Určitý Riemannův integrál

Definice

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$

Rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme konečnou množinu $\sigma := \{x_0, \dots, x_n\}$,

kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Označme $\Delta_i := x_i - x_{i-1}$, $\forall i \in \hat{n}$

Pak normou rozdělení σ nazveme číslo $\nu(\sigma) := \max\{\Delta_i \mid i \in \hat{n}\}$

Definice

Nechť σ, σ' jsou rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $\sigma \subset \sigma'$.

Pak σ' nazýváme zjemněním rozdělení σ.

Pozn.: $\nu(\sigma') \leq \nu(\sigma)$

Pozn.: Když σ_1, σ_2 jsou rozdělení $\langle a, b \rangle$, pak $\sigma_1 \cup \sigma_2$ je společné zjemnění rozdělení σ_1 a σ_2.

Definice

Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$

Položme $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}, \forall i \in \hat{n}$

$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}, \forall i \in \hat{n}$

Pak čísla $S(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$

$s(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$

nazýváme horním, resp. dolním součtem f při rozdělení σ.

Věta

Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$.

Označme $M := \sup \{f(x) \mid x \in \langle a, b\rangle\}$

$m := \inf \{f(x) \mid x \in \langle a, b\rangle\}$

Pak pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí:

$$m(b-a) \leq s(\sigma) \leq S(\sigma) \leq M(b-a)$$

Důkaz

Přímo z definic čísel m, m_i, M_i, M plyne, že platí:

$m \leq m_i \leq M_i \leq M$, pak vynásobením Δ_i a sečtením přes všechna $i \in \hat{n}$ dostáváme:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m\Delta_i}_{m\sum_{i=1}^{n}\Delta_i} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i}_{s(\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i}_{S(\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M\Delta_i}_{M\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}, \quad \sum_{i=1}^{n}\Delta_i = b-a$$

Důsledek

Množina dolních i horních součtů je omezená pro libovolné rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$

Lemma

Nechť f je funkce omezená konstantou K na intervalu $\langle a,b\rangle$, tj. pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí: $|f(x)| \leq K$.

Nechť dále σ je rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a σ' jeho zjemnění.

Pak:

$$S(\sigma) - 2Kp\nu(\sigma) \leq S(\sigma') \leq S(\sigma)$$

$$s(\sigma) \leq s(\sigma') \leq s(\sigma) + 2Kp\nu(\sigma),$$

kde p je počet bodů (prvků) množiny $\sigma' - \sigma$.

Důkaz

1. nechť $c \notin \sigma$: $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$

$$\exists i_0 \in \hat{m}: c \in \langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle$$

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta_i$$

$$S(\sigma') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} M_i \Delta_i + \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\,(c - x_{i_0-1}) + \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\,(x_{i_0} - c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta_i - \sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f\,\underbrace{(x_{i_0} - x_{i_0-1})}_{(x_{i_0}-c)+(c-x_{i_0-1})} + \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\,(c - x_{i_0-1}) + \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\,(x_{i_0} - c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta_i - (c - x_{i_0-1})\Big(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\Big) - (x_{i_0} - c)\Big(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\Big)$$

$$S'(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta_i - (c - x_{i_0-1})\left(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\right) - (x_{i_0} - c)\left(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\right)$$

$$S(\sigma) \geq S'(\sigma) \geq S(\sigma) - (c - x_{i_0-1})2k - (x_{i_0} - c)2k = S(\sigma) - 2k\Delta_i \geq S(\sigma) - 2k\nu(\sigma)$$

② Zjemnění σ', které vznikne se σ přidáním p nových bodů, můžeme postupně vytvářet přidáváním jednoho bodu, které provedeme p-krát.

Zároveň se při zjemnění norma nikdy nezvětšuje.

Dostáváme tedy:

$$S(\sigma) \geq S'(\sigma) \geq S(\sigma) - 2kp\nu(\sigma)$$

Věta

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť σ_1 a σ_2 jsou libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$

Pak platí: $s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$

Důkaz

Definujme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$, pak podle předchozího lemmatu platí:

$$s(\sigma_1) \leq s(\sigma) \leq S(\sigma) \leq S(\sigma_2)$$

Definice

Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$.
Infimum množiny horních součtů a supremum množiny dolních součtů nazýváme horním, resp. dolním integrálním součtem funkce f.
Značíme:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\sigma} S(\sigma), \quad \underline{\int_a^b} f = \sup_{\sigma} s(\sigma)$$

Věta

Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$.
Pak platí:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Důkaz

Zvolme libovolné σ_1.
Pro každé rozdělení σ_2 platí $s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$
To znamená, že $s(\sigma_1)$ je dolní závora množiny horních součtů.
Z definice infima jako největší dolní závory plyne:
$s(\sigma_1) \leq \inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$
Protože taková nerovnost platí pro každé σ_1 je číslo $\inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$ horní závora množiny dolních součtů.
Z definice suprema jako nejmenší horní závory plyne:
$\sup_{\sigma_1} s(\sigma_1) \leq \inf_{\sigma_2} S(\sigma_2)$, což jsme chtěli ukázat.

Definice

Nechť f je funkce omezená na $\langle a,b\rangle$.

Je-li $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, říkáme, že f má v intervalu $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál.

Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu, značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x)\,dx$.

O funkci f říkáme, že je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$

Věta Nutná a postačující podmínka existence integrálu

Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$.

Pak $\int_a^b f$ existuje $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists$ rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle)(S(\sigma)-s(\sigma)<\varepsilon)$

Důkaz

$:\Rightarrow$ Protože $\int_a^b f = \inf_{\sigma} S(\sigma)$, najdeme po libovolné $\varepsilon>0$ rozdělení σ_1: $S(\sigma_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

Ze stejného důvodu, $\int_a^b = \sup s(\sigma)$, najdeme po libovolné $\varepsilon>$ rozdělení σ_2: $s(\sigma_2) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$

Definujme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$, σ je společným zjemněním σ_1 i σ_2.

Z toho plyne:

$$S(\sigma)-s(\sigma) \le S(\sigma_1)-s(\sigma_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$: Protože horní, resp. dolní integrální součet je infimem, resp. supremem jisté množiny součtů, plyne z definice:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(\sigma) - s(\sigma) \text{ pro každé rozdělení } \sigma$$

Z předpokladu umíme pravou stranu stlačit pod libovolně malé $\varepsilon > 0$. To je možné, jen pokud $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$

Věta (Důsledek)

Nechť $-\infty < a \leq c < d \leq b < +\infty$.

Je-li f integrovatelná na $\langle a,b \rangle$, pak je integrovatelná i na $\langle c,d \rangle$

Důkaz

Z existence $\int_a^b f$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení σ, tak, že: $\underset{\langle a,b \rangle}{S}(\sigma) - \underset{\langle a,b \rangle}{s}(\sigma) < \varepsilon$

Definujme $\sigma^* := \sigma \cup \{c,d\}$ a rozdělení $\sigma^\# := \sigma^* \cap \langle c,d \rangle$.
Protože σ^* je zjemnění σ a všechny dílčí intervaly rozdělení $\sigma^\#$ jsou obsaženy v σ^*, platí:

$$S(\sigma^\#) - s(\sigma^\#) \leq S(\sigma^*) - s(\sigma^*) \leq S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$$

Je tedy splněna nutná i postačující podmínka pro existenci $\int_c^d f$

Věta

Nechť $-\infty < a < c < b < +\infty$.

Je-li f integrovatelná na $\langle a,c\rangle$ i na $\langle c,b\rangle$, pak je f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz

- f je integrovatelná na $\langle a,c\rangle \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2}>0$, $\exists \sigma_1$ rozdělení $\langle a,c\rangle$: $\overline{S}(\sigma_1) - \underline{S}(\sigma_1) < \frac{\varepsilon}{2}$
- f je integrovatelná na $\langle c,b\rangle \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2}>0$, $\exists \sigma_2$ rozdělení $\langle c,b\rangle$: $\overline{S}(\sigma_2) - \underline{S}(\sigma_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

Definujme $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ rozdělení $\langle a,b\rangle$, pak platí:

$$\overline{S}_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = \overline{S}_{\langle a,c\rangle}(\sigma_1) + \overline{S}_{\langle c,b\rangle}(\sigma_2), \quad \underline{S}_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = \underline{S}_{\langle a,c\rangle}(\sigma_1) + \underline{S}_{\langle c,b\rangle}(\sigma_2)$$

Z toho plyne: $\overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) = \overline{S}(\sigma_1) - \underline{S}(\sigma_1) + \overline{S}(\sigma_2) - \underline{S}(\sigma_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Je tedy splněna nutná i postačující podmínka existence integrálu f na $\langle a,b\rangle$.

Věta

Nechť f je spojitá na $\langle a,b \rangle$.
Pak f má na $\langle a,b \rangle$ integrál $\int_a^b f$.

Důkaz

- f je spojitá na $\langle a,b\rangle \Leftrightarrow f$ je na $\langle a,b\rangle$ spojitá stejnoměrně $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,y \in \langle a,b\rangle, |x-y| < \delta)(|f(x)-f(y)| < \varepsilon)$
- Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, z předpokladu získáme příslušné $\delta > 0$.
k takovému δ sestrojíme rozdělení $\sigma := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, takové, že $\nu(\sigma) < \delta$.

- Protože funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu suprema i infima.
- Pak po každé $i \in \hat{n}$ existují $\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $m_i = f(\eta_i)$
$M_i = f(\xi_i)$
$(|\xi_i - \eta_i| < \delta)$
- Proto: $0 \le S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i = (*)$

$(*) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\Delta_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \varepsilon \cdot (b-a)$

Stačí tedy po libovolné $\tilde{\varepsilon} > 0$ vzít $\varepsilon = \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{b-a}$

Věta

Nechť f je monotónní na $\langle a, b\rangle$.
Pak f má na $\langle a, b\rangle$ integrál $\int_a^b f$.

Důkaz

- pokud je f konstantní, tak víme, že integrál $\int_a^b f$ existuje
- BÚNO předpokládejme, že f je rostoucí,
  to znamená, že $\forall i \in \hat{n}: m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$
- Pak: $0 \leq S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta_i < \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\delta = (*)$
- Zvolme $\varepsilon > 0$.
  definujme $\sigma := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takové, že $\nu(\sigma) < \delta$

$(*) = \delta(f(b) - f(a))$

stačí zvolit $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

Věta

Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.
Pak f má nekonečně mnoho bodů spojitosti.

Důkaz

Ukážeme, že pro každý interval $\langle a,b\rangle$ a pro každou funkci f integrovatelnou na $\langle a,b\rangle$ platí, že v $\langle a,b\rangle$ existuje alespoň jeden bod spojitosti f.
Tím bude věta dokázána, neboť z existence $\int_a^b f$ plyne existence $\int_c^d f$ po sebemenší interval $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, a tedy v intervalu $\langle c,d\rangle$ ~~taky~~ najdeme bod spojitosti f.

- Nechť existuje $\int_a^b f$. Zvolme $\varepsilon_1 > 0$ libovolně.
 Z nutné a postačující podmínky plyne, že existuje takové rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$, že:

$$\overline{S}_{\langle a,b\rangle}(\sigma) - \underline{S}_{\langle a,b\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) < \varepsilon_1 (b-a)$$

- To znamená, že alespoň na jednom částečném intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je rozdíl $M_i - m_i < \varepsilon_1$
- Označme prostřední třetinu tohoto intervalu jako $\langle a_1, b_1\rangle$.
- Protože existuje i $\int_{a_1}^{b_1} f$, stejnou úvahou jako v předchozím bodě najdeme $\varepsilon_2 > 0$ a k němu σ rozdělení intervalu $\langle a_1, b_1\rangle$:

$$\overline{S}_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) - \underline{S}_{\langle a_1,b_1\rangle}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i < \varepsilon_2 (b_1 - a_1)$$

- Ze stejného důvodu je alespoň v jednom dílčím intervalu rozdíl $M_i - m_i < \varepsilon_2$
- Prostřední třetinu označíme $\langle a_2, b_2 \rangle$.
  Takto můžeme pokračovat dále.
- Volíme kladná čísla ε_n, tak aby $\lim \varepsilon_n = 0$,
  dostáváme posloupnost do sebe vnořených intervalů
  $\langle a, b \rangle \supset \langle a_1, b_1 \rangle \supset \langle a_2, b_2 \rangle \supset \dots$,
  přičemž rozdíl suprema a infima f je na intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ menší, než ε_n
- Posloupnost levých krajů (a_n) těchto intervalů tvoří ostře rostoucí posloupnost.
  Posloupnost pravých krajů (b_n) těchto intervalů tvoří ostře klesající posloupnost.
  Zároveň platí: $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Označme $c := \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in (a_n, b_n)$
- Teď ukážeme, že bod c je bodem spojitosti funkce f.
- Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Najdeme $n \in \mathbb{N}$, tak aby $\varepsilon > \varepsilon_n$.
- Položme $\delta := \min \{c - a_n, b_n - c\}$
- Pak δ-okolí $(c - \delta, \delta + c) \subset (a_n, b_n)$, a proto pro každé x z tohoto okolí je rozdíl $f(x) - f(c)$ omezen rozdílem suprema a infima funkce f na na intervalu (a_n, b_n).
  Ten je menší, než $\varepsilon_n < \varepsilon$. To už dokazuje spojitost.

Určitý integrál jako limita posloupností

Definice

Posloupnost $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme normální, pokud pro normy platí: $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu(\sigma_n)=0$

Lemma

Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$.
Pak ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro libovolné rozdělení σ intervalu $\langle a,b\rangle$ s normou $\nu(\sigma)<\delta$ platí:

$$\int_a^{\overline{b}} f \le S(\sigma) \le \int_a^{\overline{b}} f+\varepsilon \quad \text{a} \quad \int_{\underline{a}}^{b} f-\varepsilon \le s(\sigma) \le \int_{\underline{a}}^{b} f$$

Důkaz

- Zvolme $\varepsilon>0$ libovolně a položme $\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{2}$
- Z druhé vlastnosti infima získáme σ^* rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že: $\int_a^{\overline{b}} f+\varepsilon^* > S(\sigma^*)$
- f je omezená $\Leftrightarrow \exists K>0 \; \forall x\in\langle a,b\rangle : |f(x)|\le K$

* po každé zjemnění $\sigma' \sigma$: $S(\sigma)\ge S(\sigma')\ge S(\sigma)-2Kp\,\nu(\sigma)$

- Nyní nechť σ libovolné, $\nu(\sigma)<\delta$
- Definujme $\sigma' := \sigma\cup\sigma^*$ společné zjemnění

$$S(\sigma) = \underbrace{S(\sigma)-S(\sigma')}_{\le 2Kp\nu(\sigma)} + \underbrace{S(\sigma')-S(\sigma^*)}_{\le 0} + \underbrace{S(\sigma^*)}_{<\int_a^{\overline{b}} f+\frac{\varepsilon}{2}} < \int_a^{\overline{b}} + \varepsilon$$

- Stačí nyní zvolit $\delta := \frac{\varepsilon}{4Kp}$

Věta

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$,

a nechť $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je normální posloupnost rozdělení $\langle a, b\rangle$.

Pak $\lim\limits_{n\to+\infty} s(\sigma_n) = \underline{\int_a^b} f$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S(\sigma_n) = \overline{\int_a^b} f$

Důkaz

- σ_n je normální $\Leftrightarrow \lim \nu(\sigma_n) = 0 \Leftrightarrow (\forall \delta>0)(\exists n_0\in\mathbb{R})(\forall n>n_0)(\nu(\sigma_n)<\delta)$
- Z předchozího lemmatu plyne:

  $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \sigma, \nu(\sigma)<\delta)\left(\overline{\int_a^b} f - \varepsilon < S(\sigma) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon\right)$
- Kombinací obou výroků dostáváme:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\left(\overline{\int_a^b} f - \varepsilon < S(\sigma_n) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S(\sigma_n) = \overline{\int_a^b} f$$

Definice

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$,

a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je rozdělení $\langle a, b\rangle$.

Sumu $J(\sigma) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pro každé $i\in\hat{n}$.

Nazýváme integrálním součtem funkce f při rozdělení σ.

* Je zřejmé, že platí: $s(\sigma) \le J(\sigma) \le S(\sigma)$

Základní věta integrálního počtu

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$.
Integrál $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když po každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentní.

Důkaz

$\Rightarrow$ nechť existuje integrál $\int_a^b f$

- to znamená, že $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to+\infty} s(\sigma_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(\sigma_n)$
- z limity sevřené posloupnosti $(s(\sigma_n) \leq \mathcal{J}(\sigma_n) \leq S(\sigma_n))$ plyne, že: $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f$

$\Leftarrow$: Nejprve ukážeme, že když každá posloupnost $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentní, tak všechny posloupnosti $(\mathcal{J}(\sigma_n))$ mají stejnou limitu.

- Nechť existují normální posloupnosti $(\sigma_n^{(1)})$, $(\sigma_n^{(2)})$, takové, že $\mathcal{J}(\sigma_n^{(1)}) \to l_1 \neq l_2 \leftarrow \mathcal{J}(\sigma_n^{(2)})$.
- definujme $\sigma_n := \begin{cases} \sigma_n^{(1)}, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \sigma_n^{(2)}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$
- σ_n je normální posloupnost rozdělení, tj. $\lim \nu(\sigma_n) = 0$ a zároveň $\lim \mathcal{J}(\sigma_n)$ neexistuje, neboť $l_1 \neq l_2$

To je ale spor, že $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentní po každou normální posloupnost rozdělení.
Proto $l_1 = l_2 =: l$

- Uvažujme normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a označme body n-tého rozdělení $\sigma_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$.
- Infimum, resp. supremum funkce f na dílčím intervalu $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\rangle$ označme $m_i^{(n)}$, resp. $M_i^{(n)}$
- Z vlastností suprema a infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $i \in \hat{k}_n$ existují body $\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)} \in \langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\rangle$ takové, že:

$$m_i^{(n)} \le f(\xi_i^{(n)}) < m_i^{(n)} + \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad M_i^{(n)} \ge f(\eta_i^{(n)}) > M_i - \frac{1}{n}$$

- Vynásobením nerovností kladným číslem $\Delta_i^{(n)} := x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$ a sečtením těchto nerovností po $i = 1, \dots, k_n$ dostaneme:

$$s(\sigma_n) \le J^{(1)}(\sigma_n) := \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta_i^{(n)} < s(\sigma_n) + \frac{b-a}{n}$$

$$S(\sigma_n) \ge J^{(2)}(\sigma_n) := \sum_{i=1}^{k_n} f(\eta_i^{(n)})\Delta_i^{(n)} > S(\sigma_n) - \frac{b-a}{n}$$

- Z limity sevřené posloupnosti plyne, že:

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{n\to+\infty} J^{(1)}(\sigma_n), \quad \overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to+\infty} J^{(2)}(\sigma_n)$$

- Zároveň víme, že $\lim_{n\to+\infty} J^{(1)}(\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} J^{(2)}(\sigma_n)$, což už dokazuje existenci integrálu $\int_a^b f$

Vlastnosti určitého integrálu

Definice

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$

- Pak definujeme $\int_b^a f := -\int_a^b f$ a říkáme, že f má integrál od b do a,
- nechť $a \in D_f$, pak definujeme $\int_a^a f := 0$ a říkáme, že f má integrál od a do a

Ukážeme, že přiřazení určitého integrálu k funkci, tj.: $f \mapsto \int_a^b f$, je lineárním funkcionálem na prostoru funkcí integrovatelných v $\langle a, b \rangle$

Věta Linearita určitého integrálu

Nechť $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ a funkce f a g mají integrál od a do b.
Pak funkce αf a $f+g$ mají integrál od a do b a platí:

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f \quad \text{a} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Důkaz

- $a < b$: nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pak pro integrální součty funkcí αf a $f+g$ platí:

- $$\mathcal{I}_{\alpha f}(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha f)(\xi_i)\Delta_i = \alpha \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i = \alpha\, \mathcal{I}_f(\sigma_n)$$
- $$\mathcal{I}_{f+g}(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{m} (f+g)(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i + \sum_{i=1}^{m} g(\xi_i)\Delta_i = \mathcal{I}_f(\sigma_n) + \mathcal{I}_g(\sigma_n)$$

Podle předpokladů jsou tyto integrální součty konvergentní

- $b < a$: Pak $\int_a^b f = -\int_b^a f$, zbytek je analogický
- $a = b$: triviální, $0 = 0 \cdot \alpha$, $0 = 0 + 0$

Poznámka: Z existence $\int_a^b (f+g)$ neplyne existence $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$.

Věta Aditivita integrálu v mezích

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a nechť existují alespoň dva z integrálů $\int_a^b f, \int_a^c f, \int_c^b f$.

Pak existuje i třetí integrál a platí: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz

- nechť a, b, c jsou vzájemně různá čísla
pak pokud existují dva z integrálů $\int_a^b f, \int_a^c f, \int_c^b f$, tak existenci třetího z nich zaručuje důsledek nutné a postačující podmínky existence integrálu.
- stačí tedy dokázat rovnost
- $a < c < b$:
nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, takové, že $c \in \sigma_n$ po všechna $n \in \mathbb{N}$
- Položme $\sigma_n^{(1)} := \sigma_n \cap \langle a, c \rangle$, $\sigma_n^{(2)} := \sigma_n \cap \langle c, b \rangle$,
$\sigma_n^{(1)}, \sigma_n^{(2)}$ jsou normální posloupnosti rozdělení $\langle a, c \rangle$, resp. $\langle c, b \rangle$.
- Pro integrální součty pak platí zřejmý vztah:

$$I_{\langle a,b \rangle}(\sigma_n) = I_{\langle a,c \rangle}(\sigma_n^{(1)}) + I_{\langle c,b \rangle}(\sigma_n^{(2)})$$

- limitní přechod společně s předpoklady již dokazuje větu

Věta O nerovnostech v integrálu

Nechť f, g jsou integrovatelné funkce na $\langle a, b\rangle$.

I. Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

II. Je-li $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f < \int_a^b g$

Důkaz

I. Uvažujme funkci h, integrovatelnou a nezápornou na $\langle a, b\rangle$.

- Pro její infimum m na tomto intervalu platí: $m \geq 0$
- Proto pro každé rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ je dolní součet $s(\sigma) \geq m(b-a) \geq 0$
- Proto i $\int_a^b h = \sup_{\sigma} s(\sigma) \geq 0$

Stačí zvolit $h := g - f$, pak je jasné, že $\int_a^b g \geq \int_a^b f$

II. Nyní uvažujme funkci h', integrovatelnou a kladnou na $\langle a, b\rangle$.

- Pro její infimum m' na tomto intervalu platí: $m' > 0$
- Proto pro každé rozdělení σ' intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $s'(\sigma) \geq m'(b-a) > 0$
- Proto i $\int_a^b h' = \sup_{\sigma} s(\sigma) > 0$.

Věta

Nechť f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$.

Pak $|f|$ je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a platí: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Důkaz

- Nejprve ukážeme, že platí nerovnost:
- Nechť (σ_m) je normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$.

  Pak pro integrální součty platí:

$$|\mathcal{I}_f(\sigma_m)| = \left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i\right| = |f(\xi_1)\Delta_1 + (f(\xi_2)\Delta_2 + \dots + f(\xi_m)\Delta_m)| \leq$$

$$\leq |f(\xi_1)\Delta_1| + |f(\xi_2)\Delta_2 + (f(\xi_3)\Delta_3 + \dots + f(\xi_m)\Delta_m)| \leq \dots \leq$$

$$\leq |f(\xi_1)\Delta_1| + |f(\xi_2)\Delta_2| + \dots + |f(\xi_m)\Delta_m| = \sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i)\Delta_i| = \mathcal{I}_{|f|}(\sigma_m)$$

- Levá strana nerovnosti konverguje a je rovna $\left|\int_a^b f\right|$

  Ověříme, že i druhá strana konverguje k příslušnému integrálu

- Označme $m := \inf\{|f(x)| \mid x \in \langle a, b \rangle\}$, $M := \sup\{|f(x)| \mid x \in \langle a, b \rangle\}$

  Pak pro libovolné rozdělení σ intervalu $\langle a, b \rangle$ platí:

  $m(b-a) \leq s(\sigma) \leq \sum_{i=1}^{m} |f(\xi_i)\Delta_i| \leq S(\sigma) \leq M(b-a)$

  integrální součet je tedy omezený, to ale stále nedokazuje jeho konvergenci

- Chtěli bychom ukázat, že $S_{|f|}(\sigma) - s_{|f|}(\sigma) \leq S_f(\sigma) - s(\sigma), < \varepsilon$ (z předpokladu)

  tedy, že $\sup|f| - \inf|f| \leq \sup f - \inf f$ pro všechny dílčí intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

- a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $\sup|f| = \sup f$, $\inf|f| = \inf|f|$, jasné

  b) $f(x) < 0, \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$: $\sup|f| = -\inf f$, $\inf|f| = -\sup f$, jasné

  c) f nabývá kladných i záporných hodnot:

  určitě platí $\inf|f| > 0$ a $-\inf\{f\} > 0$: $\sup|f| - \inf|f| \leq \sup|f| = \max\{\sup f, -\inf f\} \leq$

  $\leq \sup f - \inf f$

Věta | Integrál jako funkce horní meze

Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.
Funkce F definovaná jako: $F:\langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R} : F(x) := \int_a^x f \; ; \forall x \in \langle a,b\rangle$
je spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$, je funkce F diferencovatelná v bodě x_0 a platí: $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz

Zvolme $x_0 \in \langle a,b\rangle$ libovolně.

- Pak podle předpokladů platí pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f|\right| \le \left|\int_{x_0}^x k\right| = k|x-x_0|$$

- f je omezená $\iff \exists k>0 : |f(x)| \le k, \forall x \in \langle a,b\rangle$
- pokud zvolíme $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$, pak pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ bude platit:

$$|x-x_0| < \delta \implies |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

To znamená, že F je spojitá na $\langle a,b\rangle$

Nyní nechť x_0 je bodem spojitosti f

$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in \langle a,b\rangle)(|x-x_0|<\delta \implies f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon)$

- Uvažujme $x \in \langle a,b\rangle$ takové, že: $x_0 < x < x_0+\delta$, pak platí:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f < \int_{x_0}^x (f(x_0)+\varepsilon) = (f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$$

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f > \int_{x_0}^x (f(x_0)-\varepsilon) = (f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)$$

To znamená, že: $f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} < f(x_0)+\varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) < \varepsilon$

tj.: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in \langle a,b\rangle, |x-x_0|<\delta)\left(\left|\underbrace{\cancel{\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}}}_{\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right|}\right| < \varepsilon\right) \iff$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) = F'(x_0)$$

Důsledek

Funkce spojitá na otevřeném intervalu (a,b) má v tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz

Zvolme libovolné, ale pevné $c \in (a,b)$.

- Spojitost funkce f implikuje existenci určitého integrálu od c do x pro každé $x \in (a,b)$.
- Proto lze položit $F(x) := \int_c^x f$.
- Podle předchozí věty platí: $F'(x_0) = f(x_0)$, pro každé $x \in (a,b)$.

Výpočet určitého integrálu

Věta: Newtonova formule

Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že

① F je spojitá na $\langle a, b\rangle$

② $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$

Pak platí: $\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b$

Důkaz

Uvažujme normální posloupnost rozdělení (σ_n) intervalu $\langle a, b\rangle$ s členy: $\sigma_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_n} = b$.

- Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce F na intervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pro $i = 1, 2, \dots, k_n$ dostáváme:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k_n}\left(F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})\right) = \sum_{i=1}^{k_n} F'(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta_i^{(n)} = \mathcal{J}(\sigma_n)$$

- Protože $\int_a^b f$ existuje, víme, že ze základní věty integrálního počtu plyne, že $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f$, pro každé normální rozdělení σ_n.

tj.: $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f = F(b) - F(a)$

Věta | Metoda per partes pro určitý integrál

Nechť funkce f a g jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelné v (a,b).

Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Důkaz

Z předpokladů věty plyne, že funkce fg je primitivní funkce k funkci $f'g + fg'$ na (a,b) a fg je spojitá na $\langle a,b\rangle$.

- Proto z Newtonovy formule plyne: $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$

Věta | Substituce v určitém integrálu

Nechť pro funkce f a ϕ platí:

① ϕ je spojitá na $\langle \alpha,\beta\rangle$ a diferencovatelná v (α,β)

② f je spojitá na $\phi\langle \alpha,\beta\rangle$

Pak $$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx$$

Důkaz

- Funkce ϕ je spojitá, proto $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$ je uzavřený interval.
- Zvolme $c \in \phi\langle\alpha,\beta\rangle$ libovolně a položme $F(x) := \int_c^x f$ pro $x \in \phi\langle\alpha,\beta\rangle$.
- Tato funkce F je spojitá a diferencovatelná na $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$, proto složená funkce $F(\phi(t))$ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a má derivaci $f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = [F(\phi(t))]_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_c^{\phi(\beta)} f - \int_c^{\phi(\alpha)} f = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f$$

Věta | Integrální tvar zbytku

Nechť je nezáporné celé číslo n, funkce f a bod „a" platí, že existuje okolí H_a, na kterém má funkce f spojitou $(n+1)$-ní derivaci.

Pak n-tý zbytek R_n v Taylorově vzorci je pro každé $x \in H_a$ roven:

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Důkaz

Tvrzení dokážeme indukcí na n.

- $n = 0$:

Když má funkce f na nějakém okolí bodu „a" spojitou první derivaci, Newtonova formule říká, že:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

- Jelikož nultý Taylorův polynom $T_0(x) = f(a)$, dává předchozí rovnost pro zbytek:

$$R_0(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$$, jak jsme chtěli ukázat

- $n-1 \to n$:

Využijme tvaru Taylorova vzorce pro funkci f a její n-tý Taylorův polynom a funkce f' a její $(n-1)$-ní Taylorův polynom:

$$f(x) = T_{n,f}(x) + R_{n,f}(x)$$

$$f'(x) = T_{n-1,f'}(x) + R_{n-1,f'}(x)$$

• Porovnáním dostaneme vztah:

$$T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x) \Rightarrow R'_{n,f}(x) = R_{n-1,f'}(x)$$

• Z indukčního předpokladu na funkci f' a $n-1$ plyne:

$$R'_{n,f}(x) = R_{n-1,f'}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow R'_{n,f}(x) = \left(\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right)'$$

• Protože se rovnají derivace, tak se musejí rovnat i derivované funkce (až na konstantu).

Věta O střední hodnotě I

Nechť funkce f je integrovatelná a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$, a nechť funkce fg je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

Pak existuje $\mu \in \langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g\rangle$ takové, že: $\int_a^b fg = \mu \int_a^b f$

Důkaz

Označme $m := \inf\{g(x) \mid x \in \langle a,b\rangle\}$, $M := \sup\{f(x) \mid x \in \langle a,b\rangle\}$.

Je tedy zřejmé, že platí: $m \leq g(x) \leq M$, pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$,

to společně s nezáporností f dává:

$$m f(x) \leq g(x) f(x) \leq M f(x) \Rightarrow m\int_a^b f \leq \int_a^b gf \leq M\int_a^b f$$

• Pokud $\int_a^b f = 0$, pak $\int_a^b fg = 0$, μ lze tedy volit libovolně

• $\int_a^b f \neq 0$: Položme $\mu := \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b f} \in \langle m, M\rangle$.

Věta O střední hodnotě II

Nechť g monotónní na $\langle a,b\rangle$ a nechť existují integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b fg$.
Pak $\exists c \in \langle a,b\rangle$ takový, že:

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

Důkaz

* Navíc předpokládejme, že g' spojitá na $\langle a,b\rangle$, f spojitá na $\langle a,b\rangle$

- definujme $F(x) := \int_a^x f$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$
- protože g je monotónní na $\langle a,b\rangle$, tak g' nemění znaménko na $\langle a,b\rangle$
- Z první věty o střední hodnotě tedy plyne:

$$\int_a^b Fg' = F(c)\int_a^b g' = F(c)(g(b)-g(a))$$

- Použitím metody per partes dostáváme:

$$\int_a^b Fg' = [Fg]_a^b - \int_a^b F'g = [Fg]_a^b - \int_a^b fg$$

Celkem tedy platí:

$$F(c)(g(b)-g(a)) = F(b)g(b) - \underbrace{F(a)g(a)}_{0} - \int_a^b fg$$

$$\int_a^b fg = F(c)(g(a)-g(b)) + F(b)g(b) = g(a)\int_a^c f + g(b)\left(\int_a^b f - \int_a^c f\right) =$$

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

, jak jsme chtěli ukázat.

Zobecněný Riemannův integrál

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť pro funkci f platí:

(R1) Pro všechna $x \in (a,b)$ existuje $R\int_a^x f$

(R2) Pro všechna $x \in (a,b)$ existuje $R\int_x^b f$

Existuje-li limita a je konečná:

$$\lim_{x \to b-} R\int_a^x f \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to a+} R\int_x^b f$$

nazýváme tuto limitu zobecněným integrálem funkce f od „a" do „b" a značíme: $\int_a^b f$

Poznámka:

① Když $\int_a^b f$ existuje jako $R\int_a^b f$, tedy už podle staré definice, říkáme, že $\int_a^b f$ je vlastní integrál.
Když $\int_a^b f$ existuje podle (~~staré~~ nové) definice, ale ne podle staré definice, říkáme, že $\int_a^b f$ je nevlastní integrál.

② Když $\int_a^b f$ existuje, říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje.
Když $\int_a^b f$ neexistuje, lhostejno z důvodu, že limita je $\pm\infty$, nebo neexistuje, říkáme, že $\int_a^b f$ diverguje.

③ Integrál $\int_a^b f$ může být nevlastní buď vlivem meze (jeden z bodů, a nebo b, je $\pm\infty$) nebo vlivem funkce (a, b jsou konečné, ale f není omezená na okolí jednoho z krajních bodů.
Pak bod a nebo b nazýváme kritickým bodem.

Definice

Množinu $M := \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, kde $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ nazveme vhodným rozdělením intervalu (a,b) po funkci f, když po každý interval (a_{k-1}, a_k), $k = 1, \dots, n$ je splněno (R1) nebo (R2)

Definice

Nechť $M = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ je vhodným rozdělením intervalu (a,b) po funkci f.

Řekneme, že integrál $\int_a^b f$ konverguje, když integrály $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ po každé $k = 1, \dots, n$ konvergují.

Integrál $\int_a^b f$ pak definujeme vztahem:

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$$

V případě, že alespoň jeden z integrálů $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ diverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ diverguje

Věta | Základní vlastnost zobecněného integrálu

Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ a nechť existují integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$

Pak: ① Linearita: $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$

② Aditivita v mezích: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, $\forall c \in \mathbb{R}: a < c < b$

③ Nerovnosti: $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a, b)$

Důkaz

Nechť je splněno (R1):

① • pak platí: $\int_a^x (\alpha f + g) = \alpha \int_a^x f + \int_a^x g$ pro každé $x \in (a, b)$

• z linearity limity pak plyne: $\lim_{x \to b_-} \int_a^x (\alpha f + g) = \alpha \cdot \lim_{x \to b_-} \int_a^x f + \lim_{x \to b_-} \int_a^x g$

• protože integrály na pravé straně existují, jsou splněny předpoklady věty o aritmetice limit a výrazy se rovnají, tedy:

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

② • zřejmě platí: $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$, pro každé $x \in (a, b)$

• z linearity limity zdůvodníme rovnost stejně jako v předchozím bodě:

$$\lim_{x \to b_-} \int_a^x f = \lim_{x \to b_-} \int_a^c f + \lim_{x \to b_-} \int_c^x f \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

③ Pokud platí $f(y) \leq g(y)$, $\forall y \in (a, b)$,

pak pro každé $x \in (a, b)$ platí: $\int_a^x f \leq \int_a^x g$

• z existence obou limit pak plyne: $\lim_{x \to b_-} \int_a^x f \leq \lim_{x \to b_-} \int_a^x g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Věta | Newtonova formule

Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť pro funkci f na intervalu $\langle a,b)$ platí (R1). Existuje-li funkce F taková, že:

1. F je primitivní funkce k funkci f
2. F má konečné limity $\lim\limits_{a+} F$, $\lim\limits_{b-} F$

Pak existuje $\int_a^b f$ a platí:

$$\int_a^b f = \lim_{b-} F - \lim_{a+} F = \text{ozn } [F]_a^b$$

Důkaz

- Pro $x \in (a,b)$ můžeme aplikovat Newtonovu formuli (dokázanou pro vlastní integrál) na uzavřený interval $\langle a,x\rangle$, kde se požaduje spojitost funkce F na celém $\langle a,x\rangle$.

  Proto dodefinujeme: $F(a) := \lim\limits_{a+} F$
- Pak platí: $\int_a^x f = F(x) - F(a)$
- Limitním přechodem dostaneme hledaný vztah, tj:

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to b-} F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \lim_{b-} F - \lim_{a+} F$$

Věta Metoda per partes

Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť funkce f a g splňují:

① f, g mají spojitou derivaci f', g' v intervalu $\langle a, b)$

② existuje konečná limita $\lim_{b-} fg$

③ existuje jeden z integrálů $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$

Pak existuje i druhý a platí:

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg$$

Důkaz

Aplikujeme větu o metodě per partes pro určitý integrál na interval $\langle a, x\rangle$, kde $x \in (a, b)$.

Všechny předpoklady věty jsou splněny, tedy:

$$\int_a^x f'g = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x fg' \quad \text{pro každé } x \in (a, b)$$

• limitním přechodem $x \to b-$ dostaneme tvrzení věty

Délka grafu funkce

Definice

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a σ je rozdělení $\langle a, b\rangle$.

$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Pak $l(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ nazveme délka lomené čáry aproximující ~~délku~~ graf funkce f podle rozdělení σ.

Definice

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$

Číslo $L := \sup\{l(\sigma) \mid \sigma \text{ je rozdělení } \langle a, b\rangle\}$ nazveme délkou grafu funkce f.

Poznámka: nechť f diferencovatelná na (a, b), f' omezená na $\langle a, b\rangle$

$$l(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \underset{\text{Lagrangeova věta}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)}\, \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + k^2}\, \Delta_i =$$

$$= \sqrt{1 + k^2}\,(b - a)$$

$$\Rightarrow L = \sup_{\sigma} l(\sigma) < +\infty$$

Věta

Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ taková, že f' je spojitá na $\langle a, b\rangle$.

Pak $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Důkaz

Nechť (σ_n) je normální posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Z předpokladů: f' je spojitá $\Rightarrow \sqrt{1 + f'^2}$ je spojitá $\Rightarrow \exists \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$.
- Z definice L: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \sigma_n^*: L - \frac{1}{n} < l(\sigma_n^*) \leq L$
- definujeme: $\sigma_n = \sigma_n^* \cup \{a + \frac{b-a}{n} i \mid i = 0, 1, \dots, n\} \Rightarrow \lim \nu(\sigma_n) = 0$

Pak platí: $L - \frac{1}{n} < l(\sigma_n^*) \leq l(\sigma_n) \leq L$, tj.:

$L - \frac{1}{n} < l(\sigma_n) \leq L$, to už dokazuje větu