Cvičení z DIFR, týden od 9. do 13. března

cvičící P. Strachota

1) rovnice typu $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ - dokončení

DÚ z minula: $y' = \frac{x+2y+1}{2x+3}$ s podmínkou $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$

zde $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\xi = x + x_0$ $\qquad ax_0 + by_0 = c$ $\qquad$ konkrétně $\quad x_0 + 2y_0 = 1$

$\eta = y + y_0$ $\qquad \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma$ $\qquad\qquad 2x_0 \quad = 3$

$\Rightarrow x_0 = \frac{3}{2},\ y_0 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \xi = x + \frac{3}{2}$

$\eta = y - \frac{1}{4}$ $\qquad$ a po dosazení do rovnice

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + 2\eta}{2\xi}$$

subst. $\eta = \xi z(\xi)$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = z + \xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{\xi + 2\xi z}{2\xi} = \frac{1+2z}{2} = \frac{1}{2} + z$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{2\xi} \quad \Big| \int$$

$$z = \frac{1}{2}\ln|\xi| + \tilde{C} = \frac{1}{2}\ln|C\xi|$$

$\tilde{C} \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

z podm. $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{2} \ \dots\ \xi = 4$

$y = \frac{1}{4} \ \dots\ \eta = 0 \ \dots\ z = 0$

dosadíme: $0 = \frac{1}{2}\ln|C\cdot 4|$

$\frac{1}{4} = |C|$

$\xi \neq 0 \wedge \xi = 4 \in I_\xi \Rightarrow I_\xi = (0, +\infty)$

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

zpět k původním prom.

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\xi \ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

$\xi = x+\frac{3}{2}$

$\eta = y-\frac{1}{4}$

$$\underline{y = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)}$$

$$I_x = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Př

$$x+y+1 + (2x+2y-1)y' = 0 \qquad y' = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Subst. $z = x+y$, $z = z(x) \Rightarrow z' = 1+y' \Leftrightarrow y' = z'-1$

$$z+1+(2z-1)(z'-1) = 0$$

rovnice se sep. prom.

$\Rightarrow$ za DÚ dopočítat

$\vdots$

Př **BONUS**:

$$y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right)$$

nápověda: $\xi = x+1 \qquad \eta = y+2$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \operatorname{tg}\left(\frac{\eta-2\xi}{\xi}\right)$$

homog. rovnice N. 0

$\vdots$ DÚ

Jako **domácí úkol**

$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)\, y' = 0,$$

Řešení: Prvním krokem je substituce

$$t = x - 1,$$
$$z = y - 2$$

a konečné řešení je ve tvaru

$$(y - 2x)^3 = C\,(y - x - 1)^2\,,$$

resp.

$\frac{1}{C}$

$$D\,(y - 2x)^3 = (y - x - 1)^2\,,$$

kde $C, D \neq 0$, podle toho, na kterou stranu v postupu přidáme integrační konstantu. Pro $C = 0$, resp. $D = 0$ však vycházejí lineární řešení příslušné homogenní D.R. (v proměnných t, z) $y = 2x$, resp. $y = x + 1$, které získáme substitucí $z = Kt$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť $p, q \in \mathrm{C}(I)$ kde I je interval. Potom rovnici tvaru

(a,b)
$\mathbb{R}$

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu s pravou stranou a rovnici

$$y' + p(x)\,y = 0$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu bez pravé strany.

Kuchařka : 1) řešíme rovnici bez pravé strany :

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \qquad \text{rovnice se sep. prom.}$$

$$\ln|y| = -\underbrace{\int p(x)\,dx}_{P(x)} + \tilde{C} \quad \in \mathbb{R}$$

$\dots \quad P'(x) = p(x)$

$$|y| = \exp(-P(x)) \cdot \exp(\tilde{C}) = |C| > 0$$

$$\underline{y = C \exp(-P(x))} \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}$$

2) řešíme rovnici s pravou stranou metodou "variace konstanty" $\quad C \to C(x)$

tj. předpokládáme řešení ve tvaru $\underline{y = C(x)\,e^{-P(x)}}$

a dosadíme do rovnice $y' + p(x)y = q(x)$

$$\downarrow$$

$$\overbrace{C'(x)e^{-P(x)} + \cancel{C(x)\left(-p(x)e^{-P(x)}\right)} + \cancel{p(x)C(x)e^{-P(x)}}}^{p\cdot y} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{P(x)}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + C_0$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \underbrace{C_0 e^{-P(x)}}_{\in [y_1]_\lambda} + \underbrace{e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}\,dx}_{y_p} \qquad \text{kde } y_1(x) = e^{-P(x)}$$

POZN: Lin. d. rovnice řádu n

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)} = q \qquad \text{kde } p_k, q \in C(I)$$

$$y \in [y_1, \dots, y_n]_\lambda + y_p$$

VĚTA:

Nechť $p, q \in C(I)$, $I = \cancel{(a}, b)$. Potom pro každý bod $[x_0, y_0] \in I \times \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení úlohy

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (*)$$

$$y(x_0) = y_0$$

na intervalu I.

Dk: 1) existence

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + y_0\right]e^{-P(x)}$$

1) y je jedno z obecných řešení $(*)$

2) $y(x_0) = (0 + y_0)\cdot 1 = y_0$ ✓

$$\text{kde} \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt \qquad P(x_0) = 0$$

2) jednoznačnost : mějme y_1, y_2 splňující na I

$$y_1' + p(x) y_1 = q(x) \qquad y_1(x_0) = y_0$$
$$\wedge \quad y_2' + p(x) y_2 = q(x) \qquad y_2(x_0) = y_0$$

$$\underbrace{(y_1 - y_2)'}_{z = y_1 - y_2} + p(x)(y_1 - y_2) = 0 \quad \wedge \quad (y_1 - y_2)(x_0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$z' + p(x) z = 0 \quad \wedge \quad z(x_0) = 0$$

vynásobíme $e^{P(x)}$ kde $P' = p$

$$\underbrace{z' e^{P(x)} + p(x) e^{P(x)} z}_{} = 0$$
$$\left(z e^{P(x)}\right)' = 0$$
$$z e^{P(x)} = C$$

ale z podm. $z(x_0) = 0$ platí $C = 0$

$$z e^{P(x)} = 0 \Rightarrow z = 0$$

$\Leftrightarrow z(x) = 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow y_1(x) = y_2(x) \ \forall x \in I$. ■

POZN: Metoda integračního faktoru : rovnici $y' + p(x) y = q(x)$

vynásobíme $\underbrace{e^{P(x)}}_{\text{integrační faktor (1. druhu)}}$

vznikne
$$\left(y e^{P(x)}\right)' = q(x) e^{P(x)}$$
$$y e^{P(x)} = \int q(x) e^{P(x)} dx + C_0$$
$$y = e^{-P(x)} \left(\int q(x) e^{P(x)} dx + C_0 \right)$$

Př

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$
$$y(1) = 0$$

1) "klasicky":

$p(x) = 2x$

$q(x) = xe^{-x^2}$

$$y' + 2xy = 0$$
$$\frac{y'}{y} = -2x$$
$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{C}$$
$$\underline{y = Ce^{-x^2}}$$

variace konst.

$$y = C(x)e^{-x^2}$$

$$\underbrace{C'e^{-x^2} + C(-2x)\cancel{e^{-x^2}}}_{y'} \underbrace{+ \cancel{2xCe^{-x^2}}}_{+2xy} = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \underline{C' = x} \Rightarrow C = \tfrac{1}{2}x^2 + C_0$$

$$\Rightarrow \underline{y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C_0\right)e^{-x^2}}$$

2) pomocí IF

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} \quad \Big| \cdot e^{x^2}$$

$p(x) = 2x$

$P(x) = x^2$

$IF = e^{P(x)} = e^{x^2}$

$$(y \cdot e^{x^2})' = x$$
$$ye^{x^2} = \tfrac{1}{2}x^2 + C_0$$
$$\underline{y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C_0\right)e^{-x^2}}$$

společné je dosazení poč. podm. a výpočet C_0:

$$0 = \left(\tfrac{1}{2} + C_0\right)e^{-1} \Rightarrow C_0 = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)e^{-x^2}}} \quad I = \mathbb{R}$$

Dū

$$y'\sin x - y\cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$ neu' $y' + p(x)y = q(x)$

$$y' - y \cdot \cot g\, x = -\frac{\sin x}{x^2}$$