L'Hospitalovo pravidlo

Nechť f, g jsou reálné funkce reálné proměnné takové, že

① $\lim_a f = \lim_a g = 0$ nebo $\lim_a |g| = +\infty$

② existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $H_a(\varepsilon) - \{a\} \subset D_{\frac{f}{g}} \cap D_{\frac{f'}{g'}}$

③ existuje $\lim_a \frac{f'}{g'}$

Pak platí $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$

Důkaz/

Předpokládejme nejprve $a \in \mathbb{R}$

① Dokažme nejprve první možnost tj. $\lim_a f = \lim_a g = 0$.
Dodefinujeme (či předefinujeme) funkce f a g v bodě a tak, aby v něm byly spojité, tj. $f(a) = g(a) = 0$.
Z druhého předpokladu plyne, že f a g jsou diferencovatelné na $H_a(\varepsilon)$ a pro všechna $x \in H_a(\varepsilon)$ je $g'(x) \neq 0$.

Zvolme $x \in H_a^+(\varepsilon)$ libovolně.
Pak f a g jsou spojité na $\langle a, x \rangle$ a z Cauchyovy věty plyne, že existuje $c(x) \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Z věty o limitě složené funkce a třetího předpokladu plyne, že

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

a z věty o limitě sevřené funkce plyne, že
$\lim_{x \to a^+} c(x) = a$, neboť $a < c(x) < x$

to celkově dává $\lim_{a^+} \frac{f'}{g'} = \lim_{a^+} \frac{f}{g}$

Pro levostrannou limitu je důkaz analogický

② Nyní předpokládejme, že $\lim_{a} |g| = +\infty$.
Protože g je diferencovatelná na $H_a^+(\varepsilon)$ a má nenulovou derivaci na tomto okolí, tak je g na tomto okolí spojitá a monotónní.
Uvažujme například případ, kdy je g klesající.
V takovém případě nutně $\lim_{a+} g = +\infty$

Vezměme libovolnou posloupnost (x_n) takovou, že
$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in (a, a+\varepsilon))$
$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n > x_{n+1})$ a $\lim x_n = a$

Podle Cauchyovy věty existuje pro každé n $y_n \in (x_{n+1}, x_n)$, že

$$\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$$

Z Heineovy věty pak plyne, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Protože posloupnost $(g(x_n))$ je ostře rostoucí s limitou $+\infty$, tak ze Stolzovy věty plyne, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$$

A tím celkem máme, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nyní uvažujme zcela obecnou posloupnost (x_n) z $H_a^+(\varepsilon)$, která má za limitu a.

Kdyby limita $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ neexistovala nebo existovala a byla rovna jinému číslu, než $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak by bylo možné zkonstruovat ~~po~~ vybranou posloupnost (x_{k_n}) tak, že $\lim \frac{f(x_{k_n})}{g(x_{k_n})}$ existuje a není rovna $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Z (x_{k_n}) lze dále vybrat podposloupnost $(x_{k_{l_n}})$, která je ostře klesající.

Pak ale musí platit, že $\lim \frac{f(x_{k_{l_n}})}{g(x_{k_{l_n}})} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ~~to~~

To je spor.

Proto pro zcela obecnou posloupnost (x_n) z $H_a^+(\varepsilon)$, která má za limitu a platí

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Z Heineovy věty už plyne, že

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$, pro levostranné limity analogicky

Teď uvažujme případ, kdy $a = +\infty$, analogicky pro $a = -\infty$

Pak pomocí věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

3. předpoklad a už dokázaná část L'Hospitalova pravidla toto opravňují. Tím je důkaz hotov

edita.pelantova@fjfi.cvut.cz

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$; $\frac{1}{x^2} = \ln y \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x^2}}$

$x^2 = \frac{1}{\ln y}$ $/^2$

$\Leftrightarrow$

$\lim_{y\to+\infty} \frac{y^{-1}}{\frac{1}{\ln^2 y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^2 y}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2\ln y}{y} = \frac{2}{y}$

Spojitost na intervalu

f spojitá v bodě a

$a \in D_f$

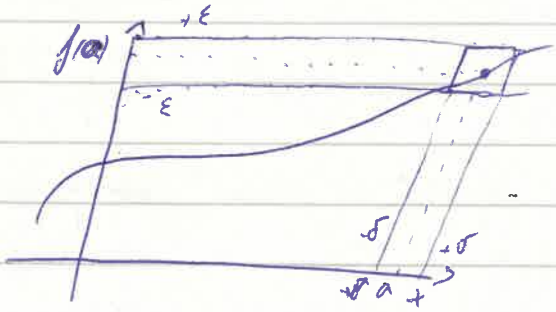
$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta))(f(x) \in H_{f(a)}(\varepsilon))$

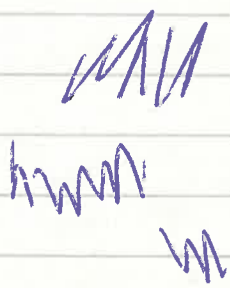
Spojitost na intervalu

$a \in D_f = I$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall a \in I)(\forall x \in I, |x-a|<\delta)(|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

Stejnoměrná spojitost.

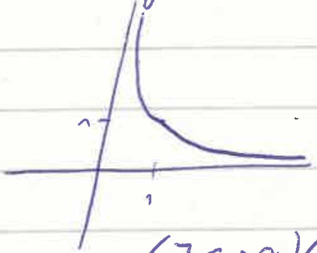




Příklad $f(x) = x$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\varepsilon)(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}, |x-a|<\delta)(|x-a|<\varepsilon)$

Příklad $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0;1)$



$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists a \in (0,1))(\forall x \in (0,1), |x-a|<\delta)\left(\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| \ge \varepsilon\right)$

Zvolme $\varepsilon = 1$

① $x = 2a \Rightarrow |\underbrace{2a}_{x}-a| < \delta \Rightarrow a < \delta$

② $\left|\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right| \ge \varepsilon \iff \left|\frac{1}{2a}\right| \ge 1 \Rightarrow 1 \ge 2a \iff \frac{1}{2} \ge a$

$a \in (0, \min\{\frac{1}{2}, \delta\})$

$f(x)$ není stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$

Cantorova věta

Pokud f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak je f spojitá na $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně

Důkaz SPOREM

$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x \in \langle a,b\rangle)(\exists y \in \langle a,b\rangle, |x-y|<\delta)$
$(|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon)$

Mám jedno ε

$\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$

$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n, y_n \in \langle a,b\rangle, |x_n - y_n| < \frac{1}{n})(|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon)$

Z posloupnosti x_n lze jistě vybrat x_{k_n} mající limitu,

$\lim x_{k_n} = L \in \langle a,b\rangle$

Protože platí $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n}$ tak i $\lim y_{k_n} = L$

Podle Heineovy věty je

$$\lim f(x_{k_n}) = \lim_{x \to L} f(x) = f(L)$$

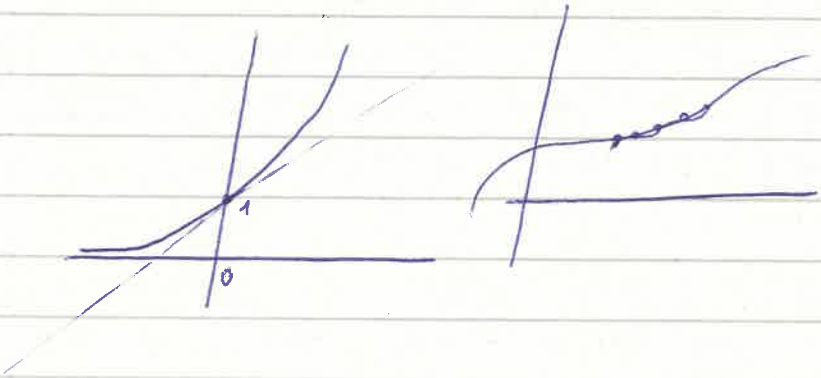
a ze stejného důvodu

$$\lim f(y_{k_n}) = \lim_{x \to L} f(x) = f(L)$$

to ale znamená, že platí $\lim |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0$

To je ale spor.

Aproximace funkce polynomem



Definice a věta

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, f je funkce, která má v bodě a n-tou konečnou derivaci, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$.
Pak existuje jediný polynom $T_n^{f,a}$ stupně nanejvýš n, takový, že pro každé $k = 0, 1, \dots, n$ platí

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Tento polynom nazýváme n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a.

Důkaz

Nechť p je polynom stupně $\leq n$

$$P_{n+1} = [1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n]_\lambda$$

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

$$p(a) = a_0 = f(a)$$

$\Rightarrow a_0 = f(a)$

$p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + n\,a_n(x-a)^{n-1}$

$p'(a) = a_1 = f'(a)$

$\Rightarrow a_1 = f'(a)$

$p''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$

$p''(a) = 2a_2 = f''(a)$

$\Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}$

$\vdots$

$p'''(a) = 6 \cdot a_3 = f'''(a)$

$a_3 = \frac{f'''(a)}{6}$

$\vdots$

$p^{(k)}(a) = k!\,a_k = f^{(k)}(a)$

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$

$$p(x) = T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Příklad: $f(x) = e^x,\ a = 0,$

$f^{(k)}(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \longrightarrow e^1$

Domácí úkoly, do září 24.00

$f: (0,1) \to (0,1)$

$x \in (0,1),\ x = 0{,}x_1x_2x_3x_4x_5x_6\dots$

$f(x) = 0{,}x_2x_1x_4x_3x_6x_5\dots$

① Je funkce spojitá v bodě $a = \frac{1}{3}$?

① Je funkce spojitá v bodě $a = \frac{1}{4}$?

② Popište, určete kolik je bodů nespojitosti?

Dokázat: derivace liché fce je sudá a naopak

$f(x) = \sin x$, $a = 0$,

$f^{(0)}(0) = \sin 0 \quad 0$
$f'(0) = \cos 0 \quad 1$
$f''(0) = -\sin 0 \quad 0$
$f'''(0) = -\cos 0 \quad -1$
$f^{IV}(0) = \sin 0 \quad 0$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2n+2}(x)$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a = 0$

$f^{(0)}(0) = 1^\alpha$
$f'(0) = \alpha(1)^{\alpha-1}$
$f''(0) = \alpha(\alpha-1)(1)^{\alpha-2}$
$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1)^{\alpha-3}$
$\vdots$
$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1)^{\alpha-k}$

$$T_n(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{\alpha}{1}x^1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} =: \binom{\alpha}{n}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\underbrace{R_n(x)}_{\text{Zbytek}} = f(x) - T_n(x)$$

Věta

Nechť $\exists H_a$, že pro každé $x \in H_a$ existuje $f^{(n)}(x)$ a $f^{(n)}(x)$ je spojitá v bodě a

Pak $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

Důkaz

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x \to a} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} =$$

$$= \dots = \lim_{x \to a} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\dots 2(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{R^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

Označíme $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} =: \omega_n$; $R_n(x) = (x-a)^n \omega_n(x)$ Peanův tvar zbytku

$$f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \omega_n(x), \ \forall x \in H_a$$

Příklad

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \omega_3(x) - 1 - x + \frac{x^3}{3!} + x^3 \tilde{\omega}_3(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{6} + \omega_3(x) - \tilde{\omega}_3(x)\right)}{1}$$ neexistuje :(

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}_{T_3(x)} + x^3 \omega_3(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \tilde{\omega}_3(x)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 5n} \right) = \lim_{n \to +\infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1 + \left(\frac{-2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} x + x \omega_1 x$$
$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + x \tilde{\omega}_1 x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}w_1\left(\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)+\left(\frac{-2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)\tilde{w}_1(\ldots)\right)\right.\right.$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n+\frac{1}{4}+w_1\left(\frac{1}{n}\right)-n-\frac{1}{3}\left(-2+\frac{5}{n}\right)-\left(-2+\frac{5}{n}\right)\tilde{w}_1(\ldots)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$$

Věta |

Nechť f, n, a splňují základní předpoklady z předchozí věty.
A nechť $Q(x)$ je polynom stupně $\leq n$, že $Q(x) \neq T_n(x)$
Pak $(\exists H_a^*)(\forall x \in H_a^* - \{a\})(|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q(x)|)$

Důkaz |

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

a existuje $i \in \{0;1,\ldots n\}$, že $a_i \neq b_i$

$$f(x) - T_n(x) = (x-a)^n w_n(x)$$

$$f(x) - Q(x) = \underbrace{T_n(x) + (x-a)^n}_{f(x)} - Q(x) =$$

$$= \sum_{k=i}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^n + (x-a)^n w_n(x),$$ ~~kde~~

kde i je minimální index, že $a_i \neq b_i$

$$F(x) = \frac{|f(x)-Q(x)|}{|x-a|^i} \xrightarrow[x\to a]{} |a_i - b_i| > 0$$

$(*) = \frac{|f(x) - T_n(x)|}{|x-a|^i} = |(x-a)^{n-i} w_n(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$

$x - a|' - \lim F(x) > \lim G(x) = 0$

$\Rightarrow (\exists H_a - \{a\})(\forall x \in H_a)(F(x) > G(x))$

$H_a =: H_a^*$

Domácí úkol

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{\cos(ax) - \cos(bx)},$$ kde $|a| \neq |b|$, $a, b \in R$

~~Věta~~

Věta/

Nechť pro f, a, n platí základní předpoklady

Pokud pro polynom p stupně $\leq n$ a $\tilde{w}(x)$ platí na jistém okolí bodu H_a $\xrightarrow{p(x)}$ $f(x) = p(x) + (x-a)^n \tilde{w}(x)$.

Pak $p(x)$ je n-tý Taylorův polynom

Příklad/

$f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2x e^{x^2}$

$f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2 e^{x^2}$

x

$e^y = T_n(y) + y^n w_n(x)$, $\forall y \in R$, $\lim_{y \to 0} w_n(y) = 0$

$\forall x \in R$, $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{k!} + x^{2m} w_m(x^2)$

$\mu o\ e^{x^2}: T_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{k!}$

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{k!} + \underbrace{\cancel{\frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2}}}_{=0}$$

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{1}{k!} \Rightarrow f^{(2k)}(0) = \frac{(2k!)}{k!}$$

$$T_{m,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$(T_{m,f,a}(x))' = \sum_{\substack{k=1 \\ k-1=j}}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^{k-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(f')^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j =$$

$$= T_{m-1,f',a}(x)$$

$$\sin x \to T_{2m+1}(x) = T_{2m+2}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x \to T_{2m}(x) = T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$\ln(1+x) = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$T_{m,f'}(x) = \sum (-1)^k x^k$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\ldots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k$$

$$T_{m,f}(x) = \underbrace{C}_{\frac{f^{(0)}(0)}{0!}=0} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$$

Věta| Taylorová

Nechť existuje $\exists H_a$ tak, že pro každé $x \in H_a$ existuje $f^{(n+1)}(x)$ a je konečná

Pak pro každé $x \in H_a$ $\exists \xi$ který leží mezi x a a takový, že

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Důkaz|

Mějme $f(x)$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

① $x > a$

$\psi : \langle a, x \rangle \to \mathbb{R}$

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k, \; z \in \langle a, x \rangle$$

$$\psi(a) = T_n(x)$$
$$\psi(x) = f(x)$$

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

*Lagrangeova věta o přírůstku funkce

$$\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x-a} = \psi'(\xi), \text{ kde } \xi \in (a, x)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$$

$$\psi'(z) = f'(z) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k - \frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!}(x-z)^{k-1}\right) =$$

$$= f'(z) + \left(\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{0!}\right) + \left(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right) + \dots$$

$$\dots = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

$$\frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a} = \frac{R_n(x)}{x-a} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$$

Cauchyův tvar zbytku

$\varphi : \langle a, x\rangle \to \mathbb{R}$

Cauchyova věta o přírůstku funkce

$$\frac{\psi(x)-\psi(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{R_n(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$\varphi(z) := (x-z)^{n+1}$

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} = \frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n}$$

$$e^x = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\xi}}{(m+1)!} x^{m+1} \quad , \xi = \xi(x,m)$$

Chci ukázat, že $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{e^{\xi}}{(m+1)!} x^{m+1} = 0$, po každé $x \in R$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{e^{\xi}}{(m+1)!} |x|^{m+1} = 0, \quad |\xi| < |x|$$

$$e^{|\xi|} < e^{|x|}$$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{e^{|x|}|x|^{m+1}}{(m+1)!} \to \text{odmocninové kritérium}$$

$$\lim \sqrt[m+1]{\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}} = 0 \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} \frac{e^{|x|}|x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0$$

$$\Rightarrow e^x = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\ln(x+1) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$f^{(0)}(x) = \ln(1+x)$, $T_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $-1 < x \leq 1$

$f'(x) = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$ Kdyby byla lim ta konečná, tak

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$

$f^{IV}(x) = 2 \cdot 3 (1+x)^{-4}$ $\lim(s_{m+1} - s_m) = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1} \neq 0$

$\vdots$

$$f^{(k)} = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

$$R_m(x) = \frac{(-1)^m m! (1+\xi)^{-m-1}}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$$R_m(x) = \frac{(-1)}{m+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\xi_{x,m}}\right)^{m+1}$$

$$|R_m(x)| \leq \frac{1}{m+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right) \qquad 1 - |x| < 1 + \xi$$

$$\text{po } 0 < x \leq 1 \quad |R_m(x)| \leq \frac{1}{m+1} |x|^{m+1} \to 0$$

Pro $-1 < x < 0$ použijeme Cauchyův tvar zbytku

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x (x-\xi)^n$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{n!} (1+\xi_{x_n})^{-n-1} x (x-\xi_{x_n})^n$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x}{1+\xi_{x_n}}\right| \left|\frac{x-\xi_{x_n}}{1+\xi_{x_n}}\right|^n$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|}{1-|x|} \cdot |x^n| \cdot \left|\frac{1-\frac{\xi}{x}}{1+\xi}\right|^n \leq \frac{|x|}{1-|x|} \cdot |x^n| \to 0$$

Ukážeme, že $\left|\frac{1-\frac{\xi}{x}}{1+\xi}\right| < 1$

$$1 - \frac{\xi}{x} < 1 + \xi$$

$$0 < \xi + \frac{\xi}{x} = \underbrace{\frac{\xi}{x}}_{>0} \underbrace{(x+1)}_{>0}$$

Špatné chování Taylorových polynomů

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ pouze pro $x = a$

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

① $f(x)$ má na celém R všechny derivace
② $f^{(n)}(0) = 0$ pro každé $n \in N$

Číselné řady

Definice
Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost.
Položme $s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
Pak $((a_n)_{n=1}^{+\infty}, (s_n)_{n=1}^{+\infty})$ nazýváme číselná řada.
Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a_n - n-tý člen číselné řady
s_n - n-tý částečný součet

Pokud $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existuje a je konečná, říkáme, že řada konverguje
Značíme $\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nazýváme součet řady
Pokud $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existuje a je nekonečná, říkáme, že podstatně diverguje

Pokud $\lim_{n \to +\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že osciluje

Věta Nutná podmínka konvergence

Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Důkaz

Konečnost limity součtů posloupnosti (s_n) implikuje

$0 = \lim (s_n - s_{n+1}) = \lim a_n$

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady.

- Když řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují, tak i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ konverguje
- Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje, tak i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverguje

Definice

Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n)$ mají stejný charakter

Věta Bolzanovo - Cauchyho kritérium konvergence

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\right)$

Důsledek

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Důkaz

Konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je ekvivalentní výroku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon\right)$$

s trojúhelníkovou nerovností: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon$

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada

- Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně
- Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně

Věta

Nechť pro nezáporné posloupnosti (a_n) a (b_n) platí, že $a_n \leq b_n$ od jistého indexu n_0

- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

Věta

Nechť pro kladné posloupnosti (a_n) a (b_n) platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého indexu n_0.

- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

Důkaz:

Napišme si tyto nerovnosti pro indexy $k = n_0, n_0+1, \dots, n-1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} &\le \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} &\le \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &\le \frac{b_n}{b_{n-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_{n_0+1}\, b_{n_0} &\le b_{n_0+1} \cdot a_{n_0} \\ a_{n_0+2}\, b_{n_0+1} &\le b_{n_0+2} \cdot a_{n_0+1} \\ &\vdots \\ a_n\, b_{n-1} &\le b_n \cdot a_{n-1} \\ \hline \odot \qquad & \\ a_n\, b_{n_0} &\le a_{n_0} \cdot b_n \end{aligned}$$

$$a_n \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$$

Tyto řady tedy mají stejný charakter, tvrzení věty je dokázáno.

Věta:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou kladné posloupnosti, takové, že existuje

$$L = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

- Pokud $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $L > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje
- Pokud $0 < L < +\infty$, pak řady $\sum b_n$ a $\sum a_n$ mají stejný charakter

Důkaz:

Stačí dokázat první dva body, třetí z nich přímo plyne

① $L < +\infty$: pak od jistého n platí $\frac{a_n}{b_n} < L+1$, tedy $a_n < (L+1)b_n$, to už vynucuje konvergenci s druhým předpokl.

② $L > 0$: • pokud $L < +\infty$, tak od nějakého n platí $\frac{a_n}{b_n} > \frac{L}{2} \Leftrightarrow a_n > \frac{L}{2} b_n$

• Pokud $L = +\infty$, pak od nějakého n platí $\frac{a_n}{b_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > b_n$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$, $s_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$ je rostoucí

$k_n = 2^n$, $\lim s_{2^n} = L$

~~$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_3 + a_4 + \dots + a_{32} + a_{33} + \dots + a_{2^n}$~~

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + \dots + a_8}_{4a_8} + \underbrace{a_9 + \dots + a_{16}}_{8a_{16}} + \underbrace{a_{17} + \dots + a_{2^n}}_{2^{n-1} a_{2^n}} \geq (*)$$

$$(*) \geq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\to +\infty}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje}}$$

Kondenzační kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

(1) $\exists q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

(2) ~~[illegible]~~ $\exists_\infty n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

Limitní tvar

(1) Pokud $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

$\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$

$\iff \exists n_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \quad 0 < \sqrt[n]{a_n} < 1$

(2) Pokud $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

D'Alembertovo kritérium

(1) $\exists q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

$\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$(\exists_\infty n \in \mathbb{N})$

nesmysl

limitní tvar

① $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

② $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

rozmyslet $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, proč nejde?

a_n

Raabeho kritérium

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$

① $\exists \alpha > 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

② $\forall n \in \mathbb{N},\ n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \alpha \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha \Rightarrow 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\alpha}{n} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

hledám konverg. řadu $\sum b_n$ takovou

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1 - \frac{\alpha}{n}$$

$$\alpha = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \text{ konverguje.}$$

$$b_n = \frac{1}{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \frac{(n-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}{1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} w_n\left(-\frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1+\varepsilon}{n} \Big/ \cdot n$$

$$-1 + \frac{\varepsilon}{2} - w_n\left(-\frac{1}{n}\right) \geq (1+\varepsilon)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq w_n\left(-\frac{1}{n}\right)$$

limitní tvar

① $\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)>1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

② $\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)<1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

Příklad

$$\sum \underbrace{\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|}_{a_n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\frac{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}}{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}}\right|=\left|\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1}\right| \to 1$$

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim n\left(1-\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)=\lim \frac{n}{n+1}\frac{3}{2}\to\frac{3}{2}>1$$

Gaussovo kritérium

Nechť $\exists q, \alpha\in\mathbb{R}$, $\exists \varepsilon>0$, $\exists (c_n)$ omezená tak, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q-\frac{\alpha}{n}+\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Pak
- $q<1$ nebo ($q=1$ a $\alpha>1$) $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje
- $q>1$ nebo ($q=1$ a $\alpha<1$) $\Rightarrow \sum a_n$ diverguje
- $q=1$ a $\alpha=1$ $\Rightarrow \sum a_n$ diverguje

Dk/
- $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=q\neq 1$ plyne z d'Alemberta
- $q=1$: $\frac{\alpha}{n}-\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}=1-\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \alpha-\frac{c_n}{n^{\varepsilon}}=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\to\alpha$
- $q=1$ a $\alpha=1$: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}+\frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\overset{?}{\geq}\frac{b_{n+1}}{b_n}$

hledám divergentní $\sum b_n$

$$\text{tip: } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} =: b_n$$

[illegible]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \quad \text{neabsolutně konvergentní}$$

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \to \gamma$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln \cancel{n} + \gamma =: \varepsilon_n \to 0$$

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} =$$

$$= \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + \varepsilon_n) - \frac{1}{2}(\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}) =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n - \frac{1}{2}\varepsilon_{2n} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 \to \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$$

$\downarrow$ zkoumejme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n\alpha)}{n} + i\,\frac{\sin(n\alpha)}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \underbrace{(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))}_{b_n}$$

- a_n je monotónní
- Má b_n omezené částečné součty?

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (\cos\alpha + i\sin\alpha)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} q^k\right| = \underbrace{\left|q\,\frac{q^n-1}{q-1}\right|}_{\text{pro } q \neq 1} = ⊛$$

n pro $q = 1$

$$⊛ = \left|\frac{q}{q-1}\right| \left|q^n - 1\right| \leq \frac{2}{|\cos\alpha + i\sin\alpha - 1|} \quad \text{nezávisí na } n!$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\log n}$$

Řady s obecnými členy

Věta $\boxed{\text{Dirichletova věta}}$

Nechť (a_n) je reálná, (b_n) komplexní posloupnost takové, že
① (a_n) je monotónní
② $\lim a_n = 0$
③ (b_n) má omezené částečné součty
tj. $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq K)$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Důkaz

Ukážeme platnost B.C. kritéria, tj. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})$ $(|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k| < \varepsilon)$

$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $b_n = B_n - B_{n-1}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k\right| =$$

$$= \left|a_{n+p} B_{n+p} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k}_{\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k} - a_{n+1} B_n\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|a_{n+p}|}_{\leq |a_n|} \underbrace{|B_{n+p}|}_{\leq K} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \underbrace{|B_k|}_{\leq K} + \underbrace{|a_{n+1}|}_{\leq |a_n|} \cdot \underbrace{|B_n|}_{\leq K} \leq$$

$$\leq 2|a_n| \cdot K + K \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \circledast$$

$|A+B| = |A| + |B|$ pokud $A, B \in \mathbb{R}$ a mají stejná znaménka

$$\circledast = 2|a_n| \cdot K + K \underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k - a_{k+1}\right|}_{|a_{n+1} - a_{n+p}|} \leq 2|a_n| \cdot K + K|a_{n+1}| + K|a_{n+p}| \leq 4K|a_n|$$

$\lim a_n = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon' > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(|a_n| < \varepsilon')$

Σ -

Pro libovolné ε zvolíme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4K}$ a pak zvolíme $n_1 = n_0$

Věta/ Abelovo kritérium

Nechť (a_n) je reálná, (b_n) komplexní posloupnost, takové, že ① (a_n) je monotónní

② $\lim a_n$ je konečná

③ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Důkaz/

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n}_{\text{z Dirichletovy věty}} + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Věta/ Leibnizovo kritérium

Nechť a_n je klesající posl. a $\lim a_n = 0$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje

Důkaz/

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$s_{2n} = \underbrace{-a_1 + a_2}_{\leq 0} \underbrace{- a_3 + a_4}_{\leq 0} - \ldots \underbrace{- a_{2n-1} + a_{2n}}_{\leq 0} \leq 0$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_n$$

$$\lim s_{2n} \leq 0 \wedge \lim s_{2n+1} \geq -a_1$$

$$s_{2n+1} = -a_1 + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0} + \underbrace{a_4 - a_5}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq -a_1$$

$$s_{2n+1} = s_n - a_{n+1} \Rightarrow \lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$x = \frac{\pi}{7}$,

$$\sin \frac{\pi}{7} = \sum_{n=1}^{M} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{7}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \text{chyba}$$

Z Leibnitzova kr.: $|\text{chyba}| \leq \dfrac{\left(\frac{\pi}{7}\right)^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}$

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergentní z Leibnitzova kritéria

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ Diverguje

- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$
  - není monotónní, nelze použít Leibnitzova kr.

$$b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = ⊛$$

$$\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(1+\omega_2\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$⊛ = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(1+\omega_2\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{konv.}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{DIVERG.}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}}_{\text{konv.}}\left(1+\omega_2\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Gaussovo modifikované kritérium, $a_n > 0$, $\sum (-1)^n a_n$
Nechť $\exists\, \alpha, q, \varepsilon$ a omezená posloupnost (c_n), taková že $\varepsilon > 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}$$

Pak platí
① $q < 1$ nebo $(q = 1 \text{ a } \alpha > 1) \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ K Absolutně
② $q > 1$ nebo $(q = 1 \text{ a } \alpha \leq 0) \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ Diverguje
③ $q = 1$ a $\alpha \in (0, 1\rangle \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ K Neabsolutně

Důkaz!

① Plyne z Gaussova kritéria

② předpoklady vynutí, že $\lim a_n \neq 0$

③ pomocí Leibnitzova kritéria

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \iff n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha - \frac{c_n}{n^{\varepsilon}}$$

$\alpha \in (0,1)$

> 0

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$$

$$1 > \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

splněn první předpoklad Leibnize: $a_n > a_{n+1}$

limita a_n: $\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right) \; \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 1$
$n = 2$
$n = 3$
$\vdots$
$n = N-1$

$$\ln a_{N-1} - \ln a_1 = \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$-\ln a_1 + \lim_{n \to +\infty} \ln a_N = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$\lim a_n = 0 \iff \lim \ln a_n = -\infty$$

TBD

Hint: • od jistého n_0 $\quad 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} < 1$

• $-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ je kladné

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}, \; x \in R$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \cdot \sin k}{k^2+1}$$

$$-\sum_{n=n_0}^{\infty} - \overbrace{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)}^{a_n} \quad a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)}{\frac{\alpha}{n}} \; b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)}{-\frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}} \cdot \frac{-\frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}}{-\frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{n}{n} = 1$$

(a_n) se chová v nekonečnu jako $\frac{\alpha}{n}$

Uzávorkování řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{A_1} + \underbrace{(a_3)}_{A_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6)}_{A_3} + \dots$$

sestrojíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada a $(k_n)_0^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost celých čísel a $k_0 = 0$

Položme $A_n := a_{k_{n-1}+1} + \dots + a_{k_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ nazýváme uzávorkování řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podle (k_n)

Př) $k_n = 2n$ $\quad \underbrace{(a_1 + a_2)}_{A_1} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{A_2} + \underbrace{(a_5 + a_6)}_{A_3} + \dots$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \qquad S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$s_{k_n} = S_n$$

$L = \lim s_n$, konečná $\Rightarrow \lim s_{k_n} = L = \lim S_n$

$\sum a_n$ K $\Rightarrow \sum A_n$ K
D D

$\lim S_n$ neexistuje $\Rightarrow \lim s_n$ neexistuje

Věta/
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada, $(k_n)_0^{\infty}$ a nechť platí
① $\lim a_n = 0$
② $(\exists M)(\forall n \in N)(k_n - k_{n-1} \leq M)$

Pak $\sum a_n$ konverguje (diverguje, osciluje) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sum A_n$ konverguje (diverguje, osciluje)

Důkaz/

Uvažujme těchto M posloupností $(S_n), (S_n + a_{k_n+1}),$
$(S_n + a_{k_n+1} + a_{k_n+2}), \dots, (S_n + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_n+M-1})$

$\{k_n\} \cup \{k_n+1\} \cup \dots \cup \{k_n+M-1\} \overset{\varphi}{=} N$

Nechť $\sum A_n$ konverguje (diverguje), tj. $\lim S_n = L$ konečné ($\pm\infty$)

$s_{k_n+1} = S_n + \underset{\downarrow 0}{a_{k_n+1}} \to L$

$s_{k_n+2} = S_n + \underset{\downarrow 0}{a_{k_n+1}} + \underset{\downarrow 0}{a_{k_n+2}} \to L$

Přerovnání řady

Definice/
Nechť $\sum a_n$ číselná řada, $\varphi: N \to N$ - φ je bijekce
Řadu $\sum a_{\varphi(n)}$ nazveme přerovnání řady $\sum a_n$ podle φ

Věta/
Pokud $\sum a_n$ konverguje absolutně $\Rightarrow \sum a_{\varphi(n)}$ konverguje absolutně a mají stejný součet

Věta / Riemannova věta

(a_n) je reálná posloupnost a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně

pak po každé $L \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = L$

a $\exists \psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $\sum a_{\psi(n)}$ osciluje

Důkaz / (předchozí věta)

$\sum a_n$ KA, tj $\sum |a_n|$ K

Chci ukázat, že $\sum |a_{\varphi(n)}|$ K

$$s'_n = \underbrace{|a_{\varphi(1)}|}_{\geq 0} + \underbrace{|a_{\varphi(2)}|}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{|a_{\varphi(n)}|}_{\geq 0} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = s_{k_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$k_n = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$$

Proto s'_n konverguje

① Nechť $a_n \geq 0$, $\forall n$

$$s'_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

$$s' = \lim s'_n = s$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_{\varphi(n)}}_{b_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_{\varphi^{-1}(n)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(\varphi^{-1}(n))}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

② $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n^+ := \frac{a_n + |a_n|}{2} \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \text{ K} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$$

$$a_n^- := \frac{|a_n| - a_n}{2} \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \text{ K} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^+_{\varphi(n)} + a^-_{\varphi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_n + a^-_n$$

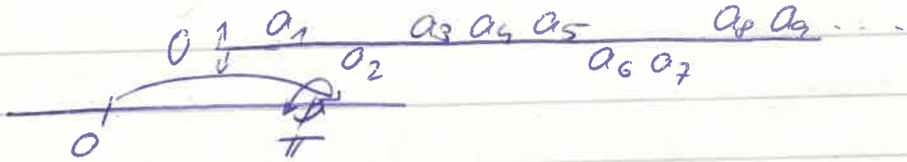
Důkaz/Riemann

$\sum a_n$ K a $\sum |a_n| = +\infty$ $\longrightarrow$ $\lim a_n = 0$

$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $\sum a_n^+ = +\infty$

$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$, $\sum a_n^- = +\infty$

$L = \pi$



sčítám tolik kladných členů až se dostanu přes π.
odčítám tolik záporných členů, až se dostanu pod π

protože $\sum a_n^+ = +\infty$ a $\sum a_n^- = +\infty$ se dostanu k jakémukoliv číslu v $\overline{\mathbb{R}}$

Proč by věta neplatila pro komplexní?

Definice

$\sum a_n$, $\sum b_n$ číselné řady a nechť $\varphi: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, s členy $c_n = a_i b_j$, kde $\varphi(i,j)=n$ nazýváme součinem řad při bijekci φ.

Věta

Pokud $\sum a_n$ a $\sum b_n$ k. absolutně, pak každý součin k. absolutně a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Důkaz

Mějme bijekci $\phi: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Číslo i_n nechť označuje první složku $\phi^{-1}(n)$
Číslo j_n nechť označuje druhou složku $\phi^{-1}(n)$.
Tj. $\phi(i_n, j_n) = n$

Položme $k_n := \{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n\}$

Pak $\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{k_n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{k_n} |b_k|\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right)$

To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ má omezené částečné součty. Proto je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolutně konvergentní.

Součet absolutně konvergentní řady lze získat z libovolného přerovnání a uzávorkování řady.

Označme $M_k := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq k, j \leq k, (k-i)(k-j) = 0\}$

Zřejmě $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = \mathbb{N}^2$ a $M_k \cap M_l = \emptyset$, když $k \neq l$

Součet řady lze získat takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in M_k} a_i b_j = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

Definice /

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady.

Řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_{n-k}) \right)$ nazýváme součinovou řadou

řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Důsledek /

Pro absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_n b_{n-k} \right)$$

Začíná-li indexování členů řad od jiného indexu, než jedna, např. od nuly, musíme příslušně upravit i indexování součinové řady.

Protože

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}$$

platí pro absolutně konvergentní řady:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} b_{n-k-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k-2} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Komplexní mocnina

Uvažujme dvě absolutně konvergentní řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \quad a \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

určeme n-tý člen jejich součinové řady

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{1}{n!} (\alpha+\beta)^n$$

Z důsledku tedy plyne

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$$

To nám umožňuje definovat komplexní mocninu

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

Nyní můžeme psát

$$e^{i\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \phi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\phi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\phi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\phi + i \sin\phi$$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \quad \text{pro } \phi \in \mathbb{R}$$

Mocninné řady

Definice/
Nechť $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ je reálná (komplexní) posloupnost a nechť $a \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$).
Pak řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě a.
Množinu všech reálných (komplexních) čísel x, pro které mocninná řada konverguje nazýváme obor konvergence mocninné řady.
$S(x)$ označuje součet mocninné řady pro x z oboru konvergence

Věta/
Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že

1. pokud $|x-a| < \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje absolutně
2. pokud $|x-a| > \rho$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ diverguje

Důkaz/
Stačí ověřit platnost dvou tvrzení:
1. Když je posloupnost $(a_n (x_0-a)^n)$ omezená, pak pro každé x takové, že $|x-a| < |x_0-a|$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje absolutně

2. Když je posloupnost $(a_n (x_0-a)^n)$ neomezená, pak pro každé x takové, že $|x-a| > |x_0-a|$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ diverguje

a potom položit $\rho := \sup \{ |x_0-a| \mid (a_n (x_0-a)^n) \text{ je omezená} \}$

Předpokládejme, že v nějakém bodě x_0 je posloupnost $(a_n (x_0-a)^n)$ omezená. To znamená, že existuje $K > 0$, že $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n (x_0-a)^n| \leq K$.
Pak pro každé x, že $|x-a| < |x_0-a|$ dostaneme:

$$|a_n (x-a)^n| = |a_n| |x-a|^n = |a_n| |x_0-a|^n \left(\frac{|x-a|}{|x_0-a|} \right)^n \leq K \Bigg(\underbrace{\frac{|x-a|}{|x_0-a|}}_{<1} \Bigg)^n$$

Proto podle srovnávacího kritéria řada konverguje

Druhé tvrzení je zřejmé, neboť posloupnost $(a_n(x_0-a)^n)$ není omezená, a proto i $(a_n(x-a)^n)$ není omezená, pokud $|x-a|>|x_0-a|$ a není splněna podmínka konvergence

Definice

Číslo ρ z předchozí věty nazýváme poloměr konvergence mocninné řady

Věta

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je roven

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

přičemž klademe $\rho=0$, pokud limes superior je $+\infty$ a $\rho=+\infty$, pokud limes superior je 0

Důkaz

Z důkazu předchozí věty víme, že $\rho = \sup M$, kde $M = \{|y| \mid (a_n y^n) \text{ je omezená}\}$

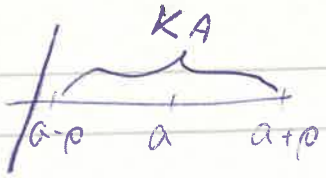
Popišme prvky M. Zřejmě $0 \in M$, uvažujme tedy $y \neq 0$.

Pak lze psát $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} = |y| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

- Když $\limsup \sqrt[n]{|a_n||y|^n} > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro nekonečně mnoho indexů n je $|a_n y^n| > (1+\varepsilon)^n$ a tedy $(a_n y^n)$ není omezená $\Rightarrow |y| \notin M$

- Když $\limsup \sqrt[n]{|a_n y^n|} < 1$, pak od jistého indexu je $|a_n y^n| < 1$ a tedy $(a_n y^n)$ je omezená $\Rightarrow |y| \in M$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \exists \rho \geq 0$$



$\rho = 0$: def. obor $s(x)$: $\{a\}$
obor konvergence

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Věta

$\rho > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \rho$ platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x-a)^n\right)'$$

Důkaz

$x_0 \in (a-\rho, a+\rho)$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}}_{\text{kandidát na limitu}} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$s(x) - s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n (x-a)^n - a_n (x_0-a)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\overbrace{(x-a)^n}^{A^n} - \overbrace{(x_0-a)^n}^{B^n} \right)}_{(x-x_0) \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k}} =$$

$$= (x-x_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k}$$

$$\frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1} =$$

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\underbrace{(x-a)^k (x_0-a)^{n-1-k} - (x_0-a)^{n-1}}_{(x_0-a)^{n-1-k}\left((x-a)^k - (x_0-a)^k\right)} \right) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x_0-a)^{n-1-k} (x-x_0) \sum_{i=0}^{k-1} (x-a)^i (x_0-a)^{k-1-i}$$

$$0 \le \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x_0-a)^{n-1-k} (x-x_0) \sum_{i=0}^{k-1} (x-a)^i (x_0-a)^{k-1-i} \right| \le$$

$$\le |x-x_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x_0-a|^{n-1-k} \sum_{i=0}^{k-1} |x-a|^i |x_0-a|^{k-1-i} \le$$

$$\rho_1 < \rho, \quad |x-a| < \rho_1$$

$$\le |x-x_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} \rho_1^{n-1-k} \cdot k \rho_1^{k-1} =$$

$$= |x-x_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \rho_1^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \underbrace{|x-x_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \rho_1^{n-2} \frac{n(n-1)}{2}}_{k\ A} =$$

$$= C \underbrace{|x-x_0|}_{0,\ \text{když}\ x \to x_0}$$

<u>Důsledek</u>

Pokud $\rho > 0$, pak $s(x)$ lze derivovat nekonečněkrát

$$s''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)(x_0-a)^{n-2}$$

$$s^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1) \dots (n-k+1)(x_0-a)^{n-k}$$

$$s^{(k)}(a) = a_k\, k(k-1) \dots 2 \cdot 1 = a_k\, k!$$

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{s^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k$$

Pozn: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ pro $x \in (-\varepsilon; \varepsilon)$

$$\boxed{a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!} = b_n}$$

Rozvoj funkce do mocninné řady

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ pro všechna $x \in I$, $a \in I^0$

- $f(x)$ musí mít nekonečně mnoho derivací
- musejí mít stejné Taylorovy polynomy

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$\Rightarrow$ je možné $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

Př. $\operatorname{arctg} x =: f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1;1)$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} + C, \quad x \in (-1;1)$$

$\operatorname{arctg} 0 = 0 = C$

Věta Abelova

Mocninná řada je spojitá na celém oboru konvergence

Důkaz

$\rho = 0$; pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje v $\{a\}$

def. obor $s(x)$ je izolovaný $\Rightarrow$ spojité

$\rho > 0$: def. obor $(a-\rho, a+\rho)$, $x \in (a-\rho, a+\rho)$ je $s(x)$ diferencovatelné $\Rightarrow$ spojité

$\quad [\quad\quad]$

$\quad \langle \quad\quad \rangle$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ platí pro } x \in (-1;1)$$

nemplatí pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty)$

$x = \pm 1: \pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konverguje (LEIBNIZ)

Z Abelovy věty je spojitá

$$\lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{pro } x \in \langle -1; 1 \rangle$$

Př: $\ln(1+x) =: f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{pro } x \in (-1;1)$$

$$f(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro } x \in (-1; 1\rangle$$

$f(0) = \ln(1+0) = 0$

Aplikace mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} = ?$$

Cauchy odm. $\sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} \to \frac{1}{e} < 1$ konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = f(x)$$

kdyż najdu f

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$\frac{1}{e} f\left(\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} =: f(x)$$

Řešení rekurentních rovnic

$F_0 = 1, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $\quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

$$F_{n+2} = 2F_{n+1} + 3F_n, \quad n \geq 0$$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^{n+2}}_{f(x) - \underset{0}{F_0} - \underset{1x}{F_1 x}} = 2x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1}}_{f(x) - \underset{0}{F_0}} + 3x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n}_{f(x)}$$

$$f(x) - x = 2x f(x) + 3x^2 f(x)$$

$$f(x)(1 - 2x - 3x^2) = x$$

$$f(x) = \frac{x}{1-2x-3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$\frac{x}{1-2x-3x^2} = \frac{x}{(1-3x)(1+x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right)$$

F_n = koeficient u x^n

$$F_n = \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)$$

DÚ: Stejnou metodou odvodit Fibonacci

$\boxed{\text{20. 4. 11:30 TEST}}$

Taylor, řady, mocninné řady

nebude součin řad, nebudou aplikace

Aplikace mocninných řad

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d_k \binom{n}{k}, \quad d_0 = 1, d_1 = 0$$

(d_n) neznámá posloupnost

$$n=2: \quad 2! = \sum_{k=0}^{2} d_k \binom{n}{k} = \underbrace{d_0 \binom{2}{0}}_{1} + \underbrace{d_1 \binom{2}{1}}_{0} + d_2 \binom{2}{2} \Rightarrow d_2 = 1$$

d_n ... počet permutací bez pevného bodu na $\hat{n}$.

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d_k \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \overset{x^n}{a_n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \overset{x^n}{b_n}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \underset{x^k}{a_k} \underset{x^{n-k}}{b_{n-k}}\Big) x^n$$

AK AK

$$d_n \le n!$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \overset{x^n}{\frac{d_n}{n!}}\Big)\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \overset{x^n}{\frac{1}{n!}}\Big)}_{e^x}$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{d_n}{n!}}} \ge \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\frac{1}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\Big)\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\Big)}_{e^x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x} e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot 1}_{c_n}$$

$$\Rightarrow \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\text{chyba} = \frac{\xi}{(n+1)!}, \quad \xi \in \langle -1; 1 \rangle \qquad d_n = n! \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\frac{1}{e}} - \text{chyba}\Big)$$

$$N \ni d_n = n!\left(\frac{1}{e} - \frac{\varepsilon}{(n+1)!}\right) = \frac{n!}{e} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{(n+1)}}_{\in \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle}$$

$n \geq 2$

$$\boxed{d_n = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right]}$$

Výpočet hodnot funkce

$$f(x) := \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1; 1\rangle$$

$\operatorname{arctg} 10 \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \frac{1}{10^{2n+1}} + \text{chyba}$$

$$|\text{chyba}| < \frac{1}{2N+3} \cdot \frac{1}{10^{2N+3}}, \quad N=4$$

$$\operatorname{arctg} 10 = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{?} - \operatorname{arctg} \frac{1}{10}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \text{chyba}$$

$$|\text{chyba}| < \frac{1}{2N+3} < \frac{1}{10^{12}} \; ?$$

tg x |4

$$\frac{\pi}{4} = 4 \overbrace{\operatorname{arctg} \frac{1}{5}}^{\alpha} + \overbrace{\operatorname{arctg} \frac{1}{239}}^{\beta}$$

$$1 = \operatorname{tg}(4\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

$$\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(4\alpha) - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}(4\alpha) \operatorname{tg} \beta}$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
20

1
2
6
20
70

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \overset{?}{=} \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{\alpha}{k}}_{a_k}\underbrace{\binom{\beta}{n-k}}_{b_{n-k}}$$

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \\ (1+x)^\beta &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}x^n\end{aligned}\right\} \text{pro } x \in (-1,1)$$

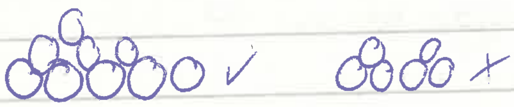
$$(1+x)^\alpha(1+x)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right)}_{c_n} =$$

$$= (1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\binom{\alpha+\beta}{n}}_{c_n^*} x^n$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Domácí úkol



P_n ... počet povolených obrázků, které mají ve spodní řadě právě n mincí

$$P_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (n-k), \quad n \geq 2, \quad P_1 = 1, \; P_2 = 2, \; P_3 = 5$$

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
Funkci F splňující podmínku

$$(\forall x \in (a,b))(F'(x) = f(x))$$

nazýváme primitivní funkcí k funkci f na (a, b).

Poznámka:
Pozorování

① Primitivní funkce není pojem lokální, nemá tedy smysl mluvit o primitivní bez udání intervalu

② Je-li F primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), pak F je primitivní funkcí k f i v každém podintervalu $(c, d) \subset (a, b)$

③ Z definice primitivní funkce plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy F je nutně spojitá na (a, b)

Věta

Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b).
Pak G je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje $c \in R$ takové, že

$$G(x) = F(x) + c, \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

Důkaz|

$\Rightarrow$ když F a G jsou funkce primitivní k f, pak
$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$,
Proto funkce $F - G$ je konstantní na (a, b)

$\Leftarrow$: $\exists c \in \mathbb{R}: G(x) = F(x) + c, \forall x \in (a, b)$
pak: $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x)$

Definice|
Nechť k funkci f existuje primitivní funkce v intervalu (a, b)
Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v (a, b) nazýváme neurčitým integrálem a značíme:

$\int f$ nebo $\int f(x)\,d\cancel{x}$

Poznámka|

Najdeme li ~~f~~ k f primitivní funkci F v intervalu (a, b), zapisujeme obvykle

$$\int f(x)\,d(x) = F(x) + c$$

Věta|
Nechť f je spojitá funkce na (a, b).
Pak f má v tomto intervalu primitivní funkci

Věta/
Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkcím f resp. g na (a,b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$
Pak ① $F \pm G$ je primitivní funkcí k funkci $f \pm g$ na (a,b)
② αF je primitivní funkcí k funkci αf na (a,b)

Důkaz/
Triviální

Metody výpočtu primitivní funkce

Věta/ Per partes
Nechť f a g jsou diferencovatelné na (a,b) a nechť H je primitivní funkce k $f g'$ na (a,b).
Pak $fg - H$ je primitivní funkce k funkci $f'g$ na (a,b)

Důkaz/
Z předpokladů plyne, že pro každé $x \in (a,b)$ je

$$(f(x)\cdot g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = $$
$$= f'(x)g(x)$$

To podle definice znamená, že $fg - H$ je primitivní funkcí k funkci $f'g$ na (a,b)

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

Věta | Substituce

Nechť po funkce f a φ platí

① f má primitivní funkci F na (a, b)

② φ je diferencovatelná na (α, β)

③ $\varphi(\alpha, \beta) \in (a, b)$

Pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α, β)

Důkaz |

$$((F \circ \varphi)(x))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \text{ v intervalu } (\alpha, \beta)$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$$

kde $x = \varphi(t)$

Umím $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t) + C$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = G(x) + C$$

$$x = \varphi^{-1}(y)$$

$$\int f(\varphi(\varphi^{-1}(y)))\,\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'}_{1}\,dy = G(\varphi^{-1}(y)) + C$$

$$\int f(y)\ 1 \cdot dy = G(\varphi^{-1}(y)) - C \qquad y = \varphi(\varphi^{-1}(y))$$

$$1 = \varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left.\begin{matrix} \arcsin x + C \\ = -\arccos x + C \end{matrix}\right\} \arcsin = -\arccos + \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\cosh t} \cosh t\,dt = t + C = \operatorname{argsinh} x + C$$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x \qquad e^t = x + \sqrt{x^2+1}, \; t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \qquad e^t - e^{-t} = 2x \Leftrightarrow (e^t)^2 - 1 - 2xe^t = 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = (*)$$

$x = \operatorname{tg} t$, $1+\operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$(*) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(\operatorname{arctg} x)}{1-\sin(\operatorname{arctg} x)}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C}$$

Integrace funkcí typu $\frac{p(x)}{q(x)}$

① $\int p(x)\,dx = \int (a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0)\,dx =$

$= a_k \underbrace{\int x^k\,dx}_{\frac{x^{k+1}}{k+1}} + \ldots + a_1 \int x\,dx + a_0 \int dx = \ldots$

② I. Zajistit, aby $st\, p < st\, q$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx = \int$$

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x+1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

II. BÚNO $st\, p < st\, q$

$q(x)$ polynom s reálnými koeficienty
$\Rightarrow$ komplexní kořeny chodí ~~v~~ ~~pár~~ v páru $\lambda, \bar{\lambda}$

$$q(x) = c \prod_{j=1}^{s} (x-\alpha_j)^{k_j}$$

$$\sum_{j=1}^{s} k_j = n,$$

III. Rozepsat jmenovatel do tvaru:

Polynom $q(x)$ lze napsat ve tvaru

$$(*)\ q(x) = C(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\cdots(x-d_m)^{k_m}(x^2+B_1x+f_1)^{l_1}\cdots(x^2+B_r x+f_r)^{l_r}$$

$C, d_1, \ldots, d_m \in R$

$B_i, f_i \in R\ ,\ B_i^2 - 4f_i < 0$

$(x-\lambda)^l(x-\bar{\lambda})^l$

$$(x^2 - \underbrace{(\lambda+\bar{\lambda})}_{\in R}x + \underbrace{\lambda\bar{\lambda}}_{\in R})^l$$

IV. $\dfrac{p(x)}{C(x-d_1)^{k}\cdots(x^2+B_r x+f_r)^{l_r}} =$ rozklad na parciální zlomky

Věta / Parciální zlomky

Pokud $st\, p < st\, q$ a q má tvar $(*)$

Pak existují konstanty

$$\frac{p(x)}{C(x-d_1)^{k_1}\cdots(x^2+B_r+f_r)^{l_r}} = \frac{A_{11}}{(x-d_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-d_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{x-d_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+B_1x+f_1)^{l_1}} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+B_1x+f_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+B_1x+f_1}$$

$$\frac{x^2-x}{x^3+1} = \frac{x^2+x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \Big/ \begin{matrix} x+1 \\ \lim_{x\to -1} \end{matrix}$$

$$\frac{2}{3} = A + 0$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Důkaz:

Matematickou indukcí na stupeň q

$$q=1: \quad \frac{c}{ax+b} = \frac{\frac{c}{a}}{x+\frac{b}{a}}$$

① Nechť $q(x)$ má reálný kořen α s násob. k

$$q(x) = (x-\alpha)^k \, \tilde{q}(x), \quad \tilde{q}(\alpha) \neq 0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k \cdot \tilde{q}(x)} + \frac{A}{(x-\alpha)^k} - \frac{A}{(x-\alpha)^k} =$$

$$= \frac{p(x) - A\tilde{q}(x)}{(x-\alpha)^k \tilde{q}(x)} + \frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad (*), \ \forall A \in \mathbb{R}$$

Zvolím A tak, aby $p(\alpha) - A\tilde{q}(\alpha) = 0$, tj. $A = \frac{p(\alpha)}{\tilde{q}(\alpha)}$

$$(*) = \frac{(x-\alpha)\tilde{p}(x)}{(x-\alpha)^k \tilde{q}(x)} + \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \frac{\tilde{p}(x)}{(x-\alpha)^{k-1}\tilde{q}(x)} + \frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

V. Najdi primitivní funkci $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^l}$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int (x-\alpha)^{-k}\,dx = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}, & k \neq 1 \\ \ln(x-\alpha), & k=1 \end{cases}$$

(Př.) $$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}_{\ln(x^2+1)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}}_{\operatorname{arctg} x}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^l}\,dx$$

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4}+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}_{\cancel{H}>0,\ =H^2} =$$

$$= H^2\left(\frac{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2}{H^2}+1\right) = H^2\left(\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{H}\right)^2+1\right)$$

$$\frac{x+\frac{\beta}{2}}{H} = y$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+3x+5}\,dx = \int \frac{2x+1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \underbrace{-\frac{9}{4}+5}_{\frac{11}{4}}}\,dx = \frac{1}{\frac{11}{4}}\int \frac{2x+1}{\left(\sqrt{\frac{4}{11}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)^2+1} = (*)$$

$$y = \sqrt{\frac{4}{11}}\left(x+\frac{3}{2}\right) \qquad (*) = \frac{4}{11}\int \frac{\frac{\sqrt{11}}{\cancel{4}}y-3+1}{y^2+1}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\,dy =$$

$$\frac{\sqrt{11}}{2}y = x+\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{11}}{2}y-\frac{3}{2} \qquad = \frac{2}{\sqrt{11}}\int \frac{B'y+C}{y^2+1}\,dy =$$

$$\int \frac{Dy+E}{(y^2+1)^l}\,dy = \frac{D}{2}\int \frac{2y}{(y^2+1)^l}\,dy + E\int \underbrace{\frac{1}{(y^2+1)^l}}\,dy$$

$$\frac{D}{2}\int \frac{1}{z^l}\,dz \leftarrow \begin{cases} y^2+1 = z \\ 2y = \frac{dz}{dy} \end{cases}$$

arctg x, $l=1$

P_j: a $\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$

$$\operatorname{arctg} y = \int 1 \cdot \frac{1}{(y^2+1)}\,dy = \frac{y}{y^2+1} + 2\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^2}\,dy = ⊛$$

$$f'(y) = 1 \qquad f(y) = y$$
$$g(y) = \frac{1}{y^2+1} \qquad g'(y) = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$$

$$⊛ \quad \frac{y}{y^2+1} + 2\left(\int \frac{1}{y^2+1}\,dy - \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy\right) =$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{y}{y^2+1} + 2\operatorname{arctg} y - 2\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy = \frac{y}{2(y^2+1)} + \operatorname{arctg} y$$

$$I_\ell = \int \frac{1}{(y^2+1)^\ell}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^\ell} + 2\ell \int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{\ell+1}}\,dy = (*)$$

$$f'(y) = 1 \qquad f(y) = y$$
$$g(y) = \frac{1}{(y^2+1)^\ell} \qquad g'(y) = -\frac{2y\ell}{(y^2+1)^{\ell+1}}$$

$$(*)\ \frac{y}{(y^2+1)^\ell} + 2\ell\Big(\underbrace{\int \frac{1}{(y^2+1)^\ell}\,dy}_{I_\ell} - \underbrace{\int \frac{1}{(y^2+1)^{\ell+1}}\,dy}_{I_{\ell+1}}\Big) =$$

$$\Rightarrow 2\ell I_{\ell+1} = \frac{y}{(y^2+1)^\ell} + (2\ell-1) I_\ell$$

$$I_{\ell+1} = \frac{1}{2\ell}\left(\frac{y}{(y^2+1)^\ell} + (2\ell-1) I_\ell\right)$$

$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ polynom ve dvou proměnných

$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ racionální funkce -//-

(1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ab - cd \neq 0$

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \varphi(x) = y \Rightarrow$ integrál typu $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

$$\int \frac{x^3 + x + \sqrt[3]{x-3}}{x\,\sqrt[3]{x-3}}, \quad R(x,z) = \frac{x^3+x+z}{x\cdot z}$$

$$z = \sqrt[3]{x-3}, \quad x-3 = \frac{1\cdot x + (-3)}{0\cdot x + 1} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x-2}}{x^2-x+\sqrt{x-2}} = \int \frac{x+z^2}{x^2-x+z^3}$$

$z := \sqrt[6]{x-2} = \sqrt[m]{\frac{1x-2}{0x+1}}$

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = y \Longleftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = y^m \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ax+b = cxy^m + dy^m \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(a-cy^m) = dy^m - b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{dy^m-b}{a-cy^m} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{P(y)}{(a-cy^m)}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \longrightarrow \int R\left(\frac{dy^m-b}{a-cy^m}, y\right)\frac{P(y)}{(a-cy^m)^2}\,dy$$

$$\int \frac{x^3+x+\sqrt[3]{x-3}}{x\sqrt[3]{x-3}}\,dx = \int \frac{(t+3)^2+t^3+3+t}{(t^3+3)t}\cdot 3t^2\,dt$$

$\sqrt[3]{x-3} = t$

$x-3 = t^3$

$x = t^3+3$

$\frac{dx}{dt} = 3t^2$

$\left(\frac{-1}{k}\right) = (-1)^k$

② $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = \int x^0 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$x^n = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\int t^{\frac{m}{n}} (a+bt)^p \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p\,dt$$

Čebyšev: ① když $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{k}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[l]{(a+bt)^k} = y$$

② když $p \in \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{k}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$

$$(\sqrt[l]{t})^k, \quad \sqrt[l]{t} = y$$

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1+p} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

③ když $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$

$$\int t^N \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{k}{l}} \to \text{typ } R\left(t, \sqrt[l]{\frac{a+bt}{t}}\right)$$

④ Když nenastává případ ①, ②, ③, pak neexistuje primitivní funkce v elementárním tvaru.

$$\int x^0 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$m=0,\ n=3,\ p=-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} = \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z} \\ p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \end{array}\right\} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$$ nemá primitivní funkci v elementárním tvaru

Eulerovy substituce

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}{x+\sqrt{1+x^2}} dx$$

nezáleží

① Pokud $a>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} =: \pm\sqrt{a}\,x + t$

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2$$

$$x(b \mp 2\sqrt{a}\,t) = t^2 - c$$

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t}$$

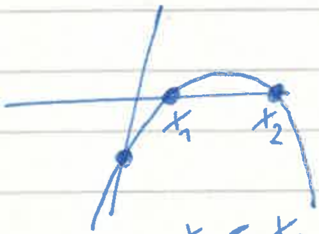
$$\frac{dx}{dt} = \frac{p(t)}{q(t)}$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{b \mp \sqrt{a}\,t},\ \pm\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t} + t\right) \frac{p(t)}{q(t)}\, dt$$

② $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} =: \pm\sqrt{c} + xt$

$$ax^2+bx+c = c \pm 2\sqrt{c}\,xt + x^2t^2$$
$$ax+b = xt^2 \pm 2\sqrt{c}\,t$$
$$x(a-t^2) = \pm 2\sqrt{c}\,t - b$$
$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}\,t - b}{a-t^2}$$

③ $a<0 \wedge c<0$, $ax^2+bx+c>0$ na nějakém intervalu



$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x-x_1)(x-x_2) = \sqrt{\underbrace{(x-x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2-x)}_{>0}\underbrace{(-a)}_{>0}} =$$

$x_1<x_2$, $D_f=(x_1,x_2)$

$$= \sqrt{-a}\,(x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}$$

$$\int R\left(x, k(x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}\right)dx$$

$\boxed{\text{Domácí úkol}}$

$\int \frac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{x^2+1}}\,dx$, použít obě možné eulerovy substituce

udělat zkoušku (derivaci)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1+xt$$
$$1-x^2 = 1+2xt+x^2t^2$$
$$-x = 2t+xt^2$$
$$-2t = xt^2+x$$
$$x = \frac{-2t}{t^2+1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2\,\frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = -2\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$-2\int \frac{1}{1+\frac{-2t}{t^2+1}t}\cdot\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1-2t^2}\,dt =$$

$$= -2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt = -2\operatorname{arctg} t =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + C =: G(x)$$

$$\lim_{x\to 0+} G(x) = 0,\ \lim_{x\to 0-} G(x) = 0$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{1-x^2-1}{x(\sqrt{1-x^2}+1)} =$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

určitě pomůže: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} =: y$ (V zoufalství!)

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx, \ x\in\mathbb{R}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} y, \quad y^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2}$$

(*) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = 2\cdot\frac{y}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2+\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,dy = 2\int \frac{1}{2+2y^2+1-y^2}\,dy =$$

$$= 2\int \frac{1}{y^2+3}\,dy$$

Kiedy $R(x,y) = R(-x,-y)$

połóż $y := \operatorname{tg} x$

Kiedy $R(-x,y) = -R(x,y)$

$$\int \frac{1}{x^5+1}\,dx$$

$$x^5 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)$$

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right),\ k = 0,1,2,3,4$$

$$x^5+1 = (x+1)\underbrace{(x^4-x^3+x^2-x+1)}_{\text{rozpoznawanie}}$$

$$x^4+1-x(x^2+1)+x^2$$

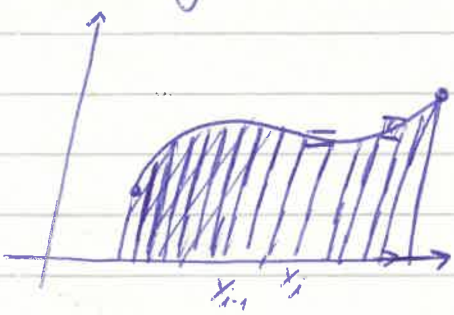
$$x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2} - \left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right),$$

$$x+\frac{1}{x} =: y \quad /^2$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

$$y^2-2-y+1$$

Určitý integrál (Cauchy-Riemannova definice)



$\sum \begin{smallmatrix}\text{plocha}\\ \text{obdelníků}\end{smallmatrix} \leq \text{plocha} \leq \sum \begin{smallmatrix}\text{plocha}\\ \text{obdelníků}\end{smallmatrix}$

Definice

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$

Rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$,

kde ~~x_0~~ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Značíme $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \hat{n}$ a $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_i \mid i \in \hat{n}\}$ norma rozdělení σ

Definice

Rozdělení σ' intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme zjemněním rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ pokud [illegible] $\sigma \subset \sigma'$

POZN: $\nu(\sigma') \leq \nu(\sigma)$

Př.

$\langle a, b\rangle$ ekvidistantní rozdělení

$\Delta_i = \nu(\sigma), \forall i \in \hat{n}$

$$\sigma = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, \underbrace{b}_{a + n\frac{(b-a)}{n}}\right\}$$

Definice

Nechť f je omezená funkce na $\langle a, b\rangle$
nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$

Položme $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ pro $i \in \hat{n}$
$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ pro $i \in \hat{n}$

Pak čísla $S(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$ a $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$ nazýváme

horní, resp. dolní součet funkce f při rozdělení σ

POZN. $k(a-b) \leq s(\sigma) \leq S(\sigma) \leq k(b-a)$
$f(x)$ omezená $\Leftrightarrow \exists k > 0, \forall x \in \langle a, b\rangle, |f(x)| \leq k$

Lemma

Nechť $\sigma \subset \sigma'$, kde σ', σ je rozdělení $\langle a, b\rangle$ a nechť f omezená funkce na $\langle a, b\rangle$.
Pak $s(\sigma) \leq s(\sigma')$ $S(\sigma) \geq S(\sigma')$

Dk. ① Nechť $c \notin \sigma$, $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, $c \in \langle a, b\rangle$
$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
$\exists i_0 \in \hat{n}, c \in \langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle$

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

$$S(\sigma') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} M_i \Delta_i + \Big(\sup_{x \in \langle x_{i_0-1}, c\rangle} f(x)\Big)(c - x_{i_0-1}) + \Big(\sup_{x \in \langle c, x_{i_0}\rangle} f(x)\Big)(x_{i_0} - c)$$

$$S(\sigma) - S(\sigma') = \sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f\,\underbrace{(x_{i_0} - x_{i_0-1})}_{(x_{i_0}-c)+(c-x_{i_0-1})} - \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\,(c - x_{i_0-1}) - \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\,(x_{i_0} - c) =$$

$$= \Big(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle c, x_{i_0}\rangle} f\Big)(x_{i_0} - c) + \Big(\sup_{\langle x_{i_0-1}, x_{i_0}\rangle} f - \sup_{\langle x_{i_0-1}, c\rangle} f\Big)(c - x_{i_0-1}) \geq 0$$

DODĚLAT ZE SKRIPT

Věta

Nechť σ_1 a σ_2 jsou libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, f omezená.

Pak $s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$

Dk

definujeme $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$

σ je zjemnění σ_1 a také σ_2

$\sigma \supset \sigma_1$, $\sigma \supset \sigma_2$

$$s(\sigma_1) \leq s(\sigma) \leq S(\sigma) \leq S(\sigma_2)$$

Definice

Buď f omezená

Čísla $\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(\sigma) \mid \sigma \text{ rozdělení } \langle a, b\rangle\}$

a $\overline{\int_a^b} f := \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ rozdělení } \langle a, b\rangle\}$

Pokud $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, pak říkáme, že f má integrál na $\langle a, b\rangle$

a jeho hodnota $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} f$

(Př)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup \{ s(\sigma) \mid \sigma \text{ rozdělení} \} = 0$$

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{0} \Delta_i = 0$$

$$\overline{\int_0^1} f = \inf \{ S(\sigma) \mid \sigma \text{ rozdělení} \}$$

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \overset{1}{b} - \overset{0}{a} = 1$$

DÚ
Existuje f taková, že $\{ s(\sigma) \mid \sigma \}$ konečná, ale ne 1 prvková!?

Věta/
Nechť f je omezená na $\langle a, b \rangle$

$\int_b^a f$ existuje $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma \text{ rozdělení } \langle a, b \rangle)(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon)$

Dk/ $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \qquad \varepsilon > 0$

vezmu $\frac{\varepsilon}{2}$, , $\underline{\int_a^b} f = \sup \{ s(\sigma) \mid \sigma \ldots \}$

$\int_a^b f$ existuje $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma$ rozdělení $\langle a,b\rangle)(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon)$

Věta

Když f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak $\exists \int_a^b f$

Dk

Cantorova věta: f spojitá na $\langle a,b\rangle \Rightarrow f$ je spojitá stejnoměrně

$(\forall \tilde{\varepsilon}>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y \in \langle a,b\rangle, |x-y|<\delta)(|f(x)-f(y)|<\tilde{\varepsilon})$

$$S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))\Delta_i < \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varepsilon}\Delta_i = \tilde{\varepsilon}(b-a) = \varepsilon$$

$\exists \xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$

$\varepsilon>0$ libovolné: $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow$ dostanu $\delta>0$: vezmu ekvidistantní rozdělení σ, že $\nu(\sigma) < \delta$

Věta

Když f je monotónní na $\langle a,b\rangle$, pak $\exists \int_a^b f$

nechť BÚNO f je rostoucí

Dk

$$S(\sigma) - s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta_i \leq \nu(\sigma) \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = (*)$$

1. f konstantní, triviální
2. f není konstantní: $f(b) > f(a)$

$(*)\ \nu(\sigma)(f(b) - f(a)) < \varepsilon$

libovolné $\varepsilon > 0$: zvolím σ tak, že $\nu(\sigma) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

~~Př~~ Př: Minule Dirichletova fce nemá integrál

Riemannova funkce $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ iracionální} \\ \frac{1}{q}, & \text{když } x = \frac{p}{q},\ p \perp q,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \end{cases}$

σ libovolné rozdělení

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \, \Delta_i = 0 \Rightarrow \underline{\int_0^1} f = 0$$

$$\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n^3}, \frac{2}{n^3}, \frac{3}{n^3}, \dots, \frac{n^3-1}{n^3}, \frac{n^3}{n^3}\right\}$$

$$S(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n^3} \sup_{\langle \frac{i-1}{n^3}, \frac{i}{n^3} \rangle} f \cdot \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^{n^3} \overbrace{\sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f}^{\le 1} \cdot \frac{1}{n^3} + \sum_{i=1}^{n^3} \overbrace{\sup f}^{\le \frac{1}{n}} \frac{1}{n^3} = (*)$$

i, kde $\sup f > \frac{1}{n}$ $\qquad$ i, kde $\sup f \le \frac{1}{n}$

v kolika bodech je $\sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f > \frac{1}{n}$

v kolika bodech intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $f(x) > \frac{1}{n}$, maximálně $2 + \binom{n-1}{2}$

$$0 < \frac{p}{q} < 1, \quad q < n$$

$$0 < p < q < n, \quad \binom{n-1}{2}$$

$$(*) = 1\left(2 + \binom{n-1}{2}\right)\frac{1}{n^3} + n^3 \frac{1}{n^4} \le \frac{2}{n}$$

$$0 = \overline{\int} f = \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \dots\} \le \inf\{\overbrace{S(\sigma_n)}^{\le \frac{2}{n}} \mid \sigma_n \dots\} = 0$$

Věta|

Nechť f omezená na $\langle a,b\rangle$ a $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$

Pokud $\exists \int_a^b f \Rightarrow \exists \int_c^d f$

Dk|

Musím ukázat: $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 : \exists \sigma$ rozdělení $\langle c,d\rangle$, $\underset{\langle c,d\rangle}{S(\sigma)} - \underset{\langle c,d\rangle}{s(\sigma)} < \tilde{\varepsilon}$

Libovolné $\tilde{\varepsilon} > 0$: , $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, dostanu σ intervalu $\langle a,b\rangle$

$\sigma^* := \sigma \cup \{c,d\}$ rozdělení $\langle a,b\rangle$, zjemnění $\langle a,b\rangle$

Při zjemnění $S(\sigma^*) \leq S(\sigma)$

$s(\sigma^*) \geq s(\sigma) \quad /(-1)$

$S(\sigma^*) - s(\sigma^*) \leq S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$

$\Rightarrow S(\sigma^*) - s(\sigma^*) < \varepsilon$

$\tilde{\sigma} := \sigma^* \cap \langle c,d\rangle$

$$S(\tilde{\sigma}) - s(\tilde{\sigma}) = \sum_{i\text{, takové, že patří do } \langle c,d\rangle} (\sup f - \inf f)\Delta_i \leq \sum_{i\text{, že patří do } \langle a,b\rangle} (\sup f - \inf f)\Delta_i$$

Věta|

Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$ a $a < c < b$

Pokud $\exists \int_a^c f$ a $\exists \int_c^b f$, pak $\exists \int_a^b f$

$\exists \sigma^{(2)}$ rozdělení $\langle c,b\rangle$

$\exists \sigma^{(1)}$ rozdělení $\langle a,c\rangle$, $S(\sigma^{(2)}) - s(\sigma^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$S(\sigma^{(1)}) - s(\sigma^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Položme $\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$ rozdělení $\langle a,b\rangle$