POZNÁMKY Z DIFR

WIKI SKRIPTUM

Date: 20. listopadu 2019
dle přednášky doc. Humhala.

Obsah

1. Úvod

Obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu je každá rovnice tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

kde F je funkce $n+2$ proměnných taková, že $y^{(n)}$ ve funkčním předpisu skutečně vystupuje.

Definice 1. Řešením (integrálem) diferenciální rovnice na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá každá funkce $f(x)$, která má na M n derivací a platí: $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ pro každé $x \in M$.

Definice 2. Integrální křivkou se nazývá graf řešení.

Úloha. Hledejte řešení rovnice (1), které v bodě x_0 splňuje zadané podmínky:

1. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ — tzv. Cauchyova (počáteční) úloha.
2. Okrajová úloha: Řešení se hledá na intervalu $\langle a, b\rangle$; hodnoty řešení a derivací splňují v okrajových bodech zadané podmínky.

Definice 3. Říkáme, že bodem $[x_0, y_0]$ prochází právě jedna integrální křivka dané rovnice 1. řádu, právě když existuje interval $\mathcal{I}$, obsahující x_0 uvnitř tak, že všechna řešení rovnice na množinách M obsahujících interval $\mathcal{I}$ a procházejících bodem $[x_0, y_0]$ na intervalu $\mathcal{I}$ splývají.

Definice 4. Řekneme, že daným bodem $[x_0, y_0]$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice (1) n-tého řádu, splňující podmínky $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, existuje-li interval $\mathcal{I}$ obsahující x_0 uvnitř tak, že všechna řešení rovnice na množině M obsahující $\mathcal{I}$ a procházející bodem $[x_0, y_0]$ na intervalu $\mathcal{I}$ splývají.

2. Řešení některých speciálních rovnic 1. řádu

2.1. **Řešení rovnice $y' = f(x, y)$.** Rovnici tvaru $y' = f(x, y)$ nazýváme rovnicí ve tvaru vyřešeném vzhledem k 1. derivaci. Křivku $f(x, y) = c$ nazýváme **isoklina**.

2.2. **Rovnice se separovanými proměnnými.** Rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme rovnici tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0, \tag{2}$$

kde $P(x)$ a $Q(y)$ jsou spojité funkce jedné reálné proměnné.

Věta 5. Nechť $P(x)$ je spojitá na intervalu $\mathcal{I} = (a, b)$ a $Q(y)$ spojitá na intervalu $\mathcal{K} = (c, d)$. Potom

1. každé řešení rovnice (2) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ splňuje rovnici
$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \tag{3}$$
pro nějaké C.
2. Každá funkce implicitně definovaná vztahem (3) při libovolném C na intervalu $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$, která má na intervalu $\mathcal{I}_2$ derivaci, je řešením (2).

Důkaz. (1) ($\Rightarrow$) Integrováním rovnice a substitucí $y = u(x)$ okamžitě dostáváme
$$C = \int (P(x) + Q(u(x))u'(x))\mathrm{d}x = \int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y.$$

(2) ($\Leftarrow$) Buď $F'(x) = P(x)$, $G'(y) = Q(y)$, nechť platí $F(x) + G(y) = C$, $F(x) + G(z(x)) = C$. Potom pro derivaci musí platit
$$P(x) + Q(z(x))z'(x) = 0$$
. □

Věta 6. Nechť $P(x)$ je spojitá na (a, b), $Q(y)$ spojitá na (c, d), nechť $Q(y) \neq 0$ pro $y \in (c, d)$. Potom každým bodem oblasti $(a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice (2) (tj. je-li $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$ existuje právě jedno řešení (2) splňující rovnici $y(x_0) = x_0$).

Důkaz. (1) Buďte $F'(x) = P(x)$, $G'(y) = Q(y)$, nechť funkce $y(x)$ vyhovuje rovnici $F(x) + G(y(x)) = C$. Současně musí platit $F(x_0) + G(y_0) = C$, celkem tedy musí $y(x)$ splňovat rovnici $F(x) + G(y(x)) = F(x_0) + G(y_0)$. Díky spojitosti parciálních derivací lze $y(x)$ z této rovnice explicitně vyjádřit.

(2) Buďte $y_1(x), y_2(x)$, $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ různá řešení (2) na $(\alpha, \beta) \ni x_0$. Potom musí platit

$$P(x) + Q(y_1(x))y_1'(x) = P(x) + Q(y_2(x))y_2'(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y_1(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y_2(x)),$$

tedy $G(y_1(x)) = G(y_2(x)) + C$. Protože tato rovnice musí platit i pro $x = x_0$, jedinou možnou hodnotou C je $C = 0$. Protože Q je spojitá a $Q(x) \neq 0$, je G prostá, tudíž $y_1(x) = y_2(x)$, což je spor. □

2.3. **Separovatelné rovnice.** Separovatelnou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0,$$

kde P_1, Q_1 jsou spojité na (a, b) a P_2, Q_2 jsou spojité na (c, d). Za předpokladu $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ lze tuto rovnici převést na rovnici tvaru

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0.$$

Označme $a_1, a_2, \ldots, a_m \in (a, b)$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n \in (c, d)$ nulové body Q_1 resp. P_2. Řešením původní rovnice jsou i konstantní křivky $y = b_i$ na (a, b).

Při určování definičního oboru je nutné ověřit případné průsečíky s konstantami.

2.4. **Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu.**

Definice 7. Funkce n reálných proměnných $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se nazývá **homogenní stupně** k, platí-li, že

$$F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Rovnici

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \tag{4}$$

kde P, Q jsou homogenní funkce stejného stupně k nazýváme **homogenní rovnicí stupně** k. K řešení vede substituce $y = xu$, kde u je nová neznámá funkce. Ta převede původní rovnici na rovnici

$$P(x, xu) + Q(x, xu)(u + xu') = 0,$$

$$x^k[P(1, u) + Q(1, u)(u + xu')] = 0,$$

která je separovatelná.

Věta 8. Nechť $0 \notin M \subset \mathbb{R}$. Je-li $u(x)$ řešení rovnice

$$P(1, u) + Q(1, u)u + xQ(1, u)u' = 0, \tag{5}$$

je $y(x) = xu(x)$ řešením rovnice (4). Je-li y řešením rovnice (4) na M, existuje $u(x)$, které je řešením (5) na M tak, že $y(x) = xu(x)$.

Poznámka. Zavádí se také **zobecněné homogenní (kvazihomogenní) rovnice**. Ty se řeší substitucí $y = x^\alpha \cdot u$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Této substituce je možné využít, pokud lze po substituci vytknout x z každého členu diferenciální rovnice ve stejné mocnině.

2.5. **Rovnice tvaru** $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$**.** U rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \tag{6}$$

rozlišíme následující případy:

(1) $\alpha = \beta = a = b = 0$: Potom
$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right),$$
tedy
$$y = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + C.$$

(2) $b = \beta = 0$: Potom
$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right),$$
$$y(x) = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) + C.$$

(3) $c = \gamma = 0$:
$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$
tato rovnice je homogenní.

(4) Neplatí $b = \beta = 0$, ale je
$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$
Buď $b \neq 0$, pak $a\beta - \alpha b = 0$ a $\alpha = \frac{\beta}{b}a$ a rovnici upravíme na tvar
$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\frac{\beta}{b}(ax+by)+\gamma}\right)$$
a dále na
$$z' = a + bf\left(\frac{z+c}{\frac{\beta}{b}z+\gamma}\right). \tag{7}$$
Funkce $y(x)$ je řešením (6) na množině M, právě když $z(x) = ax + by(x)$ je řešením (7).

(5) Platí, že
$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0.$$
Vyřešíme soustavu rovnic
$$ax_0 + by_0 + c = 0$$
$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$
a zavedeme substituci
$$u = x - x_0 \qquad\qquad x = x_0 + u$$
$$v = y - y_0 \qquad\qquad y = y_0 + v.$$
Platí
$$v(u) = y(x) - y_0 = y(x_0+u) - y_0 \implies y(x) = v(x - x_0) + y_0.$$
Substitucí dostaneme
$$\begin{aligned} v' = y' &= f\left(\frac{a(x_0+u)+b(y_0+v)+c}{\alpha(x_0+u)+\beta(y_0+v)+\gamma}\right) = \\ &= f\left(\frac{au+bv+ax_0+by_0+c}{\alpha u+\beta v+\alpha x_0+\beta y_0+\gamma}\right) = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Je-li $v(u)$ řešením rovnice (8), pak $y(x) = y_0 + v(x - x_0)$ je řešením rovnice (6) a naopak ke každému řešení $y(x)$ rovnice (6) lze nalézt řešení (8) tak, že daný vztah platí.

2.6. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.** Rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{9}$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojité na (a, b).

(1) Řešení rovnice bez pravé strany: Mějme rovnici $y' + p(x)y = 0$. Tuto rovnici zřejmě řeší $y(x) = 0$ pro každé x. Po vydělení y (předpokládáme $y \neq 0$) dostaneme

$$\frac{y'}{y} + p(x) = 0,$$

což je ekvivalentní s rovnicí

$$\ln |y| + \int p(x)\mathrm{d}x = \ln K.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

což je **obecné řešení rovnice bez pravé strany** pro každé C.

Věta 9. Je-li $p(x)$ spojitá na (a, b), prochází každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ právě jedna integrální křivka rovnice $y' + p(x)y = 0$, která je řešením rovnice na celém (a, b).

Důkaz. Obecné řešení má tvar

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x},$$

bodem $[x_0, y_0]$ prochází pouze

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}.$$

Osou x prochází právě $y = 0$. □

(2) Metoda variace konstanty: Předpokládejme, že C závisí na x

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

tedy

$$C(x) = y(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Dosazením za y do (9) obdržíme

$$\underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)}_{y'} + p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y} = q(x),$$

po úpravě

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x),$$
$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C.$$

Obecné řešení rovnice s pravou stranou je

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C\right] e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Věta 10. Nechť $p(x)$, $q(y)$ jsou funkce spojité na (a, b). Potom pro libovolné C je funkce

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C\right] e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{10}$$

řešením rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ na (a, b). Každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením na (a, b) a je popsána rovnicí tvaru (10) pro vhodnou volbu C.

Věta 11. Obecné řešení lineární diferenciální rovnice s pravou stranou je součtem obecného (homogenního) řešení rovnice bez pravé strany a libovolného pevně zvoleného řešení rovnice s pravou stranou (partikulárního řešení).

2.7. **Bernoulliho rovnice.** Rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \tag{11}$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité na (a, b), $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokud je $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$, je to lineární rovnice prvního řádu. Jinak opět $y = 0$ triviálně řeší, za předpokladu $y \neq 0$ můžeme rovnici upravit na

$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$

dále substitucí $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ na

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

a

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{12}$$

Věta 12. Nechť $\alpha \neq 0, 1$. Nechť $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité na (a, b), $q(x)$ není na (a, b) identická 0. nechť $z(x)$ je řešením (12) na (a, b). Pak každá funkce $y(x)$ splňující na intervalu $\mathcal{I} \subset (a, b)$ rovnici $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$ a taková, že na svém definičním oboru je $y(x) \neq 0$ a existuje $y'(x)$ na $\mathcal{I}$ je řešením (11) na $\mathcal{I}$.

Naopak nechť $y(x)$ je řešení (11) na $\mathcal{I} \subset (a, b)$ a $y(x) \neq 0$ na $\mathcal{I}$. Pak existuje řešení $z(x)$ rovnice (12) na $\mathcal{I}$ takové, že $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$.

2.8. **Riccatiho rovnice.**

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \tag{13}$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou spojité funkce na (a, b). Je-li $a_0 \equiv 0$, je to Bernoulliho rovnice, je-li $a_2 \equiv 0$, je to lineární rovnice.

(1) Substituce $x = \varphi(t)$, kde φ má spojité derivace na (c, d), $\varphi(c, c) \subset (a, b)$, **nezabere**,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\varphi'(t) = a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + a_1(\varphi(t))\varphi'(t)y + a_2(\varphi(t))\varphi'(t)y^2$$

protože dostaneme jenom novou Riccatiho rovnici.

(2) Substituce

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mají spojité derivace na $(c, d) \subset (a, b)$ a je

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

také nezabere.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}[(\alpha z' + \alpha' z + \beta')(\gamma z + \delta) - (z'\gamma + \gamma' z + \delta')(\alpha z + \beta)] = \\ &= \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}[(\alpha\delta - \gamma\beta)z' + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)z^2 + \\ &\quad + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \gamma'\beta - \delta'\alpha)z + (\beta'\delta - \delta'\beta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}&[a_0(\gamma z + \delta)^2 + a_1(\gamma z + \delta)(\alpha z + \beta) + \\ &+ a_2(\alpha z + \beta)^2]. \end{aligned}$$

Abychom se v nové rovnici zbavili z^2, musí platit

$$\alpha'\gamma - \gamma'\alpha - a_0\gamma^2 - a_2\alpha^2 - a_1\gamma\alpha = 0,$$

$$\frac{\alpha'\gamma - \gamma'\alpha}{\gamma^2} - a_0 - a_2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - a_1\frac{\alpha}{\gamma} = 0,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)' - a_0 - a_2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - a_1\frac{\alpha}{\gamma} = 0.$$

Dostali jsme opět pouze jinou Riccatiho rovnici.

(3) Kanonický tvar Riccatiho rovnice: U y^2 je koeficient ± 1 a y v rovnici nevystupuje. Prvního lze dosáhnout substitucí

$$y = \omega(x)z,$$
$$\omega z' + z\omega' = a_0 + a_1\omega z + a_2\omega^2 z^2,$$
$$z' = \frac{a_0}{\omega} + \left(a_1 - \frac{\omega'}{\omega}\right)z + a_2\omega z^2,$$

z čehož dostáváme podmínku pro $\omega(x)$

$$\omega = \pm\frac{1}{a_2(x)}.$$

Nulového koeficientu u y dosáhneme substitucí $y = u + \alpha$, tím rovnice přejde na

$$u' = [a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 - \alpha'] + (a_1 + 2a_2\alpha) + a_2 u^2,$$

tedy α musí být

$$\alpha(x) = -\frac{a_1(x)}{2a_2(x)}.$$

(4) Známe-li jedno řešení $y_1(x)$ na (a, b), umíme najít zbývající. Buď $y_1(x)$ řešení Riccatiho rovnice

$$y_1'(x) = a_0(x) + a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_1^2(x).$$

Zavedeme substituci

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)},$$

za předpokladu $u(x) \neq 0$ je

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} &= a_0 + a_1\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + a_2\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 = \\ &= a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \frac{a_1}{u} + \frac{2a_2 y_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} \end{aligned},$$

takže

$$u' + (a_1 + 2a_2 y_1)u + a_2 = 0.$$

Tím jsme Riccatiho rovnici převedli na lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

(5) Vztah Riccatiho rovnice a lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Uvažujme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x), \quad p_0(x) \neq 0.$$

Buďte a_0, a_1, a_2, a_2' spojité na (a, b), $a_2(x) \neq 0$, $y(x)$ řešení Riccatiho rovnice na $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Zavedeme substituci

$$u(x) = e^{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x},$$
$$u'(x) = -a_2(x)y(x)u(x).$$

Z této rovnice vyjádříme y

$$y(x) = \frac{-u'(x)}{a_2(x)u(x)}$$

a derivováním výrazu

$$\frac{u'}{u} = -a_2 y$$

dostaneme

$$\frac{u'u - u'^2}{u^2} = -a_2' y - a_2 y'.$$

Vynásobíme to u^2

$$u''u - u'^2 = (-a_2' y - a_2 y')u^2,$$

dosadíme za y'

$$u''u - u'^2 = [-a_2' y - a_2(a_0 + a_1 y + a_2 y^2)]u^2,$$

dosadíme $u'(x) = -a_2(x)y(x)u(x)$, vynásobíme a_2/u

$$u''u = -a_2' y u^2 - a_2 a_0 u^2 - a_2 a_1 y u^2,$$

$$a_2 u'' = -a_2' a_2 y u - a_2^2 a_0 u - a_2^2 a_1 y u,$$

dosadíme za y

$$a_2 u'' = a_2' u' - a_2^2 a_0 u + a_2 a_1 u'.$$

Řešení Riccatiho rovnice vyhovuje lineární diferenciální rovnici 2. stupně

$$a_2 u'' - [a_2' + a_1 a_2]u' + a_2^2 a_0 u = 0. \tag{14}$$

Věta 13. Nechť $a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_2'(x)$ jsou spojité na (a, b). Nechť $y(x)$ řeší (13). Potom funkce

$$u(x) = e^{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x}$$

je řešením (14) na (α, β). Naopak, nechť $u(x)$ je řešením (14) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$ a $u(x) \neq 0$, $a_2(x) \neq 0$ pro $x \in (\gamma, \delta)$. Potom

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{a_2(x)u(x)}$$

je řešením (13) na (γ, δ).

(6) Speciální Riccatiho rovnice:

$$y' + ay^2 = bx^\alpha,$$

kde $a, b \neq 0$ jsou konstanty, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro $\alpha = 0$ je to separovatelná rovnice, pro $\alpha = -2$ dostaneme po substituci

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{a}{u^2} = \frac{b}{x^2}$$

homogenní rovnici

$$u' = a - b\left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Jinak zavedeme substituci

$$y = u(x)z + v(x)$$

$$u'z + uz' + v' + a(u^2z^2 + 2uvz + v^2) = bx^\alpha$$

$$uz' + (u' + 2auv)z + (v' + av^2) + au^2z^2 = bx^\alpha.$$

Položme $v' + av^2 = 0$ a $u' + 2auv = 0$. Potom

$$-\frac{v'}{v^2} = a \implies v(x) = \frac{1}{ax}$$

$$u' + 2auv = u' + \frac{2u}{x} = 0 \implies u(x) = \frac{1}{x^2}$$

Zavedeme tedy substituci

$$y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{ax}.$$

Dostaneme

$$\frac{z'}{x^2} + a\frac{1}{x^4}z^2 = bx^\alpha,$$
$$z' + \frac{a}{x^2}z^2 = bx^{\alpha+2}.$$

Za z dosadíme

$$z = \frac{1}{z_1},$$
$$-\frac{z_1'}{z_1^2} + \frac{a}{x^2 z_1^2} = bx^{\alpha+2},$$

to vynásobíme z_1^2

$$z_1' + bx^{\alpha+2}z_1^2 = \frac{a}{x^2}.$$

Rovnici přetransformujeme do nové proměnné $x_1 = x^{\alpha+3}$, $x = x_1^{\frac{1}{\alpha+3}}$, za předpokladu $\alpha \neq -3$, $x > 0$. Pro derivace platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} = \frac{1}{(\alpha+3)x^{\alpha+2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

původní rovnici upravíme na

$$\frac{z_1'}{x^{\alpha+2}} + bz_1^2 = \frac{a}{x^{\alpha+4}}$$

a po transformaci obdržíme

$$(\alpha+3)\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1} + bz_1^2 = ax_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}.$$

Po úpravě máme novou Riccatiho rovnici, ale s jiným α.

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1} + \frac{b}{\alpha+3}z_1^2 = \frac{a}{\alpha+3}x_1^{\alpha_1},$$

kde

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha+4}{\alpha+3}.$$

Chceme dojít k $\alpha_1 = -2$ nebo $\alpha_1 = 0$. Pro $\alpha_1 = -2$ je $\alpha = -2$, pro $\alpha_1 = 0$ je $\alpha = -4$. Napíšeme rekurentní vztah

$$\alpha_k = -\frac{\alpha_{k-1}+4}{\alpha_{k-1}+3}$$
$$\alpha_k + 2 = -\frac{\alpha_{k-1}+4}{\alpha_{k-1}+3} + 2\frac{\alpha_{k-1}+3}{\alpha_{k-1}+3} = \frac{\alpha_{k-1}+2}{\alpha_{k-1}+3}$$
$$\frac{1}{\alpha_k+2} = \frac{\alpha_{k-1}+3}{\alpha_{k-1}+2} = 1 + \frac{1}{\alpha_{k-1}+2} = k + \frac{1}{\alpha+2}.$$

Pro $\alpha_k = 0$ ($\alpha_k = -2$ nemá význam, protože se nikam nehnu) dostaneme

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha+2} + k \implies \alpha = \frac{-4k}{2k-1},$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Pokud zvolíme opačný směr rekurze

$$\frac{1}{\alpha+2} = k + \frac{1}{\alpha_{-k}+2},$$

dostaneme

$$\alpha = \frac{-4k}{2k+1},$$

kde $k = 1, 2, \ldots$. Celkem tedy můžeme nalézt řešení pro

$$\alpha = \frac{-4k}{2k-1},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Lze dokázat, že pro jiná α to nejde. Kromě toho lze řešení této rovnice převést na tvar $y'' + qx^\alpha y = 0$, kde q je konstanta.

2.9. **Diferenciální rovnice tvaru** $x = f(y')$ **resp.** $y = g(y')$**.**

(1) Rovnice typu $x = f(y')$. Rovnici parametrizujeme $y' = t$, $x = f(t)$. Potom po substituci $\mathrm{d}x = f'(t)\mathrm{d}t$ dostaneme

$$y = \int y'\mathrm{d}x + C = \int t\mathrm{d}x + C = \int tf'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau + C.$$

Věta 14. Nechť funkce $f(t)$ má v intervalu (t_1, t_2) spojitou kladnou (resp. zápornou) derivaci, nechť

$$a = \inf_{t\in(t_1,t_2)} f(t) \qquad b = \sup_{t\in(t_1,t_2)} f(t)$$

(resp. $a = -\infty$ pro f neomezenou zdola, $b = +\infty$ pro f neomezenou shora). Pak každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b)\times(-\infty, +\infty)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice $x = f(y')$, jejíž tečna má směrnici z intervalu (t_1, t_2) a je řešením rovnice na celém (a, b). Parametrické rovnice této křivky jsou

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau + y_0, \end{aligned}$$

kde $t \in (t_1, t_2)$. Platí, že $f(t_0) = x_0$.

Důkaz. Protože funkce f je prostá, rovnici $x = f(y')$ lze převést na tvar $y' = f^{-1}(x)$, což je rovnice se separovatelnými proměnnými. Z toho okamžitě plyne existence a jednoznačnost řešení.

Integrováním a použitím počátečních podmínek dostaneme

$$y(x) = \int f^{-1}(x)\mathrm{d}x + C = \int_{x_0}^{x} f^{-1}(\xi)\mathrm{d}\xi + y_0.$$

Položením $x = f(t)$, $x_0 = f(t_0)$ a po substituci $x = f(\tau)$, $\mathrm{d}x = f'(\tau)\mathrm{d}t$ máme

$$y = \int_{f(t_0)}^{f(t)} f^{-1}(\xi)\mathrm{d}\xi + y_0 = \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau + y_0. \quad \square$$

(2) Rovnice typu $y = g(y')$. Parametrizace $y' = t$, $y = g(t)$.

$$x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C = \int \frac{1}{t}g'(t)\mathrm{d}t + C = \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau + x_0.$$

Věta 15. Nechť funkce $g(t)$ má na intervalu (t_1, t_2) spojitou kladnou (resp. zápornou) derivaci. Nechť $0 \notin (t_1, t_2)$. Označme

$$\alpha = \inf_{t\in(t_1,t_2)} g(t) \qquad \beta = \sup_{t\in(t_1,t_2)} g(t)$$

(resp. $\alpha = -\infty$, resp. $\beta = +\infty$). Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in (-\infty, +\infty) \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením rovnice na intervalu (a, b), kde

$$a = x_0 + \inf_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad b = x_0 + \sup_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau,$$

přičemž t_0 je definováno vztahem $y_0 = g(t_0)$. Parametrické rovnice křivky jsou:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$y = g(t) + y_0,$$

kde $t \in (t_1, t_2)$.

Důkaz. Funkce g je prostá, tudíž existuje inverzní funkce g^{-1}, tedy $y' = g^{-1}(y)$ a pokud $y' \neq 0$

$$\frac{y'}{g^{-1}(y)} = 1.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, z čehož plyne existence a jednoznačnost řešení.

Integrací a z počátečních podmínek dostaneme

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{g^{-1}(y)} + C = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g^{-1}(\eta)}.$$

Dosadíme $y = g(t)$, $y_0 = g(t_0)$ a zavedeme substituci $\eta = g(\tau)$, $\mathrm{d}\eta = g'(\tau)\mathrm{d}\tau$.

$$x = x_0 + \int_{g(t_0)}^{g(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{g^{-1}(\eta)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau. \quad \square$$

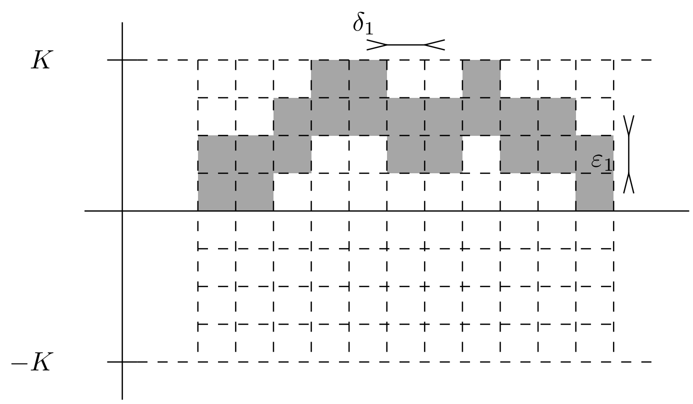
Na závěr se musí vyšetřit případ, kdy $y' = 0$ a to je tehdy když $y_0 = g(0)$, takže je to konstantní řešení.

3. Věty o existenci, jednoznačnosti a vlastnostech řešení rovnice tvaru $y' = f(x, y)$

Definice 16. Nechť M je množina nekonečně mnoha funkcí definovaných na omezeném intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Pak

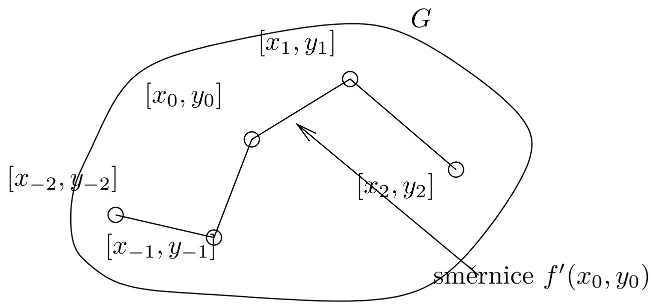
(1) řekneme, že funkce z M jsou stejně omezené na intervalu $\mathcal{I}$, právě když existuje reálné číslo K tak, že $|f(x)| \leq K$ pro libovolnou funkci $f \in M$ a libovolné $x \in \mathcal{I}$.

(2) Řekneme, že funkce z M jsou stejně spojité na $\mathcal{I}$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny dvojice $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ splňující nerovnost $|x_1 - x_2| < \delta$ a pro všechny $f \in M$ platí, že $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.



Obrázek 1. K důkazu Arzelovy věty

Věta 17 (Arzela)**.** Nechť M je množina nekonečně mnoha funkcí definovaných na omezeném intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, které jsou na $\mathcal{I}$ stejně omezené a stejně spojité. Pak z každé (obecně nekonvergetní) posloupnosti g_n funkcí z M lze vybrat posloupnost, která je na $\mathcal{I}$ stejnoměrně konvergentní.



Obrázek 2. Konstrukce Eulerovy lomené čáry

Důkaz.

□

3.1. **Eulerova lomená čára.**

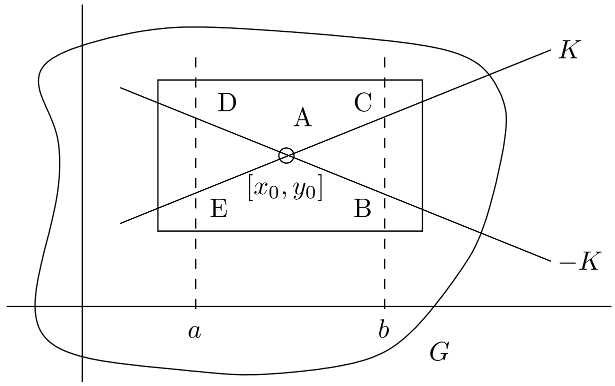
Definice 18. Nechť je dána diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, kde definičním oborem funkce f je oblast G. Zvolme $[x_0, y_0] \in G$. Eulerova lomená čára příslušná k $[x_0, y_0]$ je každá křivka zkonstruovaná takto:

Věta 19 (Peano)**.** Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, pak každým bodem $[x_0, y_0] \in G$ prochází integrální křivka rovnice $y' = f(x, y)$ (tj. existuje alespoň jedno řešení rovnice $y' = f(x, y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$).

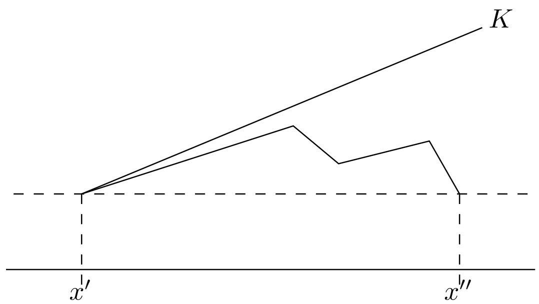
Důkaz. Kolem bodu $[x_0, y_0]$ zkonstruujeme obdélník G_1. Protože f je spojitá, existuje takové K, že pro každý bod $[x, y] \in G$ je $|f(x, y)| < K$. Buď M množina všech Eulerových lomených čar φ_α příslušných k $[x_0, y_0]$. Grafy všech těchto čar pak leží v trojúhelnících ABC a ADE (viz obr. 3). Na intervalu (a, b) jsou funkce $\varphi_\alpha \in M$ stejně omezené a stejně spojité, neboť $|\varphi(x'') - \varphi(x')| < K\,|x'' - x'|$. Lze z nich podle Arzelovy věty proto vybrat posloupnost φ_n, která na (a, b) stejnoměrně konverguje.

Chceme dokázat, že ta limitní funkce φ vyhovuje původní dif. rovnici, platí

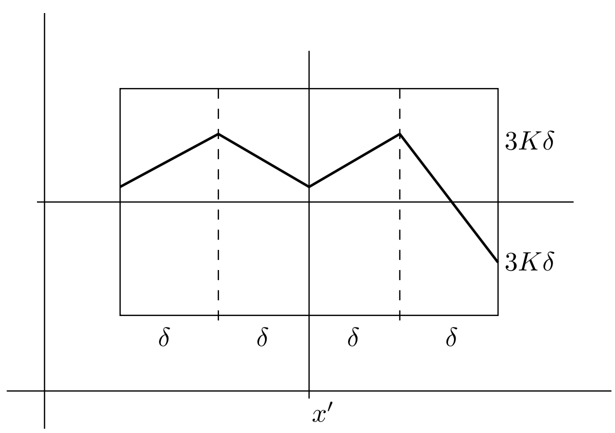
$$\lim_{x'' \to x'} \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} = f(x', \varphi(x')),$$



Obrázek 3. K důkazu Peanovy věty



Obrázek 4. K důkazu Peanovy věty



Obrázek 5. K důkazu Peanovy věty

tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|x'' - x'| < \delta$

$$\left|\frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x'))\right| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{a} \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Pro dostatečně vysoké n musí platit

$$\left|\frac{\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x'))\right| < \varepsilon,$$

$$f(x', \varphi(x')) - \varepsilon < \frac{\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')}{x'' - x'} < f(x', \varphi(x')) + \varepsilon,$$

$$(f(x',\widehat{y})-\varepsilon)(x''-x') < \varphi_n(x'')-\varphi_n(x') < (f(x',\widehat{y})+\varepsilon)(x''-x').$$

Kde x' a $\widehat{y} := \varphi(x')$ jsou pevně dané. Dokážeme pravou stranu. Protože $f(x,y)$ je na G spojitá a omezená konstantou K, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|x-x'| < 2\delta$, $|y-\widehat{y}| < 3K\delta$ platí

(1) $f(x,y) < f(x',\widehat{y}) + \varepsilon$,
(2) $\langle x'-2\delta, x'+2\delta\rangle \times \langle \widehat{y}-3K\delta, \widehat{y}+3K\delta\rangle \in$ BCDE.

Pro každé $\delta > 0$ dále existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ je

(1) délka „hran“ φ_n menší než δ (to vyplývá z konstrukce posloupnosti φ_n),
(2) $|\varphi_n(x') - \varphi(x')| < K\delta$ (protože podle věty 17 $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$).

$$|\varphi_n(x)-\widehat{y}| = |\varphi_n(x)-\varphi(x')| \le \underbrace{|\varphi_n(x)-\varphi_n(x')|}_{K|x-x'|\le 2K\delta} + \underbrace{|\varphi_n(x')-\varphi(x')|}_{K\delta} < 3K\delta$$

takže můžu φ_n' odhadnot pomocí $f(x',\widehat{y})+\varepsilon$

$$\varphi_n(x'')-\varphi_n(x') = \int_{x'}^{x''} \frac{\mathrm{d}\varphi_n(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x < (f(x',\widehat{y})+\varepsilon)(x''-x').$$

Analogicky se dokáže druhá nerovnost. □

Definice 20. Nechť $\varphi(x)$ je řešením rovnice $y' = f(x,y)$ na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. Toto řešení se nazývá **prodloužitelné vpravo (resp. vlevo)**, existuje-li řešení $\varphi_1(x)$ na $\langle\alpha,\beta_1\rangle$ (resp. $\langle\alpha_1,\beta\rangle$), kde $\beta < \beta_1$ (resp. $\alpha > \alpha_1$) takové, že $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Funkce $\varphi_1(x)$ se nazývá **prodloužení řešení** φ **vpravo (vlevo)**. Řešení, které není prodloužitelné vpravo ani vlevo, se nazývá **neprodloužitelné** (úplné) a jeho graf se nazývá **charakteristika**. Analogicky pro otevřený interval, ale za prodloužení se považuje i $(a,b) \to (a,b\rangle$.

Věta 21. Nechť $f(x,y)$ je spojitá na oblasti G. Nutnou a postačující podmínkou, aby řešení $\varphi(x)$ na intervalu (α,β) bylo neprodloužitelné vpravo (resp. vlevo) je splnění alespoň jedné z následujících podmínek:

(1) $\beta = +\infty$, resp. $\alpha = -\infty$,
(2) $|\varphi(x)| \to \infty$ pro $x \to \beta-$ (resp. $x \to \alpha_+$),
(3) $\varrho([x,\varphi(x)],\partial G) \to 0$ pro $x \to \beta_-$ (resp. $x \to \alpha_+$), kde ∂G je hranice G.

Důkaz. A) $(\Leftarrow)$

1. Zřejmé.
2. Protože y je spojitá, musela by v b existovat konečná limita, což je spor.
3. Pokud by řešení bylo prodloužitelné, β by byl částí definičního oboru f a $[\beta,\varphi(\beta)] \in G$, což je spor s tím, že G je otevřená.

B) $(\Rightarrow)$ Nechť *žádná z podmínek neplatí.* Dokážeme, že pak existuje konečná limita

$$\lim_{x\to\beta-}\varphi(x).$$

Buďte $p = \liminf_{x\to\beta-}\varphi(x)$, $q = \limsup_{x\to\beta-}\varphi(x)$ a předpokládejme, že $p < q$. Z toho dojdeme ke sporu. Buď $M = \{[\beta,y] | p < y < q\}$. M je množina hromadných bodů grafu, neboť $[\beta,p]$ a $[\beta,q]$ jsou hromadnými body podle definice lim sup a lim inf a pro ostatní to platí díky spojitosti φ. Každý bod z M leží buď v G nebo na ∂G. Všechny ale nemohou ležet na ∂G, jinak by platila podmínka 3, což by byl spor. Nechť $[\beta,r]$ neleží na ∂G. Zvolme ε tak, že $\langle r-\varepsilon, r+\varepsilon\rangle \subset M$ a uvažujme „obdélníček“ $\langle\beta-\varepsilon,\beta\rangle\times\langle r-\varepsilon,r+\varepsilon\rangle$. Potom graf funkce $\varphi(x)$ musí projít obdélníčkem „odshora dolů“ nekonečně krát, neboť jinak by $\{r-\varepsilon, r+\varepsilon\}$ nebyly hromadné body grafu. Současně ale pro každý průchod grafu φ mezi body x_1 a x_2 (φ' je spojitá a proto na kompaktu omezená)

$$2\varepsilon = |\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| = |\varphi'(\xi)|\,(x_2-x_1) \le K(x_2-x_1),$$

tedy

$$x_2 - x_1 \ge \frac{2\varepsilon}{K}.$$

Graf φ může odshora dolů a naopak projít pouze konečně krát, což je spor. Musí tedy platit, že $p = q$, tedy existuje konečná limita $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x)$ a platí

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{\varphi(x)-\varphi(\beta)}{x-\beta} = \lim_{xi\to\beta-}\varphi'(\xi) = \lim_{xi\to\beta-} f(\xi,\varphi(\xi)) = f(\beta,\varphi(\beta)). \quad \square$$

Poznámka. Je-li $f(x,y)$ omezená a oblast G je omezená, existuje limita

$$\lim_{x\to\beta-}\varphi(x).$$

Věta 22. Nechť $f(x,y)$ je spojitá na oblasti G. Pak každým bodem $[x_0,y_0]$ oblasti G prochází graf alespoň jednoho neprodloužitelného řešení, tj. alespoň jedna charakteristika.

Důkaz. Označme $r_0 = \frac{1}{2}\varrho([x_0,y_0],\partial G)$. Pokud je $G = \mathbb{R}^2$, položíme $r_0 = 1$. Uvažujme interval $\mathcal{I}_0 = \langle x_0 - r_0, x_0 + r_0\rangle \times \langle y_0 - r_0, y_0 + r_0\rangle$ Zkonstruujeme řešení φ_0 na intervalu $\langle x_0 - h_0, x_0 + h_0\rangle$, kde

$$h_0 = \min\left\{r_0, \frac{r_0}{K_0}\right\}$$

h_0 se volí tak, aby řešení protínalo levou a pravou stranu „obdélníka“, intervalu a

$$K_0 = \max_{\mathcal{I}_0}|f(x,y)|.$$

Řešení φ_0 budeme prodlužovat doprava. V bodě $[x_1,y_1]$, kde $x_1 = x_0 + h_0$, $y_1 = \varphi_0(x_1)$ provedeme stejnou úvahu a sestrojíme řešení φ_1 na $\langle x_1 - h_1, x_1 + h_1\rangle$. Postupně dostaneme řešení

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & x \in \langle x_0 - h_0, x_1\rangle \\ \varphi_1(x) & x \in \langle x_1, x_1 + h_1\rangle \\ \vdots & \\ \varphi_k(x) & x \in \langle x_k, x_k + h_k\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle x_0 - h_0, \beta)$, kde $\beta = \lim_{k\to\infty} x_k$. Je-li $\beta = +\infty$, řešení je neprodloužitelné. Jinak rozlišíme tyto případy:

(1) Platí, že $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x) = \pm\infty$. V tom případě je řešení neprodloužitelné.
(2) Limita $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x)$ neexistuje. Podle důkazu předchozí věty ale takový případ nemůže nastat.
(3) Je $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x) = y_\omega$ a $[\beta, y_\omega] \in \partial G$. To odpovídá podmínce 3 z předchozí věty, tedy řešení je neprodloužitelné.
(4) $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x) = y_\omega$ a $[\beta, y_\omega] \in G$. Označme $r_\omega = \frac{1}{2}\varrho([b,y_\omega],\partial G)$, $K_\omega = \max_{\mathcal{I}_\omega} f(x,y)$, $h_\omega = \min\{r_\omega, \frac{r_\omega}{K_\omega}\}$. Potom

$$r_\omega = \lim_{n\to\infty} r_n, K_\omega = \lim_{n\to\infty} K_n, h_\omega = \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Protože $r_\omega > 0$ a funkce $f(x,y)$ je omezená ($K_\omega < \infty$), musí být $h_\omega > 0$ a řešení by mělo jít dál prodloužit, což je spor.

Poznámka. Definiční obor neprodloužitelného řešení závisí na počátečních podmínkách.

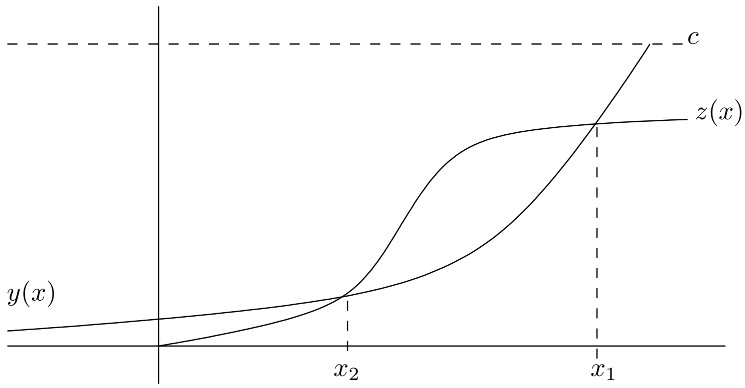
Věta 23 (o jednoznačnosti — Osgood)**.** Nechť funkce $f(x,y)$ je definována na oblasti G a splňuje následující podmínku: Pro libovolné dva body $[x,y_1] \in G$ a $[x,y_2] \in G$ platí

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \Phi(|y_2 - y_1|),$$

kde Φ je funkce jedné reálné proměnné u, spojitá a kladná na intervalu $(0,c\rangle$, kde $c > 0$, přičemž

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^c \frac{\mathrm{d}u}{\Phi(u)} = +\infty.$$

Potom každým bodem $[x_0,y_0]$ oblasti G prochází nejvýše jedna integrální křivka rovnice $y' = f(x,y)$.



Obrázek 6. K důkazu věty o jednoznačnosti

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod $[x_0, y_0]$, kterým procházejí dvě různé integrální křivky $y_1(x)$ a $y_2(x)$, $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ a existuje x_1 takové, že $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$.

Buď $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $x_0 = 0$, $x_1 > 0$, $z(x_1) > 0$, $z(x_1) < c$. Pokud to neplatí, zřejmě toho můžeme dosáhnout odpovídající substitucí.

Platí, že

$$\begin{aligned} z'(x) = (y_2 - y_1)'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) = f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x)) \leq \\ \leq |f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))| \leq \Phi(|y_1(x) - y_2(x)|) < \\ < 2\Phi(|y_1(x) - y_2(x)|) = 2\Phi(|z(x)|). \end{aligned}$$

buď $y(x)$ řešení rovnice $y' = 2\Phi(y)$ s počáteční podmínkou $y(x_1) = z(x_1) =: z_1$. Pro $y \in (0, c\rangle$ je tato rovnice ekvivalentní rovnici

$$\frac{y'}{2\Phi(y)} = 1, \quad \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\Phi(y)} = x + C, \quad \frac{1}{2}\int_{z_1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\Phi(\eta)} = x - x_1.$$

Pro x platí

$$x = x_1 + \frac{1}{2}\int_{z_1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\Phi(\eta)} = x_1 - \frac{1}{2}\int_{y}^{z_1} \frac{\mathrm{d}\eta}{\Phi(\eta)} =: \Psi(y).$$

Každá funkce inverzní k Ψ je řešením rovnice $y' = 2\Phi(y)$. Funkce Ψ je monotonní (integrand je kladný) a zobrazuje $(0, c\rangle \mapsto (-\infty, \Psi(c)\rangle$, neboť

$$\lim_{y \to 0} -\frac{1}{2}\int_{y}^{z_1} \frac{\mathrm{d}\eta}{\Phi(\eta)} = -\infty.$$

Dále platí,$y(x_1) = z(x_1) > 0$ a tedy

$$z'(x_1) < 2\Phi(|z_1|) = 2\Phi(y(x_1)) = y'(x_1),$$

tedy $z(x)$ probíhá nalevo od x_1 „nad“ funkcí $y(x)$. Protože současně $z(0) = 0$ a $z(x)$ i $y(x)$ jsou spojité, musí se y a z znovu protnout v nějakém $x_2 \in (0, x_1)$ a musí platit

$$z'(x_2) \geq y'(x_2) = 2\Phi(y(x_2)) = 2\Phi(z(x_2)).$$

Současně ale $z'(x_2) < 2\Phi(|z(x_2)|)$, což je spor. □

Poznámka. Volba Φ: $\Phi(u) = Lu$, kde L je konstanta, potom dostáváme podmínku tvaru

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_2 - y_1|\,.$$

Případně

$$\Phi(u) = Lu\,|\ln u|$$

nebo

$$\Phi(u) = Lu\,|\ln u|\,|\ln|\ln u||\,.$$

Definice 24. Buď funkce $f(x,y)$ definovaná ve všech bodech množiny A. Říkáme, že F splňuje v A Lipschitzovu podmínku vzhledem k y (s konstantou L), jestliže pro libovolné $[x,y_1] \in A$ a $[x,y_2] \in A$ platí

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_2 - y_1|\,.$$

Definice 25. Nechť $f(x,y)$ je definovaná na množině A. Říkáme, že $f(x,y)$ splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku, existuje-li ke každému bodu $[x_0,y_0] \in A$ okolí V tak, že $f(x,y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku na V.

Věta 26. Je-li G otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ spojitá v G, pak $f(x,y)$ splňuje na G lokálně Lipschitzovu podmínku.

Důkaz. Protože $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ je spojitá, existuje takové okolí H, že pro každé $x \in$ H je

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < L.$$

Potom

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| |y_2 - y_1| \leq L\,|y_2 - y_1|\,. \quad \square$$

Věta 27. Nechť funkce $f(x,y)$ je definována a spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k y. Potom

(1) Každým bodem $[x_0,y_0] \in G$ prochází právě jedna charakteristika (tj. graf neprodloužitelného řešení).
(2) Každá integrální křivka je částí některé charakteristiky.
(3) Dvě charakteristiky, které mají společný bod, jsou totožné.

3.2. **Vztah hladkosti řešení a pravé strany diferenciální rovnice.**

Věta 28. Nechť $f(x,y)$ má v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace podle x a y do p-tého řádu, kde $p \in \mathbb{N}_0$. Pak každé řešení rovnice $y' = f(x,y)$ má na svém definičním oboru spojité derivace podle x až do řádu $p+1$.

Důkaz. Derivováním rovnice za použití řetězového pravidla $y' = f(x,y)$ dostaneme

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))y'(x).$$

Pokud toto provedeme p-krát, na levé straně dostaneme $y^{(p+1)}$, na pravé straně bude kombinace nejvýše p-tých derivací funkcí y a f, které jsou spojité. $\square$

3.3. **Závislost řešení na počátečních podmínkách a na pravé straně.**

Věta 29. Nechť funkce $f(x,y)$ je definována, spojitá a omezená na oblasti G a nechť každým bodem $[x_0,y_0] \in G$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice $y' = f(x,y)$. Nechť $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $y_0 = y(x_0)$. Pak toto řešení závisí spojitě na bodě $[x_0,y_0]$ a pravé straně $f(x,y)$.

Přesněji: Nechť $y(x)$ je (jediné) řešení rovnice $y' = f(x,y)$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$, $(\alpha < x_0 < \beta)$, $y(x_0) = y_0$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý bod $[\overline{x_0},\overline{y_0}] \in G$ a každou funkci $\overline{f}(x,y)$ takové, že $|\overline{x_0} - x_0| < \delta$, $|\overline{y_0} - y_0| < \delta$ a $\left|\overline{f}(x,y) - f(x,y)\right| < \delta$ pro každé $[x,y] \in G$ (přičemž $\overline{f}(x,y)$ je definována a spojitá na G) lze každé řešení $\overline{y}(x)$ rovnice $y' = f(x,y)$ splňující podmínku $y(\overline{x_0}) = \overline{y_0}$ prodloužit na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a platí $|y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$.

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje posloupnost počátečních podmínek $[x_k,y_k]$, posloupnost pravých stran $f_k(x,y)$ a posloupnost řešení $y_k(x)$ takové, že $x_k \to x_0$, $y_k(x_k) \to y_0$, $\sup_{[x,y]\in G} |f_k(x,y) - f(x,y)| \to 0$ a nerovnost $|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon_0$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$ není splněna pro žádné k.

Buď $|f(x,y)| < K$ pro $x \in G$. Protože $|f_k| \leq |f| + |f - f_k|$, lze f_k také omezit konstantou $|f_k(x,y)| < K$. Buď

$$O = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle x_0 - Ka, x_0 + Ka \rangle \subset G,$$

$\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Buďte $K_0 = \max_O |f(x,y)|$, $K_k = \max_O |f_k(x,y)|$.

Podle věty o přírůstku funkce je

$$|y_k(x') - y_k(x'')| = |y_k'(\xi)| \, |x' - x''| \leq K \, |x' - x''| \, .$$

Funkce y_k jsou stejně spojité, existuje tedy vybraná posloupnost $y_i^*(x)$ stejnoměrně konvergující k nějaké funkci $y^*(x)$.

Dokážeme, že $y^*(x_0) = y_0$ a ${y^*}'(x) = f(x, y^*(x))$ a tím dojdeme ke sporu. Platí, že

$$\begin{aligned} |y_i^*(x_0) - y_0| &\leq |y_i^*(x_0) - y_i^*(x_i^*)| + |y_i^*(x_i^*) - y_0| = \\ &= \left|{y_i^*}'(\xi)\right| |x_i^* - x_0| + |y_i^*(x_i^*) - y_0| \, . \end{aligned}$$

Protože $x_i^* \to x_0$ a $y_i^*(x_i^*) \to y_0$, je $y^* = y_0$. Dále chceme dokázat, že pro $|x' - x''|$ dost malá je

$$\left| \frac{y^*(x') - y^*(x'')}{x' - x''} - f(x', y^*(x')) \right| \leq \varepsilon,$$

a pro dostatečně vysoká n je

$$\left| \frac{y_i^*(x') - y_i^*(x'')}{x' - x''} - f(x', y^*(x')) \right| \leq \varepsilon.$$

Platí, že

$$\begin{aligned} &\left| \frac{y_i^*(x') - y_i^*(x'')}{x' - x''} - f(x', y^*(x')) \right| \leq \left| \frac{{y_i^*}'(x' - x'')}{x' - x''} - f(x', y^*(x')) \right| \leq \\ &\leq |f_i^*(\xi_i, y_i^*(\xi_i)) - f(x', y^*(x'))| \leq \\ &\leq \underbrace{|f_i^*(\xi_i, y_i^*(\xi_i)) - f(\xi_i, y_i^*(\xi_i))|}_{\to 0} + |f(\xi_i, y_i^*(\xi_i)) - f(x', y^*(x'))| \end{aligned} .$$

Protože $|x' - \xi_i| < |x' - x''|$ a

$$|y_i^*(\xi_i) - y^*(x')| \leq \underbrace{|y_i^*(\xi_i) - y^*(\xi_i)|}_{\to 0} + |y^*(\xi_i) - y^*(x')| \, ,$$

přičemž $|y^*(\xi_i) - y^*(x')| \leq K \, |\xi_i - x'| \leq K \, |x'' - x'|$, pro dostatečně malé $|x'' - x'|$ nerovnost platí.

Existuje $a > 0$ takové, že $|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle$. Zkonstruujeme obdélník $\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - Ka, y_0 + Ka \rangle \subset G$ (obdélník ještě omezíme tak, aby jeho úhlopříčka byla maximálně např. $1,8\varrho([x_0, y_0], \partial G)$). Na místě průsečíku křivky s tímto obdélníkem zkonstruujeme další obdélník $\langle x_0' - a', x_0' + a' \rangle \times \langle y_0' - Ka', y_0' + Ka' \rangle \subset G$, kde $x_0' = x_0 + a$, $y_0' = y(x_0')$ tak, aby opět platilo $|y_k - y(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \langle x_0' - a', x_0' + a' \rangle$. Takto postupně pokryjeme celý interval $\langle x_0 - a, \beta \rangle$.

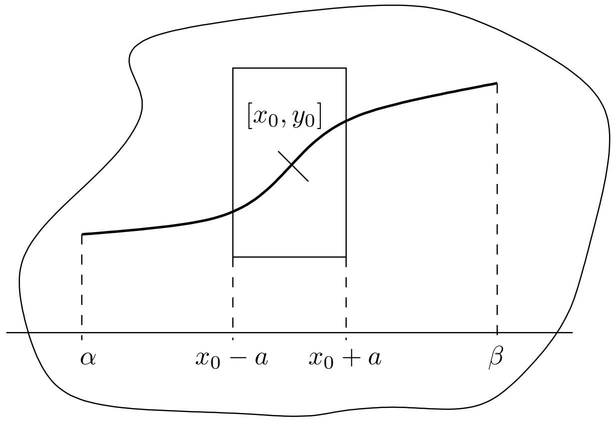
Protože interval $\langle x_0 - a, \beta \rangle$ je kompaktní, existuje konečné podpokrytí. Můžeme proto vybrat maximální maximální k takové, že nerovnost pro y_k platí po celém $\langle x_0 - \alpha, \beta \rangle$. Analogicky pro prodloužení „doleva“. □

4. Systémy diferenciálních rovnic

Systémem diferenciálních rovnic nazýváme systém tvaru

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') &= 0. \end{aligned}$$

Libovolný systém rovnic vyššího řádu lze převést na systém rovnic prvního řádu.



Obrázek 7. K důkazu věty 29

Příklad. Pro systém $F(x, y, y', y'', z') = 0$, $G(x, y, z, y', z', z'', z''') = 0$ zavedeme nové proměnné $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = z$, $y_4 = z'$, $y_5 = z''$ a převedeme ho na systém

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ F(x, y_1, y_3, y_2, y_2', y_4) &= 0 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= y_5 \\ G(x, y_1, y_3, y_2, y_4, y_5, y_5') &= 0. \end{aligned}$$

Omezíme se na systémy tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{15}$$

tzv. **normální systém diferenciálních rovnic**. Tento systém lze zapsat také vektorově

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}).$$

Definice 30. Řešením normálního systému diferenciálních rovnic (15) na intervalu $\mathcal{I}$ je každá n-tice funkcí $y_1(x), \dots, y_n(x)$ (tj. každý vektor $\vec{y}$), které jsou definovány na intervalu $\mathcal{I}$, mají tam derivaci a po dosazení do (15) je rovnost splněna pro každé $x \in \mathcal{I}$. $y_i(x)$ je ***i*-tá složka řešení**. Nechť funkce $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ jsou definovány na nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a nechť

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

je řešení (15) na $\mathcal{I}$. $(n+1)$-tice

$$\begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

vytvoří pro $x \in \mathcal{I}$ prostorovou křivku v $\mathbb{R}^{n+1}$. Tuto křivku nazýváme **integrální křivkou**.

Definice 31. Nechť funkce $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je definována na množině $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce f splňuje na A Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (s konstantou L), platí-li pro každé dva body $[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] \in A$, $[x, \widehat{y_1}, \widehat{y_2}, \ldots, \widehat{y_n}] \in A$ nerovnost

$$\|f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(x, \widehat{y_1}, \widehat{y_2}, \ldots, \widehat{y_n})\| \leq L \sum_{i=1}^{n} |y_i - \widehat{y_i}|\,.$$

Definice 32. Řekneme, že funkce $\vec{f}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ splňuje na množině A lokálně Lipschitzovu podmínku, jestliže ke každému bodu $[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] \in A$ existuje okolí O tak, že f splňuje na O Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Věta 33. Nechť funkce $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ má na otevřené množině A spojité derivace $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $j \in \widehat{n}$. Pak f splňuje na A lokálně Lipschitzovu podmínku.

Věta 34 (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** Nechť funkce $f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, kde $j \in \widehat{n}$ jsou v intervalu $\mathcal{I} = \langle x_0 - a, x_0 + a\rangle \times \langle y_{10} - b, y_{10} + b\rangle \times \cdots \times \langle y_{n0} - b, y_{n0} + b\rangle$ (kde $a > 0, b > 0, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ jsou daná čísla) spojité a tudíž omezené, $|f_j(x, y_1, \ldots, y_n)| < K$, $K > 0$ a nechť v $\mathcal{I}$ splňuje Lipschitzovu podmínku (s konstantou L) vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$. Označme $h = \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$. Potom platí:

(1) Existuje řešení

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

systému (15) v intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, pro které platí

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

a jehož integrální křivka leží v $\mathcal{I}$.

(2) Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$$

jiné řešení v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, kde $x_0 - h \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq x_0 + h$ a

$$\vec{z}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix},$$

je $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro každé $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$.

Důkaz. Řešení systému (15) s počáteční podmínkou

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} = \vec{y}_0$$

je ekvivalentní řešení systému integrálních rovnic

$$y_1(x) = y_{10} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))\mathrm{d}t$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = y_{n0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))\mathrm{d}t.$$

Zkonstruujeme tzv. **posloupnost Picardových aproximací** $\vec{y}^{(0)}(x), \vec{y}^{(1)}(x), \dots$:

$$\vec{y}^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}^{(k)}(x) = \vec{y}^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}^{(k-1)}(t))\mathrm{d}t.$$

(1) Zřejmě je $\vec{y}^{(k)}(x_0) = \vec{y}_0$.

(2) Zřejmě $y_j^{(k)}(x)$ jsou spojité na $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ a také platí, že $[x, \vec{y}^{(k)}(x)] \in \mathcal{I}$ pro každé $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$. To dokážeme indukcí podle k.

Pro $\vec{y}^{(0)}$ to zřejmě platí. Protože funkce f_j jsou omezené, platí, že

$$\left| f_j(t, \vec{y}^{(k-1)}(t)) \right| \leq K.$$

Potom je

$$\left| y_j^{(k)}(x) - y_{j0} \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_j(t, y_1^{(k-1)}(t), y_2^{(k-1)}(t), \dots, y_n^{(k-1)}(t))\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq K \left| x - x_0 \right| \leq Kh \leq K \frac{b}{K} \leq b,$$

tedy $[x, \vec{y}^{(k)}(x)] \in \mathcal{I}$.

(3) Dokážeme stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\vec{y}^{(k)}(x) \rightrightarrows \vec{y}(x)$ na množině $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ Platí, že

$$\begin{aligned}
&\left| y_j^{(k)}(x) - y_j^{(k-1)}(x) \right| = \\
&= \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_j(t, y_1^{(k-1)}(t), \dots, y_n^{(k-1)}(t))\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} f_j(t, y_1^{(k-2)}(t), \dots, y_n^{(k-2)}(t))\mathrm{d}t \right| \leq \\
&\leq \int\limits_{x_0}^{x} \left| f_j(t, y_1^{(k-1)}(t), \dots, y_n^{(k-1)}(t)) - f_j(t, y_1^{(k-2)}(t), \dots, y_n^{(k-2)}(t)) \right| \leq \\
&\leq L \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| y_i^{(k-1)}(t) - y_i^{(k-2)}(t) \right| \right) \mathrm{d}t \leq L \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} \left| y_i^{(k-1)}(t) - y_i^{(k-2)}(t) \right| \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Dále dokážeme matematickou indukcí nerovnost

$$\left| y_j^{(k)}(x) - y_j^{(k-1)}(x) \right| \leq K L^{k-1} \frac{n^{k-1} \left| x - x_0 \right|^k}{k!}.$$

Pro $k = 1$ vztah platí:

$$\left| y_j^{(1)}(x) - y_{j0} \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f_j(t, y_{10}, \dots, y_{1n})\mathrm{d}t \right| \leq K \left| x - x_0 \right|.$$

Přechod $k-1 \to k$:

$$\left|y_j^{(k)}(x) - y_j^{(k-1)}(x)\right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \left|y_i^{(k-1)}(t) - y_i^{(k-2)}(t)\right| \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq KL^{k-1}n^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \underbrace{\int_{x_0}^{x} |t-x_0|^{k-1} \,\mathrm{d}t}_{\frac{|x-x_0|^k}{k}} \leq \frac{K}{Ln} \frac{(Lnh)^k}{k!}.$$

Posloupnost

$$y_j^{(k)}(x) = y_j^{(0)} + \sum_{l=1}^{k} \left(y_j^{(l)}(x) - y_j^{(l-1)}(x)\right)$$

stejnoměrně konverguje k nějaké funkci $y_j(x)$, neboť řada

$$\sum_{l=1}^{k} \left(y_j^{(l)}(x) - y_j^{(l-1)}(x)\right)$$

má konvergentní majorantu

$$\frac{K}{Ln} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(Lnh)^l}{l!} = \frac{K}{Ln} \left(e^{Lnh} - 1\right).$$

Označme

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Díky stejnoměrné konvergenci a spojitosti $y_j^{(k)}(x)$ jsou $y_j(x)$ spojité na $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$. Dále platí, že $[x, \vec{y}(x)] \in \mathcal{I}$ pro každé $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, neboť

$$|y_j(x) - y_{j0}| = \lim_{k\to\infty} \left|y_j^{(k)} - y_{j0}\right| \leq b.$$

(4) Protože funkce $\vec{y}^{(k)} \rightrightarrows \vec{y}(x)$ a $f_j(x, \vec{y})$ jsou stejnoměrně spojité, pak také $f_j(x, \vec{y}^{(k)}(x)) \rightrightarrows f_j(x, \vec{y}(x))$.

(5) Limitní funkce $y_j(x)$ splňují soustavu rovnic, neboť

$$y_j(x) = \lim_{k\to\infty} y_j^{(k)}(x) = \lim_{k\to\infty} \left[y_{j0} + \int_{x_0}^{x} f_j(t, \vec{y}^{(k-1)})\mathrm{d}t\right] = y_{j0} + \int_{x_0}^{x} f_j(t, \vec{y}(t))\mathrm{d}t.$$

Tím je existence řešení dokázána.

Jednoznačnost dokážeme *sporem*. Předpokládejme řešení $\vec{z}(x)$ na $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$, přičemž

$$\vec{z}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

a nechť dále existuje $x_1 \in \langle \alpha, \beta\rangle$ takové, že $\vec{z}(x_1) \neq \vec{y}(x_1)$. Definujme

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - z_i(x)|$$

pro $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Zřejmě $\chi(x_0) = 0$, $\chi(x_1) \neq 0$, předpokládejme $x_0 < x_1$. Definujme dále $x_2 = \sup\{x \in \langle x_0, x_1 \rangle | \chi(x) = 0\}$. Zřejmě $x_0 \le x_2 < x_1 \le \beta \le x_0 + h$. Dále platí

$$|y_j(x_2) - y_{j0}| = \left| \int_{x_0}^{x_2} f_j(t, \vec{y}(t))\mathrm{d}t \right| \le K\,|x_2 - x_0| < Kh \le b.$$

Bod $[x_2, y_1(x_2), \ldots, y_n(x_2)] = [x_2, z_1(x_2), \ldots, z_n(x_2)]$ leží **uvnitř** intervalu $\mathcal{I}$, takže

(1) Existuje $\delta > 0$ takové, že $x_2 + \delta < x_1$.
(2) Pro $x \in \langle x_2, x_2 + \delta \rangle$ je $[x_2, z_1(x_2), \ldots, z_n(x_2)] \in \mathcal{I}$.

Zvolíme $\delta < \frac{1}{nL}$. Definujme

$$A = \sup_{x \in \langle x_2, x_2 + \delta \rangle} \chi(x) > 0.$$

Pro $x \in \langle x_2, x_2 + \delta \rangle$ dále platí

$$\begin{aligned}
|y_j(x) - z_j(x)| &= \left| \left(y_j(x_2) + \int_{x_2}^{x} f_j(t, \vec{y}(t))\mathrm{d}t \right) - \left(z_j(x_2) + \int_{x_2}^{x} f_j(t, \vec{z}(t))\mathrm{d}t \right) \right| = \\
&= \left| \int_{x_2}^{x} (f_j(t, \vec{y}(t)) - f_j(t, \vec{z}(t)))\mathrm{d}t \right| \le \int_{x_2}^{x} |f_j(t, \vec{y}(t)) - f_j(t, \vec{z}(t))|\,\mathrm{d}t \le \\
&\le L \int_{x_2}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t) - z_i(t)| = L \int_{x_2}^{x} \chi(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_j(x) - z_j(x)| \le nL \int_{x_2}^{x} \chi(t)\mathrm{d}t \le nLA\delta,$$

tedy $A \le nLA\delta$, takže

$$\delta \ge \frac{1}{nL},$$

což je hledaný spor. □

Poznámka. Nadále budeme předpokládat, že funkce $f_1, \ldots, f_n$ jsou lokálně lipschitzovské a spojité na $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice 35. Nechť $\vec{\varphi}(x)$ je řešení systému $\vec{y}' = \vec{f}(x, y)$ na intervalu $\mathcal{I}$. Řešení $\vec{\psi}(x)$ systému (15) na interval $\mathcal{J}$ se nazývá **prodloužení řešení** φ, platí-li

(1) $\mathcal{I} \subset J$, $\mathcal{I} \neq \mathcal{J}$,
(2) $\vec{\psi}(x) = \vec{\varphi}(x)$ pro $x \in \mathcal{I}$.

řešení, ke kterému neexistuje žádné prodloužení, se nazývá **neprodloužitelné (úplné)** a jeho graf se nazývá **charakteristika**.

Věta 36. Nechť funkce $f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou spojité a lokálně lipschitzovské na oblasti $G \in \mathbb{R}^{n+1}$. Potom platí:

(1) Nechť bod $[x, y_{10}, \ldots, y_{n0}] \in G$. Pak existuje právě jedno řešení

$$\vec{y}(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

systému (15), které je neprodloužitelné a splňuje podmínky

$$\vec{y}(x) \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix},$$

tj. každým bodem G prochází právě jedna charakteristika.

(2) Každé řešení systému (15) je částí některé charakteristiky.
(3) Dvě charakteristiky systému (15), které mají společný bod, jsou totožné.

Důkaz. Zkonstruujeme řešení s definičním oborem $\langle x_0, B)$ neprodloužitelné vpravo. Na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ existuje řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$, existuje i řešení na $\langle x_0, x_0 + h\rangle$. Na bod $[x_0 + h, \vec{y}(x_0 + h)]$ opět aplikujeme větu o existenci. Definujme číslo $B = \sup M$, kde M je množina všech b takových, že na $\langle x_0, b)$ existuje řešení $\vec{y}(x)$ splňující počáteční podmínku

$$\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Uvedeným postupem jsme získali posloupnost $b_1 < b_2 < \cdots$ takovou, že $\lim_{i\to\infty} \beta_i = B$, $\vec{y}^{(i)}$ řeší rovnici na $\langle x_0, \beta_i)$. Potom pro $k < m$ platí, že $\vec{y}^{(k)}(x) = \vec{y}^{(m)}(x)$ na $\langle x_0, \beta_k)$. To dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $\xi \in \langle x_0, \beta_k)$ takové, že $\vec{y}^{(k)}(\xi) \neq \vec{y}^{(m)}(\xi)$. Buď dále $x_1 = \sup\{x | \vec{y}^{(k)}(x) = \vec{y}^{(m)}(x)\}$. Protože $\vec{y}^{(k)}(x_1) = \vec{y}^{(m)}(x_1)$, bodem $[x_1, \vec{y}^{(k)}(x_1)]$ procházejí dvě integrální křivky, což je spor.

Na intervalu $\langle x_0, B)$ je řešením $\vec{y}(x) = \vec{y}^{(k)}$, kde $x \in \langle x_0, \beta_k)$. Neexistuje řešení na $\langle x_0, B_1)$, kde $B_1 > B$ protože B je supremum. Analogicky se dokáže tvrzení pro směr doleva.

Uvažujme řešení $\vec{z}(x)$ na (α, β), které se shoduje s $\vec{y}$ v $x_1 \in (\alpha, \beta)$. Pak

(1) $(\alpha, \beta) \subset (A, B)$,
(2) $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro $x \in (\alpha, \beta)$.

Buď $(\gamma, \delta) = (A, B) \cap (\alpha, \beta)$. Potom $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro $x \in (\gamma, \delta)$. Nechť pro $\xi \in (\alpha, \beta)$ je $\vec{y}(\xi) \neq \vec{z}(\xi)$. Buď $x_2 = \sup\{x | \vec{z}(x) = \vec{y}(x)\}$, potom určitě $\alpha \le x_2 < \xi$, $\vec{z}(x_2) = \vec{y}(x_2)$ (díky spojitosti).

Dokážeme, že $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$. Předpokládejme, že $x_1 < \delta = B < \beta$.

(1) Při volbě počáteční podmínky $x_0 = x_1$ dostáváme spor s definicí $B = \sup b$.
(2) $x_0 > x_1$ $x_1 < x_0 < \delta = B < \beta$ opět spor s $B = \sup b$.
(3) Je-li $x_0 < x_1$, zkonstruujeme řešení

$$\vec{Y}(x) = \begin{cases} \vec{y}(x) & x \in \langle x_0, x_1\rangle \\ \vec{z}(x) & x \in \langle x_1, \beta). \end{cases}$$

To splňuje počáteční podmínku a opět dostáváme spor. □

Věta 37. Nechť funkce $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, \ldots, n$ mají na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ spojité derivace podle všech proměnných do řádu p ($p \in \mathbb{N}_0$). Pak všechna řešení systému (15) mají spojité derivace podle x do řádu $p + 1$.

Věta 38. Nechť funkce $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ jsou spojité a omezené na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a nechť každým bodem $[x_0, \vec{y}^{(0)}] \in G$ prochází právě jedna charakteristika systému (15). Nechť $\vec{y}(x)$ je řešení systému na $\langle \alpha, \beta\rangle$, $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle$ a $\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$. Potom toto řešení závisí spojitě na pravé straně $\vec{f}(x, y)$ a bodu $[x_0, \vec{y}^{(0)}]$.

To je: Nechť bodem $[x_0, \vec{y}^{(0)}]$ prochází graf řešení $\vec{y}(x)$ s definičním oborem $\langle \alpha, \beta\rangle$ ($\alpha < x_0 < \beta$). Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý bod $\left[\widehat{x_0}, \widehat{\vec{y}}^{(0)}\right]$ a každou funkci f takové, že $|\widehat{x}_0 - x_0| < \delta$, $\left\|\widehat{\vec{y}}^{(0)} - \vec{y}^{(0)}\right\|_{\mathrm{II}} < \delta$, $\left|\widehat{\vec{f}}_j(x, \vec{y}) - \vec{f}_j(x, \vec{y})\right| < \delta$ pro $j \in \widehat{n}$ a $[x, \vec{y}] \in G$ (přičemž $\vec{f}(x, y)$ je spojitá na G) lze každé řešení $\widehat{y}(x)$ rovnice $\vec{y} = \widehat{\vec{f}}(x, \vec{y})$ splňující $\vec{y}(\widehat{x_0}) = \widehat{y}^{(0)}$ prodloužit na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a platí $\left\|\widehat{\vec{y}}(x) - \vec{y}(x)\right\|_{\mathrm{II}} < \varepsilon$ pro $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$.

5. Systémy lineárních diferenciálních rovnic. Lineární rovnice n-tého řádu

Systémem lineárních diferenciálních rovnic rozumíme systém rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned} \tag{16}$$

kde $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ i řešení jsou komplexní funkce reálné proměnné.

Tento systém lze zapsat i maticově jako $\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Věta 39 (o existenci a jednoznačnosti)**.** Nechť $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, kde $i, j \in \widehat{n}$ jsou komplexní funkce reálné proměnné, spojité na intervalu $\mathcal{I}$. Nechť $x \in \mathcal{I}$ a $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0} \in \mathbb{C}$. Označme

$$\vec{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Potom systém (16) má řešení

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

na intervalu $\mathcal{I}$, pro které platí, že $\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$. Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$$

řešení (16) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{I}_1$, pro které $\vec{z}(x_0) = y^{(0)}$, je $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro $x \in \mathcal{I}_1$.

Důkaz. Systém rovnic (16) je ekvivalentní s Cauchyovou počáteční úlohou

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)y_j(t) + b_1(t) \right) \mathrm{d}t + y_{10} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)y_j(t) + b_n(t) \right) \mathrm{d}t + y_{n0} \end{aligned}$$

$$\vec{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}^{(p)} = \begin{pmatrix} y_1^{(p)} \\ \vdots \\ y_n^{(p)} \end{pmatrix}, \qquad y_i^{(p)}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j^{(p-1)}(t) + b_i(t) \right) \mathrm{d}t + y_{i0}.$$

Chceme dokázat, že $\vec{y}^{(p)}$ stejnoměrně konvergují k $\vec{y}(x)$ pro $x \in \mathcal{I}$, přičemž $\vec{y}(x)$ splňuje (16). Dokážeme, že na každém $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ uzavřeném a obsahujícím x_0 $\vec{y}^{(p)}(x) \rightrightarrows \vec{y}(x)$, která splňuje (16).

Označme L délku $\mathcal{I}_0$. Z omezenosti a_{ij}, b_i plyne $|a_{ij}(x)| \leq K$, $|b_i(x)| \leq K$. Označme $Y = \max(|y_{10}|, |y_{20}|, \dots, |y_{n0}|)$. Platí, že

$$\left|y_i^{(p+1)}(x) - y_i^{(p)}(x)\right| \leq (1+nY)\frac{n^p K^{p+1} |x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!} \leq \left(\frac{1}{n}+Y\right)\frac{(nKL)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

To dokážeme matematickou indukcí:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_{j0} + b_i(t)\right| \mathrm{d}t\right| \leq (nKY+K)|x-x_0| =$$
$$= (1+nY)K|x-x_0|,$$

$$\left|y_i^{(p+1)}(x) - y_i^{(p)}(x)\right| \leq \int_{x_0}^{x} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(y_i^{(p)}(t) - y_i^{(p-1)}(t)\right)\right| \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq (1+nY)\frac{n^p K^{p+1}}{p!}\int_{x_0}^{x} |t-x_0|^p \,\mathrm{d}t.$$

Potom je

$$\lim_{p\to\infty} \vec{y}^{(p)}(x) = \lim_{p\to\infty}\left[\vec{y}^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{p}\left(\vec{y}^{(i)}(x) - \vec{y}^{(i-1)}(x)\right)\right].$$

Řada má konvergentní majorantu

$$\left(\frac{1}{n}+Y\right)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(nKL)^i}{i!} = \left(\frac{1}{n}+Y\right)\left[e^{nKL}-1\right],$$

tudíž posloupnost $\vec{y}^{(k)}(x)$ na uzavřeném $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ stejnoměrně konverguje.

Jednoznačnost dokážeme sporem. Mějme funkce $\vec{y}(x), \vec{z}(x)$ takové, že $\vec{z}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$ a nechť neplatí, že $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Dokážeme, že na každém uzavřeném intervalu $\vec{y}(x) = \vec{z}(x)$. Po dosazení do Cauchyovy počáteční úlohy dostaneme

$$y_i(x) - z_i(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,(y_j(t) - z_j(t))\,\mathrm{d}t\right)$$

pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Dále je díky spojitosti $|a_{ij}(x)| \leq A$, $|y_i(x) - z_i(x)| \leq K$ pro $i \in \widehat{n}$. Dokážeme, že pro $\forall p \in \mathbb{N}_0$ je

$$|y_i(x) - z_i(x)| \leq K\frac{(nA|x-x_0|)^p}{p!}.$$

To provedeme indukcí, pro $p=0$ to platí z předpokladu,

$$|y_i(x) - z_i(x)| \leq \int_{x_0}^{x}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,(y_j(t) - z_j(t))\right| \mathrm{d}t \leq K\frac{(nA)^p}{p!}\cdot An\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^p\,\mathrm{d}t =$$
$$= K\frac{(nA|x-x_0|)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

V limitě pak

$$\lim_{p\to\infty} K\frac{(nA|x-x_0|)^p}{p!} = 0. \quad \square$$

Poznámka. Jsou-li funkce $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ a počáteční podmínka reálné, je i řešení $\vec{y}(x)$ reálná funkce reálné proměnné.

5.1. **Řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.** Lineární rovnice n-tého řádu

$$y_n^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x) \tag{17}$$

je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= -p_1(x)y_n - p_2(x)y_{n-1} - \ldots - p_n(x)y_1 + q(x), \end{aligned}$$

kde $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$.

Věta 40. Nechť $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), q(x)$ jsou komplexní funkce reálné proměnné spojité v intervalu $\mathcal{I}$. Buďte $x_0 \in \mathcal{I}$ a $y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$ komplexní čísla. Pak existuje řešení $y(x)$ rovnice (17) v intervalu $\mathcal{I}$, které splňuje podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Je-li $z(x)$ řešení (17) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{I}_1$ a platí $z(x_0) = y_0$, $z'(x_0) = y_0', \dots, z^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, platí také $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$.

Jak nalézt všechna řešení (17): Lineární diferenciální rovnicí bez pravé strany rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \tag{18}$$

Operátor

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

nazýváme **lineární diferenciální operátor**. Linearita ($L(cy) = cL(y)$, $L(y+z) = L(y) + L(z)$) je zřejmá. Soustavy (17) resp. (18) lze pomocí tohoto operátoru zapsat jako $L(y) = q(x)$ resp. $L(y) = 0$.

Poznámka. (1) Jsou-li funkce $y_1(x), \dots, y_k(x)$ řešením (18), je řešením i jejich lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x).$$

Důkaz. Protože $L(y_i) = 0$, je

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_i) = 0. \quad \square$$

(2) Je-li $z(x)$ řešením (17), pak $y(x) + z(x)$ je řešením (17), právě když $y(x)$ je řešením (18).

Důkaz. (a) ($\Rightarrow$) $L(y+z) = q,\ L(z) = q \implies L(y) = L((y+z) - z) = L(y+z) - L(z) = 0$.
(b) ($\Leftarrow$) $L(y) = 0 \implies L(y+z) = L(y) + L(z) = q$. $\square$

Řešení hledáme tak, že nalezneme všechna řešení y (18) a jedno (partikulární) řešení z rovnice (17). Každé řešení (17) má tvar $y + z$.

5.1.1. *Nalezení všech řešení rovnice bez pravé strany.*

Definice 41. Nechť je dáno n funkcí $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ definovaných na intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že jsou **lineárně závislé na** $\mathcal{I}$, existují-li čísla $c_1, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Jestliže funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ nejsou lineárně závislé, řekneme, že jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Jsou-li funkce lineárně nezávislé na $\mathcal{I}$, jsou lineárně nezávislé i na $\mathcal{I}_1$, kde $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1$.

Definice 42. Nechť $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají na $\mathcal{I}$ derivace až do $(n-1)$-tého řádu. Funkci

$$W(x) = W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazýváme **Wronského determinantem (wronskiánem)** funkcí $f_1, f_2, \dots, f_n$ na $\mathcal{I}$.

Věta 43. jestliže funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ mají na intervalu $\mathcal{I}$ derivace do $(n-1)$-tého řádu a jestliže jsou na $\mathcal{I}$ lineárně závislé, je $W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 f_1(x) & + & c_2 f_2(x) & + & \cdots & + & c_n f_n(x) & = & 0 \\ c_1 f_1'(x) & + & c_2 f_2'(x) & + & \cdots & + & c_n f_n'(x) & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) & + & c_2 f_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

má netriviální řešení, takže det $= W = 0$. □

Poznámka. Větu obecně nelze obrátit — např. funkce $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \left|x^3\right|$ na intervalu $(-a, a)$ nejsou lineárně závislé. Přitom pro $x = 0$ je $W = 0$, pro $x > 0$ je

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

a i pro $x < 0$ je

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka. (1) $y = 0$ řeší (18).

(2) Pokud existuje řešení $Y(x)$ rovnice (18) takové, že $Y(x_0) = Y'(x_0) = \cdots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0$, pak $Y(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, plyne to z jednoznačnosti řešení.

(3) Nechť $y_1(x), \dots, y_n(x)$ řeší (18). Jsou-li lineárně závislé, je $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Existuje-li $x_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0$, existují $c_1, \dots, c_n$ tak, že

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & c_2 y_2(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_0) & + & c_2 y_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x_0) & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{array}$$

Buď $Y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0)$. Protože $Y(x)$ řeší (18) a $Y(x_0) = Y'(x_0) = \cdots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0$, je $c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Důsledkem je následující věta.

Věta 44. Nechť $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení (18) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom jejich Wronského determinant je buď všude roven nule nebo všude různý od nuly. V prvním případě jsou funkce lineárně závislé, v druhém nezávislé.

Definice 45. Systém $y_1(x), \dots, y_n(x)$ n řešení rovnice (18) (n-tého řádu) se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (18), pokud jsou funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lineárně nezávislé na $\mathcal{I}$, tj. pokud $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ na $\mathcal{I}$.

Věta 46. Je-li $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice (18) na intervalu $\mathcal{I}$, lze každé řešení $y(x)$ rovnice (18) na $\mathcal{I}$ vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

a to jediným způsobem.

Důkaz. Nechť $y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)$ řeší (18) a $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tvoří fundamentální systém. Buď dále $x_0 \in \mathcal{I}$. Položme $c_1, \dots, c_n$ rovny řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & c_2 y_2(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) & + & c_2 y_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x_0) & = & y'(x_0) \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0). \end{array}$$

Funkce

$$z(x) = y(x) - c_1 y_1(x) - \ldots - c_n y_n(x)$$

je lineární kombinací $y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)$, tudíž také řeší (18). Protože

$$z(x_0) = z'(x_0) = \cdots = z^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

je $z(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.

Jednoznačnost dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$y(x) = d_1 y_1(x) + \cdots + d_n y_n(x),$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$ a existuje j takové, že $c_j \neq d_j$. Pak ale musí platit

$$0 = (d_1 - c_1) y_1(x) + \cdots + (d_n - c_n) y_n(x).$$

Protože jsou funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lineárně nezávislé, musí být $c_i = d_i$ pro každé $i \in \widehat{n}$, což je spor. $\square$

Poznámka. Na $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ je to také fundamentální systém.

Věta 47. Rovnice (18) má fundamentální systémy. Jsou-li $y_1(x), \dots, y_n(x)$ řešení (18) a je-li

$$Y_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} y_j(x),\ Y_2(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{2j} y_j(x), \dots, Y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} y_j(x),$$

platí

$$W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} W_{y_1,\dots,y_n}(x)$$

a tedy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tvoří fundamentální systém, právě když

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Důkaz. Označme $z_1(x), \dots, z_n(x)$ funkce, pro které platí

$$\begin{array}{lllll} L(z_1) = 0 & z_1(x_0) = 1 & z_1'(x_0) = 0 & \dots & z_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ L(z_2) = 0 & z_2(x_0) = 0 & z_2'(x_0) = 1 & \dots & z_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ \quad\vdots & & & & \\ L(z_n) = 0 & z_n(x_0) = 0 & z_n'(x_0) = 0 & \dots & z_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}$$

Platí, že $W_{z_1,z_2,\dots,z_n} = |\mathbf{I}| = 1$. Protože

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \vdots \\ Y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

z aditivity derivace je

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ Y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & \dots & Y_1^{(k)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_n(x) & \dots & Y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_1^{(k)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(x) & \dots & y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix},$$

tedy $W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = |c_{ij}|\, W_{y_1,\dots,y_n}(x)$. □

Poznámka. Jsou-li $p_1(x), \dots, p_n(x)$ reálné funkce, rovnice (18) může mít i komplexní řešení $y(x) = u(x) + \mathbf{i}v(x)$, pak ale i $u(x)$ a $v(x)$ jsou řešení (18), neboť $L(u + \mathbf{i}v) = 0 \implies L(u) + \mathbf{i}L(v) = 0 \implies L(u) = 0 \wedge L(v) = 0$. Kromě toho má i řešení $u - \mathbf{i}v$.

Lemma 48. Je-li funkce $A(x)$ definována vztahem

$$A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

pak

$$A'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1}(x) & \dots & a_{i-1,n}(x) \\ a'_{i1}(x) & \dots & a'_{in}(x) \\ a_{i+1,1}(x) & \dots & a_{i+1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Věta 49. Nechť $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení (18) na intervalu $\mathcal{I}$, nechť $x_0 \in \mathcal{I}$. Potom

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x) = W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t}.$$

Důkaz. Podle předchozího lemmatu je

$$W'_{y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-2}(x) & \dots & y_n^{n-2}(x) \\ y_1^{n}(x) & \dots & y_n^{n}(x) \end{vmatrix},$$

neboť všechny sčítance až na poslední jsou nulové (determinanty obsahují dva stejné řádky). Do posledního řádku dosadíme

$$y_i^{(n)} = -p_1(x) y_i^{(n-1)}(x) - p_2(x) y_i^{(n-2)}(x) - \dots - p_n(x) y_i(x)$$

a přičteme k poslednímu odpovídající násobky předchozích řádků tak, abychom zrušili všechno až na $-p_1(x) y_i^{(n-1)}(x)$, z posledního řádku vytkneme $-p_1(x)$ a dostaneme tak

$$W'_{y_1,\dots,y_n}(x) = -p_1(x) W_{y_1,\dots,y_n}(x),$$

takže

$$\frac{W'}{W} = -p_1(x),$$

$$\ln|W| = -\int p_1(x)\mathrm{d}x + \ln C,$$

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t},$$
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t}. \quad \square$$

Poznámka. Máme-li lineární rovnici n-tého řádu bez pravé strany a máme-li $n+1$ a více řešení, jsou lineárně závislé.

Věta 50. Buďte $y_1, \dots, y_n$ funkce, které mají v intervalu $\mathcal{I}$ spojité derivace až do řádu n a nechť $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathcal{I}$. Potom existuje právě jedna rovnice (18) se spojitými koeficienty $p_i(x)$, která má řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Je to rovnice
$$\frac{W_{y,y_1,y_2,\dots,y_n}(x)}{W_{y_1,y_2,\dots,y_n}(x)} = 0.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme jednoznačnost. Buď

$$y^{(n)} + r_1(z)y^{(n-1)} + \dots + r_n(x)y = 0 \tag{19}$$

jiná rovnice, které také vyhovují řešení $y_1, \dots, y_n$. Buď k první index takový, že $p_k(x) - r_k(x) \neq 0$. Potom, protože $p_i(x), r_i(x)$ jsou spojité, existuje $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ takový, že $p_k(x) - r_k(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Odečtením (18) a (19) dostaneme

$$(p_k(x) - r_k(x))y^{(n-k)}(x) + \dots + (p_n(x) - r_n(x))y(x) = 0 \tag{20}$$

pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a řeší (20), takže mám víc LN řešení než koeficientů, což je spor. V případě, že se rovnice liší pouze u posledního koeficientu, dostaneme $(p_n(x) - r_n(x))y(x) = 0$, což sice není diferenciální rovnice, ale dvě LN řešení také neexistují.

Platí, že
$$W_{y,y_1,y_2,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Po dosazení libovolné funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$ dostaneme $W = 0$, neboť v matici budou dva stejné sloupce. Rozvinutím podle prvního sloupce a vydělením dostaneme rovnici typu (18). Algebraické doplňky jsou spojité a koeficient u $y^{(n)}$ se zkrátí. $\square$

5.1.2. *Lineární rovnice s pravou stranou, metoda variace konstant.* Buď
$$z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$
řešení rovnice (18). Pokusíme se najít funkce $c_i(x)$ tak, aby funkce
$$z(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$
řešila rovnici (17). Hledáme tak n konstant, zatím máme pouze jednu podmínku. Dalších $n-1$ podmínek vyrobíme tak, že předchozí vztah budeme postupně derivovat. Po prvním derivování dostaneme
$$z'(x) = c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x) + c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x).$$
Aby se dalo jednoduše derivovat dál, položíme podmínku
$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i(x) = 0.$$
Dalším derivováním dostaneme
$$z'(x) = c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x)$$
a položíme
$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i'(x) = 0.$$

Nakonec dostaneme

$$
\begin{aligned}
z^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \\
+ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)^{(n-2)}(x),
\end{aligned}
$$

$(n-1)$-tá podmínka je

$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0.$$

Protože

$$z^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

a v důsledku předchozích podmínek je

$$
\begin{aligned}
L(z) = c_1(x)L(y_1) + c_2(x)L(y_2) + \cdots + c_n(x)L(y_n) + \\
+ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'^{(n-1)}(x) = q(x).
\end{aligned}
$$

Protože $L(y_i) = 0$, dostáváme poslední podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = q(x).$$

5.2. **Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.** Rovnice tvaru

$$L(y) = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = q(x), \tag{21}$$

kde $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ a $q(x)$ je spojitá funkce $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Za $y(x)$ dosadíme $e^{\lambda x}$. Potom dostaneme

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_ne^{\lambda x} = 0,$$

tedy

$$\left(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right) e^{\lambda x} = 0,$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Rovnici $F(\lambda) = 0$, kde $F(\lambda) = a_0\lambda^n + \cdots + a_n$ nazýváme **charakteristickou rovnicí**, $F(\lambda)$ je **charakteristický polynom**.

Věta 51. Nechť μ je k-násobný kořen $F(\lambda)$. Pak řešením lineární diferenciální rovnice jsou $e^{\mu x}, xe^{\mu x}, x^2e^{\mu x}, \ldots, x^{k-1}e^{\mu x}$.

Důkaz. Buď $y(x) = e^{\mu x}z(x)$, $L(y) = e^{\mu x}M(z)$, kde M je lineární diferenciální operátor stejného řádu jako L.

$$
\begin{aligned}
L(y) &= \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}y^{(l)} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\left[\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\mu^i z^{(l-i)}e^{\mu x}\right] = \\
&= \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\sum_{i=0}^{l}\left(\binom{l}{i}\mu^i z^{(l-i)}\right)\right]}_{M(z)} e^{\mu x}.
\end{aligned}
$$

Buď $G(\lambda)$ charakteristický polynom $M(z)$. Potom

$$G(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\underbrace{\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\mu^i\lambda^{l-i}}_{(\lambda+\mu)^l} = F(\lambda+\mu).$$

Protože μ je k-násobný kořen F, je $F(x) = (x-\mu)^k\widehat{F}(x)$, kde $\widehat{F}$ je polynom. Dále je $F(\lambda+\mu) = \lambda^k\widehat{F}(\lambda+\mu)$, tedy G má k-násobný kořen 0. Potom G musí mít tvar

$$G(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_{n-k}\lambda^k$$

a M má tvar

$$M(z) = A_0z^{(n)} + A_1z^{(n-1)} + \cdots + A_{n-k}z^{(k)}.$$

Rovnice $M(z) = 0$ má zřejmě řešení $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$, takže $L(y) = 0$ má řešení $e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \dots, x^{k-1}e^{\mu x}$.

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ kořeny charakteristického polynomu a $k_1, k_2, \dots, k_p$ jejich násobnosti, tj. $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$. Buď dále systém řešení

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \dots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_p x}, & xe^{\lambda_p x}, & \dots, & x^{k_p-1}e^{\lambda_p x}. \end{array} \tag{22}$$

Ukážeme, že řešení (22) jsou lineárně nezávislá na intervalu $\mathcal{I}$. Nejprve ale dokážeme následující lemma. □

Lemma 52. Nechť $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$ jsou nenulové polynomy a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ vzájemně různá čísla. Pak na každém intervalu $\mathcal{I}$ (obsahujícím alespoň 2 body) neplatí, že

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_r(x)e^{\lambda_r x} = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí. Je-li $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$, je nutně $P_1(x) = 0$. Předpokládáme, že r-členná relace platí, potom je

$$P_1(x) = -P_2(x)e^{\lambda_2 x - \lambda_1 x} - P_3(x)e^{\lambda_3 x - \lambda_1 x} - \ldots - P_r(x)e^{\lambda_r x - \lambda_1 x}. \tag{23}$$

Buď $\mu_i = \lambda_i - \lambda_1$, platí, že $\mu_i \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{r} \setminus \{1\}$. Protože platí

$$\left(P_i(x)e^{\mu_i x}\right)^{(k+1)} = Q_i(x)e^{\mu_i x},$$

$(k+1)$-tým derivováním (23) dostaneme

$$0 = Q_2(x)e^{\mu_2 x} + \dots + Q_r(x)e^{\mu_r x},$$

tedy $(r-1)$-členná relace by musela rovněž platit, což je spor. □

Předpokládejme nyní rovnost

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}x^j\right]}_{P_i(x)} e^{\lambda_i x} = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Z předchozího lemmatu vyplývá, že všechny polynomy $P_i(x)$ jsou nulové, tudíž $c_{ij} = 0$. Z toho plyne, že řešení (22) jsou lineárně nezávislá a tvoří fundamentální systém.

Pro rovnici s reálnými koeficienty existuje reálný fundamentální systém. Nalezený fundamentální systém ale není reálný, protože kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Víme ovšem, že pokud je kořenem $a + \mathrm{i}b$, je kořenem i $a - \mathrm{i}b$. Pokud fundamentální systém obsahuje dvojici řešení

$$y_1(x) = x^k e^{(a+\mathrm{i}b)x}, \quad y_2(x) = x^k e^{(a-\mathrm{i}b)x}.$$

Tuto dvojici ze systému odstraníme a místo ní zařadíme

$$z_1(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2}, \quad z_2(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2\mathrm{i}},$$

tedy

$$z_1(x) = x^k e^{ax} \cos bx, \quad z_2(x) = x^k e^{ax} \sin bx.$$

Je potřeba dokázat, že i nový systém je fundamentální. Platí, že

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2\mathrm{i} & 1/2\mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

a protože

$$W_{z_1,z_2,y_3,\dots,y_n} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}W_{y_1,y_2,y_3,\dots,y_n} \neq 0$$

a protože $W_{y_1,y_2,y_3,\dots,y_n} \neq 0$, je to fundamentální systém.

5.3. **Systémy lineárních diferenciálních rovnic.** Systémem lineárních rovnic rozumíme systém

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x). \tag{24}$$

Systémem lineárních rovnic bez pravé strany rozumíme systém

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y}. \tag{25}$$

Zavádíme **lineární diferenciální operátor** $L(\vec{y}) = \vec{y}' - \mathbf{A}(x)\vec{y}$. Platí-li $L(\vec{z}) = \vec{b}(x)$ a $L(\vec{y}) = \vec{\theta}$, je $\vec{z} + \vec{y}$ řešením (24). Jsou-li $\vec{y}$, $\vec{z}$ řešení (24), pak $\vec{z} - \vec{y}$ řeší (25).

5.3.1. *Nalezení všech řešení systému bez pravých stran.*

(1) Nulový vektor $\vec{\theta}$ je řešením (25).
(2) Jestliže řešení $\vec{y}(x)$ splňuje v bodě $x_0 \in \mathcal{I}$ podmínku $\vec{y}(x_0) = \vec{\theta}$, pak z jednoznačnosti řešení plyne, $\vec{y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.
(3) Jsou-li $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řešení (25), pak

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \vec{y}^{(i)}(x)$$

je řešení (25).

Buďte $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ funkce takové, že

$$\vec{y}^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(i)}(x) \\ y_2^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}.$$

Potom definujeme wronskián

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Věta 53. Jsou-li funkce $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ lineárně závislé na intervalu $\mathcal{I}$, potom v každém bodě $x \in \mathcal{I}$ je

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x) = 0.$$

Důkaz. Nechť existují $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule taková, že pro každé $x \in \mathcal{I}$ je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x) = \vec{\theta},$$

tedy pro každé $x \in \mathcal{I}$ a $i \in \widehat{n}$ je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_i^{(j)}(x) = 0.$$

To je systém s maticí stejnou jako je matice W a má netriviální řešení, tedy $W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x) = 0$. $\square$

Poznámka. Předchozí větu nelze obecně obrátit, například funkce x a x^2 jsou lineárně nezávislé, ale

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Platí však následující věta.

Věta 54. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ jsou řešení (25) na intervalu $\mathcal{I}$. Jestliže alespoň v jednom bodě $x_0 \in \mathcal{I}$ je

$$W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}(x_0) = 0,$$

jsou $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ lineárně závislé.

Důkaz. Buď $W(x_0) = 0$. Potom existují $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule taková, že

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \vec{y}^{(j)}(x_0) = 0$$

Buď

$$\vec{Y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Platí, že $\vec{Y}(x_0) = \vec{\theta}$ a proto z jednoznačnosti $\vec{Y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Proto platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x) = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$ a tedy funkce jsou lineárně závislé. □

Přímým důsledkem dvou předchozích vět je následující věta.

Věta 55. Jsou-li $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řešení systému (25) na intervalu $\mathcal{I}$, potom $W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}$ je buď pro každé $x \in \mathcal{I}$ různý od nuly nebo je pro každé $x \in \mathcal{I}$ roven nule. První případ nastává, když jsou řešení lineárně nezávislá, druhý, když jsou lineárně závislá.

Definice 56. Fundamentálním systémem řešení systému (25) nazýváme každých n lineárně nezávislých řešení (25).

Věta 57. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ je fundamentální systém řešení (25). Pak každé řešení $\vec{y}(x)$ systému (25) lze psát ve tvaru

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}^{(1)}(x) + c_2 \vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n \vec{y}^{(n)}(x),$$

kde c_i jsou konstanty, které jsou řešením $\vec{y}(x)$ určený jednoznačně.

Důkaz. Buď $x_0 \in \mathcal{I}$. Protože řešení tvoří fundamentální systém, je $W(x_0) \neq 0$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_i^{(j)}(x_0) = y_i(x_0)$$

pro každé $i \in \widehat{n}$. Protože matice soustavy je regulární, je soustava jednoznačně řešitelná. Definujme

$$\vec{Y} = \vec{y}(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Protože $\vec{Y}$ je lineární kombinace řešení systému (25), řeší i $\vec{Y}$ systém (25). Protože $\vec{Y}(x_0) = 0$, je $\vec{Y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Nakombinovali jsme tak řešení $\vec{y}$ z fundamentálního systému.

Nechť také platí

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Potom

$$\vec{\theta} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) \vec{y}^{(i)}(x),$$

proto musí platit $d_i = c_i$ pro $i \in \widehat{n}$. $\square$

Věta 58. Existují fundamentální systémy řešení systému (25), při reálných $a_{ij}(x)$ existují reálné fundamentální systémy.

Důkaz. Buď $x_0 \in \mathcal{I}$. Buďte dále $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řešení taková, že $\vec{y}^{(1)}(x_0) = e^{(1)}, \vec{y}^{(2)}(x_0) = e^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}(x_0) = e^{(n)}$. Potom $W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x_0) = 1$. $\square$

Věta 59. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ jsou řešení (25). Nechť

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

je daná matice. Položme

$$\vec{z}^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \vec{y}^{(j)}(x) \tag{26}$$

pro každé $i \in \widehat{n}$. Pak funkce $\vec{z}^{(i)}(x)$ jsou opět řešení (25) a platí

$$W_{\vec{z}^{(1)},\dots,\vec{z}^{(n)}} = \det \Gamma W_{\vec{y}^{(1)},\dots,\vec{y}^{(n)}}$$

a tudíž $\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}$ je fundamentální systém, právě když $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ je fundamentální systém a $\det \Gamma \neq 0$.

Důkaz. Vztah (26) je ekvivalentní vztahu

$$(\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}) = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)})\Gamma^T.$$

Z toho vyplývá, že každá z funkcí $\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}$ je lineární kombinací funkcí $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$. Současně z toho vyplývá vztah pro determinanty. $\square$

Věta 60. Pro libovolnou n-tici řešení $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ systému (25) a bod $x_0 \in \mathcal{J}$ platí

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x) = W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \tau(\mathbf{A}(t)) \mathrm{d}t},$$

kde $\tau(\mathbf{A}(x)) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \dots + a_{nn}(x) = \operatorname{Tr} \mathbf{A}(x)$ je stopa matice $\mathbf{A}(x)$.

Důkaz. Pro derivaci wronskiánu platí podle lemmatu 48

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}^{(1)}(x) & y_{k-1}^{(2)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n)}(x) \\ y_k^{(1)\prime}(x) & y_k^{(2)\prime}(x) & \dots & y_k^{(n)\prime}(x) \\ y_{k+1}^{(1)}(x) & y_{k+1}^{(2)}(x) & \dots & y_{k+1}^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Na i-tém místě v derivovaném řádku je zderivovaná k-tá složka i-tého řešení, která vyhovuje k-té rovnici systému:

$$y_k^{(i)\prime} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j^{(i)}(x).$$

Tento vztah dosadíme za derivace a odečteme od derivovaného řádku vhodné násobky ostatních tak, aby tam zůstal pouze k-tý sčítanec. k-tý řádek determinantu bude pak mít tvar

$$\begin{vmatrix} a_{kk}(x) y_k^{(1)} & a_{kk}(x) y_k^{(2)} & \dots & a_{kk}(x) y_k^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Potom platí, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x) W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} = W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} \tau(\mathbf{A}(x)).$$

Pro $W = 0$ věta platí, pokud $W \neq 0$, je to separovatelná rovnice a její řešení je (z počátečních podmínek $C = W(x_0)$)

$$W = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \tau(\mathbf{A}(t)) \mathrm{d}t}. \quad \square$$

Věta 61. Nechť funkce $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ splňují vztah

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} \neq 0$$

pro $x \in \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}$ je interval, a mají na $\mathcal{I}$ spojité derivace. Pak existuje právě jeden systém tvaru (25), jehož jsou fundamentálním systémem. Je to systém

$$\begin{vmatrix} y_i' & y_i^{(1)'} & y_i^{(2)'} & \dots & y_i^{(n)'} \\ y_1' & y_1^{(1)'} & y_1^{(2)'} & \dots & y_1^{(n)'} \\ y_2' & y_2^{(1)'} & y_2^{(2)'} & \dots & y_2^{(n)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n' & y_n^{(1)'} & y_n^{(2)'} & \dots & y_n^{(n)'} \end{vmatrix} \frac{1}{W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}} = 0$$

pro každé $i \in \widehat{n}$.

Důkaz. První část dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řeší různé systémy $\vec{y}^{(i)} = \mathbf{A}(x)\vec{y}^{(i)}$ i $\vec{y}^{(i)} = \mathbf{B}(x)\vec{y}^{(i)}$. Potom $(\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x))\vec{y}^{(i)}(x) = 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$, tedy

$$(\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x)) \underbrace{(\vec{y}^{(1)}(x), \vec{y}^{(2)}(x), \dots, \vec{y}^{(n)}(x))}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}.$$

Matice $\mathbf{Y}$ je regulární, neboť funkce jsou lineárně nezávislé, proto existuje $\mathbf{Y}^{-1}$, po vynásobení rovnice $\mathbf{Y}^{-1}$ zprava dostaneme $\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x) = \mathbf{0}$, tedy matice $\mathbf{A}(x)$ a $\mathbf{B}(x)$ jsou stejné, což je spor.

Rozvinutím matice podle 1. sloupce dostaneme systém typu (25). Po dosazení libovolného $\vec{y}^{(i)}$ za $\vec{y}$ rovnost platí. $\square$

5.4. **Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.** Systém $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

5.4.1. *Nalezení fundamentálního systému.* Řešení systému $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$ se pokusíme hledat ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{v}e^{\lambda x}$; $\lambda\vec{v}e^{\lambda x} = \mathbf{A}\vec{v}e^{\lambda x}$. Pokud je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná, jsou $\vec{v}$ vlastní vektory. Pokud ne, je to složitější.

Věta 62. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ řádu n s algebraickými násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_p$, $k_1 + k_p + \dots + k_p = n$. Pak systém diferenciálních rovnic $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$ má fundamentální systém řešení tvaru

$$\begin{array}{cccc} \vec{y}_1^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, & \vec{y}_2^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, & \dots & \vec{y}_{k_2}^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, \\ \vec{y}_1^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, & \vec{y}_2^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, & \dots & \vec{y}_{k_2}^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{y}_1^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, & \vec{y}_2^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, & \dots & \vec{y}_{k_p}^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, \end{array}$$

kde $y_j^{(i)}(x)$ je n vektorů, jejichž složky jsou polynomy stupně nejvýše $j - 1$ (nebo jsou nulové).

Důkaz. Existuje regulární matice $\mathbf{T}$ taková, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^{-1}$, kde $\mathbf{J}$ je matice v Jordanově normálním tvaru. Vynásobením rovnice $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} = \mathbf{TJT}^{-1}$ maticí $\mathbf{T}^{-1}$ zleva dostaneme $\mathbf{T}^{-1}\vec{y}' = \mathbf{JT}^{-1}\vec{y}$. Označme $\vec{z} = \mathbf{T}^{-1}\vec{y}$ a uvažujme systém $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$. Pokud najdeme fundamentální systém výše uvedených vlastností systému $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$, odpovídá mu fundamentální systém stejných vlastností systému $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, neboť lineární kombinací polynomů stupně k dostaneme opět polynom stupně k.

Matice $\mathbf{J}$ má blokový tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1^{(1)} & & & & & \\ & J_2^{(1)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{k_1}^{(1)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{k_p}^{(p)} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{J}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Systém $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$ má tedy tvar ($q := k_1$)

$$\begin{array}{rcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 \\ z_2' &=& z_1 + \lambda_1 z_2 \\ z_3' &=& z_2 + \lambda_1 z_3 \\ \vdots & & \ddots \\ z_q' &=& z_{q-1} + \lambda_1 z_q \\ z_{q+1}' &=& \lambda_2 z_{q+1} \\ z_{q+2}' &=& z_{q+1} + \lambda_2 z_{q+2} \\ \vdots & & \ddots \end{array}$$

Hledání fundamentálního systému jsme tak rozložili na dílčí problémy. Nyní řešíme systém

$$\begin{array}{rcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 \\ z_2' &=& z_1 + \lambda_1 z_2 \\ z_3' &=& z_2 + \lambda_1 z_3 \\ \vdots & & \ddots \\ z_q' &=& z_{q-1} + \lambda_1 z_q. \end{array}$$

Tady $z_i' = z_{i-1} + \lambda_1 z_i$. Zavedeme substituci $z_i(x) = e^{\lambda_1 x} u_i(x)$, dosazením vyjde

$$z_i' = e^{\lambda_1 x} u_{i-1} + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u_i$$

a derivací identity vyjde

$$z_i' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u_i + e^{\lambda_1 x} u_i'$$

a tedy $u_i' = u_{i-1}$. Tento systém má q lineárně nezávislých řešení, například

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \frac{x^3}{3!} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} \end{pmatrix}.$$

Řešení celého systému pak jsou

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\\x\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\\frac{x^3}{3!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \dots, \begin{pmatrix}1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\\vdots\\\frac{x^{q-1}}{(q-1)!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \dots \quad \square$$

Poznámka. Je-li λ_1 k_1-násobné vlastní číslo, existuje skupina k_1 lineárně nezávislých řešení tvaru $\vec{y}(x)e^{\lambda_1 x}$, kde $\vec{y}(x)$ má za své složky polynomy stupně nejvýše $k_1 - 1$.

To umožňuje hledat fundamentální systémy metodou „neurčitých koeficientů“. Za $\vec{y}(x)$ dosadíme součin $\vec{z}(x)e^{\lambda_1 x}$, kde $\vec{z}(x)$ je „polynomiální“ vektor. V každé rovnici dostaneme rovnost dvou polynomů stupně nejvýše $k_1 - 1$.

5.4.2. *Metoda variace konstant.* Buď $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ fundamentální systém systému (25). Předpokládáme partikulární řešení systému s pravou stranou

$$c_1(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}^{(n)}(x).$$

Dosazením do systému dostaneme

$$\begin{aligned} c_1'(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2'(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n'(x)\vec{y}^{(n)}(x) + \\ + c_1(x)\vec{y^{(1)}}'(x) + c_2(x)\vec{y^{(2)}}'(x) + \dots + c_n(x)\vec{y^{(n)}}'(x) = \\ = c_1(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(n)}(x) + \vec{b}(x) \end{aligned}$$

a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\vec{y}^{(i)}(x) = \vec{b}(x),$$

protože $c_i(x)\vec{y^{(i)}}'(x) = c_i(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(i)}(x)$ pro každé $i \in \widehat{n}$. Matice soustavy je regulární, existuje proto právě jedno řešení. Soustavu vyřešíme Cramerovým pravidlem. Protože všechny funkce $\vec{y}^{(i)}$ i $\vec{b}$ jsou spojité, bude spojité i řešení.

Rejstřík