DIFR cvičení

Wiki Skriptum

26. září 2021

Obsah

1 Rovnice se separovanými proměnnými

Zamyslete se:

Jaký je tvar rovnice se separovanými proměnnými?
Do jaké podoby se převádí řešení rovnice se separovanými proměnnými?
Co musí splňovat P(x), Q(y)?
Kdy jedním bodem prochází právě jedna integrální křivka?

$$tvar : P(x) + Q(y) \cdot y' = 0$$

Příklad č.1

Řešte:

$$\underbrace{x}_{P(x)} + \underbrace{(y+1)}_{Q(y)} \cdot y' = 0$$

Řešení provedeme přímo podle návodu:

$$x + (y+1) \cdot y' = 0 \Longleftrightarrow \int x dx + \int (y+1)\, dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2} = C \ldots C \geq 0$$

Řešením jsou tedy kružnice se středem v bodě $[0; -1]$ bez bodů průniku kružnic s přímkou danou rovnicí $y = -1$, protože v těchto bodech nemá Q(y) derivaci. Navíc ještě je třeba dodat, že aby mělo řešení smysl, musí být $C \geq 0$
.

Příklad č.2

Řešte:

$$y' = \frac{|x \cdot y|}{x \cdot y}$$

Řešení je potřeba provést pro všechny čtyři kvadranty jednotlivě, proto provedu řešení pouze pro I. a II. kvadrant. Další můžete provést jako cvičení.

I.kvadrant

Pokud si uvědomíme: $x > 0; y > 0$, pak diferenciální rovnice pro první kvadrant vypadá:

$$y' = 1$$

Takže rovnou mohu psát řešení: $y = x + C$, kde $C > 0, x > 0 \ldots x \in (0, +\infty)$ a nebo $C < 0 \ldots x \in (C, +\infty)$

II.kvadrant

$x < 0; y > 0$, diferenciální rovnice má tvar:

$$y' = -1$$

Rovnou napíšu:

$$y = -x + C$$

a řešení je: $C > 0 \ldots x \in (-\infty, 0)$, $C < 0 \ldots x \in (-\infty, C)$. Další příklady uvedu pouze v zadání, neboť by se u nich postupovalo naprosto analogicky.

Příklad č.3

Řešte:

$$y' = \frac{x - y}{|x - y|}$$

Pozn: Řešení se rozpadá na dva případy, které od sebe dělí osa I. a III. kvadrantu.

Příklad č.4

Řešte „nad osou x“:

$$y' = -\frac{x + |x|}{y + |y|}$$

2 Rovnice separovatelné

Zamyslete se:

Jaký tvar má rovnice separovatelná a jak se řeší?
Za jakých podmínek můžeme řešit rovnici separovatelnou?
Jaké jsou okrajové řešení?

$$tvar : P_1(x) \cdot Q_2(y) + P_2(x) \cdot Q_1(y) \cdot y' = 0$$

Příklad č.1

Řešte:

$$x \cdot y' - k \cdot y = 0, \ldots k \in R$$

Provedeme tedy ze znalosti z přednášky dělení rovnice x i y, přičemž oba krajní případy musíme později zvláště dořešit.

$$\frac{y'}{y} - \frac{k}{x} = 0; /x, y \neq 0$$

Jako jsme do dělali u rovnic separovatelných, převedeme na integrální rovnici:

$$\ln|y| - k \ln|x| = C$$

Přičemž je třeba dodat, že $y = 0$ je řešením na celém R.

$$|y| \cdot x^{-k} = C$$

$$|y| = C \cdot |x|^k \ldots C > 0$$

$$y = A \cdot |x|^k \ldots A \in R$$

Dále je třeba prodiskutovat jak vypadají integrální křivky pro případy $k = 0$, $0 < k < 1$, $k = 1$, $k > 1$, $k < 0$. Nakreslete příslušné integrální křivky.

Příklad č.2

Řešte:

$$y' = \frac{\sin y}{\sin x}$$

Postupovat budu takto:

$$\tfrac{y'}{\sin y} = \tfrac{1}{\sin x} \ldots x, y \neq k\pi; k \in Z$$

Je třeba přidat, že $y = k\pi$ je řešením na celém R.

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dx}{\sin x} + K$$

Podle přednášky teď upravíme:

$$\int \frac{dy}{\sin 2 \cdot \frac{y}{2}} = \int \frac{dy}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{2}} \cdot \frac{dy}{\tan \frac{y}{2}} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ln |\tan \frac{y}{2}| = \ln |\tan \frac{x}{2}| + \ln C$$

$$|\tan \frac{y}{2}| = C \cdot |\tan \frac{x}{2}|$$

$$\tan \frac{y}{2} = C \cdot \tan \frac{x}{2}$$

Řešením tedy je:

$$y = 2 \cdot \arctan \left(C \tan \frac{x}{2}\right)$$

Pokuste se nakreslit integrální křivky.

Příklad č.3

Hledejme rovnici pro y, které by splňovalo následující dvě podmínky: a) $y \geq 0$, b) $\int_0^x y(t)dt = \frac{1}{3}x \cdot y$

Při řešení začneme nejdřív s podmínkou b), provedeme $\frac{d}{dx}$ s celou rovnicí -

$$y = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}x \cdot y'$$

$$2y = x \cdot y'$$

$$\frac{y'}{2y} = \frac{1}{x}; \ldots x \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln |y| = \ln |x| + lnA$$

Řešením tedy je:

$$y = A^2 \cdot x^2$$

čímž je zaručena i kladnost výsledku.

3 Homogenní diferenciální rovnice

Zamyslete se:

Jaký je tvar homogenní diferenciální rovnice?
Jaká substituce vede k řešení?
Jak je to s otázkou jednoznačnosti?

$$tvar: P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

kde P,Q jsou homogenní funkce stejného stupně.

Příklad č.1

Řešte:

$$x^2 \cdot y' = x \cdot y + y^2 \cdot e^{-\frac{x}{y}}$$

Podle znalostí z přednášky použiji substituci: $y = x \cdot u$, tedy $y' = u + x \cdot u'$. Provedu dosazení do rovnice a dostávám:

$$x^2(u + u' \cdot x) = x^2 \cdot u + x^2 \cdot u^2 \cdot e^{-\frac{1}{u}}$$

$$u' \cdot x^3 = x^2 u^2 \cdot e^{-\frac{1}{u}} \ldots x \neq 0;$$

$$\frac{e^{\frac{1}{u}} \cdot u'}{u^2} = \frac{1}{x}$$

čímž jsme dostali tvar, který už ale známe. V rámci procvičení nechám dopočítání na Vás. Jedná se o rovnici separovanou.

Příklad č.2

Řešte:

$$|y' \cdot x - y| = \sqrt{x^2 + (y' \cdot x)^2}$$

Budu tedy postupovat:

$$(y' \cdot x - y)^2 = x^2 + (y' \cdot x)^2$$

$$(y' \cdot x)^2 - 2x^2 \cdot y' + y^2 = x^2 + (y' \cdot x)^2$$

použiji substituci: $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$ po které dostávám:

$$\begin{gathered}
(x \cdot u)^2 - 2x^2 \cdot u \cdot (u + x \cdot u') - x^2 = 0 \\
u^2 - 2u^2 - 2x \cdot u \cdot u' - 1 = 0 \\
2xu \cdot u' + u^2 - 1 = 0 \\
2xu \cdot u' = 1 + u^2
\end{gathered}$$

což můžu upravit na nám známý tvar:

$$\frac{2u \cdot u'}{1 + u^2} = \frac{1}{x}$$

a dále to nechám na Vaší píli.

Příklad č.3

Řešte:

$$\sqrt{x^2 + (y' \cdot x)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jen naznačím jak by se postupovalo:

$$\begin{gathered}
y' \cdot x = y \\
y' \cdot x = -y
\end{gathered}$$

je třeba vyřešit oba případy!

Příklad č.4

Řešte:

$$|y - y' \cdot x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nechám na samostatné přípravě.

Příklad č.5

Řešte (sami):

$$y' = \frac{x - y}{x - 2y}$$

4 Zobecněné (kvazihomogenní) diferenciální rovnice

Příklad č.1

Dokázali by jste uhodnout jaká substituce vede k cíli při řešení této diferenciální rovnice?

$$9y \cdot y' - 18xy + 4x^3 = 0$$

K cíli vede tato substituce: $y = u^2$, $y' = 2u \cdot u'$. Rovnice potom vypadá:

$$18u^3 \cdot u' - 18xu^2 + 4x^3 = 0$$

což je už pouze homogenní diferenciální rovnice. Zkuste si cvičně dopočítat. Jen upozorňuji, v řešení vychází téměř neřešitelný integrál, ponechejte řešení v tvaru s integrálem. I praxi se Vám nemusí vždy podařit vyřešit problém v „jednoduchém tvaru".

Nyní ale k řešení zobecněných diferenciálních rovnic. Homogenní diferenciální rovnice jsme řešili substitucí $y = x \cdot u$, zobecněné budou řešit substituce $y = x^k \cdot u$, kde k je obecné reálné číslo. Při řešení budeme z každého členu v podstatě sčítat exponenty s tím, že místo y budeme počítat k a místo y' budeme počítat $k - 1$.

Předvedeme si to na následujícím příkladě:

Příklad č.2

Řešte:

$$\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{-2} \underbrace{-y^2}_{2k} + \underbrace{y'}_{k-1} = 0; \ldots y = x^k \cdot u$$

Dále musíme dát „ součty z exponentů " do rovnosti: $-2 = 2k = k - 1$, těmto podmínkám vyhovuje $k = -1$, substituce tedy bude následující: $y = \frac{u}{x}$. Jen tak pro úplnost je to rovněž speciální Riccatiho rovnice, takže řešení by šlo nalézt i jinak.

$$y' = -\tfrac{u}{x^2} + \tfrac{u'}{x}$$
$$\tfrac{2}{x^2} - \tfrac{u^2}{x^2} - \tfrac{u}{x^2} + \tfrac{1}{x} \cdot u' = 0$$

$$2 - u^2 - u + x \cdot y' = 0 \ldots \text{ rovnice separovatelná}$$
$$x \cdot u' = u^2 + u - 2$$

$$\frac{u'}{u^2 + u - 2} = \frac{1}{x}$$

kde vidíme, že řešením jsou např. $u_1 = 1, u_2 = -2$, takže v zpětné substituci: $y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = -\frac{-2}{x}$. Pro ty kdo neví, tak to plyne z podmínek pro separovatelné diferenciální rovnice.

Další řešení jsou už jen mechanickým dopočítáním snadno dosažitelná.

Nyní se můžeme podívat, jestli by náhodou touto metodou nešel spočíst i první příklad. Jaké bylo zadání?

$$9y \cdot y' - 18xy + 4x^3 = 0$$

A ono ejhle co se objeví. Provedeme-li stejnou analýzu jako u předchozího případu, dostáváme dvě rovnosti: $2k - 1 = k + 1 = 3$, takže $k = 2$. Zvolená substituce tedy bude: $y = x^2 \cdot u$ a k ní: $y' = 2xu + x^2 \cdot u'$.

Dále tedy pokračuju:

$$9x^2 \cdot u \cdot (2xu + x^2 \cdot u') - 18x^3 \cdot u + 4x^3 = 0$$
$$18u^2 + 9xu \cdot u' - 18u + 4 = 0$$
$$9xu \cdot u' = 18u - 18u^2 - 4$$

a dostávám tedy tvar, se kterým si už každý poradí a sice:

$$\frac{9u \cdot u'}{18u - 18u^2 - 4} = \frac{1}{x}$$

Příklad č.3

Řešte:

$$(y^4 - 3x^2) \cdot y' + xy = 0$$

Řešení bude naprosto obdobné jako v předchozích případech. Pouze v dalším počítání se objeví jedna rovnice, která nebude řešitelná. Řešení stačí ponechat ve tvaru:

$$2 \int \frac{u^4 - u^3}{u - u^5} du = \ln |x| + C$$

5 Rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Zamyslete se:

Jaké okrajové typy těchto rovnic známe?
Jaké jsou jejich typické řešení?
Jak je to s otázkou jednoznačnosti?

Příklad č.1

Řešte:

$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3) \cdot y' = 0$$

Jedná se o nejobecnější případ, tedy i determinant $a \cdot \beta - b \cdot \alpha \neq 0$. Musíme tedy posunout souřadný systém. Sestavíme dvě rovnice:

$$\begin{gathered} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{gathered}$$

a kdo se dostal až sem, určitě umí od Pytlíčka vyřešit tuto soustavu. :-) Jejím řešením je: $x = 1, y = 2$. Tedy musím zvolit substituci:

$$\begin{gathered} x = 1 + t \\ y = 2 + u \end{gathered}$$

Tímto dostávám zpátky dosazením do první rovnice následující:

$$\begin{gathered} 2 + 2t - 8 - 4u + 6 + (1 + t + 2 + u - 3) \cdot u' = 0 \\ 2t - 4u + (t + u) \cdot u' = 0 \\ u' = \tfrac{4u-2t}{t+u} \end{gathered}$$

čímž jsme se dostali na úroveň homogenní diferenciální rovnice. Postupoval bych opět analogicky, proto nechám tento krok na samostatné práci. Jen upozorním, že řešení vyjde implicitně. Nějak takto:

$$(y - 2x)^3 = C \cdot (- x + y - 1)^2$$

Příklad č.2

Řešte:

$$x + y + 1 + (2x + 2y - 1) \cdot y' = 0$$

Při prvním pohledu na problém zjišťujeme, že determinant $a \cdot \beta - b \cdot \alpha = 0$. Použijeme tedy nám známou substituci (z přednášky): $u = (x + y)$ a její derivaci: $u' = 1 + y'$. A opětovně dosadím:

$$\begin{gathered} u + 1 + (2u - 1)(u' - 1) = 0 \\ u + 1 + 2u \cdot u' - u' - 2u + 1 = 0 \\ 2u \cdot u' - u' = u - 2 \end{gathered}$$

s čímž už víme co činit. Rovnice separovatelná. Přidám jen řešení:

$$-x + 2u + \ln |x + y - 2|^3 = C$$

takže opět implicitní.

Příklad č.3

Uhodnete, která substituce vede k cíli?

$$y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \tan \frac{y - 2x}{x + 1}$$

Tento příklad sem ne zcela patří, ale dělal se na cvičení, takže ... K cíli vede substituce:

$$\begin{gathered} y + 2 = u \\ x + 1 = t \end{gathered}$$

neboť se tímto krokem převede daná rovnice na tvar:

$$u' = \frac{u}{t} + \tan \frac{u - 2t}{t}$$

což je rovnice homogenní. Řeší ji další substituce: $u = t \cdot v$, doporučuji Vám si ji dopočítat, řešení vyjde zase špatně ...

$$\sin \frac{y - 2x}{x + 1} = k \cdot (x + 1)$$

ásledující:

$$\begin{gathered}2+2t-8-4u+6+(1+t+2+u-3)\cdot u'=0\\ 2t-4u+(t+u)\cdot u'=0\\ u'=\tfrac{4u-2t}{t+u}\end{gathered}$$

čímž jsme se dostali na úroveň homogenní diferenciální rovnice. Postupoval bych opět analogicky, proto nechám tento krok na samostatné práci. Jen upozorním, že řešení vyjde implicitně. Nějak takto:

$$(y-2x)^3=C\cdot(-x+y-1)^2$$

Příklad č.2

Řešte:

$$x+y+1+(2x+2y-1)\cdot y'=0$$

Při prvním pohledu na problém zjišťujeme, že determinant $a\cdot\beta-b\cdot\alpha=0$. Použijeme tedy nám známou substituci (z přednášky): $u=(x+y)$ a její derivaci: $u'=1+y'$. A opětovně dosadím:

$$\begin{gathered}u+1+(2u-1)(u'-1)=0\\ u+1+2u\cdot u'-u'-2u+1=0\\ 2u\cdot u'-u'=u-2\end{gathered}$$

s čímž už víme co činit. Rovnice separovatelná. Přidám jen řešení:

$$-x+2u+\ln|x+y-2|^3=C$$

takže opět implicitní.

Příklad č.3

Uhodnete, která substituce vede k cíli?

$$y'=\frac{y+2}{x+1}+\tan\frac{y-2x}{x+1}$$

Tento příklad sem ne zcela patří, ale dělal se na cvičení, takže …K cíli vede substituce:

$$
\begin{aligned}
y + 2 &= u \\
x + 1 &= t
\end{aligned}
$$

neboť se tímto krokem převede daná rovnice na tvar:

$$u' = \frac{u}{t} + \tan \frac{u - 2t}{t}$$

což je rovnice homogenní. Řeší ji další substituce: $u = t \cdot v$, doporučuji Vám si ji dopočítat, řešení vyjde zase špatně …

$$\sin \frac{y - 2x}{x + 1} = k \cdot (x + 1)$$

6 Lineární diferenciální rovnice 1.řádu

Zamyslete se:

Jaký mají tvar LDR?
Na jaké dva kroky se rozpadá řešení takovýchto rovnic?
Jak je to s jednoznačností řešení LDR?

$$tvar: y' + q(x) \cdot y = q(x)$$

Příklad č.1

Řešte:

$$y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$$

Z přednášky víme, že takovéto řešení se tento typ diferenciálních rovnic rozpadá na 2 etapy, v první řešíme rovnici „bez pravé strany“ a v druhé řešíme pomocí metody variace konstant celkové řešení.

1.etapa ... „bez pravé strany“

$$y' + 2xy = 0$$

Vidíme, že se jedná o rovnici separovatelnou, pro jistotu spočtu sám:

$$\frac{y'}{y} + 2x = 0$$

kde $y = 0$ je rovněž řešením.

$$\begin{gathered} \int \tfrac{dy}{y} + 2\int x dx = 0 \ldots y \neq 0 \\ \ln|y| = -x^2 + C \\ |y| = A \cdot e^{-x^2} \ldots A > 0 \\ y = A \cdot e^{-x^2} \end{gathered}$$

kde A může být libovolné. Máme tedy obecné řešení rovnice bez pravé strany.

2.etapa ... metoda variace konstant

Předpokládejme tedy, že konstanta A závisí nějak na parametru X, tedy $A = A(x)$, pak tedy:

$$
\begin{gathered}
y = A(x) \cdot e^{-x^2} \\
A'(x) \cdot e^{-x^2} + A(x) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} + 2x \cdot A(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \\
A'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \\
A'(x) = x \\
A(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C
\end{gathered}
$$

a tedy obecné řešení na intervalu $(-\infty, +\infty)$ původní rovnice je:

$$y = (\frac{1}{2}x^2 + C) \cdot e^{-x^2}$$

Pokud bychom chtěli nějaké konkrétní řešení, ke kterému bychom měli zadané nějaké počáteční podmínky, museli bychom je dosadit do zadání. Ukažme si jeden konkrétní případ:

$$y(1) = \frac{1}{e}$$

nechť je podmínka. Dosaďme tedy:

$$\frac{1}{e} = (\frac{1}{2} \cdot 1 + C) \cdot e^{-1} \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Máme tedy jedno konkrétní řešení:

$$y = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}) \cdot e^{-x^2}$$

Příklad č.2

Následující zadání bude trochu zajímavější. Řešte:

$$y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

pokud požadujeme, aby při $x \to \infty$ bylo splněno: $y(x) = 0$.
Opět se řešení rozpadá na dva případy.

1.etapa . . . „bez pravé strany“

$$y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 0$$

kde vidíme, že $y = 0$ je rovněž řešením. Proto můžeme do dalších výpočtů brát $y \neq 0$.

$$\begin{gathered}
\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C \\
|y| = c|\sin x| \\
y = C \cdot \sin x; \ldots C \in R
\end{gathered}$$

2.etapa . . . metoda variace konstant

$$\begin{gathered}
C = C(x) \\
y = C(x) \cdot \sin x \\
C'(x) \cdot \sin^2 x + C(x) \cos x \cdot \sin x - C(x) \cos x \cdot \sin x = -\frac{\sin^2 x}{x^2} \\
C'(x) \cdot \sin^2 x = -\frac{\sin^2 x}{x^2} \\
C(x) \frac{1}{x} + A
\end{gathered}$$

Obecným řešením tedy je:

$$y = (\frac{1}{x} + A) \sin x \longrightarrow y = \frac{\sin x}{x} + k \cdot \sin x$$

Naložíme-li na toto řešení podmínku, že $x \to \infty; y(x) = 0$, vidíme na první pohled, že $A = 0$, aby byla podmínka splněna.

Příklad č.3

Řešte:

$$y' + \tan y = \frac{x}{\cos y}$$

Nejdříve tedy tuto rovnici převedeme na LDR.

$$y' \cdot \cos y + \sin y = x$$

kde můžeme použít substituci a zjednodušit si řešení:

$$z = \sin y$$
$$z' = \cos y \cdot y'$$

Dostávám tedy tuto jednoduchou diferenciální rovnici:

$$z' + z = x$$

a dále už budu postupovat stejně jako v předchozím případě. 1.etapa:

$$z' + z = 0$$
$$\frac{z'}{z} = -1$$
$$\ln|z| = -x + C$$
$$z = A \cdot e^{-x}$$

čímž jsme dostali obecné řešení bez pravé strany. V druhé etapě tedy budu postupovat:

$$z' = A'(x) \cdot e^{-x} - A(x) \cdot e^{-x}$$
$$A'(x) \cdot e^{-x} = x$$
$$A'(x) = x \cdot e^{x}$$
$$A = x \cdot e^{x} - e^{x} + C$$

tím dostávám:

$$z = (x \cdot e^{x} - e^{x} + C) \cdot e^{-x}$$

tedy konečné řešení je:

$$y = \arcsin(x - 1 + C \cdot e^{-x})$$

7 Bernoulliho rovnice

Zamyslete se:

Jaký tvar má Bernoulliho rovnice a jakým způsobem se řeší?
co víme o otázce jednoznačnosti řešení?

$$tvar : y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}$$

Příklad č.1

Řešte:

$$y' + 4xy = 2x \cdot e^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$$

Můžeme hned v podstatě říci, že $y = 0$ je určitě řešením. K zjištění dalších řešení musíme provést operaci známou z přednášky:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 4x \cdot \sqrt{y} = 2x \cdot e^{-x^2}$$

Takže nyní jen zvolíme známou substituci:

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= z \\ \tfrac{y'}{2\sqrt{y}} &= z' \end{aligned}$$

takže nám po dosazení vyjde rovnice:

$$z' + 2x \cdot z = xe^{-x^2}$$

což je ale naprosto stejná rovnice, jakou jsme počítali v kapitole LDR, můžu tedy rovnou zapsat řešení:

$$z = (C + \frac{1}{2}x^2) \cdot e^{-x^2}$$

tedy:

$$y = (C + \frac{1}{2}x^2)^2 \cdot e^{-2x^2}$$

8 Riccatiho rovnice

Zamyslete se:

Jaký tvar má Riccatiho rovnice?
Jakými způsoby je neřešitelná? :-)
Jakým způsobem lze hledat řešení, když známe jedno konkrétní řešení?
Jaký je vztah mezi Riccatiho rovnicí a mezi mezi LDR II.řádu?

$$tvar : y' = a_0(x) + a_1(x) \cdot y + a_2(x) \cdot y^2$$

Příklad č.1

Nalezněte další řešení rovnice:

$$y' = y^2 - xy - x$$

přičemž víme, že jedno konkrétní řešení má tvar: $y = ax + b$. Čili $y' = a$.

$$\begin{gathered} a = a^2 \cdot x^2 + 2ab \cdot x + b^2 - ax^2 - bx - x \\ a = (a^2 - a) \cdot x^2 + (2ab - b - 1) + b^2 - a = 0 \end{gathered}$$

Nyní musíme dát rovnosti u různých mocnin x do rovnosti, z čehož nám vyjde, že vyhovuje rovnost $a = 1, b = 1$. Každý sám si tohle ověřte. Může se stát, že ty tři nebo více rovností může splňovat více dvojic či trojic čísel.

Nyní tedy máme jedno konkrétní řešení. Ze znalosti z přednášky tedy víme, že můžeme zbývající dopočítat pomocí algoritmu, který si teď ukážeme.

Zavádím nové řešení:

$$\begin{gathered} y = y_1 + \tfrac{1}{u} \\ y = x + 1 + \tfrac{1}{u} \\ 1 - \tfrac{u'}{u^2} = (x + 1 + \tfrac{1}{u})^2 - x \cdot (x + 1 + \tfrac{1}{u}) - x \\ 1 - \tfrac{u'}{u^2} = x^2 + 1 + \tfrac{1}{u^2} + 2x + 2\tfrac{x}{u} + \tfrac{2}{u} - x^2 - x - \tfrac{x}{u} - x \\ -\tfrac{u'}{u^2} = \tfrac{1}{u^2} + \tfrac{x}{u} + \tfrac{2}{u} \\ -u' = 1 + ux + 2u \end{gathered}$$

čímž jsem se dostal do tvaru:

$$u' + (x + 2) \cdot u = -1$$

Jak všichni vidí, je to LDR. Řešení nechám na Vás samotných. Jen upozorním na to, že řešení nevyjde nijak pěkně, asi nějak takto to stačí nechat:

$$y = x + 1 + \frac{e^{\frac{x^2}{2}+2x}}{C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x} dx}$$

9 Diferenciální rovnice tvaru: $x = f(y')$ resp. $y = g(y')$

Zamyslete se:

Co víme o způsobu jejich řešení?
Jak vypadají jednotlivé parametrické vyjádření křivek?
Jednoznačnost?

Příklad č.1

Řešte:

$$x = y' \cdot \cos y'$$

Zvolíme tedy:

$$t = y'$$
$$x = t \cdot \cos t$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int t(t \cdot \cos t)' dt = [t^2 \cdot \cos t] - \int (t \cdot \cos t) dt = t^2 \cdot \cos t - t \cdot \sin t - \cos t$$

čímž jsme dostali požadované parametrické vyjádření křivky:

$$x = t \cos t$$
$$y = t^2 \cdot \cos t - t \cdot \sin t - cost$$

Příklad č.2

Řešte:

$$x = (y')^2 + \frac{y}{y'}$$

Řešení této rovnice bude trochu obtížnější, protože se nejedná přímo o tvar zadání, které známe z přednášky. Nejdříve si tedy vyjádřím:

$$y' = t$$
$$x = t^2 + \tfrac{y}{t} \ldots / \tfrac{d}{dy}$$

a dál už budu jen upravovat druhou rovnost.

$$\frac{1}{t} = \frac{dx}{dy} = 2t\frac{dt}{dy} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\frac{dt}{dy}$$

$$0 = 2t \cdot \tfrac{dt}{dy} - \tfrac{1}{t^2}\tfrac{dt}{dy}$$
$$0 = \tfrac{dt}{dy}(2t - \tfrac{1}{t^2})$$
$$x = C^2 + \tfrac{y}{C} \longrightarrow y = Cx - C^3$$

To je pro první případ ... $\frac{dt}{dy} = 0 \Longrightarrow t = C$.

$$x =^3 \sqrt{\tfrac{y^2}{4}} + \tfrac{y}{^3\sqrt{\frac{y}{2}}} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2y^2}$$
$$x^3 = \tfrac{27}{8} \cdot 2y^2$$

tedy:

$$y_1 = 2\frac{\sqrt{27}}{27}x^{\frac{3}{2}} = -y_2$$

Příklad č.3

Řešte:

$$y = (y')^2 + 4(y')^3$$

Klasický druhý případ. Taky vidíme, že $y = 0$ je taky řešením rovnice. Dále budu postupovat následovně:

$$y = t^2 + 4t^3$$

$$x = \int \frac{dx}{dy}dy = \int \frac{1}{t}(2t + 12t^2)dt = \int (2 + 12t)dt = 2t + 6t^2 + C$$

Tím už řešení rovnice mám. Jedním způsobem. Můžeme si ale ukázat další, měli bychom se dostat ke stejnému výsledku. No, uvidíme.

$$y = t^2 + 4t^3 \ldots / \tfrac{d}{dx}$$
$$\tfrac{dy}{dx} = 2t\tfrac{dt}{dx} + 12t^2\tfrac{dt}{dx}$$
$$t = 2t\tfrac{dt}{dx} + 12t^2\tfrac{dt}{dx} - t = t(2\tfrac{dt}{dx} + 12t\tfrac{dt}{dx} - 1) = 0$$
$$2\tfrac{dt}{dx} + 12t\tfrac{dt}{dx} = 1$$
$$2 + 12t = \tfrac{dx}{dt}$$
$$x = 6t^2 + 2t + c$$

čímž jsme se dostali ke stejnému výsledku. Shrňme si tedy jak vypadajá naše parametrické vyjádření:

$$x = 6t^2 + 2t + c$$
$$y = t^2 + 4t^3$$

Příklad č.4

Řešte:

$$y = xy' - e^{y'}$$

Zparametrizuji:

$$y' = t \Longrightarrow y = xt - e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} - e^t\frac{dt}{dx}$$
$$0 = (x - e^t)\frac{dt}{dx}$$

Teď musíme vyřídit různé možnosti nulovosti:

$$t = C \Longrightarrow y = Cx - e^C$$
nebo:
$$x - e^t = 0 \Longrightarrow x = e^t$$
$$y = e^t(t-1)$$
nebo:
$$x = e^t$$
$$\ln x = t \Longleftarrow y = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

10 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Zamyslete se:

Jaký tvar mají LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty?
Jak se řeší?
Co je to fundamentální systém?
Jak je to s linearitou řešení?
Jak se dá převést LDR n-tého řádu na systém LDR I.řádu?
Jak se sestavuje a jaký je význam a smysl charakteristického polynomu?
Co víme o jednoznačnosti řešení?

$$tvar : L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = q(x)$$

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$$

Tohle je LDR druhého řádu s konstantními koeficienty. Ze znalosti z přednášky můžeme sestavit charakteristický polynom.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

Tedy můžeme rovnou sestavit fundamentální systém řešení. Je to: $\{e^x; x \cdot e^x\}$.

Libovolné řešení LDR bez pravé strany je tedy možno zapsat:

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 x \cdot e^x$$

Teď je třeba zjistit řešení s pravou stranou. Jak z přednášky víme, budeme sestavovat z derivací řešení další dvě rovnice.

$$y'(x) = C_1' \cdot e^x + C_1 e^x + C_2' \cdot xe^x + C_2 e^x + C2_x \cdot e^x$$

První rovnici sestavíme z toho, že požadujeme: $C_1' e^x + C_2' \cdot xe^x = 0$. Teď ještě zjistíme druhou derivaci y''.

$$y''(x) = \Big(C_1 + (2+x)\cdot C_2 + C_2'\Big)\cdot e^x$$

To dosadíme do původní LDR a máme:

$$\Big(C_1+C_2'+(2+x)\cdot C_2\Big)e^x - 2\Big(C_1+(1+x)\cdot C_2\Big)e^x + (C_1+C_2x)e^x = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

což se zjednoduší a tím dostáváme rovnou druhou rovnost: $C_2' = e^{-x}(\frac{x^2+2x+2}{x^3})$. Z toho rovnou plyne, že: $C_1' = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}\cdot e^{-x}$. Pokud máme řešení v tomto tvaru, stačí už jen zintegrovat, což doporučuji za samostatný úkol:

$$C_1 = -\int (1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})e^{-x}dx + K_1 = \ldots perpartes \ldots = e^{-x} + \frac{2}{x}e^{-x} + K_1$$

Jen trochu snad pomůžu s tím integrálem, je třeba si napsat asi ty zlomky oba dva pod sebe, ono se tam objeví něco, co se potom odečte. :-)

Stejným způsobem musíme dopočítat další konstantu C_2.

$$C_2 = \int \frac{1}{x}e^{-x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}e^{-x}dx + 2\int \frac{1}{x^3}e^{-x}dx + K_2 = \ldots = -\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} + K_2$$

Už stačí jen doplnit do celkového řešení:

$$y = C_1\cdot e^x + C_2x\cdot e^x = \ldots = \frac{1}{x} + (K_1+K_2x)e^x$$

Příklad č.2

Řešte:

$$x\cdot y'' + 2y' + x.y = x$$

víte-li, že fundamentální systém je tvořen: $\{\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$. Při této znalosti už můžeme v podstatě přímo vyjádřit a zapsat do rovnice:

$$y(x) = C_1\cdot\varphi_1(x) + C_2\cdot\varphi_2(x)$$
$$y'(x) = C_1'\varphi_1(x) + C_1\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2(x) + C_2\varphi_2'(x)$$

A tedy můžu rovnou zapsat první rovnost: $C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0$. A dále:

$$y''(x) = C_1'\varphi_1'(x) + C_1\varphi_1''(x) + C_2'\varphi_2'(x) + C_2\varphi_2''(x)$$

$$x \cdot (C_1'\varphi_1'(x) + C_1\varphi_1''(x) + C_2'\varphi_2'(x) + C_2\varphi_2''(x)) + 2(C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2') + x \cdot (C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = x$$

$$C_1\underbrace{(x\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x) + x\varphi_1(x))}_{=0} + \underbrace{C_2(x\varphi_2''(x) + 2\varphi_2'(x) + x\varphi_2(x))}_{=0} + xC_1'\varphi_1'(x) + x \cdot C_2'\varphi_2'(x) = x$$

Proč jsou závorky za konstantami C_1, C_2 rovny nule? Stačí se podívat na zadání rovnice, je to přece řešení rovnice bez pravé strany. Výrazy v závorkách mají přesně ten stejný tvar.

Nyní si můžeme konečně vyjádřit čemu se rovnají různé derivace $\varphi_1'; \varphi_2'$.

$$\varphi_1' = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$
$$\varphi_2' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

Mohu tedy poslední rovnost vyjádřit přesně a rovnou utvořit soustavu:

$$C_1'\frac{\sin x}{x} + C_2'\frac{\cos x}{x} = 0$$
$$C_1'(x\cos x - \sin x) - C_2'(x\sin x + \cos x) = x^2$$

čímž dospějeme k tomuto:

$$C_1' = x \cdot \cos x$$
$$C_2' = -x \cdot \sin x$$

Zkuste si dosadit,že funguje. Prostým zintegrováním získáme:

$$C_1 = x \cdot \sin x + \cos x + K_1$$
$$C_2 = x \cdot \cos x - \sin x + K_2$$

a nyní stačí už jen do výsledku dosadit:

$$y(x) = (x\sin x + \cos x + K_1)\frac{\sin x}{x} + (x\cos x - \sin x + K_2)\frac{\cos x}{x} = 1 + \frac{K_1\sin x}{x} + \frac{K_2\cos x}{x}$$

11 Několik receptů jak hádat řešení LDR n-tého řádu

Jak z přednášky víme, řešení těchto rovnic je součtem jednoho konkrétního řešení (partikulárního řešení) a dalšího libovolného řešení rce bez pravé strany. Za jistých okolností (v závislosti na tvaru rovnice a pravé strany) se dá ale toto řešení docela snadno uhodnout. Nyní si ukážeme tři nejzákladnější, z nichž poslední v sobě zahrnuje dva předešlé.

11.1 Rovnice tvaru $L(y) = P(x)$

Požadavek: 0 . . . k-násobný kořen polynomu P(x).

Řešení budeme hledat ve tvaru: $z(x) = x^k \cdot Q(x)$ kde Q(x) je polynom nejvýše stupně polynomu P(x).

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - y = x^2 - x + 1$$

Tedy charakteristický polynom je: $\lambda^2 - 1 = 0$. Proto můžu rovnou psát obecné řešení bez pravé strany jako:

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Podle kuchařky teď budeme tedy hledat polynom druhého stupně. Nula je nulanásobný kořen (:-)) polynomu P(x), takže $x^0 = 1$ se v rovnici nevyskytuje. Hledaný polnynom má obecný předpis tento: $z(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Longrightarrow z''(x) = 2a$. Dosadíme do rovnice:

$$\begin{gathered} z'' - z = x^2 - x + 1 \\ 2a - a \cdot x^2 - b \cdot x - c = x^2 - x + 1 \end{gathered}$$

Prostým porovnáním koeficientů zjišťujeme, že $a = -1; b = 1; c = -3$. Partikulární řešení tedy je: $z(x) = -x^2 + x - 3$. Celkovým výsledkem tedy je:

$$y(x) = -x^2 + x - 3 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$$

Charakteristický polynom tedy je: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Tedy nula je jednonásobný kořen. Obecné řešení rce bez pravé strany je: $y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^4 x$. Budu hledat partikulární řešení ve tvaru:

$$z(x) = x(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$
$$z'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$
$$z''(x) = 6a \cdot x + 2b$$
$$\text{dosadím:}$$
$$6a \cdot x + 2b - 12a \cdot x^2 - 8b - 4c = -12x^2 + 6x - 4$$

a opět porovnáním členů před mocninami x dostávám řešení:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{4x} + x^3 + x$$

11.2 Rovnice tvaru $L(y) = e^{ax} \cdot P(x)$

Nechť a ... k-násobný kořen charakteristického polynomu. Pak hledáme řešení ve tvaru: $z(x) = x^k \cdot e^{ax} \cdot Q(x)$

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - 2y' + y = 4e^x$$

Stestavím char. polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, tedy $(\lambda - 1)^2 = 0$. Kořenem je pouze $\lambda = 1$, jedná se o dvojnásobný kořen. Tedy řešení rce bez pravé strany je: $y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 x \cdot e^x$. Budu hledat řešení tvaru: $z(x) = x^2 A e^x$.

$$z'(x) = 2xAe^x + x^2Ae^x$$
$$z''(x) = A\Big(e^x(2 + 2x) + e^x(2x + x^2)\Big) = Ae^x(2 + 4x + x^2)$$
$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Ae^x(x^2 + 2x) + x^2Ae^x = 4e^x$$
$$b = 2$$

Řešením tedy je:

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + 2x^2e^x$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$$

Tento příklad je trochu komplikovanější. Na pravé straně rovnice máme dva členy. Ale z přednášky víme, že bude stačit sečíst obě řešení jednotlivých případů. Začneme klasicky a prvně se mrkneme na exponencielu:

$$\begin{gathered}
F(\lambda) : \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3 \\
y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} \\
z(x) = Axe^{3x} \\
z'(x) = Ae^{3x}(1 + 3x) \\
z'' = 3Ae^{3x}(2 + 3x) \\
\text{dosadím:} \\
3Ae^{3x}(2 + 3x) - 3Ae^{3x}(1 + 3x) = e^3 x \\
A = \tfrac{1}{3} \\
z(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} + \tfrac{1}{3} x e^{3x}
\end{gathered}$$

A nyní už jen zbývá dopočítat zbylé řešení. Protože je to ale už ten předešlý případ, nechám dopočítání na Vás samotných. Celkové řešení rovnice je:

$$y(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3} x e^{3x} + C_1 + C_2 e^{3x}$$

11.3 Rovnice tvaru $L(y) = e^{ax}\{P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\}$

Předpoklad: $a + ib \ldots$ k-násobný kořen $F(\lambda)$ Hledáme řešení ve tvaru: $z(x) = x^k e^{ax}\{Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\}$, kde Q_1, Q_2 jsou polynomy stejného stupně rovnému maximu stupňů polynomů P_1, P_2.

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$$

Tedy víme, že: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Dále víme: $a = 0, b = 1$. Budeme tedy hledat řešení:

$$
\begin{gathered}
z(x) = A\cos x + A\sin x \\
z''(x) = -A\cos x - B\sin x \\
-2A\cos x - 2B\sin x = 2\sin x - 4\cos x
\end{gathered}
$$

tedy víme: $A = 2, B = -1$. Můžu rovnou zapsat řešení jako:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2\cos x - \sin x$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' + y = 4x\cos x$$

Dovolím si rovnou napsat fundamentální systém (ověřte): $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$. Když víme, že: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, můžeme rovněž zapsat:

$$
\begin{gathered}
Re(e^{ix}) = \cos x \\
Im(e^{ix}) = \sin x
\end{gathered}
$$

Můžu tedy sestavit reálný fundamentální systém: $\{\cos x; \sin x\}$. Dále víme, že $a = 0, b = 1$, takže budu hledat:

$$z(x) = x\Big\{(A_1x + B_1)\sin x + (A_2x + B_2)\cos x\Big\}$$

Dopočítání nechám na Vás samotných. Vyjde to: $z(x) = x(x\sin x + \cos x)$. Tedy celkové řešení je:

$$y(x) = x(x\sin x + \cos x) + C_1\cos x + C_2\sin x$$

12 Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

Zamyslete se:

Jaký tvar mají systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty?
Jak se řeší tyto úlohy?
Co je to metoda neurčitých koeficientů?
Co víme o jednoznačnosti?

$$\acute{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b}$$

Příklad č.1

Řešte:

$$\begin{aligned} y' &= -5y + 2z + 40e^{x} \\ z' &= y - 6z + 9e^{-x} \end{aligned}$$

Z přednášky víme, že tato úloha je ekvivalentní s úlohou následující:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \acute{y} \\ z \end{pmatrix}}_{\acute{\vec{a}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Charakteristický polynom matice A vypadá: $(-5-\lambda)\cdot(-6-\lambda)-2 = (\lambda+4)\cdot(\lambda+7)$. Tedy kořeny jsou: $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = -7$ Zjistím teď vlastní vektory matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (2,1) = \vec{v_1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (1,-1) = \vec{v_2}$$

Tedy můžu napsat řešení bez pravé strany jako:

$$\begin{pmatrix} \acute{y} \\ z \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x}$$

a nyní očekávaným krokem známým z přednášky provedeme:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = (C_1' - 4C_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + (C_2' - 7C_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} = L(\vec{a})$$

$$L(\vec{a}) =$$

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} + \begin{pmatrix} 40e^x \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

Po upravení, rozložení a vynásobení matic zůstává rovnost:

$$C_1' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} = \begin{pmatrix} 40e^x \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy zpátky zapsat do rovnic soustavu:

$$\begin{aligned} 2C_1' e^{-4x} + C_2' e^{-7x} &= 40e^x \\ C_1' e^{-4x} - C_2' e^{-7x} &= 9e^{-x} \end{aligned}$$

Z této soustavy mohu dále vyjádřit:

$$\begin{aligned} 3C_1' \cdot e^{-4x} &= 40e^x + 9e^{-x} \\ C_1' &= \tfrac{40e^{5x} + 9e^{3x}}{3} \\ -3C_2' e^{-7x} &= 40e^x - 18e^{-x} \\ C_2' &= -\tfrac{40e^{8x} - 18e^{6x}}{3} \end{aligned}$$

Dále:

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1 \\ C_2 &= -\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2 \end{aligned}$$

Mohu tedy zapsat $\vec{a}$ jako:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (\frac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x} + (-\frac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}$$

Konečný výsledek je třeba zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} y &= (\tfrac{16}{3}e^{5x} + 2e^{3x} + 2K_1)e^{-4x} + (-\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2)e^{-7} \\ z &= (\tfrac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1)e^{-4x} - (-\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2)e^{-7} \end{aligned}$$

A komu se tento výsledek nelíbí, může si jako procvičení klidně upravit do nějaké příjemnější podoby. Já už to přepisovat nebudu! Jen je opravdu třeba u zkoušky důležité, aby jste to přepsali tak, jak jsem to napsal na závěr já.

Příklad č.2

Řešte:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 5x - y - 4z \\
\dot{y} &= -12x + 5y + 12z \\
\dot{z} &= 10x - 3y - 9z
\end{aligned}
$$

Situaci máme ulehčenou o to, že hledáme pouze fundamentální systém. Na tomto příkladu si však ukážeme něco zajímavějšího. Nejprve budeme postupovat naprosto analogicky:

$$
\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

Zjistím vlastní čísla matice A:

$$
\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -4 \\ -12 & 5-\lambda & 12 \\ 10 & -3 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(1-\lambda)(1+\lambda)
$$

Pro ty, kdo by se s tímto determinantem trápili, první krok je přičtení prvního sloupce k poslednímu sloupci, dále pak stačí už jen vytknout z posledního sloupce $(1-\lambda)$ a dál už je to jen dopočítání. Problémem ale zůstává, že máme vlastní čísla $\lambda_1 = -1; \lambda_{2,3} = 1$. Co dál? Nejdříve pokud máme jedno vlastní číslo, můžeme spočíst k němu jeho vlastní vektor. Nechám na Vás. Je to $\vec{v_1} = (-1, 2, -2)$.

Chceme-li úspěšně pokračovat v řešení tohoto příkladu, musíme si vzpomět na větu z přednášky, která „ v podstatě “ tvrdila, že pokud máme nějaké vlastní číslo o násobnosti $k > 1$, pak vektory řešení k tomuto číslu mají ve složkách polynomy stupně nejvýše $k-1$. Budeme tedy hledat řešení v tomto tvaru:

$$
\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \cdot t \\ a_2 + b_2 \cdot t \\ a_3 + b_3 \cdot t \end{pmatrix} e^t = \vec{u}
$$

a nyní dosadíme do rovnosti do zadání:

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \cdot t + b_1 \\ a_2 + b_2 \cdot t + b_2 \\ a_3 + b_3 \cdot t + b_3 \end{pmatrix} \cdot e^t = \begin{pmatrix} 5a_1 + 5b_1 t - a_2 - b_2 t - 4a_3 - 4b_3 t \\ -12a_1 - 12b_1 t + 5a_2 + 5b_2 t + 12a_3 + 12b_3 t \\ 10a_1 + 10b_1 t - 3a_2 - 3b_2 t - 9a_3 - 9b_3 t \end{pmatrix} \cdot e^t$$

a nyní metodou neurčitých koeficientů stačí už jen sestavit šest následujících rovností:

$$\begin{gathered} a_1 + b_1 = 5a_1 - a_2 - 4a_3 \\ b_1 = 5b_1 - b_2 - 4b_3 \\ a_2 + b_2 = -12a_1 + 5a_2 + 12a_3 \\ b_2 = -12b_1 + 5b_2 + 12b_3 \\ a_3 + b_3 = 10a_1 - 3a_2 - 9a_3 \\ b_3 = 10b_1 - 3b_2 - 9b_3 \end{gathered}$$

A protože jste už velcí kucí, nechám dopočítání na Vás. Musím se přiznat, že počítal jsem to asi třikrát, nikdy mi to nevyšlo. :-) Měly by Vám vyjít dvě řešení, vypadjí asi takhle:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tedy aby to bylo vidět:

$$\vec{u^{(2)}} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 3 \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot e^t$$
$$\vec{u^{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

A ještě závěrem přepíšu do finální podoby:
$x = -C_1 e^{-t} + C_2(2+t)e^t + c_3 e^t$
$y = 2C_1 e^{-t} + 3c_2 e^t$
$z = -2C_1 e^{-t} + C_2(1+t)e^t + C_3 e^t$

Příklad č.3

Řešte:

$\dot{x} = -y + z$
$\dot{y} = z$
$\dot{z} = -x + z$

Postup je pro začátek jednoznačný. Zjistíme, že charakteristický polynom je: $(\lambda^2 + 1)(1 - \lambda) = 0$. To ale znamená, že máme komplexní dva kořeny. A ještě navíc oba komplexně sdružené. Kořeny jsou: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i; \lambda_3 = -i$. Když ale máme jeden reálný kořen, resp.vlastní číslo, můžeme pro něj zjistit vlastní vektor. Přesvědčete se, že má složky $v_1 = (0, 1, 1)$. Můžu spočíst i další vlastní vektory, např.prvně pro i:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i-1 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Můžu tedy určit vlastní vektor této matice jako: $\vec{v_2} = (1 + i, 1, i)$. Podle přednášky ale taky vím, že další vlastní vektor bude komplexně sdružený, tedy: $\vec{v_3} = (1 - i, 1, -i)$. To bych měl ale komplexní fundamentální systém a to se mi nelíbí. Podle přednášky totiž vím, že „ když mám reálné zadání, existuje reálné řešení“ . Tak proč se stresovat s komplexním? Podle známé formule rozepsat $e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$ a tedy jedno z řešení je:

$$\vec{u_2}(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$$

Z přednášky dále vím, že pouze reálná část jednoho komplexního řešení z fundamentálního systému je taky řešením a to platí taky o imaginární části. Proto teď vezmu $\vec{v_2}$ a „vyrobím“ z něj další dvě řešení. Reálná.

$$Re(\vec{u_2}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}; Im(\vec{u_2}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

tedy mohu konečně zapsat reálné řešení ve finálním tvaru:

$x = C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\cos t + \sin t)$
$y = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$
$z = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$

Příklad č.4

Řešte:

$\dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2$
$\dot{y} = -x + 1$
$\dot{z} = x + y - z - t + 1$

Poslední příklad nechám na Vás. Řešení nicméně je:

$x = -K_1 e^t + K_2 \cos t + K_3 \sin t$
$y = K_1 e^t - K_2 \sin t + K_3 \cos t + t$
$z = K_2 \cos t + K_3 \sin t + 1$