}_{i_n}$), proto věta o výměně. Věta ale neříká, které z generátorů máme vyhodit.

Důkaz. Nejprve dokážeme 2. bod Steinitzovy věty. Dokonce dokážeme ještě silnější tvrzení: Pro každé $k \in \hat{n}$ existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})]_\lambda.$$

Pokud tvrzení dokážeme, pak pro volbu $k = n$ jde o 2. bod věty. Důkaz provedeme indukcí podle k.

- Pro $k = 1$ chceme dokázat, že existuje index $i_1 \in \hat{m}$ takový, že $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. Z faktu, že $\vec{x}_1 \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$ plyne

1. užitím Věty 3 o vlastnostech LO, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda, \tag{3}$$

2. užitím Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů, že $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ je LZ soubor.

Dále užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) dostaneme, že některý z y-ových vektorů je LK předchozích (využili jsme faktu, že $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, protože náleží LN souboru), tj. existuje index $i_1 \in \hat{m}$ takový, že $\vec{y}_{i_1} \in [\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{i_1-1}]_\lambda$. Odtud z Věty 3 o vlastnostech LO plyne, že $\vec{y}_{i_1}$ lze z $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil, tedy $[\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$. A na závěr podle (3) máme $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1\})]_\lambda$.

- Nechť pro $1 \leq k < n$ existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{m}$ takové, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda.$$

Dokážeme, že pak existuje index $i_{k+1} \in \hat{m}$ různý od předchozích $i_1, \dots, i_k$ takový, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda.$$

Z faktu, že $\vec{x}_{k+1} \in [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda$ plyne

1. užitím Věty 3 o vlastnostech LO, že

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda, \tag{4}$$

2. užitím Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}))$ je LZ soubor.

Dále užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) dostaneme, že některý z y-ových vektorů (jeho index označíme i_{k+1}) je LK předchozích vektorů v souboru (využili jsme faktu, že soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1})$ je LN, a tedy $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a také žádný z vektorů $\vec{x}_i$ není LK předchozích vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}$), tj. z Věty 3 o vlastnostech LO plyne, že $\vec{y}_{i_{k+1}}$ lze z $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\})]_\lambda$ vyhodit, aniž by se LO změnil. A na závěr podle (4) máme $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda$.

Nyní zbývá dokázat 1. bod Steinitzovy věty, přičemž 2. bod je již dokázaný, tedy jej můžeme využít. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že $n > m$. Pak ale existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \dots, i_m \in \hat{m}$ (což jsou ale tedy nutně všechna čísla z množiny $\hat{m}$) takové, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\})]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$, kde poslední rovnost plyne z faktu, že $\hat{m} - \{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \emptyset$. Jelikož je $n > m$, plyne z předpokladů věty, že $\vec{x}_{m+1} \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m]_\lambda$, tím jsme ale dostali spor s LN souboru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1})$ podle Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů). $\square$

Příklad 12. *Návrat k příkladu v $\mathbb{R}^4$, kde vyšetřujeme dimenzi* $V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. *Již víme, že* $\dim V \geq 3$. *Jelikož V má 3-členný generující soubor, Steinitzova věta tvrdí, že LN soubory ve V mají maximálně 3 členy, a tedy každý 4-členný soubor je LZ. To už podle definice dimenze znamená, že* $\dim V = 3$.

Steinitzova věta umožňuje zavést alternativní definici dimenze, která dává do souvislosti pojem dimenze a báze.

Věta 6 (Alternativní definice dimenze)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak $\dim V = n$ tehdy a jen tehdy, když ve V existuje n-členná báze.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Nechť $\dim V = n$, pak ve V existuje podle definice dimenze n-členný LN soubor, označme jej $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$. Ukážeme, že tento soubor je bází, tedy že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Kdyby soubor negeneroval V, tedy $V \supsetneqq [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak by ve V existoval vektor $\vec{x}_{n+1} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$. Potom by ale soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})$ byl LN, což je spor s $\dim V = n$.

Že by soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1})$ byl LN, lze ukázat užitím Alternativní definice LZ (7. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů): jelikož je soubor $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ LN, platí $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí, že $\vec{x}_i$ není LK předchozích vektorů ze souboru, a zároveň ani $\vec{x}_{n+1}$ není LK souboru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.
$(\Leftarrow)$: Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V, pak ve V existuje n-členný LN soubor (jelikož $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN). Protože $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je také generující soubor, plyne z 1. bodu Steinitzovy věty, že každý LN soubor má maximálně n členů, a tedy každý $(n+1)$-členný soubor je LZ. Tím je podle definice dokázáno, že $\dim V = n$. □

Důsledek 1 (Důsledky Steinitzovy věty)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Pak platí:*

1. *Každá báze V je n-členná.*
2. *Každý n-členný LN soubor ve V už generuje V, a je tedy bází V.*
3. *Každý n-členný soubor generátorů V už je LN, a je tedy bází V.*

Důkaz.
1. Víme, že ve V existuje n-členná báze. Označme ji $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Nechť $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je jiná báze V. Jelikož $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor generátorů V a $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je LN soubor ve V, je podle 1. bodu Steinitzovy věty $n \geq m$. Obdobně, protože $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je soubor generátorů V a $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor ve V, platí opět podle 1. bodu Steinitzovy věty, že také $m \geq n$.
2. Viz důkaz 1. implikace ve Větě 6 o alternativní definici dimenze.
3. Kdyby n-členný soubor generátorů nebyl LN, šlo by z jeho obalu vyhodit některý z vektorů, aniž by se obal změnil. Pak by ale V byl generován $n-1$ vektory, což by podle Steinitzovy věty znamenalo, že LN soubory ve V mají maximálně $n-1$ členů, a tedy všechny n-členné jsou LZ. A to je spor s $\dim V = n$.

□

Poznámka 30. *Možná se divíte, proč jsme pro definici dimenze nepoužili hned na začátku definici alternativní (tedy pomocí báze). Taková definice by ale potřebovala ověřit korektnost - tedy fakt, že když ve V někdo najde bázi o* 10 *členech a prohlásí, že dimenze je* 10*, nestane se, že by někdo jiný našel bázi o jiném počtu členů. Fakt, že všechny báze v prostoru dimenze n jsou n-členné se snadno ověří pomocí Steinitzovy věty. Zkuste sami rozmyslet, jak byste jej ověřili bez použití Steinitzovy věty. Původní definice dimenze je tedy sice techničtější, ale nevyžaduje dodatečné ověření korektnosti.*

Příklad 13. *Uveďme, jak vypadají báze a dimenze nejznámějších vektorových prostorů.*

1. *V T^n nazýváme* standardní bází *soubor $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, kde*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že soubor $\mathcal{E}$ je LN. Dále $\mathcal{E}$ generuje V, protože každý vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ lze psát jako $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n$. Proto $\dim T^n = n$.

2. *V prostoru matic $T^{m,n}$ (o m řádcích a n sloupcích) nazýváme* standardní bází *soubor* $(\mathbb{E}_{1,1}, \mathbb{E}_{1,2}, \dots, \mathbb{E}_{m,n})$*, kde pro každé $i \in \hat{m}$ a každé $j \in \hat{n}$ je $\mathbb{E}_{i,j}$ matice, která má m řádků, n sloupců, prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci je roven jedné a všechny ostatní prvky jsou nulové. Tedy například* $\mathbb{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$*. Podobně jako v předchozím příkladě nahlédneme, že jde o LN soubor generátorů, tentokrát o mn členech, proto* $\dim T^{m,n} = mn$.

3. *V prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně maximálně $n-1$ s přidáním nulového polynomu nazýváme* standardní bází *soubor $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ jsou polynomy $e_1, e_2, \dots, e_n$ definovány*
$$e_1(t) = 1,\ e_2(t) = t,\ e_3(t) = t^2,\ \dots,\ e_n(t) = t^{n-1}.$$
Vysvětleme, že takový soubor je generující. Bereme-li libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_n$, pak existují komplexní čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = \alpha_0 e_1(t) + \alpha_1 e_2(t) + \alpha_2 e_3(t) \cdots + \alpha_{n-1} e_n(t),$$
tj.
$$p = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \dots + \alpha_{n-1} e_n,$$
neboli $p \in [e_1, e_2, \dots, e_n]_\lambda$. LN souboru ověříme z definice LN. Předpokládáme-li, že $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n = \mathcal{O}$(nulový polynom), znamená to, že polynom vlevo má pro všechna $t \in \mathbb{C}$ tvar $\beta_1 + \beta_2 t + \dots + \beta_n t^{n-1}$. Jelikož jde o nulový polynom, všechny koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ jsou nutně nulové, a tím je dokázána LN. Jelikož má $\mathcal{P}_n$ n-člennou bázi, je $\dim \mathcal{P}_n = n$ (tedy značení $\mathcal{P}_n$ je voleno právě tak, aby n odpovídalo dimenzi).

4. *V prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je pro každé n soubor $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ definovaný stejně jako v předchozím bodě LN, proto $\dim \mathcal{P} = +\infty$.*

Steinitzova věta má ještě další dva důležité důsledky. Zformulujeme je ve tvaru vět.

Věta 7 (O výběru báze ze souboru generátorů)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Nechť $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = V$. Pak existují indexy $i_1, i_2, \dots, i_n \in \hat{m}$ takové, že $(\vec{y}_{i_1}, \vec{y}_{i_2}, \dots, \vec{y}_{i_n})$ tvoří bázi V.*

Důkaz.
- Případ $m < n$ podle Steinitzovy věty nenastává.
- Je-li $m = n$, pak podle 3. důsledku Steinitzovy věty je $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ bází V.
- Je-li $m > n$, pak je soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ LZ a podle Alternativní definice LZ (6. bod Věty 4 o vlastnostech LN a LZ souborů) lze z $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ vyhodit jeden z generátorů, aniž by se obal změnil.
- Je-li $m - 1 = n$, pak je soubor získaný z původního vyhozením jednoho vektoru hledanou bází.
- Je-li $m - 1 > n$, pak pokračujeme analogicky.

□

Příklad 14. *Uvažujme $\mathbb{R}^4$. Nechť $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, kde*
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
Vyberte ze souboru generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ bázi P.
Řešení*: Postupujeme jako při vyšetřování LN a LZ, tedy vytvoříme matici, jejímiž sloupci jsou*

generátory P. V LO nezáleží na pořadí vektorů, dáme je tedy do matice tak, aby se nám co nejsnáze převáděla na horní stupňovitý tvar.

$$(\vec{x}_2\vec{x}_3\vec{x}_1\vec{x}_4) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že 3. a 4. sloupec jsou vedlejší, tedy jim odpovídající vektory jsou LK předchozích. Konkrétně $\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_3$ a $\vec{x}_4 = -\vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Proto lze vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_4$ z LO vyhodit, aniž by se změnil, tj. $P = [\vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$. Z matice také vidíme, že vektorům $\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3$ odpovídají hlavní sloupce, jsou tedy LN a tvoří hledanou bázi.

Věta 8 (O doplnění LN souboru na bázi)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $\dim V = n$. Nechť $k \in \hat{n}$ a $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je LN soubor ve V. Pak existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ je bází V.*

Důkaz. Podle Věty 6 (Alternativní definice dimenze) existuje ve V n-členná báze $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$. Užitím Steinitzovy věty (jen pozor na to, že m ze Steinitzovy věty je nyní n a n ze Steinitzovy věty je nyní k) víme, že existují indexy $i_1, \ldots, i_k \in \hat{n}$ takové, že $[\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n]_\lambda = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \ldots, i_k\})]_\lambda$. Jelikož je soubor $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{n} - \{i_1, \ldots, i_k\}))$ n-členný generující soubor V, jde podle 3. důsledku Steinitzovy věty o bázi. □

Příklad 15. *Doplňte $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi $\mathbb{R}^4$, je-li*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení*: Uvažujme standardní bázi $\mathbb{R}^4$ a v ní dva vektory nahradíme vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ (to jistě půjde, neboť $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ nejsou jeden násobkem druhého, a tedy jsou LN). Jistě platí*

$$\mathbb{R}^4 = [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Vyhodíme z LO nadbytečné vektory a zůstane nám hledaná báze. Už dopředu víme, že bude 4-členná, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Převedli jsme tedy úlohu na problém vybrat bázi ze souboru generátorů, viz Příklad 14. Vytvoříme tedy matici, jejímiž sloupci jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Z matice v horním stupňovitém tvaru pak vyčteme, které vektory jsou LK předchozích a lze je z LO vyhodit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že $\vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$ odpovídají vedlejším sloupcům, a jsou proto LK předchozích a lze je tedy z LO vyhodit, aniž by se změnil. Konkrétně $\vec{e}_2 = -\vec{x}_1 + 2\vec{e}_1$ a $\vec{e}_3 = -2\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 4\vec{e}_1$. Proto $\mathbb{R}^4 = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4]_\lambda$. Podle 3. důsledku Steinitzovy věty je 4-členný soubor generátorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ LN, a tedy jde o hledanou bázi. Rozmyslete si, že je důležité napsat si v matici dopředu ty vektory, které má hledaná báze obsahovat!

3.3 Souřadnice

Věta 9 (Jednoznačnost vyjádření vektoru pomocí LK báze)**.** *Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak pro každý vektor $\vec{x} \in V$ existuje právě jedna uspořádaná n-tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$.*

Důkaz.

- Existence takového vektoru $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ plyne z faktu, že $V = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$.
- Jednoznačnost dokážeme sporem. Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ jsou dvě různé n-tice splňující $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\vec{x}_i = \vec{0}$ a přitom jde o netriviální LK, protože jistě pro některý index $i_0 \in \hat{n}$ je $\alpha_{i_0} - \beta_{i_0} \neq 0$. To je spor s LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$.

$\square$

Definice 12. *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T.*

1. *Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Pak α_i nazveme* ***i*-tá souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$**.
2. *Nechť $i \in \hat{n}$. Zobrazení $\vec{x}_i^{\#} : V \to T$, které vektoru přiřadí jeho i-tou souřadnici v bázi $\mathcal{X}$, tj. $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme* ***i*-tým souřadnicovým funkcionálem v bázi $\mathcal{X}$**.
3. *Zobrazení $(.)_{\mathcal{X}} : V \to T^n$, které vektoru přiřadí vektor všech jeho souřadnic v bázi $\mathcal{X}$, tj. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme* **souřadnicovým izomorfismem v bázi $\mathcal{X}$**.
   ($(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ čteme „$\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$“ nebo „souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$“).

Poznámka 31. *Díky Větě 9 o jednoznačnosti vyjádření vektoru pomocí LK báze víme, že souřadnicový funkcionál a souřadnicový izomorfismus jsou skutečně zobrazení, tedy nestane se, že by $\vec{x}_i^{\#}$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých čísel nebo $(.)_{\mathcal{X}}$ přiřadil stejnému vektoru $\vec{x}$ více různých n-tic čísel.*

Věta 10 (Vlastnosti souřadnicového funkcionálu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:*

1. *Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) + \vec{x}_i^{\#}(\vec{y})$ (říkáme, že $\vec{x}_i^{\#}$ je* **aditivní***).*
2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V$ je $\vec{x}_i^{\#}(\alpha\vec{x}) = \alpha\vec{x}_i^{\#}(\vec{x})$ (říkáme, že $\vec{x}_i^{\#}$ je* **homogenní***).*
3. *$\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo delta), tj. $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}_j) = 0$ pro každé $j \in \hat{n}, j \neq i$ a $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}_i) = 1$.*

Důkaz.

1. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_i$. Pak $\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\vec{x}_i$. Podle definice souřadnicového funcionálu pak platí $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$, $\vec{x}_i^{\#}(\vec{y}) = \beta_i$ a $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_i + \beta_i$, a tedy platí $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) + \vec{x}_i^{\#}(\vec{y})$.
2. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Pak $\alpha\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{x}_i$. Podle definice je $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) = \alpha_i$ a $\vec{x}_i^{\#}(\alpha\vec{x}) = \alpha\alpha_i$, a tedy platí $\vec{x}_i^{\#}(\alpha\vec{x}) = \alpha\vec{x}_i^{\#}(\vec{x})$.
3. Jelikož $\vec{x}_j = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_{j-1} + 1\vec{x}_j + 0\vec{x}_{j+1} + \cdots + 0\vec{x}_n$, podle definice máme $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$.

$\square$

Důsledek 2 (Důsledek Věty 10 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak platí:*

1. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $(\vec{x}+\vec{y})_{\mathcal{X}} = (\vec{x})_{\mathcal{X}} + (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ (říkáme, že souřadnicový izomorfismus je* **aditivní***).*

2. *Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x} \in V$ je $(\alpha\vec{x})_{\mathcal{X}} = \alpha(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ (říkáme, že souřadnicový izomorfismus je* **homogenní***).*

3. *$(\vec{x}_j)_{\mathcal{X}} = \vec{e}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$ ($\vec{e}_j$ je j-tý vektor standardní báze T^n).*

Poznámka 32. *Řádně si rozmyslete rozdíl mezi objekty označenými $\vec{x}_i$ a $\vec{x}_i^{\#}$. Zatímco $\vec{x}_i$ je vektor z V, je $\vec{x}_i^{\#}$ zobrazení, které každému vektoru z V přiřazuje číslo z T.*

Příklad 16. *Uvažujme prostor $\mathbb{R}^3$ a v něm standardní bázi $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Najděte $(\vec{x})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Řešení*:*

1. *Jelikož $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dostáváme, že $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}$.*
   Rozmyslete si, že pro libovolný vektor $\vec{x} \in T^n$ platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$.

2. *Označme $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, pak $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Máme tedy soustavu LAR s rozšířenou maticí soustavy*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Z matice v horním stupňovitém tvaru vyčteme $\alpha_3 = -2, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = 3$, tj. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4 Podprostory

Definice 13. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak P nazveme* **podprostorem** *V a značíme $P \subset\subset V$, pokud*

1. *$P \subset V$,*
2. *$P \neq \emptyset$,*
3. *pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in P$ (říkáme, že množina P je* **uzavřená na sčítání***),*
4. *pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in V$ platí $\alpha\vec{x} \in P$ (říkáme, že množina P je* **uzavřená na násobení číslem z tělesa***).*

Příklad 17. *Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad tělesem T. Pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$. Splnění vlastností* 1. *až* 4. *z definice podprostoru pro LO plyne z Věty 3 o vlastnostech LO.*

Příklad 18. *V $\mathbb{R}^2$ máme následující typy podprostorů:*

1. *$[\binom{0}{0}]_\lambda = \{\vec{0}\}$,*
2. *$[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$ (víme, že jde o přímku jdoucí bodem $\binom{0}{0}$ a obsahující vektor $\vec{x}$),*
3. *$[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $(\vec{x}, \vec{y})$ je LN soubor (víme, že jde o celé $\mathbb{R}^2$, protože $(\vec{x}, \vec{y})$ je* 2*-členný LN soubor, a tedy tvoří bázi $\mathbb{R}^2$).*

Za chvíli se dozvíme, že žádné jiné podprostory už $\mathbb{R}^2$ nemá.

Příklad 19. *V $\mathbb{R}^3$ máme následující typy podprostorů:*

1. *$[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda = \{\vec{0}\}$,*
2. *$[\vec{x}]_\lambda$, kde $\vec{x} \neq \vec{0}$ (víme, že jde o přímku jdoucí bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a obsahující vektor $\vec{x}$),*
3. *$[\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $(\vec{x}, \vec{y})$ je LN soubor (snadno si rozmyslíte, že jde o rovinu procházející bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a obsahující vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$),*
4. *$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor (víme, že jde o celé $\mathbb{R}^3$, protože $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je* 3*-členný LN soubor, a tedy tvoří bázi $\mathbb{R}^3$).*

Za chvíli se dozvíme, že žádné jiné podprostory už $\mathbb{R}^3$ nemá.

Věta 11 (Vlastnosti podprostorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $P \subset\subset V$. Pak platí:*

1. *$\vec{0} \in P$.*
2. *$\{\vec{0}\} \subset\subset V$ a $V \subset\subset V$.*
3. *P je vektorový prostor nad tělesem T (při zachování operací z V).*
4. *Nechť $Q \subset\subset P$ a $P \subset\subset V$, pak $Q \subset\subset V$ (tranzitivita vlastnosti býti podprostorem).*
5. *$\dim P \leq \dim V$.*
6. *Nechť $\dim V < +\infty$. Pokud $\dim P = \dim V$, pak $P = V$.*

Důkaz. 1. $P \neq \emptyset$, proto existuje $\vec{x} \in V$ takový, že $\vec{x} \in P$, a jelikož je P množina uzavřená na násobení číslem, je také $0\vec{x} = \vec{0} \in P$.

2. Splnění vlastností 1. až 4. z definice podprostoru je zřejmé.

3. Musíme ověřit, že $P \neq \emptyset$ a že P je množina uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem a že platí axiomy. Neprázdnost a uzavřenost na operace plyne z faktu, že $P \subset\subset V$. Zbývá ověřit axiomy.

   - V P existuje nulový vektor, jde o nulový vektor z V. (Patří do P podle 1. bodu.)
   - Ke každému vektoru $\vec{x} \in P$, existuje ve V opačný vektor $-\vec{x}$. Podle Věty 1 je $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$, a tedy díky uzavřenosti P na násobení patří $-\vec{x}$ do P.
   - Všechny ostatní axiomy platí pro všechny vektory z V, tím spíše platí i pro všechny vektory z $P \subset V$.

4. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

   (a) $Q \subset V$, protože $Q \subset P \subset V$,

   (b) $Q \neq \emptyset$, protože $Q \subset\subset P$,

   (c) Q je množina uzavřená na sčítání vektorů, protože $Q \subset\subset P$,

   (d) Q je množina uzavřená na násobení vektoru číslem, protože $Q \subset\subset P$.

5. Je-li $\dim V = +\infty$, pak je tvrzení zřejmé. Je-li $V = \{\vec{0}\}$, pak $P = \{\vec{0}\}$, tvrzení tedy opět platí. Z $\dim V = n$ plyne, že každý LN soubor ve V je maximálně n-členný, tedy i báze P je maximálně n-členná, proto $\dim P \leq n$.

6. Pro $V = \{\vec{0}\}$ je tvrzení zřejmé. Pro $V \neq \{\vec{0}\}$ označme $\dim P = \dim V = n \in \mathbb{N}$. Jelikož $\dim P = n$, existuje v P n-členná báze $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, tj. $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = P$. Prostor V má dimenzi rovnu n, a tak každý n-členný LN soubor ve V je bází V. Protože $P \subset V$, je $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ bází V, a tedy $V = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda = P$.

□

Definice 14. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Triviálními podprostory nazveme $\{\vec{0}\}$ a V. Pokud $P \subset\subset V$ a $P \neq V$, pak P nazveme vlastní podprostor.*

Důsledek 3 (Důsledek Věty 11 o vlastnostech podprostorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\dim V < +\infty$ a nechť $P \subset\subset V$. Pokud P je vlastní podprostor V, pak $\dim P < \dim V$.*

Důkaz. Z výrokové logiky víme, že pro libovolné výroky A, B platí $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Z 6. bodu Věty 11 o vlastnostech podprostorů dostaneme: $P \neq V \Rightarrow \dim P \neq \dim V$. Jelikož $P \subset\subset V$ a jelikož podle 5. bodu předchozí věty platí $\dim P \leq \dim V$, můžeme přepsat předchozí implikaci do tvaru: P je vlastní podprostor $V \Rightarrow \dim P < \dim V$. □

Příklad 20. *Vraťme se k podprostorům v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Z Věty 11 o vlastnostech podprostorů jsme se dozvěděli, že každý podprostor je zároveň vektorový prostor, má tedy dimenzi, a že pro dimenzi platí, že je ≤ 2 (jde-li o podprostor $\mathbb{R}^2$) nebo ≤ 3 (jde-li o podprostor v $\mathbb{R}^3$). Buď jsou tedy podprostory nulové, nebo mají bázi maximálně 2, respektive 3-člennou, jejímiž jsou LO. Odtud tedy plyne, že žádné jiné podprostory než ty, které jsme popsali výše, v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ neexistují.*

Definice 15. *Nechť A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory!). Součtem A a B nazveme množinu*

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}.$$

Řekneme, že součet $A + B$ je direktní, píšeme $A \oplus B$, pokud pro každý vektor $\vec{x} \in A + B$ existuje právě jeden vektor $\vec{a} \in A$ a právě jeden vektor $\vec{b} \in B$ takové, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$.

Poznámka 33. *Připomeňme pro jistotu i definici sjednocení a průniku množin. Nechť A, B jsou podmnožiny vektorového prostoru V nad tělesem T (ne nutně podprostory!).*

$$A \cup B = \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \ \vee \ \vec{a} \in B\},$$

$$A \cap B = \{\vec{a} \mid \vec{a} \in A \ \wedge \ \vec{a} \in B\}.$$

Příklad 21. *Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ a $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. Pak $A + B = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. Součet $A + B$ není direktní, protože $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$.*

Příklad 22. *Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ a $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. Pak $A+B = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. Tentokrát je $A + B$ direktní.*

Věta 12 (Vlastnosti součtu a průniku podprostorů)**.** *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak platí:*

1. *$P + Q \subset\subset V$.*
2. *$P + Q$ je direktní $\Leftrightarrow P \cap Q = \{\vec{0}\}$.*
3. *$P \cap Q \subset\subset V$.*
4. *Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, pak $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V, který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, tj.*
$$[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \bigcap \{Q \subset\subset V \mid \vec{x}_i \in Q \text{ pro každé } i \in \hat{n}\}.$$

Důkaz. 1. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

   (a) $P + Q \subset V$, protože $P \subset V$ a $Q \subset V$ a V je uzavřená na sčítání,

   (b) $P + Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, $\vec{0} \in Q$ a $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in P + Q$,

   (c) $P + Q$ je uzavřený na sčítání vektorů, protože pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P + Q$ existují $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$ takové, že $\vec{x}_1 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1$ a $\vec{x}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$, proto $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 + \vec{p}_2 + \vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{q}_1 + \vec{q}_2$, a jelikož P a Q jsou podprostory, platí $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \in P$ a $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \in Q$, z čehož plyne, že $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P + Q$,

   (d) $P + Q$ je uzavřený na násobení vektoru číslem, protože pro libovolné $\vec{x} \in P + Q$ a libovolné $\alpha \in T$ existuje $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$, proto $\alpha\vec{x} = \alpha(\vec{p} + \vec{q}) = \alpha\vec{p} + \alpha\vec{q}$, a jelikož P a Q jsou podprostory, platí $\alpha\vec{p} \in P$ a $\alpha\vec{q} \in Q$, z čehož plyne, že $\alpha\vec{x} \in P + Q$.

2. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
(⇒): Dokažme implikaci sporem. Předpokládáme, že $P + Q$ je direktní a $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$. Tedy existuje $\vec{x} \in P \cap Q, \vec{x} \neq \vec{0}$. Potom ale $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$, což jsou dva různé zápisy $\vec{x}$ jakožto součtu vektorů z $P + Q$, což je spor s direktností.
(⇐): Dokažme i druhou implikaci sporem. Předpokládáme, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, ale $P + Q$ není direktní. Pak existuje vektor $\vec{x} \in P + Q$, pro který lze najít $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$, $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, a $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$. Pak ale $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$ je nenulový vektor, který patří do P i do Q, je to tedy nenulový vektor z $P \cap Q$, což je spor s předpokladem, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

3. Ověříme vlastnosti z definice podprostoru:

   (a) $P \cap Q \subset V$, protože $P \subset V$ a $Q \subset V$,

   (b) $P \cap Q \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in P$, $\vec{0} \in Q$, a tedy $\vec{0} \in P \cap Q$,

   (c) $P \cap Q$ je uzavřený na sčítání vektorů, protože pro libovolné $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P \cap Q$ platí, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ patří jak do P, tak i do Q, jelikož P a Q jsou podprostory, patří $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ do P i do Q a odtud už plyne, že $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in P \cap Q$,

   (d) $P \cap Q$ je uzavřený na násobení vektoru číslem, protože pro libovolný vektor $\vec{x} \in P \cap Q$ patří $\vec{x}$ do P i do Q, což jsou podprostory V, a tedy pro libovolné $\alpha \in T$, je $\alpha\vec{x}$ z P i z Q a odtud už plyne, že $\alpha\vec{x} \in P \cap Q$.

4. Už víme z prvního příkladu za definicí podprostoru, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda \subset\subset V$. Abychom dokázali, že jde o nejmenší podprostor V, který obsahuje vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, stačí vysvětlit, že každý podprostor obsahující vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ obsahuje i jejich libovolnou LK. To je ale jasné z faktu, že podprostor je zároveň vektorový prostorem a o vektorových prostorech víme, že tuto vlastnost mají.

$\square$

Poznámka 34. *Rozmyslete si sami, že dokonce průnik libovolného počtu podprostorů a součet konečného počtu podprostorů vektorového prostoru V nad tělesem T tvoří podprostor.*

Poznámka 35. *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T. Možná by vás napadlo, že zajímáme-li se o $P \cap Q$, bylo by logické zkoumat také $P \cup Q$, ovšem $P \cup Q$ nemusí tvořit podprostor. Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$ a $Q = [\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$ jsou jistě $P, Q \subset\subset V$, ale vektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \notin P \cup Q$, přestože jde o součet dvou vektorů z $P \cup Q$.*

Poznámka 36. *Nechť $P, Q \subset\subset V$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T. Místo sjednocení tedy zkoumáme $P + Q$. Ukažme, že jde o nejmenší podprostor, který obsahuje $P \cup Q$. Skutečně každý vektor z $\vec{p} \in P$ je roven $\vec{p} + \vec{0}$, a tedy patří do $P + Q$. Podobně každý vektor $\vec{q} \in Q$ je roven $\vec{0} + \vec{q}$, a tedy je z $P + Q$. To znamená, že $P \cup Q \subset P + Q$. A že je $P + Q$ nejmenší takový podprostor plyne z faktu, že každý podprostor obsahující všechny vektory z P i všechny vektory z Q obsahuje také všechny jejich součty, tedy obsahuje $P + Q$.*

Poznámka 37. *Ujasněme, jak vypadá $P + Q$, pokud jsou P i Q zadány jako LO. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ jsou soubory z V. Je-li $P = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ a $Q = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$, pak $P + Q = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$.*

- *Ukažme nejprve, že $P + Q \subset [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$.*
  Nechť $\vec{x} \in P + Q$, pak existují $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $\vec{p} \in P$, je $\vec{p}$ LK generátorů P, tj. existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1, \ldots, \beta_m \in T$ taková, že $\vec{q} = \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$. Odtud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$, a tedy $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$.

- *Analogicky ukážeme, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda \subset P + Q$.*
  Nechť $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m]_\lambda$. Pak existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i$. Jelikož $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in P$ a $\sum_{i=1}^m \beta_i \vec{y}_i \in Q$, vidíme, že $\vec{x} \in P + Q$.

4.1 1. věta o dimenzi

Věta 13 (1. věta o dimenzi)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $P, Q \subset\subset V$. Nechť $\dim P < +\infty$ a $\dim Q < +\infty$. Pak platí:*

$$\dim\,(P + Q) + \dim\,(P \cap Q) = \dim P + \dim Q. \tag{5}$$

Důkaz. Rozdělíme důkaz na několik případů:

1. Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P + Q = Q$ a $P \cap Q = P$ a platnost rovnosti (5) je zřejmá.

2. Je-li $Q = \{\vec{0}\}$, je stejně jako v předchozím rovnost (5) zřejmá.

3. Je-li $P \neq \{\vec{0}\}$ a $Q \neq \{\vec{0}\}$, označme $n = \dim P$ a $m = \dim Q$, platí tedy $n, m \in \mathbb{N}$. Rozlišíme dva případy:

   (a) Nechť $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Označme $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ libovolnou bázi P a $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ libovolnou bázi Q. Dokážeme-li, že pak $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je báze $P + Q$, bude rovnost (5) dokázána, protože pak bude jasné, že $\dim\,(P + Q) + \dim\,(P \cap Q) = (n + m) + 0 = \dim P + \dim Q$.
   Dokažme tedy, že $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je báze $P + Q$.

- Musíme ukázat, že $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m)$ generuje $P+Q$. Pro každé $\vec{x}\in P+Q$ existuje $\vec{p}\in P$ a $\vec{q}\in Q$ takové, že $\vec{x}=\vec{p}+\vec{q}$. Jelikož $\vec{p}\in P$, lze $\vec{p}$ psát jako LK bazických vektorů P, tj. existují čísla $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in T$ taková, že $\vec{p}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1,\dots,\beta_m\in T$ taková, že $\vec{q}=\sum_{i=1}^m\beta_i\vec{y}_i$. Odtud $\vec{x}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i+\sum_{i=1}^m\beta_i\vec{y}_i$, a tedy $\vec{x}\in[\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m]_\lambda$.
- $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m)$ je LN, protože libovolná LK $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i+\sum_{i=1}^m\beta_i\vec{y}_i=\vec{0}$ je triviální. To plyne z následujících úprav: $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i=-\sum_{i=1}^m\beta_i\vec{y}_i$, což je vektor patřící do P i do Q, tedy leží v $P\cap Q$. Takový vektor je pak ale nutně nulový, tj. $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{x}_i=-\sum_{i=1}^m\beta_i\vec{y}_i=\vec{0}$. Z LN souboru $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ plyne, že $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, a z LN souboru $(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m)$ plyne $\beta_1=\dots=\beta_m=0$, což znamená, že LK je triviální.

(b) Nechť $P\cap Q\neq\{\vec{0}\}$. Označme $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s)$ libovolnou bázi $P\cap Q$. Protože $P\cap Q\subset P$, lze $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s)$ doplnit na bázi P, označme ji $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s})$. Protože $P\cap Q\subset Q$, lze $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s)$ doplnit na bázi Q, označme ji $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$. Dokážeme-li, že pak $\mathcal{X}=(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$ je báze $P+Q$, bude rovnost (5) dokázána, protože pak bude jasné, že $\dim(P+Q)+\dim(P\cap Q)=(n+m-s)+s=\dim P+\dim Q$, protože $n+m-s$ je počet vektorů v souboru $\mathcal{X}$.
Dokažme tedy, že $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$ je báze $P+Q$.

- Musíme ukázat, že $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$ generuje $P+Q$. Pro každé $\vec{x}\in P+Q$ existuje $\vec{p}\in P$ a $\vec{q}\in Q$ takové, že $\vec{x}=\vec{p}+\vec{q}$. Jelikož $\vec{p}\in P$, lze $\vec{p}$ psát jako LK bazických vektorů P, tj. existují čísla $\alpha_1,\dots,\alpha_s,\gamma_1,\dots,\gamma_{n-s}\in T$ taková, že $\vec{p}=\sum_{i=1}^s\alpha_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\gamma_i\vec{x}_i$, a podobně existují čísla $\beta_1,\dots,\beta_s,\delta_1,\dots,\delta_{m-s}\in T$ taková, že $\vec{q}=\sum_{i=1}^s\beta_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{m-s}\delta_i\vec{y}_i$. Odtud $\vec{x}=\sum_{i=1}^s(\alpha_i+\beta_i)\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\gamma_i\vec{x}_i+\sum_{i=1}^{m-s}\delta_i\vec{y}_i$, a tedy $\vec{x}\in[\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s}]_\lambda$.
- $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s},\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$ je LN, protože libovolná LK $\sum_{i=1}^s\alpha_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\beta_i\vec{x}_i+\sum_{i=1}^{m-s}\gamma_i\vec{y}_i=\vec{0}$ je triviální. To plyne z následujících úprav: $\sum_{i=1}^s\alpha_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\beta_i\vec{x}_i=-\sum_{i=1}^{m-s}\gamma_i\vec{y}_i$, což je vektor patřící do P (jak je vidět z levé strany rovnosti) i do Q (jak je vidět z pravé strany rovnosti), tedy leží v $P\cap Q$. Takový vektor je pak LK bazických vektorů $P\cap Q$, tj. $\sum_{i=1}^s\alpha_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\beta_i\vec{x}_i=-\sum_{i=1}^{m-s}\gamma_i\vec{y}_i=\sum_{i=1}^s\delta_i\vec{z}_i$. Pak ale $\sum_{i=1}^s\delta_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{m-s}\gamma_i\vec{y}_i=\vec{0}$ a z LN souboru $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_{m-s})$ plyne, že $\gamma_1=\dots=\gamma_{m-s}=0$. Poté z rovnosti $\sum_{i=1}^s\alpha_i\vec{z}_i+\sum_{i=1}^{n-s}\beta_i\vec{x}_i=-\sum_{i=1}^{m-s}\gamma_i\vec{y}_i=\vec{0}$ a z LN souboru $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_s,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_{n-s})$ plyne, že $\alpha_1=\dots=\alpha_s=0$ a $\beta_1=\dots=\beta_{n-s}$, což znamená, že LK je triviální.

$\square$

Poznámka 38. *Všimněme si, že 1. věta o dimenzi by platila i pro prostory P,Q, kde jeden nebo i oba by měly dimenzi nekonečnou. Raději jsme ale do předpokladů přidali konečné dimenze, protože například v rovnosti $\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q-\dim(P\cap Q)$ už je třeba konečnost hlídat, abychom neodečítali $\infty-\infty$.*

Příklad 23. *Nechť $P,Q\subset\subset\mathbb{R}^3$. Nechť $P=[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q=[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$.*

Řešení: *Z poznámky o součtu LO víme, že $P+Q=[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}]_\lambda$. Najít bázi $P+Q$ tedy znamená vybrat bázi ze souboru generátorů.*

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}.$$

Z matice v horním stupňovitém tvaru vidíme, že dim $(P+Q)=3$ *a báze* $P+Q$ *je například* $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *(matice má tři hlavní sloupce a bázi tvoří vektory odpovídající hlavním sloupcům). Pokud bychom chtěli jednodušší bázi* $P+Q$*, stačí si uvědomit, že* $P+Q\subset\subset\mathbb{R}^3$ *a dim* $(P+Q)=$ *dim* $\mathbb{R}^3=3$*. Z Věty 11 o vlastnostech podprostorů pak dostáváme, že* $P+Q=\mathbb{R}^3$*, takže jinou bází* $P+Q$ *je například* $\mathcal{E}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$*.*

Z 1. věty o dimenzi zjistíme, že dim $(P\cap Q)=2+2-3=1$*. Jakýkoliv nenulový vektor z* $P\cap Q$ *je tedy bází. Jelikož* $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ *je LZ soubor, jistě najdeme* $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ *taková, že alespoň jedno z nich je nenulové a že*

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Potom

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=-\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in P\cap Q.$$

Jde o hledaný nenulový vektor. Kdyby byl totiž nulový, plynulo by z LN $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$*, že* $\alpha=\beta=0$ *a z LN* $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$*, že* $\gamma=\delta=0$*, což je spor s předpokladem, že alespoň jedno z čísel* $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ *je nenulové. Neznámé najdeme ze stejné matice jako při vyšetřování báze* $P+Q$*:*

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}.$$

Při volbě $\delta=-1$*, dopočteme už jednoznačně neznámé odpovídající hlavním sloupcům* $\gamma=1,\beta=1$ *a* $\alpha=1$*. Odtud*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in P\cap Q.$$

Tedy $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ *je báze* $P\cap Q$*.*

4.2 Doplněk podprostoru

Definice 16. *Nechť* V *je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem* T *a nechť* $P,Q\subset\subset V$*. Pokud podprostory splňují* $P\oplus Q=V$*, pak* Q *nazveme* **doplněk** P *do* V *a jeho dimenzi dim* Q *značíme codim* P *a nazýváme* **kodimenze** P*.*

Poznámka 39. *Všimněme si, že podle 1. věty o dimenzi je kodimenze* P *dobře definována. I kdyby doplňků existovalo více, pro kodimenzi* P *platí: dim* P *+ codim* P *= dim* V *+ dim* $(P\cap Q)$ *a* $P\cap Q=\{\vec{0}\}$*, což plyne z direktnosti součtu* $P\oplus Q=V$*. Proto codim* P *= dim* V *− dim* P*, a nezávisí tedy na volbě doplňku* P *do* V*.*

Věta 14 (Existence doplňku)**.** *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a nechť $P \subset\subset V$. Pak doplněk P do V existuje.*

Důkaz.

- Nechť $P = \{\vec{0}\}$, pak $Q = V$ splňuje evidentně vlastnosti doplňku.
- Nechť $P = V$, pak $Q = \{\vec{0}\}$ splňuje evidentně vlastnosti doplňku.
- Nechť P je vlastní a nenulový podprostor V a označme $k = \dim P$. Pak existuje $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ báze P. Doplňme ji vektory $\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ V. Pak $Q = [\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ je hledaný doplněk. Ukážeme:
  1. $P + Q = V$, tj. ukážeme, že pro každé $\vec{x} \in V$ existuje $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jistě existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a hledanými vektory jsou $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$.
  2. $P \oplus Q = V$, tj. stačí ukázat, že $P \cap Q = \{\vec{0}\}$. Je-li $\vec{x} \in P \cap Q$, pak patří do P, proto existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$, a také patří do Q, tedy existují čísla $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Odtud máme $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, proto $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^n (-\alpha_i) \vec{x}_i$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$. Tedy $\vec{x} = \vec{0}$.

$\square$

Poznámka 40. *Doplněk obvykle není jediný! Například pro $V = \mathbb{R}^2$ a $P = [\binom{1}{0}]_\lambda$ je doplňkem $Q_1 = [\binom{0}{1}]_\lambda$, ale také třeba $Q_2 = [\binom{1}{1}]_\lambda$.*

Představíme-li si situaci geometricky, pak P je přímka procházející počátkem $\binom{0}{0}$ a bodem $\binom{1}{0}$ a doplňkem P je libovolná přímka jdoucí počátkem, která je různá od P.

5 Lineární zobrazení

Všude v této kapitole budeme uvažovat vektorové prostory konečné dimenze. Takže i když to v předpokladech vět nebudeme uvádět, automaticky to předpokládáme.

Definice 17. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $A : P \to Q$ nazveme* **lineárním (homomorfním)**, *pokud*

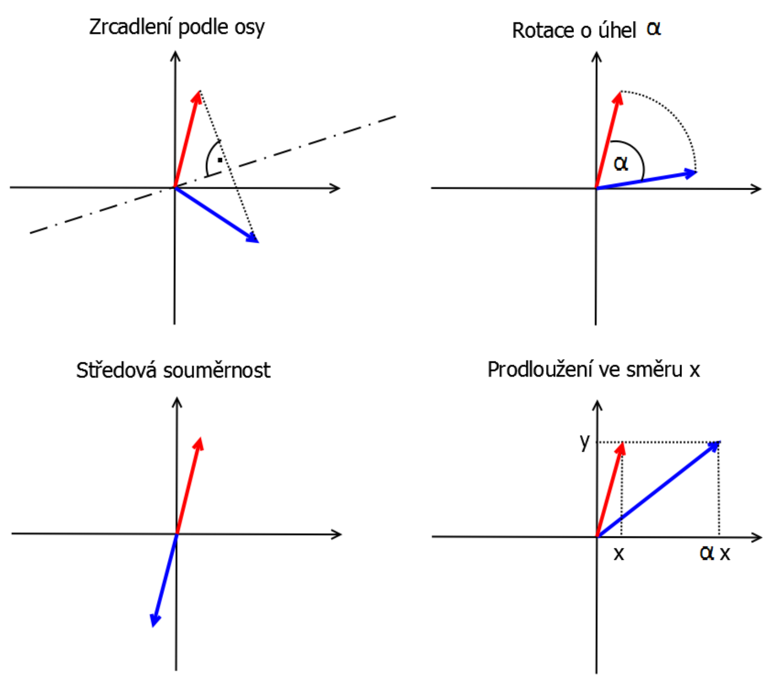
1. *pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x})+A(\vec{y})$ (hovoříme o* **aditivitě** *zobrazení A),*
2. *pro každé $\alpha \in T$ a každý vektor $\vec{x} \in P$ platí $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ (hovoříme o* **homogenitě** *zobrazení A).*

Poznámka 41. *Místo $A(\vec{x})$ budeme častěji psát $A\vec{x}$.*

Poznámka 42. *Lineární zobrazení má smysl zavádět jen pro vektorové prostory P, Q nad stejným tělesem. V podmínce 2. (homogenita) se totiž čísly z tělesa násobí jak vektory $\vec{x}$ z P, tak i vektory $A\vec{x}$ z Q.*

Poznámka 43. *Pro každé lineární zobrazení $A : P \to Q$ platí, že $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, přičemž $\vec{0}_P$ je nulový vektor z P a $\vec{0}_Q$ je nulový vektor z Q.*
Vysvětlení: $A\vec{0}_P = A(0 \cdot \vec{0}_P) = 0 \cdot A\vec{0}_P = \vec{0}_Q$, kde v první a poslední rovnosti je využit fakt z Věty 1, že $0\vec{a} = \vec{0}$ pro každý vektor $\vec{a}$ a ve druhé rovnosti je využita homogenita A.

Příklad 24. *Uveďme nejznámější příklady lineárních zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*



Obrázek 3: Červeně vyznačeny vektory a modře jejich obrazy.

1. *zrcadlení podle osy jdoucí počátkem $\binom{0}{0}$,*
2. *rotace o úhel α po směru hodinových ručiček (samozřejmě, že také rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček je lineární zobrazení, je to vlastně rotace o úhel $2\pi - \alpha$ po směru hodinových ručiček),*

3. *středová souměrnost,*

4. *prodloužení (zkrácení) ve směru* x *(zobrazení přiřadí vektoru* $\binom{x}{y}$ *vektor* $\binom{\alpha x}{y}$*, kde pro* $\alpha > 1$ *jde o prodloužení a pro* $0 < \alpha < 1$ *o zkrácení ve směru* x*) nebo ve směru* y*.*

U všech zobrazení sami ověřte, že jsou lineární.

Definice 18. *Nechť* P, Q *jsou vektorové prostory nad stejným tělesem* T*. Množinu lineárních zobrazení* $P \to Q$ *značíme* $\mathcal{L}(P, Q)$*. Nechť* $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ *a* $\alpha \in T$*, pak operace*

1. **součet zobrazení** $A + B$ *pro každý vektor* $\vec{x} \in P$ *definujeme* $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$*,*

2. **násobení zobrazení** A **číslem** α *z* T αA *pro každý vektor* $\vec{x} \in P$ *definujeme* $(\alpha A)\vec{x} = \alpha A\vec{x}$*.*

Věta 15. *Nechť* P, Q *jsou vektorové prostory nad stejným tělesem* T*. Pak množina* $\mathcal{L}(P, Q)$ *s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem z tělesa definovanými výše tvoří vektorový prostor nad* T*.*

Důkaz. Je třeba ověřit:

1. Neprázdnost $\mathcal{L}(P, Q)$:
   $\mathcal{L}(P, Q)$ obsahuje nulové zobrazení $\mathcal{O}$, které každému vektoru z P přiřazuje nulový vektor z Q. $\mathcal{O}$ je lineární, protože
   (a) pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $\mathcal{O}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}_Q = \vec{0}_Q + \vec{0}_Q = \mathcal{O}\vec{x} + \mathcal{O}\vec{y}$,
   (b) pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{x} \in P$ platí $\mathcal{O}(\alpha\vec{x}) = \vec{0}_Q = \alpha\vec{0}_Q = \alpha\mathcal{O}\vec{x}$.

2. Uzavřenost na sčítání vektorů:
   Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že $A + B$ je lineární zobrazení.
   (a) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí
   $$(A+B)(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y})+B(\vec{x}+\vec{y}) = (A\vec{x}+A\vec{y})+(B\vec{x}+B\vec{y}) = (A\vec{x}+B\vec{x})+(A\vec{y}+B\vec{y}) = (A+B)\vec{x}+(A+B)\vec{y},$$
   kde v první a poslední rovnosti byla využita definice součtu zobrazení $A+B$ a ve druhé rovnosti aditivita zobrazení A a B a ve třetí rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q.
   (b) Pro každé $\beta \in T$ a $\vec{x} \in P$ platí
   $$(A + B)(\beta\vec{x}) = A(\beta\vec{x}) + B(\beta\vec{x}) = \beta A\vec{x} + \beta B\vec{x} = \beta(A\vec{x} + B\vec{x}) = \beta(A + B)\vec{x},$$
   kde v první a poslední rovnosti byla využita definice součtu zobrazení $A+B$ a ve druhé rovnosti homogenita zobrazení A a B a ve třetí rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q.

3. Uzavřenost na násobení vektorů číslem:
   Pro každé $\alpha \in T$ a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ověříme, že αA je lineární zobrazení.
   (a) Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí
   $$(\alpha A)(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(A\vec{x} + A\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \alpha A\vec{y} = (\alpha A)\vec{x} + (\alpha A)\vec{y},$$
   kde v první a poslední rovnosti byla využita definice násobku zobrazení αA a ve druhé rovnosti aditivita zobrazení A a ve třetí rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q.
   (b) Pro každé $\beta \in T$ a $\vec{x} \in P$ platí
   $$(\alpha A)(\beta\vec{x}) = \alpha A(\beta\vec{x}) = \alpha(\beta A\vec{x}) = (\alpha\beta)A\vec{x} = (\beta\alpha)A\vec{x} = \beta(\alpha A\vec{x}) = \beta(\alpha A)\vec{x},$$
   kde v první a poslední rovnosti byla využita definice násobku zobrazení αA, ve druhé rovnosti homogenita zobrazení A, ve třetí a páté rovnosti vlastnosti vektorového prostoru Q a ve čtvrté rovnosti vlastnosti tělesa T.

4. Platnost osmi axiomů vektorového prostoru:

   (a) Pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + B = B + A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = B\vec{x} + A\vec{x} = (B+A)\vec{x}$, využili jsme tedy komutativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q.

   (b) Pro každé $A, B, C \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + (B + C) = (A + B) + C$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(A + (B + C))\vec{x} = A\vec{x} + (B + C)\vec{x} = A\vec{x} + (B\vec{x} + C\vec{x}) = (A\vec{x} + B\vec{x}) + C\vec{x} = (A + B)\vec{x} + C\vec{x} = ((A + B) + C)\vec{x}$, využili jsme tedy asociativního zákona pro sčítání vektorů v prostoru Q.

   (c) Existuje zobrazení $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $A + B = A$, stačí položit $B := \mathcal{O}$ (nulové zobrazení), o kterém už víme, že je lineární, a snadno ověříme, že roli nulového vektoru hraje, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí $(A + \mathcal{O})\vec{x} = A\vec{x} + \mathcal{O}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{0}_Q = A\vec{x}$.

   (d) Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ existuje $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že $A + B = \mathcal{O}$, stačí položit $B = (-1)A$, o kterém z uzavřenosti na násobení číslem víme, že je lineární, a snadno ověříme, že hraje roli opačného vektoru k A, protože pro každé $\vec{x} \in P$ platí $(A + ((-1)A))\vec{x} = A\vec{x} + ((-1)A)\vec{x} = A\vec{x} + (-1)A\vec{x} = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$.

   (e) Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, protože pro každý vektor $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(\beta A))\vec{x} = \alpha(\beta A)\vec{x} = \alpha(\beta A\vec{x}) = (\alpha\beta)A\vec{x} = ((\alpha\beta)A)\vec{x}$, kde jsme využili asociativního zákona vzhledem k operaci násobení číslem v Q.

   (f) Pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $1A = A$, to plyne přímo z definice násobku zobrazení číslem.

   (g) Pro každé $\alpha, \beta \in T$ a pro každé $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $((\alpha+\beta)A)\vec{x} = (\alpha+\beta)A\vec{x} = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\beta A)\vec{x} = (\alpha A + \beta A)\vec{x}$, kde jsme využili distributivity operace násobení číslem vzhledem ke sčítání čísel v Q.

   (h) Pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $A, B \in \mathcal{L}(P, Q)$ platí $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, protože pro každé $\vec{x} \in P$ máme $(\alpha(A + B))\vec{x} = \alpha(A + B)\vec{x} = \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) = \alpha A\vec{x} + \alpha B\vec{x} = (\alpha A)\vec{x} + (\alpha B)\vec{x} = (\alpha A + \alpha B)\vec{x}$, kde jsme využili distributivitu operace násobení číslem vzhledem ke sčítání vektorů v Q.

$\square$

Definice 19. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.*

- *Je-li $A \in \mathcal{L}(V, V)$, nazýváme A* **lineární operátor** *a píšeme $\mathcal{L}(V)$ místo $\mathcal{L}(V, V)$.*
- *Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V, T)$, nazýváme φ* **lineární funkcionál** *a píšeme $V^{\#}$ místo $\mathcal{L}(V, T)$ a $V^{\#}$ nazýváme* **duální prostor** *k V.*

Příklad 25. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.*

- *Příkladem lineárního operátoru je identický operátor I, který každému $\vec{x} \in V$ přiřadí $I\vec{x} = \vec{x}$.*
- *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V. Pak pro každé $i \in \hat{n}$ je i-tý souřadnicový funkcionál $\vec{x}_i^{\#}$ v bázi $\mathcal{X}$ příkladem lineárního funkcionálu, přičemž aditivita a homogenita $\vec{x}_i^{\#}$ plyne z Věty 10 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu.*

Definice 20. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.*

- *Je-li A prosté, řekneme, že A je* **monomorfní**.
- *Je-li A „na“ Q, řekneme, že A je* **epimorfní**.
- *Je-li A prosté a „na“ Q, řekneme, že A je* **izomorfní**.
- *Je-li A izomorfní a $P = Q$, řekneme, že A je* **regulární operátor**.

Poznámka 44. *Definice prostého zobrazení a zobrazení „na“ (surjektivního) znáte z matematické analýzy. Přesto je připomeneme. Nechť $A : P \to Q$.*

- *A je prosté, pokud $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)((A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}))$.*
- *A je „na“ Q, pokud $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$.*

Příklad 26. *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T. Ukažme, že souřadnicový izomorfismus $(.)_\mathcal{X}$ v bázi $\mathcal{X}$ je skutečně izomorfismus.*
Řešení: *Připomeňme, že pro každý vektor $\vec{x} \in V$ je souřadnicový izomorfismus definován vztahem $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Z Důsledku Věty 10 o vlastnostech souřadnicového funkcionálu plyne linearita souřadnicového izomorfismu. Zbývá tedy dokázat, že $(.)_\mathcal{X} : V \to T^n$ je prosté a „na“.*

- *Prostota:*
  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že je-li $(\vec{x})_\mathcal{X} = (\vec{y})_\mathcal{X}$ a označíme-li $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pak z definice souřadnicového izomorfismu máme $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{y}$.
- *„na“ T^n:*
  Nechť $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$, pak pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in V$ platí $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Věta 16 (Linearita inverzního zobrazení)**.** *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní, pak A^{-1} existuje a je také izomorfní.*

Důkaz. Jelikož A je prosté zobrazení s definičním oborem P a oborem hodnot Q, víme z matematické analýzy, že A^{-1} existuje, má definiční obor Q a obor hodnot P. Zbývá ověřit, že $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$.

- Aditivita A^{-1}:
  Pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Q$ ověříme, že $A^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2$. Označme $\vec{x}_1 = A^{-1}\vec{y}_1$ a $\vec{x}_2 = A^{-1}\vec{y}_1$. Pak z definice inverzního zobrazení víme, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$. Z aditivity A máme $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. Opět z definice inverzního zobrazení dostáváme $A^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = A^{-1}\vec{y}_1 + A^{-1}\vec{y}_2$.
- Homogenita A^{-1}:
  Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{y} \in Q$ ověříme, že $A^{-1}(\alpha\vec{y}) = \alpha A^{-1}\vec{y}$. Označme $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$, pak z definice inverzního zobrazení víme, že $\vec{y} = A\vec{x}$. Z homogenity A máme $\alpha\vec{y} = \alpha A\vec{x} = A(\alpha\vec{x})$. Opět z definice inverzního zobrazení dostáváme $A^{-1}(\alpha\vec{y}) = \alpha\vec{x} = \alpha A^{-1}\vec{y}$.

□

Věta 17 (Linearita složeného zobrazení)**.** *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.*

Důkaz. Složené zobrazení je pro každé $\vec{x} \in P$ definováno $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$. Jde tedy o korektně definované zobrazení P do V (A působí na vektor $B\vec{x}$, který je z Q). Zbývá ověřit linearitu.

- Aditivita:
  Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$ platí $(AB)(\vec{x} + \vec{y}) = A(B(\vec{x} + \vec{y})) = A(B\vec{x} + B\vec{y}) = A(B\vec{x}) + A(B\vec{y}) = (AB)\vec{x} + (AB)\vec{y}$, kde v první a poslední rovnosti je využita definice složeného zobrazení, v druhé rovnosti aditivita B a ve třetí rovnosti aditivita A.

- Homogenita:
  Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{x} \in P$ platí $(AB)(\alpha\vec{x}) = A(B(\alpha\vec{x})) = A(\alpha B\vec{x}) = \alpha A(B\vec{x}) = \alpha(AB)\vec{x}$, kde v první a poslední rovnosti je využita definice složeného zobrazení, v druhé rovnosti homogenita B a ve třetí rovnosti homogenita A.

$\square$

Příklad 27. *Nechť zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ jsou definována*

- *pro každé* $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *je* $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,
- *pro každé* $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ *je* $B(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$.

Ověřme, že $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
Řešení:

- *Aditivita:*
  Pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *platí* $A\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2) \\ \alpha_3+\beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2) \\ \alpha_3+\beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1+\beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, *kde jsme využili vlastnosti sčítání čísel v $\mathbb{R}$ a definici sčítání vektorů v $\mathbb{R}^2$.*
- *Homogenita:*
  Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *platí* $A\begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \alpha\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\alpha\alpha_2 \\ \alpha\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha_1+\alpha_2) \\ \alpha\alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, *kde jsme využili vlastnosti sčítání a násobení čísel v $\mathbb{R}$ a definici násobení vektoru číslem v $\mathbb{R}^2$.*

Sami ověřte, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.
Z Věty 17 o skládání lineárních zobrazení víme, že $AB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Najděme předpis pro AB.
Řešení: *Pro každé $\alpha_1 \in \mathbb{R}$*

$$(AB)(\alpha_1) = A(B(\alpha_1)) = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Definice 21. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak (stejně jako v matematické analýze)*

- **obrazem** *M při zobrazení A nazveme množinu $A(M) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in M\}$,*
- **vzorem** *N při zobrazení A nazveme množinu $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$.*

Poznámka 45. *Místo $A^{-1}(\{\vec{x}\})$ budeme psát $A^{-1}(\vec{x})$.*

Příklad 28. *Nechť A, B definovány stejně jako v Příkladě 27.*

- *Nechť $M = \{1, 2, 3\}$, pak* $B(M) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.
- *Nechť* $N_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *a* $N_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, *pak $B^{-1}(N_1) = \{1\}$ a $B^{-1}(N_2) = \emptyset$.*
- *Nechť* $N = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, *pak* $A^{-1}(N) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Poznámka 46. *Nepleťte si vzor množiny $A^{-1}(N)$ (jde o množinu) s inverzním zobrazením A^{-1} (jde o zobrazení). I pro zobrazení, která nejsou prostá, má smysl hovořit o vzorech množin, viz předchozí příklad, kde* $A^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ *existuje a A není prosté, protože například* $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Věta 18 (Obraz a vzor podprostoru)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset\subset P$ a $N \subset\subset Q$. Pak*

- $A(M) \subset\subset Q$,
- $A^{-1}(N) \subset\subset P$.

Speciálně $A(P) \subset\subset Q$.

Důkaz.

- Dokažme nejprve $A(M) \subset\subset Q$. (Všimněte si, kde v bodech 2., 3. i 4. využíváme, že M je podprostor.)
  1. $A(M) \subset Q$ přímo z definice.
  2. $A(M) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_P \in M$, proto $\vec{0}_Q \in A(M)$.
  3. $A(M)$ je uzavřená na sčítání, protože pro každé $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in A(M)$ existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ tak, že $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$ a $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$, odtud dostáváme $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \in A(M)$, využili jsme aditivity A a uzavřenosti M na sčítání vektorů.
  4. $A(M)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem, protože pro každé $\vec{y} \in A(M)$ existuje $\vec{x} \in M$ tak, že $\vec{y} = A\vec{x}$. Odtud dostáváme pro každé $\alpha \in T$, že $\alpha\vec{y} = \alpha A\vec{x} = A(\alpha\vec{x}) \in A(M)$, využili jsme homogenity A a uzavřenosti M na násobení vektoru číslem.
- Dokažme $A^{-1}(N) \subset\subset P$.
  1. $A^{-1}(N) \subset P$ přímo z definice.
  2. $A^{-1}(N) \neq \emptyset$, protože například $\vec{0}_Q = A(\vec{0}_P)$ a $\vec{0}_Q \in N$, proto $\vec{0}_P \in A^{-1}(N)$.
  3. $A^{-1}(N)$ je uzavřená na sčítání, protože pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$ platí $A\vec{x}_1 \in N$, $A\vec{x}_2 \in N$ a z aditivity A dále dostaneme $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \in N$, proto $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in A^{-1}(N)$, využili jsme uzavřenosti N na sčítání vektorů.
  4. $A^{-1}(N)$ je uzavřená na násobení vektoru číslem, protože pro každé $\vec{x} \in A^{-1}(N)$ platí $A\vec{x} \in N$ a pro každé $\alpha \in T$ pak z homogenity A dostaneme $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} \in N$, proto $\alpha\vec{x} \in A^{-1}(N)$, využili jsme uzavřenosti N na násobení vektoru číslem.

□

5.1 Hodnost, jádro, defekt

Definice 22. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.*

- **Hodností** *A nazveme $\dim A(P)$ a značíme $h(A)$.*
- **Jádrem** *A nazveme $A^{-1}(\vec{0}_Q) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$ a značíme $kerA$.*
- **Defektem** *A nazveme $\dim kerA$ a značíme $d(A)$.*

Poznámka 47. *Má smysl uvažovat dimenzi oboru hodnot $A(P)$ a jádra $kerA$, protože z Věty 18 o obrazech a vzorech podprostorů plyne, že jde o podprostory.*

Příklad 29. *Pro zobrazení A, B z Příkladu 27 určeme hodnost, jádro a defekt.*
Řešení*:*

- $kerA = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. *Proto* $d(A) = 1$.
  $A(\mathbb{R}^3) \subset\subset \mathbb{R}^2$, *proto* $h(A) \leq 2$. *Zároveň* $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *a* $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{R}^3)$, *proto* $h(A) \geq 2$. *Suma sumárum je* $h(A) = 2$ *a z Věty 11 o vlastnostech podporstorů plyne, že* $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.
- $kerB = \{(\alpha_1) \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{0\}$. *Proto* $d(B) = 0$.
  $B(\mathbb{R}) = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. *Tedy* $h(B) = 1$.

Věta 19 (Obraz lineárního obalu)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor z P. Pak*

$$A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda.$$

Důkaz. Dokazujeme rovnost množin, tedy dvě inkluze.

- $A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda) \subset [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda$:
  Nechť $\vec{y} \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda)$, pak existuje $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ takový, že $\vec{y} = A\vec{x}$. Tedy existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, odtud díky linearitě A dostáváme $\vec{y} = A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

- $[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda \subset A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda)$:
  Nechť $\vec{y} \in [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda$, pak existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ taková, že $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) \in A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda)$, v poslední rovnosti jsme využili linearitu A.

$\square$

Příklad 30. *Věta 19 o obrazu lineárního obalu umožňuje vypočítat snadno hodnost zobrazení. Nechť A jako v Příkladě 27. Najděte $h(A)$.*
Řešení: *Pak $A(\mathbb{R}^3) = A([\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda) = [A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda = [\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_\lambda = \mathbb{R}^2$, proto $h(A) = 2$.*

Věta 20 (Prostota a jádro lineárního zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. A je prosté, právě když $kerA = \{\vec{0}_P\}$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$): Dokážeme implikaci sporem. Předpokládáme tedy, že A je prosté a $\ker A \neq \{\vec{0}_P\}$. Pak existuje v $\ker A$ vektor $\vec{x} \neq \vec{0}_P$, tedy $A\vec{x} = \vec{0}_Q = A\vec{0}_P$, to je ale spor s prostotou A.
($\Leftarrow$): Postupujeme opět sporem. Předpokládáme, že $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a zároveň A není prosté, tj. existují $\vec{x}, \vec{y} \in P$ takové, že $A\vec{x} = A\vec{y}$ a přitom $\vec{x} \neq \vec{y}$. Odtud máme díky linearitě A rovnost $A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_Q$, což ale znamená, že $\vec{x} - \vec{y} \in \ker A$, a to je spor s $\ker A = \{\vec{0}_P\}$. $\square$

Příklad 31. *Ukážeme, že obdobné tvrzení pro zobrazení, které není lineární, neplatí. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkcionál definovaný následovně. Pro každé $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definujeme $\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Pak φ není prostý - například $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a zároveň $\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = 0\} = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$. Podle věty o prostotě a jádru lineárního zobrazení je jasné, že φ není lineární. Jinými slovy: předpoklad linearity zobrazení A v předchozí větě je nezbytný!*

Věta 21 (Nerovnosti pro hodnost)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak $h(A) \leq dim\ Q$ a $h(A) \leq dim\ P$.*

Důkaz.
- Jelikož $A(P) \subset\subset Q$, je jasné, že $h(A) = \dim A(P) \leq \dim Q$.

- Pro $P = \{\vec{0}\}$, je $h(A) = \dim A(P) = 0$, a tedy $h(A) \leq \dim P$. Pro $P \neq \{\vec{0}\}$ označme $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi P, tedy $\dim P = n \in \mathbb{N}$. Pak

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda,$$

  odkud plyne, že $h(A) = \dim A(P) \leq n = \dim P$.

$\square$

Věta 22 (Hodnost složeného zobrazení)**.** *Nechť P, Q, V jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $A \in \mathcal{L}(Q, V)$. Pak*

- *$h(AB) \leq h(A)$, a je-li B izomorfní, pak platí $h(AB) = h(A)$,*

- *$h(AB) \leq h(B)$, a je-li A izomorfní, pak platí $h(AB) = h(B)$.*

Důkaz. • $h(AB) = \dim A(B(P))$, protože $B(P) \subset\subset Q$, platí, že $A(B(P)) \subset\subset A(Q)$. Proto $h(AB) \leq \dim A(Q) = h(A)$. Všimněme si, že je-li B „na“ Q, tj. $B(P) = Q$, pak platí rovnost. Tedy ve větě stačilo dokonce předpokládat B epimorfní.

- Je-li $h(B) = 0$, pak $h(AB) = 0$ a nerovnost platí. Pokud $h(B) = n$, označme $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi $B(P)$, pak

$$h(AB) = \dim A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda \leq n = h(B).$$

Je-li A prosté, stačí dokázat, že $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN, a tudíž $h(AB) = h(B)$. Tedy ve větě stačilo dokonce předpokládat A monomorfní.
Dokažme tedy lineární nezávislost $(A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n)$. Uvažujme libovolnou LK $\sum_{i=1}^n \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$, pak díky linearitě A platí $A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \vec{0}_Q$. Jelikož je A prosté, platí $\ker A = \{\vec{0}_P\}$, proto $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}_P$. Z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ pak plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$. Tedy soubor $(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n)$ je LN.

□

Poznámka 48. *Všimněme si, že v druhé části důkazu předchozí věty jsme se dozvěděli, že platí následující implikace:*
Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a A prosté, pak

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } P \ \Rightarrow\ (A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } Q.$$

Sami si rozmyslete, že opačný směr platí pro libovolné lineární zobrazení:
Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, pak

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } P \ \Leftarrow\ (A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n) \text{ je LN soubor v } Q.$$

Věta 23 (Zadání lineárního zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$ je libovolný soubor z Q. Pak existuje právě jedno $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující pro každé $i \in \hat{n}$ $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$.*
Slovy: „Lineární zobrazení je jednoznačně určeno, jsou-li dány obrazy bazických vektorů.“

Důkaz. • Existence:

Pro každé $\vec{x} \in P$, označme $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a definujme

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i.$$

Pak $A : P \to Q$ a evidentně splňuje $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Zbývá ukázat, že A je lineární.

– Aditivita:

Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in P$, označme $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pak z aditivity souřadnicového izomorfismu víme, že $(\vec{x} + \vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$, odkud dostaneme

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i)\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{x}_i = A\vec{x} + A\vec{y}.$$

– Homogenita:

Pro každé $\alpha \in T$ a každé $\vec{x} \in P$, označme $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pak z homogenity souřadnicového izomorfismu víme, že $(\alpha\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}$, odkud dostaneme

$$A(\alpha\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \alpha A\vec{x}.$$

- Jednoznačnost:
  Nechť $B \in \mathcal{L}(P,Q)$ splňuje $B\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Pak pro každé $\vec{x} \in P$, pro které $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, platí díky linearitě B

$$B\vec{x} = B(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i = A\vec{x}.$$

  Proto $B = A$.

□

Věta 24 (Řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $\vec{b} \in A(P)$. Pak množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$, tedy $A^{-1}(\vec{b})$, má tvar*

$$\{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = \vec{a} + kerA,$$

kde $\vec{a} \in P$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$ ($\vec{a}$ nazýváme **partikulárním řešením***).*

Poznámka 49. *Všimněme si, že z předpokladu $\vec{b} \in A(P)$ existence partikulárního řešení $\vec{a}$ plyne.*

Důkaz. Dokazujeme rovnost dvou množin, tedy dvě inkluze.

- $\{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\} \subset \vec{a} + \ker A$:
  Nechť $A\vec{x} = \vec{b}$ a $\vec{a}$ je partikulární řešení, pak $A(\vec{x} - \vec{a}) = A\vec{x} - A\vec{a} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}_Q$, proto $\vec{x} - \vec{a} \in \ker A$, tedy $\vec{x} \in \vec{a} + \ker A$.

- $\vec{a} + \ker A \subset \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$:
  Nechť $\vec{x} \in \vec{a} + \ker A$, pak existuje $\vec{z} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{a} + \vec{z}$. Pak $A\vec{x} = A(\vec{a} + \vec{z}) = A\vec{a} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0}_Q = \vec{b}$. Proto $\vec{x} \in \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$.

□

Příklad 32. *Nechť $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je definované pro každé $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Už jsme v Příkladu 29 vyšetřili, že $kerA = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ a že*

$$A^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Tedy vidíme, že množinu řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáme sčítáním partikulárního řešení se všemi možnými vektory z jádra.

5.2 2. věta o dimenzi

Věta 25 (2. věta o dimenzi)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak*

$$h(A) + d(A) = dim\ P.$$

Důkaz. 1. Je-li $h(A) = 0$, pak $\ker A = P$ a tvrzení věty evidentně platí.

2. Je-li $h(A) = k \in \mathbb{N}$, pak existuje $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$ báze $A(P)$. Z definice $A(P)$ víme, že pak existují vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$, pro které $\vec{y}_i = A\vec{x}_i$. Podle Poznámky 48 platí, že $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ je LN soubor. Označme $\tilde{P} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda$ a ukažme, že $\ker A$ je doplněk $\tilde{P}$ do P, tj. $P = \tilde{P} \oplus \ker A$. Pak bude jasné, že $\dim P = k + d(A) = h(A) + d(A)$. Tedy ukážeme:

   (a) $\tilde{P} + \ker A = P$, tj. pro každé $\vec{x} \in P$ existuje $\vec{p} \in \tilde{P}$ a $\vec{q} \in \ker A$ tak, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Jelikož $A\vec{x} \in A(P)$ a $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$ je báze $A(P)$, existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ takové, že $A\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i$, pak položíme $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{q} = \vec{x} - \vec{p}$ a ověříme, že $\vec{q} \in \ker A$. $A\vec{q} = A\vec{x} - A(\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i) = A\vec{x} - \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = A\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}_Q$, proto skutečně $\vec{q} \in \ker A$.

   (b) $\tilde{P} \oplus \ker A = P$, tj. stačí ověřit $\tilde{P} \cap \ker A = \{\vec{0}_P\}$. Je-li $\vec{x} \in \tilde{P}$, pak existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ taková, že $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$, a je-li $\vec{x}$ zároveň z $\ker A$, pak $A\vec{x} = A(\sum_{i+1}^k \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\vec{x}_i = \vec{0}_Q$ a z LN $(A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_k)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{k}$, tedy vektor $\vec{x}$ z průniku je nulový.

□

Příklad 33. *Nebudeme dělat nový příklad, ale nabádáme čtenáře, aby se vrátil k Příkladu 29, kde jsme vyšetřili jádro a hodnost zobrazení A a B, a zkontroloval, že rovnost z 2. věty o dimenzi pro ně platí.*

Poznámka 50. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je izomorfní, pak z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = dim\ P$. A samozřejmě, protože $A(P) = Q$, platí také, že $h(A) = dim\ Q$.*

Definice 23. *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Řekneme, že P a Q jsou* **izomorfní***, píšeme $P \cong Q$, pokud existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.*

Příklad 34. *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T. Pak $V_n \cong T^n$, protože souřadnicový izomorfismus například ve standardní bázi zobrazuje V_n na T^n.*

Tento pojem se zavádí i pro prostory s nekonečnou dimenzí. U prostorů s konečnou dimenzí, což je náš případ, je lehké rozhodnout, zda jsou izomorfní.

Věta 26 (Izomorfismus prostorů konečné dimenze)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T. Pak $P \cong Q$ právě tehdy, když $dim\ P = dim\ Q$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$): Nechť $P \cong Q$, pak existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Z Poznámky 50 plyne, že pak $\dim P = h(A) = \dim Q$.
($\Leftarrow$):

1. Pokud $\dim P = \dim Q = 0$, pak je zřejmé, že $P \cong Q$.

2. Nechť $\dim P = \dim Q = n \in \mathbb{N}$, pak existují $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ báze P a $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ báze Q. Z Věty 23 o zadání lineárního zobrazení pomocí obrazů bazických vektorů víme, že pak existuje právě jedno lineární $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ splňující $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Ukažme, že toto zobrazení je izomorfní, tj. zbývá dokázat, že je prosté a „na“ Q.

   - A je prosté, protože pro libovolný vektor $\vec{x} \in \ker A$, kde $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, platí $A\vec{x} = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i = \vec{0}_Q$. Z LN souboru $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ plyne, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \hat{n}$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$.

- A je „na“ Q, protože

$$A(P) = A([\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = [\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n]_\lambda = Q.$$

$\square$

Věta 27 (Jednodušší ověření izomorfnosti zobrazení)**.** *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $\dim P = \dim Q$ a nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak A je izomorfní, právě když A je monomorfní nebo A je epimorfní.*

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je zřejmá. Ověřujeme tedy pouze ($\Leftarrow$):

- Je-li A monomorfní, pak $d(A) = 0$ a z 2. věty o dimenzi plyne, že $h(A) = \dim P$. Protože $\dim P = \dim Q$, máme $h(A) = \dim A(P) = \dim Q$ a zároveň $A(P) \subset\subset Q$. Podle Věty 11 o vlastnostech podprostorů platí $A(P) = Q$, což znamená, že A je „na“ Q.
- Je-li A epimorfní, pak $A(P) = Q$, tedy $h(A) = \dim Q$. Protože $\dim Q = \dim P$, dostáváme z 2. věty o dimenzi, že $d(A) = 0$, tedy $\ker A = \{\vec{0}_P\}$ a A je prosté.

$\square$

Poznámka 51. *Speciálně pro lineární operátory $A \in \mathcal{L}(P)$ předchozí věta říká, že jsou-li prosté, pak už jsou automaticky „na“ P, a jsou-li „na“ P, pak jsou automaticky prosté.*

6 Matice a lineární zobrazení

Již známe $T^{m,n}$ vektorový prostor matic s prvky z tělesa T o m řádcích a n sloupcích. Víme, že sčítání matic a násobení matice číslem z T je definováno po prvcích. Nyní zavedeme další operaci - násobení matic.

Definice 24. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ typu $n \times p$ s prvky z T. Pak* **součinem** *$\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ nazveme matici typu $m \times p$, značíme ji $\mathbb{AB}$, definovanou*

$$[\mathbb{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} \qquad \textit{pro každé } i \in \hat{m},\ j \in \hat{p}.$$

Příklad 35. *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *a* $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Pak* $\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ *a* $\mathbb{BA} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 17 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Věta 28 (Vlastnosti násobení matic)**.** *Násobení matic*

1. *je asociativní, tj. nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbb{B}$ typu $n \times p$ a $\mathbb{C}$ typu $p \times s$ s prvky z T, pak $(\mathbb{AB})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{BC})$,*

2. *je distributivní, tj. nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ typu $n \times p$ s prvky z T, pak $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{AB} + \mathbb{AC}$,*

3. *není obecně komutativní, ani když násobíme čtvercové matice, tj. existují čtvercové matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ s prvky z T takové, že $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$.*

Důkaz. 1. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{AB}$ je typu $m \times p$. Proto matice $(\mathbb{AB})\mathbb{C}$ je typu $m \times s$. Jelikož $\mathbb{BC}$ je typu $n \times s$, je $\mathbb{A}(\mathbb{BC})$ typu $m \times s$.

Nyní stačí ukázat, že pro každé $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{s}$ platí $[(\mathbb{AB})\mathbb{C}]_{ij} = [\mathbb{A}(\mathbb{BC})]_{ij}$. Podle definice násobení matic a prací se sumami dostaneme následující rovnosti:

$$[(\mathbb{AB})\mathbb{C}]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [\mathbb{AB}]_{ik}[\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} [\mathbb{A}]_{i\ell}[\mathbb{B}]_{\ell k} \right) [\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} [\mathbb{A}]_{i\ell}[\mathbb{B}]_{\ell k}[\mathbb{C}]_{kj} \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} [\mathbb{A}]_{i\ell}[\mathbb{B}]_{\ell k}[\mathbb{C}]_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} [\mathbb{A}]_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} [\mathbb{B}]_{\ell k}[\mathbb{C}]_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} [\mathbb{A}]_{i\ell}[\mathbb{BC}]_{\ell j} = [\mathbb{A}(\mathbb{BC})]_{ij}.$$

Ve třetí rovnosti jsme roznásobili vnitřní sumu, ve čtvrté rovnosti jsme zaměnili sumy a v páté rovnosti jsme vytýkali z vnitřní sumy.

2. Zkontrolujme nejprve podle definice násobení matic rozměry matic. Matice $\mathbb{B} + \mathbb{C}$ je typu $n \times p$, proto $\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})$ je typu $m \times p$. Matice $\mathbb{AB}$ i $\mathbb{AC}$ jsou typu $m \times p$, proto jejich součet $\mathbb{AB} + \mathbb{AC}$ je také typu $m \times p$.

Nyní stačí ověřit, že pro každé $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{p}$ platí $[\mathbb{A}(\mathbb{B}+\mathbb{C})]_{ij} = [\mathbb{AB}+\mathbb{AC}]_{ij}$. Podle definice násobení a sčítání matic dostaneme následující rovnosti:

$$[\mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C})]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}]_{ik}[\mathbb{B} + \mathbb{C}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}]_{ik}([\mathbb{B}]_{kj} + [\mathbb{C}]_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}]_{ik}[\mathbb{B}]_{kj} + \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}]_{ik}[\mathbb{C}]_{kj} = [\mathbb{AB}]_{ij} + [\mathbb{AC}]_{ij} = [\mathbb{AB} + \mathbb{AC}]_{ij}.$$

3. Je-li $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ typu $n \times p$, pak $\mathbb{AB}$ je typu $m \times p$. Aby $\mathbb{BA}$ existovala, musí být $m = p$, rozměr $\mathbb{BA}$ je pak $n \times n$. Aby $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{BA}$ měly stejný rozměr, musí být tedy $m = p = n$, neboli $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ musí být čtvercové matice stejného typu.

   Ani tehdy ale nemusí rovnost platit. Například pro $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je $\mathbb{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathbb{BA} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

□

Poznámka 52. *Při znalosti násobení matic lze soustavu m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

zapsat **maticovým (vektorovým) zápisem** *jako* $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$*, kde*
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Definice 25. *Nechť* P_n, Q_m *jsou vektorové prostory nad tělesem* T *(indexy značí dimenzi). Nechť* $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ *a nechť* $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ *je báze* P_n *a* $\mathcal{Y}$ *je báze* Q_m*. Pak matici* ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ *typu* $m \times n$*, jejíž* j*-tý sloupec je definován jako* $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$*, nazýváme* **matice zobrazení** A **v bázích** $\mathcal{X}$ **a** $\mathcal{Y}$.

Poznámka 53. *Označme* $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m)$ *bázi* $\mathcal{Y}$*, pak lze popsat prvky matice pomocí souřadnicových funkcionálů v bázi* $\mathcal{Y}$*. Pro každé* $i \in \hat{m}$ *a* $j \in \hat{n}$ *platí*

$$[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = \vec{y}_i^{\#}(A\vec{x}_j).$$

Poznámka 54. *Chceme-li zapsat* ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ *naráz jako matici, můžeme psát* ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \ldots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}})$*, kde čárkami oddělujeme jednotlivé sloupce matice.*

Věta 29 (Vlastnosti matice zobrazení v bázích)**.** *Nechť* P_n, Q_m *jsou vektorové prostory nad tělesem* T*. Nechť* $A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ *a nechť* $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ *je báze* P_n *a* $\mathcal{Y}$ *je báze* Q_m*. Nechť* $\alpha \in T$*. Pak platí:*

1. ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
2. ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz. 1. Porovnáme j-té sloupce matic pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((A+B)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (A\vec{x}_j + B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} + (B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} + [{}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Ve druhé rovnosti jsme užili definici součtu zobrazení, ve třetí aditivity souřadnicového izormorfismu v bázi $\mathcal{Y}$, v poslední definici sčítání matic a v první a předposlední rovnosti definici matice zobrazení.

2. Porovnáme j-té sloupce matic pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = ((\alpha A)\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = (\alpha(A\vec{x}_j))_{\mathcal{Y}} = \alpha(A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = \alpha[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j} = [\alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Ve druhé rovnosti jsme užili definici násobení zobrazení číslem, ve třetí homogenity souřadnicového izormorfismu v bázi $\mathcal{Y}$, v poslední definici násobení matice číslem a v první a předposlední rovnosti definici matice zobrazení.

□

Věta 30 (Výpočet obrazu vektoru pomocí matice v bázích)**.** *Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Nechť $\vec{x} \in P_n$. Pak platí $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.*

Důkaz. $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}}$ je vektor z T^m a ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ je součin matic typu $m \times n$ a $n \times 1$, jde tedy o matici z $T^{m,1} = T^m$. Rozměry jsou tedy shodné.

Označme $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi $\mathcal{X}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Pak

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (A(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\cdots+\alpha_n\vec{x}_n))_{\mathcal{Y}} = (\alpha_1 A\vec{x}_1+\alpha_2 A\vec{x}_2+\cdots+\alpha_n A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = \alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}+\alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}+\cdots+\alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}.$$

Ve druhé rovnosti jsme využili linearity A a ve třetí rovnosti linearity souřadnicového izomorfismu v bázi $\mathcal{Y}$. Nyní už stačí si rozmyslet podle definice násobení matic, že

$$\alpha_1(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}} + \alpha_2(A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}} + \cdots + \alpha_n(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \ldots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

□

Poznámka 55. *Věta 30 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích umožňuje přeformulovat úlohu řešit rovnici $A\vec{x} = \vec{b}$ na řešení soustavy LAR.*

Nechť P_n, Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Dále nechť $\vec{b} \in A(P_n)$ a nechť je zadána matice zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Z Věty 24 o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + kerA$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení.

1. *kerA: Z hodnosti $h(A)$, kterou umíme z matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ určit, spočítáme defekt $d(A)$ a poté najdeme bázi jádra následujícím způsobem:*

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{0})_{\mathcal{Y}},$$

jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, stačí najít $d(A)$ LN řešení homogenní soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Tím získáme souřadnice bazických vektorů z jádra v bázi $\mathcal{X}$.

2. *Partikulární řešení $\vec{a}$:*

$$A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = (\vec{b})_{\mathcal{Y}},$$

jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{a})_{\mathcal{X}}$, najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a pravou stranou $(\vec{b})_{\mathcal{Y}}$.

Příklad 36. *Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ má matici v bázi $\mathcal{X}$ rovnu ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Najděte všechna řešení $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

1. *kerA: Z matice ${}^{\mathcal{X}}A$ vidíme, že*

$$(A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

proto

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h(A) = dim\, A(\mathbb{R}^3) = dim\, A([\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda) = dim\,[A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda =$$
$$dim\,[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda = 2, \textit{ proto } d(A) = 1.$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{X}} = (\vec{0})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{x})_{\mathcal{X}}$*, stačí najít 1 LN řešení homogenní soustavy s maticí* ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Takovým řešením je např. $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Odtud máme* $kerA = [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

2. *Partikulární řešení* $\vec{a}$*:*

$$A\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{X}} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}},$$

jelikož $(A\vec{a})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A(\vec{a})_{\mathcal{X}}$*, najdeme* $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ *tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí* ${}^{\mathcal{X}}A$ *a pravou stranou* $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Takovým řešením je např.* $(\vec{a})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, tedy*
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Závěr: $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

Věta 31 (Matice složeného zobrazení)**.** *Nechť* P_n, Q_m, V_s *jsou vektorové prostory na tělesem* T*. Nechť* $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$ *a* $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$*. Nechť* $\mathcal{X}$ *je báze* P_n*,* $\mathcal{Y}$ *je báze* Q_m *a* $\mathcal{Z}$ *je báze* V_s*. Pak*

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Zkontrolujme nejprve rozměry matic. ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times n$. ${}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}$ je typu $s \times m$ a ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ je typu $m \times n$, proto jejich součin je typu $s \times n$.

Ověřme rovnost j-tých sloupců pro každé $j \in \hat{n}$.

$$[{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}}]_{\bullet j} = ((AB)\vec{x}_j)_{\mathcal{Z}} = (A(B\vec{x}_j))_{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}} = [{}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}]_{\bullet j}.$$

Předposlední rovnost plyne z Věty 30 o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích, a uvědomíme-li si, že $(B\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$ je j-tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$, plyne poslední rovnost z definice násobení matic (j-tý sloupec součinu dvou matic se totiž získá jako součin první matice s j-tým sloupcem druhé matice). □

Poznámka 56. *Věta 31 o matici složeného zobrazení umožňuje pomocí "vnášení identity" mechanické převody matice zobrazení v nějakých bázích na matici zobrazení v jiných bázích.*

Příklad 37. *Nechť* $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$
jsou báze $\mathbb{R}^3$ *a* $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *má matici v bázi* $\mathcal{X}$ *rovnu* ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$*. Najděte*

1. ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,

2. ${}^{\mathcal{Y}}B$.

Použijeme metodu "vnášení identity", kde využíváme Větu 31 o matici složeného zobrazení. I značí identický operátor na $\mathbb{R}^3$*. Jistě tedy platí* $B = IB = BI$.

1. ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}(IB)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{X}}$, *jelikož* ${}^{\mathcal{X}}B$ *známe, zbývá určit* ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, (\vec{x}_3)_{\mathcal{Y}}) = ((\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}, (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}, (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_{\mathcal{Y}}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Závěr: ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. ${}^{\mathcal{Y}}B = {}^{\mathcal{Y}}(IB)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{Y}}(BI)^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{X}}\ {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$, *jelikož* ${}^{\mathcal{X}}B$ *a* ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ *známe, zbývá určit* ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = ((\vec{y}_1)_{\mathcal{X}}, (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}}, (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}}) = ((\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}, (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}, (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})_{\mathcal{X}}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Závěr: ${}^{\mathcal{Y}}B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$.

Úlohu lze řešit i bez využití Věty 31. Zkuste sami vymyslet takový postup.

7 Pro zajímavost: Historie vektorového prostoru

Lineární algebra se na vysokých školách učí „proti toku času“. Celou historií lineární algebry se táhly soustavy lineárních algebraických rovnic (k jejich kompletnímu řešení se ale dospělo až roku 1905), determinanty se objevily sto let před maticemi (v polovině 18. století nalezly determinanty svou oblibu díky Cramerovu pravidlu, zatímco matice byly poprvé pořádně zpracované až v díle Caleyho roku 1858). Vrcholem veškeré abstrakce je pak pojem vektorového prostoru, jehož náznak se objevuje v díle Grassmanna v roce 1844 a poté Peana roku 1888. Pojďme se na historii vektorového prostoru podívat blíže a seznámit se právě s Grassmannem a Peanem, kteří jsou považováni za otce lineární algebry.

Pojem vektoru pochází z fyziky, je to veličina mající směr a velikost (síla, rychlost). Matematika zavádí vektory v souvislosti s komplexními čísly - Gauss roku 1831 začíná pracovat s komplexními čísly jako s vektory v komplexní rovině. Ještě předtím Bolzano definuje operace s body, přímkami, rovinami. Roku 1832 Bellavitis představuje ekvipolentní počet s úsečkami. Termín vektor i skalár najdeme roku 1843 poprvé u Hamiltona v práci o kvaternionech, vektory ve vícedimenzionálních prostorech se objevují u Caleyho, Hamiltona a Grassmanna. Ve všech těchto pracích jde o konkrétní příklady vektorových prostorů, kde se s vektory počítá podobně jako s čísly (sčítají se, násobí číslem), ale neexistuje žádná obecná definice vektorového prostoru, která by všechny tyto konkrétní příklady zahrnovala.

Podobně se také pojmy lineární (ne)závislost, dimenze a báze objevují v různých kontextech: v algebraické teorii čísel (Dedekind definuje těleso stejně jako my), v lineárních diferenciálních rovnicích (Děmidov), v řešení homogenních soustav lineárních algebraických rovnic (Euler si všímá, že lineární kombinace řešení je opět řešením, kompletní popis řešení poskytuje až Frobenius v roce 1905), v euklidovské geometrii (kartézské souřadnice zavádí Descartes v 17. století, Euler zkoumá prostor $\mathbb{R}^3$, Monge pak na počátku 19. století prostor $\mathbb{R}^n$), v prostoru matic (operace s maticemi popisuje Caley v roce 1858).

V 19. století se rodí axiomatický přístup k matematice - snaha o práci s objekty jako s čísly: konečné grupy a tělesa definuje Weber v roce 1893, kvaterniony zavádí Hamilton v roce 1843, Caley a Graves studují oktoniony, Peirce definuje pojem algebra v roce 1870, Peano zavádí axiomaticky přirozená čísla roku 1889.

První, kdo přichází s ideou vektorového prostoru a studiem jeho vlastností je Hermann Günter Grassmann, který za svého života dosáhl uznání na poli lingvistiky, nikoliv však matematiky. Jeho případ nám ukáže, jak je důležité naučit se dobře jazyk matematiky a umět jeho prostřednictvím jasně formulovat myšlenky.

Hermann Günter Grassmann (1809, Štětín, Prusko – 1877, Štětín, Německo)

Hermannův otec Justus byl profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu a syn šel v jeho šlépějích. Zpočátku to však ovšem na kariéru profesora nevypadalo, neboť Hermann byl jen průměrným studentem. V posledním ročníku se ale vzchopil a odmaturoval na pozici 2. nejlepšího studenta gymnázia. V roce 1827 nastoupil na univerzitu v Berlíně, kde studoval teologii, literaturu, filozofii a klasické jazyky, ale žádnou matematiku ani fyziku! Stal se profesorem nižšího stupně gymnázia. V roce 1840 složil zkoušku, která mu umožnila vyučovat matematiku, fyziku, chemii a mineralogii na vyšším stupni gymnázia. Úroveň gymnázií v 19. století byla velmi vysoká a taková zkouška vyžadovala nejen výborné znalosti učiva, ale dokonce vypracování původní vědecké práce. Grassmannova práce nesla název *Theorie der Ebbe und Flut* (teorie odlivu a přílivu) a šlo o aplikaci vektorových metod, které rozvíjel už od roku 1832.

Zároveň se Grassmann věnuje jazykům. V roce 1842 vydává učebnice mluvené němčiny a latiny.

Roku 1844 přichází pro dnešní lineární algebru zlomové dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (teorie lineárních extenzí, nové odvětví matematiky). Objevuje se tu idea algebry, kde jsou definovány operace se symboly reprezentujícími geometrické objekty (body, úsečky, rovnoběžníky, rovnoběžnostěny). V Ausdehnungslehre Grassmann předběhl dobu, jak uvidíme, jeho myšlenky našly pochopení až ve 20. století. Ovšem jeho dílo nebylo přijato matematiky ještě z dalších dvou důvodů. Grassmann matematiku nikdy nestudoval, a tak celé dílo bylo sepsáno filozoficky, obzvlášť úvod byl pro matematiky nečitelný. A jako matematik-amatér byl přehlížen matematiky-profesionály. Grassmann se ovšem nevzdal a studiu vektorových prostorů se dále věnoval. Zejména se snažil ukázat možné aplikace, např. v roce 1845 v díle *Theorie der Elektrodynamik*.

Roku 1846 získává za dílo *Die geometrische Analyse geknüpft und die von Leibniz Charakteristik* (ucelená geometrická analýza a von Leibnizova charakteristika) cenu od Císařské Jablonowské společnosti. Grassmann doufá, že cena mu pomůže získat post na univerzitě, touží se totiž věnovat naplno vědě. Jeho žádost je ovšem zamítnuta na základě Kummerových slov: *"doporučení hodný materiál, ale vyjádřený v těžko srozumitelné formě"*. Grassmann tedy opět narazil na problém filozofického nejasného vyjadřování myšlenek.

Uveďme i pár detailů z jeho osobního života. Roku 1849 si bere Therese Knappe, s níž má 11 dětí, ovšem jen 7 z nich dosáhlo dospělého věku. Jeden ze synů se stal matematikem, název jeho dizertace zněl *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Krummen Flächen* (použití Ausdehnungslehre ve všeobecné teorii prostorových křivek a zakřivených ploch), tedy jablko skutečně nepadlo daleko od stromu.

Nedostatek uznání v matematice přiměl Grassmanna, aby se obrátil ke své druhé zálibě - lingvistice. Studium sanskrtu a gótštiny mu přineslo úspěch, porovnáním fonetiky zpochybnil pozici sanskrtu jakožto nejstaršího indoevropského jazyka.

Ausdehnungslehre byla ale jeho nejcennějším dílem a rozhodl se, že ji ještě jednou přepíše, aby matematický svět konečně docenil její význam. V roce 1862 publikuje *Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet*, ale dílo má ještě menší úspěch než Ausdehnungslehre z roku 1844. Dá se tedy říci, že během života se Grassmann dočkal většího uznání v oblasti lingvistiky než v matematice.

Podívejme se nyní blíže na Ausdehnungslehre. Název teorie extenzí pochází z faktu, že Grassmann definuje i součin a například součinem bodů je úsečka, součinem úseček rovnoběžník, součinem rovnoběžníků rovnoběžnostěn, tedy vždy objekt v prostoru vyšší dimenze. Nás ale zajímá souvislost Ausdehnungslehre s lineární algebrou. Grassmann začíná se souborem "jednotek" $e_1, e_2, e_3, \ldots$ (což jsou v dnešním smyslu lineárně nezávislé vektory) a uvažuje jejich formální lineární kombinace $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \ldots$, kde $a_i \in \mathbb{R}$. Takové kombinace tvoří množinu, kterou Grassmann dále zkoumá. Definuje nulovost a rovnost lineárních kombinací, jejich součet a násobení skalárem. Zavádí axiomy lineárního prostoru pro tyto operace. Představuje pojmy lineární nezávislost, lineární obal, dimenze, báze, lineární podprostor a jeho doplněk. Dokazuje nezávislost dimenze na volbě báze, Steinitzovu větu o výměně (Steinitz ji pak znovu dokáže roku 1913, jelikož Grassmannovy výsledky nejsou známé), 1. větu o dimenzi. Dokazuje, že každý lineárně nezávislý soubor lze doplnit na bázi a z každého souboru generátorů lze vybrat bázi. Odvozuje vzorec pro změnu souřadnic při přechodu k jiné bázi. Vidíme tedy, že velká část teorie lineární algebry, kterou jsme v prvním semestru probrali, pochází právě od Grassmanna.

Tvůrcem první axiomatické definice vektorového prostoru je Giuseppe Peano. Narozdíl od Grassmanna byl Peano mezi matematiky obdivován pro svou schopnost precizně formulovat myšlenky. Také dokázal hbitě nacházet protipříklady k chybným tvrzením a nalézat chyby ve standardních výsledcích. Jak uvidíme, byl opakem Grassmanna i v tom, že sklidil úspěch na poli matematiky, nikoliv však ve svých lingvistických a encyklopedických projektech.

Giuseppe Peano (1858, Cuneo, Itálie – 1932, Turín, Itálie)

Roku 1880 promoval na univerzitě v Turíně a získal post asistenta. V roce 1884 podle přednášek svého školitele Genocchiho sepsal *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*, podepsal se jen jako spoluautor, ale Genocchi píše v předmluvě: *"...to vše je zásluhou tohoto výjimečného mladého muže Dr. Giuseppa Peana."* Dílo přispělo k jeho jmenování profesorem téhož roku, získal tedy tento titul velmi mladý. Nesmrtelnost Peanovi přinesly zejména tři výsledky:

1. 1889 - Peanovy axiomy přirozených čísel v díle *Arithmetices principia, nova methodo exposita*,
2. 1890 - Peanova křivka, což je spojitá surjektivní křivka z $[0,1]$, která vyplní jednotkový čtverec,
3. položení základů matematické logiky a teorie množin.

Roku 1887 publikuje *Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale*, kde prokazuje dobrou znalost a schopnost dávat do zajímavých souvislostí výsledky Möbia, Hamiltona, Bellavitise a GRASSMANNA. V roce 1888 přichází Peanovo stěžejní dílo pro lineární algebru *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, precedutto dalle operazioni della logica deduttiva*, které končí **první axiomatickou definicí vektorového prostoru**. Moderním jazykem zde přehledně a srozumitelně zpracovává hlavní Grassmannovy myšlenky. Uvádí příklady vektorových prostorů: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, prostor lineárních zobrazení, prostor polynomů.

Významným počinem je založení časopisu věnovaného logice a teorii množin *Rivista di matematica* v roce 1891. Kvalitu časopisu zaručoval fakt, že Peano jako recenzent snadno nacházel ve výsledcích chyby a k nim protipříklady a garantoval tak publikaci pouze korektních výsledků.

Koncem 19. století nastává zlom v Peanově kariéře: věnuje čas ambiciózním projektům s malým ohlasem. V letech 1892 až 1908 pracuje na projektu *Formulario mathematico*, který má za cíl shrnout veškeré matematické výsledky do jediné knihy, navíc pomocí nové logické symboliky. Peano používá projekt i k výuce, jeden ze studentů vzpomíná: *"Nutí nás trávit spoustu času učením se symboliky, kterou už nikdy jindy v životě nevyužijeme."* Naopak ochotu naučit se Peanovo značení projevil roku 1900 Bertrand Russel: *"Znal jsem jeho práce, ale jeho značení jsem neovládal. Fakt, že se na Kongresu vyjadřoval přesněji než všichni ostatní a že vždy nacházel ty nejlepší argumenty, mě přiměl k rozhodnutí, že si jeho značení osvojím."* V roce 1903 odstartoval další ambiciózní projekt *Latino sine flexione*, což měl být univerzální mezinárodní jazyk bez gramatiky, kombinující slova z latiny, angličtiny, němčiny a francouzštiny. A završením všeho bylo sepsání finální verze *Formulario mathematico* v tomto univerzálním jazyce *Latino sine flexione*!

Pro zajímavost uveďme Peanovu axiomatickou definici vektorového prostoru (nazývá jej lineární systém), abychom viděli, jak moc se podobá definici dnešní.

Definice 26. *Nechť V je množina, na které jsou definovány:*

1. *Rovnost $\vec{a} = \vec{b}$ jako symetrická a tranzitivní relace.*
2. *Sčítání jako zobrazení: $V \times V \to V$ splňující*
   1) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$, 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, 3) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. *Pro $\vec{a} \in V$ a $m \in \mathbb{N}$ znamená $m\vec{a}$ součet m prvků rovných $\vec{a}$. Snadno nahlédneme, že platí*
   4) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{b}$, 5) $\vec{m}(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$, 6) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, 7) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$, 8) $1\vec{a} = \vec{a}$.
4. *Násobení reálným číslem jako zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které zobecňuje vlastnosti pro násobení přirozeným číslem.*
5. *Existuje prvek $\vec{0}$, který splňuje pro každé $\vec{a} \in V$ $0\vec{a} = \vec{0}$. Pokud $\vec{a} - \vec{b}$ chápeme jako $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, pak je snadné nahlédnout, že*
   9) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$, 10) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Pak V nazveme **lineární systém**.

Axiomy týkající se rovnosti v dnešní definici neuvádíme, automaticky předpokládáme, že množina, kterou uvažujeme, je relací rovnosti vybavena. Bod 3. týkající se násobení přirozeným číslem je nadbytečný. Peano jej uvádí, aby čtenář lépe porozuměl, odkud se berou axiomy vyžadované po násobení reálným číslem.

Na přijetí konceptu vektorového prostoru si ale matematika ještě počkala až do 20. století. V roce 1920 Banach ve své dizertační práci zavádí úplné normované vektorové prostory, kterým se dnes říká Banachovy, a při té příležitosti definuje vektorový prostor přesně tak jako my dnes. První učebnice, v níž se objevuje pojem vektorový prostor, je Modern Algebra z roku 1930 od van der Waerdena.

8 Dodatek: Polynomy

Definice 27. *Komplexní funkci komplexní proměnné* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nazveme* **polynomem**, *pokud existuje* $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a existují čísla* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *(nazýváme je* **koeficienty polynomu***) taková, že*

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Názvosloví:

- **stupeň polynomu** st $p = \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$ (vyjadřuje, jakou maximální mocninu t polynom obsahuje)
- **nulový polynom** $\mathcal{O}(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, stupeň není definován (nemá stupeň jako jediný z polynomů)
  POZOR! polynom nultého stupně je nenulová konstanta
- dle stupně n rozlišujeme:
  - lineární polynom ($n = 1$), např. $p(t) = t + 3$,
  - kvadratický polynom ($n = 2$), např. $p(t) = -t^2 + \frac{1}{2}t + \sqrt{3}$,
  - kubický polynom ($n = 3$), např. $p(t) = -it^3$,
  - bikvadratický polynom ($n = 4$), např. $p(t) = -t^4 - 10^4 t^3$,
- **kořen (nulový bod) polynomu** p je každé číslo $t_0 \in \mathbb{C}$ splňující $p(t_0) = 0$
- **reálným polynomem** nazveme polynom s reálnými koeficienty

Věta 32 (Základní věta algebry)**.** *Každý polynom stupně alespoň prvního má v* $\mathbb{C}$ *alespoň jeden kořen.*

Ponecháme bez důkazu.

Věta 33 (Bézoutova věta)**.** *Nechť* p *je polynom* n*-tého stupně pro* $n \in \mathbb{N}$*, nechť* $t_0 \in \mathbb{C}$*. Potom existuje polynom* q *stupně* $n-1$ *takový, že platí*

$$p(t) = p(t_0) + (t - t_0)q(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Označme $p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j, \quad \alpha_n \neq 0$. Pak

$$\begin{aligned} p(t) - p(t_0) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t_0^j &&= \textstyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j (t^j - t_0^j) &&= \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (t^j - t_0^j) &&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (t - t_0) \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} &&= \\ &= \textstyle(t - t_0) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i} &&= (t - t_0) q(t). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že $q(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} t^i t_0^{j-1-i}$ je polynom a má stupeň $n-1$, protože pro $j = n$ a $i = n-1$ dostaneme maximální mocninu t^{n-1}, kterou $q(t)$ obsahuje.

V důkazu jsme využili vzorec $a^j - b^j = (a - b) \sum_{i=0}^{j-1} a^i b^{j-1-i}$, který platí pro každé $a, b \in \mathbb{C}$ a $j \in \mathbb{N}$. (Dokažte jej sami matematickou indukcí.) □

Důsledek 4. *Každý polynom* n*-tého stupně, kde* $n \in \mathbb{N}_0$*, má nejvýše* n *kořenů.*

Důkaz. Matematickou indukcí podle stupně polynomu n.

- Pro $n = 0$ je tvrzení jasné.
- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 0$, že každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů. Nechť p je polynom stupně $n+1$ a nechť t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že

  $$p(t) = (t - t_0) q(t).$$

  Jelikož má q podle indukčního předpokladu nejvýše n kořenů, má p nejvýše $n+1$ kořenů.

□

Důsledek 5. *Jedině nulový polynom má nekonečně mnoho kořenů.*

Poznámka 57. *Pokud tedy u nějakého polynomu tvaru* $p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ *zjistíme, že má více než* n *kořenů, pak už jde nutně o nulový polynom, tedy* $\alpha_j = 0$ *pro každé* $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Důsledek 6. *Koeficienty polynomu a tedy i jeho stupeň jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje polynom p, pro který platí

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j = \sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C} \text{ (nepředpokládáme, že } \alpha_n \neq 0 \text{ ani } \beta_n \neq 0)$$

a existuje index $j_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$ takový, že $\alpha_{j_0} \neq \beta_{j_0}$. Pak ale $\sum_{j=0}^{n} (\alpha_j - \beta_j) t^j = 0 \quad$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, a tedy jde o nulový polynom, což je ale spor s tím, že koeficient $\alpha_{j_0} - \beta_{j_0} \neq 0$. □

Poznámka 58. *Až nyní jsme se dozvěděli, že definice stupně polynomu je korektní, tedy že každý polynom má stupeň jednoznačně určený.*

Věta 34 (Rozklad polynomů na kořenové činitele)**.** *Nechť* $p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ *je polynom stupně* $n \in \mathbb{N}$. *Nechť* $t_1, t_2, \dots, t_k$ *jsou jeho navzájem různé kořeny. Pak existují jednoznačně určená čísla* $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ *taková, že* $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ *a pro každé* $t \in \mathbb{C}$ *platí*

$$p(t) = \alpha_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - t_k)^{n_k}.$$

Říkáme, že n_j *je* **násobnost** *kořene* t_j *a* $t - t_j$ *je* **kořenový činitel** *příslušející* t_j.

Důkaz. Matematickou indukcí podle stupně polynomu n.

- Pro $n = 1$ je pro $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ jednoznačným rozkladem na kořenové činitele $p(t) = \alpha_1 (t + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})$.
- Předpokládejme pro nějaké $n \geq 1$, že každý polynom stupně n má jednoznačný rozklad na kořenové činitele. Nechť p je polynom stupně $n + 1$ a nechť t_0 je jeho kořen (podle Základní věty algebry víme, že takové $t_0 \in \mathbb{C}$ existuje). Podle Bézoutovy věty existuje polynom q stupně n takový, že
$$p(t) = (t - t_0) q(t).$$
Podle indukčního předpokladu má $q(t) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j$ jednoznačný rozklad na kořenové činitele, tj. existují jednoznačně určená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí
$$q(t) = \beta_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - t_k)^{n_k}.$$
Odtud máme jednoznačný rozklad p na kořenové činitele
$$p(t) = \beta_n (t - t_0)(t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - t_k)^{n_k},$$
který lze ještě upravit, pokud $t_0 = t_j$ pro nějaké $j \in \hat{k}$, jako
$$p(t) = \beta_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - t_j)^{n_j + 1} \cdot \dots \cdot (t - t_k)^{n_k},$$
nebo pro $t_0 \neq t_j$ pro každé $j \in \hat{k}$, jako
$$p(t) = \beta_n (t - t_1)^{n_1} (t - t_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - t_k)^{n_k} (t - t_{k+1})^{n_{k+1}},$$
kde $t_{k+1} = t_0$ a $n_{k+1} = 1$. Snadno zkontrolujeme, že součet násobností je $n + 1$ a že β_n odpovídá koeficientu $p(t)$ u nejvyšší mocniny t^{n+1}.

□

Poznámka 59. *Násobnost kořene polynomu lze ekvivalentně definovat následujícím způsobem: t_0 je k-násobný kořen polynomu p, pokud existuje polynom q takový, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$ a $q(t_0) \neq 0$.*

Věta 35 (O kořenech reálných polynomů)**.** *Nechť p je reálný polynom a nechť t_0 je jeho k-násobný kořen. Pak $\overline{t_0}$ (číslo komplexně sdružené k t_0) je také jeho k-násobný kořen.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že $\overline{t_0}$ je také kořen. Nechť $p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$, kde $\alpha_j \in \mathbb{R}$ a $\alpha_n \neq 0$.

$$p(\overline{t_0}) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \overline{t_0}^j = \overline{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j t_0^j} = \overline{p(t_0)} = 0.$$

Nyní dokážeme, že $\overline{t_0}$ je k-násobný kořen. Z Bézoutovy věty víme, že $p(t) = (t - t_0)^k q(t)$ a $q(t_0) \neq 0$. Pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí díky reálnosti p a díky vlastnostem komplexních čísel

$$p(t) = \overline{p(\overline{t})} = \overline{(\overline{t} - t_0)^k q(\overline{t})} = (t - \overline{t_0})^k \overline{q(\overline{t})}.$$

Jelikož $\overline{q\left(\overline{\overline{t_0}}\right)} = \overline{q(t_0)} \neq 0$, je dokázáno, že $\overline{t_0}$ je k-násobný kořen p. □

Důsledek 7. *Má-li reálný polynom lichý stupeň, pak má reálný kořen.*

Poznámka 60. *Rozklad reálného polynomu na kořenové činitele v reálném oboru: Je-li $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ k-násobný kořen reálného polynomu p, pak $\overline{t_0}$ je také k-násobným kořenem p a v rozkladu na kořenové činitele můžeme sloučit*

$$(t - t_0)^k (t - \overline{t_0})^k = (t - t_0)(t - \overline{t_0})^k = (t^2 - (t_0 + \overline{t_0})t + t_0\overline{t_0})^k,$$

kde, jak víme, $t_0 + \overline{t_0}$ i $t_0\overline{t_0}$ jsou reálná čísla.

Příklad 38. *Reálný polynom $p(t) = t^4 - 1$ má rozklad v komplexním oboru roven*

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t - i)(t + i)$$

a v reálném oboru roven

$$t^4 - 1 = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1).$$

Reference

[1] Emil Humhal, *Algebra 1*, http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼humhal/

[2] Jiří Pytlíček, *Lineární algebra a geometrie*, vydavatelství ČVUT, Praha, 2005

[3] Jean-Luc Dorier , *Contribution a l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, thèse, 1990

[4] Eva Ulrychová, *Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů*, sborník 29. mezinárodní konference HISTORIE MATEMATIKY, Velké Meziříčí, 22.8.-26.8.2008, matfyzpress, editoři J. a M. Bečvářovi, 179-184

[5] BibM@th http://www.bibmath.net/

[6] Wikipedia, the Free Encyclopedia

[7] The MacTutor History of Mathematics archive http://www.gap-system.org/ history