01DIFR Diferenciální rovnice

Zbyšek Štěpáník
dle přednášky prof. Beneše

27. září 2021

Obsah

Předmluva

Materiál byl sestaven z přednášek prof. Dr. Ing. Michala Beneše, které proběhly v letním semestru akademického roku 2009/2010 na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Tento učební text je určen posluchačům 2. ročníku základního studia navštěvujícím kurs 01DIFR *Diferenciální rovnice*, který je zařazen mezi předměty Matematika A. Při sestavování textu se předpokládaly znalosti základů matematiky na úrovni absolvování kurzů 01LA1 *Lineární algebra 1*, 01LAP *Lineární algebra plus*, 01LAA2 *Lineární algebra A2*, 01MA1 *Matematická analýza 1*, 01MAP *Matematická analýza plus*, 01MAA2 *Matematická analýza A2* a 01MAA3 *Matematická analýza A3*.

Doporučená literatura:

(1) J. Kluvánek, L. Mišík a M. Švec: *Matematika II*, Bratislava 1959.

(2) L. S. Pontrjagin: *Obyknovennyje differencialnyje uravnenija*, Nauka, Moskva 1965.

(3) V. V. Stěpanov: *Kurs diferenciálních rovnic*, Praha 1950.

(4) M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical systems and Linear Algebra*, Academic Press, Boston, 1974.

(5) F. Verhulst: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin 1990.

1 Úvod

Diferenciální rovnice je funkcionální rovnice obsahující neznámou funkci a její derivace. Cílem zkoumání je co nejzřetelněji (jednoznačně) určit tuto funkci (a její derivace).

Podstatné tedy je, že neznámou je v tomto případě funkce, a že se v rovnicích vyskytují rovněž derivace neznámé funkce.

Diferenciálních rovnice lze klasifikovat podle řady hledisek. Zásadní je rozdělení na diferenciální rovnice obyčejné a parciální. *Obyčejné diferenciální rovnice* se vyznačují tím, že neznámá funkce je funkcí jediné proměnné. V *parciálních diferenciálních rovnicích* se naproti tomu setkáme s neznámou funkcí více proměnných. Diferenciální rovnice lze také dělit na lineární a nelineární atd.

Z hlediska řešení diferenciálních rovnic mají zásadní teoretickou hodnotu věty o existenci a jednoznačnosti, které stanoví podmínky, při jejichž splnění je zaručena existence právě jednoho řešení. Metody řešení diferenciálních rovnic jsou rozmanité. Často se v literatuře i praxi můžeme setkat s metodami kvalitativními (také geometrickými), analytickými a numerickými. Analytické metody jsou ty, které nám přímo poskytují funkční předpis pro neznámou funkci. Bohužel třída úloh řešitelných analyticky není příliš rozsáhlá a v zásadě se omezuje pouze na několik speciálních typů rovnic. V praxi se většina úloh musí řešit prostřednictvím numerických, případně kvalitativních, metod.

V tomto kurzu se budeme zabývat pouze *obyčejnými diferenciálními rovnicemi* a *analytickými metodami* jejich řešení.

1.1 Příklady

Příklad 1.1. **Pohyb hmotného bodu po přímce**.

Pro jednorozměrný pohyb hmotného bodu máme známou pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = F, \tag{1.1}$$

kde m představuje hmotnost bodu (m je tedy kladná konstanta) a pro zjednodušení předpokládáme, že F je reálná konstanta (F představuje působící sílu). Dvojí integrací rovnice (1.1) snadno zjistíme, že

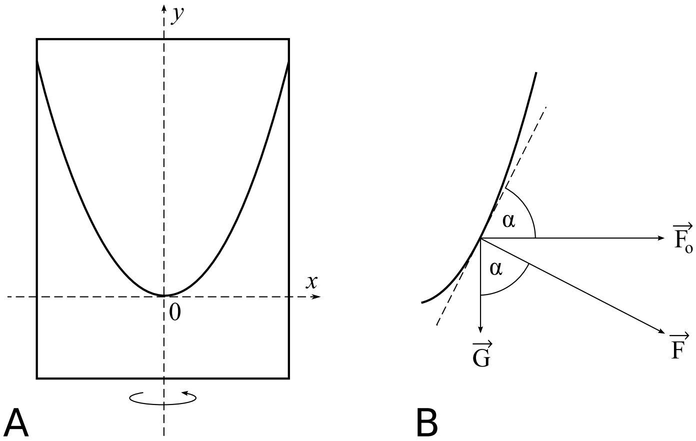
$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C_1 t + C_2, \tag{1.2}$$

kde C_1 a C_2 jsou nějaké reálné blíže neurčené integrační konstanty. Řešení (1.2) tedy není určeno jednoznačně a proto naši úlohu doplníme o dodatečné podmínky (tzv. počáteční podmínky)

$$\begin{aligned} x(0) &= x_{ini}, && \text{(počáteční poloha)} \\ m\dot{x}(0) &= p_{ini}. && \text{(počáteční hybnost)} \end{aligned}$$

Potom zřejmě platí, že $C_1 = p_{ini}/m$ a $C_2 = x_{ini}$ a řešení této úlohy lze zapsat ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \frac{1}{m}p_{ini}t + x_{ini}.$$



Obrázek 1.1: **A** Hladina kapaliny ve sklenici rotující okolo osy y. **B** Rovnováha sil na hladině kapaliny v rotující sklenici.

Poznámka 1.2. Úloha řešená v předchozím příkladě se označuje jako tzv. *počáteční úloha pro diferenciální rovnici.* V tomto případě měla tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F, \\ x(0) &= x_{ini}, \\ m\dot{x}(0) &= p_{ini}. \end{aligned}$$

V literatuře se také často setkáme s názvem *Cauchyova počáteční úloha.*

Příklad 1.3. **Rotující sklenice.**

Máme sklenici naplněnou kapalinou umístěnou v tíhovém poli. Sklenice rotuje okolo osy y. Situace je schematicky zachycena na obr. 1.1A. Počátek soustavy souřadné jsme umístili do nějnižšího bodu hladiny v ustáleném stavu a zajímá nás tvar hladiny $y = y(x)$ za těchto okolností.

V ustáleném stavu je tvar hladiny v čase neměnný. To nastává, je-li výslednice sil působících na hladině kolmá k hladině. Tuto situaci znázorňuje obr. 1.1B. Na hladině působí jednak síla tíhová, jejíž velikost je $G = \varrho g$ a jednak síla odstředivá, jejíž velikost $F_o(x) = \varrho x \omega^2$. Zde ϱ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a ω je úhlová rychlost rotace sklenice. Vztah mezi úhlem $\alpha(x)$ a derivací $y'(x)$ je dán podmínkou rovnováhy. Z obr. 1.1B je patrné, že musí platit

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{F_o(x)}{G}.$$

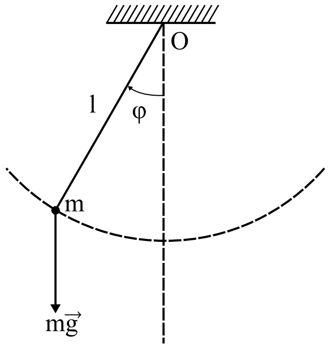
Hledaným řešením je tedy řešení úlohy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x\omega^2}{g}, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

kde jsme pro jednoznačnost doplnili počáteční podmínku ve tvaru $y(0) = 0$. Snadno ověříme, že hledanou funkcí je funkce

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Hladina má zřejmě tvar rotačního paraboloidu.



Obrázek 1.2: Matematické kyvadlo.

Příklad 1.4. **Parciální diferenciální rovnice.**

Mějme funkci u dánu předpisem:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}},$$

kde $D > 0$, D je konstanta, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Spočteme následující parciální derivace funkce u:

$$\begin{aligned}
\partial_x u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \left(-\frac{x-x_0}{2Dt} \right), \\
\partial^2_{xx} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \left(\frac{(x-x_0)^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt} \right), \\
\partial_t u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \left(\frac{(x-x_0)^2}{4Dt^2} - \frac{1}{2t} \right).
\end{aligned}$$

Porovnáním posledních dvou rovnic lze sestavit parciální diferenciální rovnici $\partial_t u = D\partial^2_{xx} u$, která může popisovat např. vedení tepla.

Příklad 1.5. **Matematické kyvadlo.**

Dalším známým příkladem, který vede na řešení diferenciální rovnice je matematické kyvadlo (obr. 1.2). Snadno sestavíme pohybovou rovnici $I\ddot{\varphi}(t) = -mgl \sin\varphi(t)$, kde $I = ml^2$ je příslušný moment setrvačnosti, m je hmotnost hmotného bodu, l délka závěsu, g velikost tíhového zrychlení a φ je úhel (viz obr. 1.2). Rovnici nakonec upravíme do výsledného tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0.$$

Z tohoto tvaru je ihned patrné, že rovnici nebude možno řešit pouhou integrací ve tvaru $\int \mathrm{d}t$ jako v některých předešlých příkladech. Podotýkáme, že v literatuře se proces řešení diferenciální rovnice často nazývá integrací, přestože se o integraci v pravém slova smyslu nejedná, stejně jako v tomto případě.

Příkladem řešení uvedené rovnice jsou např. funkce $\varphi(t) \equiv 0$ nebo $\varphi(t) \equiv \pi$, které odpovídají setrvání kyvadla v některé z rovnovážných poloh. V prvním případě jde zřejmě o stabilní rovnovážnou polohou, zatímco ve druhém se jedná o rovnovážnou polohu labilní. Rovnovážnou polohu také nazýváme pevný bod.

Mimo uvedeného si na rovnici můžeme všimnout i toho, že v ní explicitně nevystupuje proměnná t, což nám může pomoci při jejím řešením. Na závěr ještě poznamenáme, že tato rovnice patří mezi tzv. separabilní rovnice.

PŘÍKLAD 1.6. **Clausiova–Clapeyronova rovnice.**
Máme diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l}{T(\vartheta_2 - \vartheta_1)},$$

která popisuje závislost tlaku na teplotě v uzavřené nádobě konstantního objemu s kapalinou a jejími parami. Zde p je tlak, T je teplota, l je měrné skupenské teplo (vypařování), ϑ_1 je měrný objem kapaliny a ϑ_2 je měrný objem páry.

Hledáme funkci $p = p(T)$, která řeší uvedenou rovnici. Proces řešení se skládá ze dvou dílčích kroků – separace a integrace. Tím dostaneme

$$p(T) = \frac{l}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \ln T + C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení je závislé na integrační konstantě C, kterou můžeme určit po zavedení doplňující podmínky, např. ve tvaru $p(T_0) = p_0$. Odtud $C = p_0 - \frac{l}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \ln T_0$ a výsledné řešení je ve tvaru

$$p(T) = p_0 + \frac{l}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \ln \frac{T}{T_0}.$$

Na závěr je ještě třeba poznamenat, že výsledné řešení není dobře fyzikálně odůvodněné. Při řešení jsme předpokládali, že ani měrné skupenské teplo l, ani měrný objem kapaliny ϑ_1 a její páry ϑ_2, nezávisí na teplotě. To však není příliš dobré přiblížení [2].

1.2 Označení

Definice 1.7. Obyčejný diferenciální výraz n-tého řádu je ve tvaru

$$F = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}),$$

kde $F \in \mathcal{C}^{(p)} : (\mathbb{R}^{n+2}) \to \mathbb{R}$, $p \geq 0$, $y^{(n)}$ je netriviálně zastoupena v F.

Potom **obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu** nazveme rovnici

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad x \in I, \tag{1.3}$$

kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a levá strana je obyčejný diferenciální výraz (n-tého řádu).

Definice 1.8. Řešení rovnice (1.3) **na intervalu** I je každá funkce $y = y(x)$, $y : I \to \mathbb{R}$, pro kterou $y^{(k)} = y^{(k)}(x)$ existuje $\forall x \in I$ a $\forall k = 0, 1, \dots, n$, a která splňuje rovnici (1.3) $\forall x \in I$.

POZNÁMKA 1.9. Řešení diferenciální rovnice z předchozí definice je tzv. *klasické řešení*, požadující bodové splnění rovnice (1.3).

POZNÁMKA 1.10. Graf řešení $y = y(x)$ rovnice (1.3) je množina $G = \left\{ \binom{x}{y(x)} \mid x \in I \right\}$. V literatuře se množina G také nazývá *integrální křivkou.*

POZNÁMKA 1.11. V příkladech v předcházející sekci byly rovnice doplněny podmínkami, předepsanými v jediné hodnotě nezávisle proměnné. Jedná se o počáteční podmínky (viz poznámka 1.2). Kdybychom měli podmínky udány v různých hodnotách nezávisle proměnné, hovořili bychom o *okrajových podmínkách.* Hovoříme potom o *okrajové úloze pro diferenciální rovnici.*

PŘÍKLAD 1.12. **Vedení tepla stěnou.**

Mějme rovnici

$$-D\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

kde $D > 0$ nazýváme koeficient teplotní difuze. Tato rovnice popisuje jednoduchý případ stacionárního vedení tepla jednoduchou stěnou s konstantním koeficientem difuze. Okrajové podmínky pro naši úlohu jsou

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0, \\ T(L) &= T_L, \end{aligned}$$

kde L je tloušťka stěny, T_0 chápeme jako vnitřní teplotu a T_L jako vnější teplotu.

Snadno nahlédneme, že řešení uvedené rovnice je $DT(x) = C_1x + C_2$, kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Z nich plyne $C_1 = \frac{D}{L}(T_L - T_0)$ a $C_2 = DT_0$. Konečné řešení tedy je

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0.$$

Řešení ukazuje lineární závislost teploty T na souřadnici x. V technické praxi se však často setkáme s materiály, které se vyznačují nelineárním vedením tepla (kde např. $D = D(x)$ je nějakou obecnou funkcí). Tím se řešení rovnice pochopitelně komplikuje.

PŘÍKLAD 1.13. Řešme rovnici

$$y'' + 100y = 0.$$

Tato rovnice má obecné řešení[1] $y(x) = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x$.

Zkoumejme řešení rovnice pro různé okrajové podmínky. Nejdříve nechť $y(0) = 0$ a $y(\pi) = 0$. Obě tyto podmínky lze zřejmě splnit zároveň pro volbu $C_1 = 0$ a $C_2 \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru $y(x) = C_2 \sin 10x$, kde $C_2 \in \mathbb{R}$.

Nechť jsou zadány následující okrajové podmínky: $y(0) = 1$ a $y(\pi) = 0$. Z první podmínky plyne, že $C_1 = 1$ a $C_2 \in \mathbb{R}$, zatímco z druhé plyne $C_1 = 0$ a $C_2 \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že obě tyto podmínky nemohou být splněny současně, a proto taková okrajová úloha nemá řešení.

POZNÁMKA 1.14. **Jednoznačnost řešení** rovnice (1.3).

Řekneme, že řešení rovnice (1.3) je dáno jednoznačně právě tehdy, když pro každé dvě řešení y_1, y_2 takové, že $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ a $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$, kde $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ (I_1 a I_2 jsou otevřené intervaly) platí výrok $\big(\forall x \in I_1 \cap I_2\big)\big(y_1(x) = y_2(x)\big)$. Neboli řešení se musí shodovat na průniku svých definičních oborů.

POZNÁMKA 1.15. Postup hledání řešení diferenciální rovnice zahrnuje algebraické a funkcionální úpravy (substituce). Podobně jako v lineární algebře mohou tyto úpravy být *ekvivalentní* nebo *neekvivalentní*.

Definice 1.16. Dvě diferenciální rovnice nazveme **ekvivalentní** právě tehdy, když mají stejné množiny řešení.

PŘÍKLAD 1.17. Nechť je dána rovnice

$$xy' = y^2 - y,$$

[1] K pojmu *obecné řešení* viz poznámka 4.21.

z níž úpravou (vynásobením výrazem $x^{-1}(y^2 - y)^{-1}$) vznikne rovnice

$$\frac{y'}{y^2 - y} = \frac{1}{x} \, .$$

Tuto úpravu však lze uvažovat pouze pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ a $y \neq 1$. Uvažujme funkce $y(x) = 0$ nebo $y(x) = 1$ definované na $\mathbb{R}$. Obě tyto funkce řeší první rovnici, ale nemohou být řešeními druhé. Je tedy zřejmé, že obě rovnice nemají stejné množiny řešení, a proto nemohou být ani ekvivalentní. To je důsledkem provedení neekvivalentní úpravy. Navíc se lze přesvědčit, že řešení druhé rovnice řeší také první rovnici, ale nikoli na stejné množině. Uvažujme např. funkci $y(x) = 1/(1 - x)$, která řeší druhou rovnici pro $x \neq 0$ a $x \neq 1$. Tato funkce však také řešením první rovnice pro $x \neq 1$. Při každé úpravě diferenciální rovnice je tedy třeba dávat pozor, zda je tato úprava ekvivalentní, nebo ne.

2 Řešení speciálních typů rovnic

2.1 Geometrická interpretace rovnice $y' = f(x, y)$

Poznámka 2.1. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

kde funkce f je definovaná na nějaké oblasti $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. O takové rovnici říkáme, že je v *normálním tvaru.*

Rovnici lze geometricky chápat tak, že každému bodu $\binom{x}{y} \in \mathrm{Dom}(f)$ je přiřazena hodnota $f(x, y)$, která je směrnicí jisté přímky procházející tímto bodem. Je-li funkce $y = y(x)$ řešení rovnice (2.1), příslušná integrální křivka má tu vlastnost, že její tečna v bodě $\binom{x}{y(x)}$ je totožná s přímkou, jejíž směrnice je $f(x, y(x))$ a která tímto bodem prochází.

Definice 2.2. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru (2.1). Nechť $\Gamma = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Pak množina $\left\{\binom{1}{f(x,y)} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$ se nazývá **směrové pole**.

Poznámka 2.3. Dle předchozí definice můžeme znároznit směrové pole tak, že do každého bodu $\binom{x}{y} \in \Gamma$ umístíme vektor $\binom{1}{f(x,y)}$. V zájmu přehlednosti však směrové pole reprezentujeme jiným způsobem. Do každého bodu $\binom{x}{y} \in \Gamma$ umístíme krátkou úsečku se středem v bodě $\binom{x}{y}$, jejíž směrnice je rovna hodnotě $f(x, y)$. Na délku úsečky pak klademe jen ten požadavek, aby takto vzniklý obrázek byl přehledný.

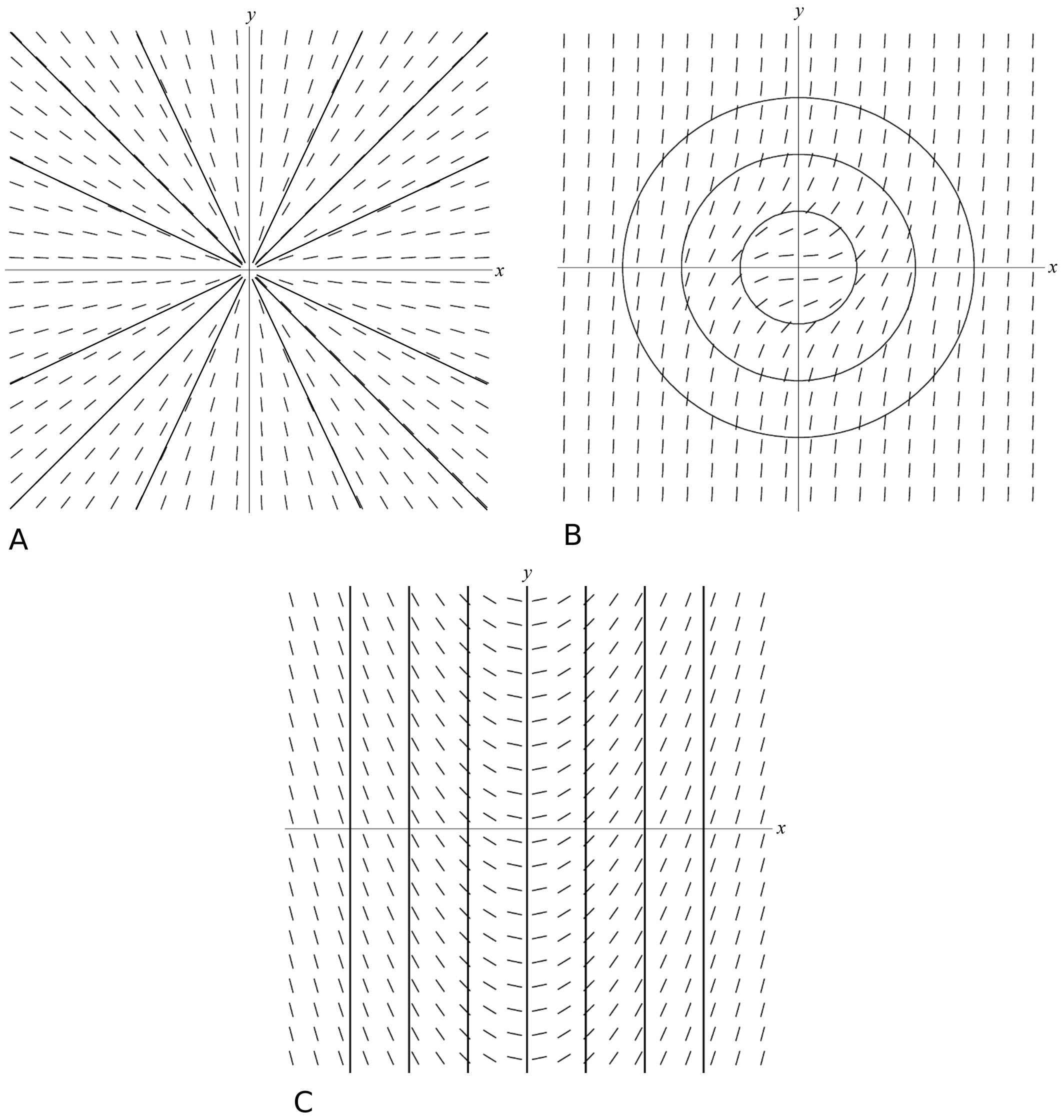
Definice 2.4. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru (2.1), $\Gamma = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále platí $\big(\exists C \in \mathbb{R}\big)\big(\exists \binom{x_0}{y_0} \in \Gamma\big)\big(f(x_0, y_0) = C\big)$. Pak množina $\left\{\binom{x}{y} \in \Gamma \mid f(x, y) = C\right\}$ se nazývá **izoklinická křivka**.

Příklad 2.5. Zakreslíme směrové pole a izoklinické křivky následujících rovnic (směrové pole zakreslíme pro přehlednost ve stylu poznámky 2.3):

a) $y' = y/x$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$. Směrové pole je v tomto případě podle definice množina $\left\{\binom{1}{y/x} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$. Izoklinické křivky jsou dány rovnicí $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Protože $x \neq 0$ můžeme si ty křivky představit jako polopřímky začínající v počátku. Samotný počátek, však na těchto křivkách neleží. Směrové pole a několik izoklinických křivek je zachyceno na obr. 2.1A.

b) $y' = x^2 + y^2$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Zde směrové pole je množina $\left\{\binom{1}{x^2+y^2} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$ a izoklinické křivky jsou kružnice se středem v počátku dané rovnicí $x^2 + y^2 = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Snadno se přesvědčíme, že obrázek směrového pole podle definice 2.2 by byl v tomto případě velmi nepřehledný. Směrové pole a vybrané izoklinické křivky k této rovnici jsou znázorněny na obr. 2.1B.

c) $y' = x$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Směrové pole u této rovnice je množina $\left\{\binom{1}{x} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$. Izoklinické křivky jsou vertikály s rovnicí $x = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Situace je zachycena na obr. 2.1C.



Obrázek 2.1: Směrová pole a izoklinické křivky příslušné k daným diferenciálním rovnicím. **A** k rovnici $y' = y/x$, **B** k rovnici $y' = x^2 + y^2$, **C** k rovnici $y' = x$.

Poznámka 2.6. Máme-li diferenciální rovnici ve tvaru (2.1) a chceme-li zakreslit její směrové pole, můžeme v zásadě postupovat dvěma způsoby. První způsob lze shrnout do následujícího schématu:

1. Vybereme body $\binom{x}{y}$, v nichž chceme spočítat sklony.
2. Pro každý z vybraných bodů spočteme příslušný sklon C podle vztahu $C = f(x, y)$.
3. Do vybraných bodů zakreslíme úsečky s patřičným sklonem.

S tímto přístupem se zpravidla setkáme, pokud k vykreslení směrového pole používáme počítač. Můžeme si všimnout, že v předchozím příkladě byla použita právě tato metoda.

V případě, že potřebujeme vykreslit směrové pole efektivněji (např. pokud jej potřebujeme vykreslit ručně), volíme raději druhý způsob. Ten spočívá v tom, že

1. Zvolíme si sklon C.
2. Najdeme příslušné izoklinické křivky, tj. vyřešíme rovnici $f(x, y) = C$.
3. Podél nalezené křivky zakreslíme úsečky s příslušným sklonem.
4. Postup zopakujeme pro další hodnotu C, dokud nejsme s výsledkem spokojeni.

2.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice 2.7. Nechť $P = P(x)$, $Q = Q(y)$ jsou spojité funkce. Pak rovnice 1. řádu ve tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \tag{2.2}$$

se nazývá **rovnice se separovanými proměnnými**.

Poznámka 2.8 (**Formální postup**). Mějme rovnici (2.2), kterou zapíšeme ve tvaru

$$P(x) + Q(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Tuto rovnici bychom chtěli upravit tak, že ji vynásobíme výrazem $\mathrm{d}x$. Vznikla by následující rovnice

$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Problém této úpravy ovšem je, že není platná. Výraz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ totiž není zlomek, nýbrž nedělitelný symbol. Nicméně, pokud by bylo možné úpravu provést, dostali bychom se k výše uvedené rovnici. Levou stranu této rovnice bychom mohli chápat jako diferenciál $\mathrm{d}G$ nějaké funkce $G = G(x, y)$. Přitom by zřejmě muselo platit

$$P(x) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad Q(y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}.$$

Integrací rovnosti $\mathrm{d}G = 0$ dostáváme $G(x, y) = \text{konst.}$, tedy

$$G(x, y) = \int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = \text{konst.},$$

což lze chápat jako zápis implicitně zadané funkce $y = y(x)$, která by při splnění určitých podmínek byla řešením rovnice (2.2). Jak to tedy s řešením rovnice (2.2) je, nám prozradí následující dvě věty.

Věta 2.9. *Nechť $P = P(x)$ je spojitá na $I = (a, b)$ a $Q = Q(y)$ je spojitá na $J = (c, d)$. Pak platí*

(I) $\forall y = y(x)$, kde y je řešení (2.2) na $I_1 \subset I$, splňuje funkce y na I_1 také rovnost

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \tag{2.3}$$

pro nějaké $C \in \mathbb{R}$.

(II) $\big(\exists C \in \mathbb{R}\big)\big(\exists I_2 \subset I\big)\big(\forall y : I_2 \to \mathbb{R}, y'\,ex.\big)$ platí $\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \implies y$ na I_2 splňuje rovnici (2.2).

Důkaz.

(I) Máme tedy funkci u, která řeší na $I_1 \subset I$ rovnici (2.2). Tzn. u je na I_1 spojitá a diferencovatelná a platí

$$\Big(\forall x \in I_1\Big)\Big(P(x) + Q\big(u(x)\big)u'(x) = 0\Big).$$

Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q\big(u(x)\big)u'(x)\mathrm{d}x = C \quad \text{pro každé } x \in I_1,$$

kde C je integrační konstanta. Podle věty o integraci substitucí platí $\int Q\big(u(x)\big)u'(x)\mathrm{d}x = \big[\int Q(y)\mathrm{d}y\big]_{y=u(x)}$. Tzn. předchozí rovnost lze psát ve tvaru

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \left[\int Q(y)\mathrm{d}y\right]_{y=u(x)} = C \quad \text{pro každé } x \in I_1,$$

což jsme chtěli dokázat.

(II) Máme nějakou funkci $y(x)$, která je na $I_2 \subset I$ diferencovatelná a splňuje zde pro nějaké $C \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\underbrace{\left[\int P(x)\mathrm{d}x\right]}_{H(x)} + \underbrace{\left[\int Q(y)\mathrm{d}y\right]}_{S(y)} = C.$$

Tato rovnost platí pro každé $x \in I_2$ a s daným označením ji lze zapsat ve tvaru $H(x) + S\big(y(x)\big) = C$ pro všechna $x \in I_2$. Funkce H a S jsou zřejmě diferencovatelné (jsou to primitivní funkce k P a Q), a proto můžeme uvedenou rovnost derivovat. Tím dostaneme

$$\underbrace{H'(x)}_{P(x)} + \underbrace{S'\big(y(x)\big)}_{Q(y(x))} y'(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in I_2.$$

Dostali jsme se tedy k rovnosti $P(x) + Q\big(y(x)\big)y'(x) = 0$ pro každé $x \in I_2$, tj. funkce y řeší na I_2 rovnici (2.2), což jsme chtěli dokázat. □

Věta 2.10. *Nechť P je spojitá na $I = (a, b)$, Q je spojitá na $J = (c, d)$ a $Q(y) \neq 0$ na J. Pak $\forall \binom{x_0}{y_0} \in I \times J$ existuje právě jedno řešení (2.2) tak, že $y(x_0) = y_0$.*

Důkaz. Označme $H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x$ a $S(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(y)\mathrm{d}y$.

(I) Ukažme nejdříve existenci řešení. Z definice funkcí H a S je zřejmé, že $H(x_0) = 0$ a $S(y_0) = 0$. Uvažme obecný implicitní vztah (2.3) z předchozí věty, který lze při zavedeném označení psát ve tvaru

$$H(x) + S(y) = C, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Zkoumáme, zda nám tento vztah za daných předpokladů implicitně definuje nějakou funkci $y = y(x)$. Na funkci y přitom klademe ten požadavek, aby $y(x_0) = y_0$. Z toho ovšem plyne, že požadujeme

$$\underbrace{H(x_0)}_{=0} + \underbrace{S(y_0)}_{=0} = C,$$

což lze splnit jen pro $C = 0$. Máme tedy implicitní vztah $H(x) + S(y) = 0$, funkce H a S jsou diferencovatelné na svých definičních oborech a navíc platí $S'(y) = Q(y) \neq 0$ na J. Tím jsme splnili předpoklady věty o implicitní funkci [8, Věta 13.5], a tedy existuje funkce $y = y(x)$ taková, že splňuje rovnici $H(x) + S\big(y(x)\big) = 0$. To ale podle předchozí věty znamená, že splňuje i rovnici (2.2), což jsme chtěli dokázat.

(II) Dokažme jednoznačnost ve smyslu poznámky 1.14. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení (2.2) na I_1 a I_2 a nechť $x_0 \in I_1 \cap I_2$. Platí tedy

$$\begin{aligned} P(x) + Q\big(y_1(x)\big)y_1'(x) &= 0 \qquad x \in I_1, \\ P(x) + Q\big(y_2(x)\big)y_2'(x) &= 0 \qquad x \in I_2. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$Q\big(y_1(x)\big)y_1'(x) = Q\big(y_2(x)\big)y_2'(x) \qquad x \in I_1 \cap I_2,$$

což lze dále upravit na

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\Big(y_1(x)\Big)y_1'(x) &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\Big(y_2(x)\Big)y_2'(x), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[S\big(y_1(x)\big)\Big] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[S\big(y_2(x)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Integrací poslední rovnosti se dostaneme ke vztahu

$$S\big(y_1(x)\big) = S\big(y_2(x)\big) + d, \quad d \in \mathbb{R}, \quad x \in I_1 \cap I_2.$$

Protože obě řešení y_1, y_2 obsahují bod $\binom{x_0}{y_0}$, dostáváme speciálně pro $x = x_0$ rovnost

$$S\big(\underbrace{y_1(x_0)}_{=y_0}\big) = S\big(\underbrace{y_2(x_0)}_{=y_0}\big) + d,$$

z níž plyne, že $d = 0$. Platí tedy $S\big(y_1(x)\big) = S\big(y_2(x)\big)$ pro $\forall x \in I_1 \cap I_2$ a zároveň $S'(y) = Q(y) \neq 0$ na J. Funkce S je tedy na J monotónní (protože je i spojitá, jak je zřejmé z její definice). Tzn. $y_1(x) = y_2(x)$ pro $\forall x \in I_1 \cap I_2$, a řešení je tedy dáno jednoznačně. □

PŘÍKLAD 2.11. Řešme rovnici

$$2yy' - 4x^3 = 0. \tag{2.4}$$

Rovnice je typu (2.2), kde $Q(y) = 2y$ a $P(x) = -4x^3$ (kde P i Q jsou spojité na $\mathbb{R}$) a její řešení je tedy podle věty 2.9 implicitně dáno rovnicí

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Integrací této rovnice, tj. $-\int 4x^3\mathrm{d}x + \int 2y\mathrm{d}y = C$, se dostaneme k rovnici

$$-x^4 + y^2 = C,$$

která nám implicitně definuje funkci $y = y(x)$.

Zřejmě platí $Q(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$. Podle věty 2.10 prochází každým bodem roviny $\mathbb{R}^2$, který neleží na přímce $y = 0$, právě jedna integrální křivka naší diferenciální rovnice. Zvlášť je třeba diskutovat případ, kdy $Q(y) = 0$, tj. když nemáme z věty 2.10 zaručenu jednoznačnost. Dosazením do (2.4) se snadno přesvědčíme, že body $\binom{x}{0}$, kde $x \neq 0$, neprochází žádné řešení rovnice (2.4). Bodem $\binom{0}{0}$ prochází dvě řešení, a to $y(x) = \pm x^2$ (viz dále).

Jak již bylo poznamenáno, řešení naší diferenciální rovnice jsou implicitně dána rovnicí $-x^4 + y^2 = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Uvažme zvlášť následující případy podle hodnoty konstanty C:

- pro $C = 0$: $y(x) = \pm x^2$ a $D_y = \mathbb{R}$,
- pro $C > 0$: $y(x) = \pm\sqrt{C + x^4}$ a $D_y = \mathbb{R}$,
- pro $C < 0$: $y(x) = \pm\sqrt{C + x^4}$ a $D_y = (-\infty, -\sqrt[4]{|C|}) \cup (\sqrt[4]{|C|}, +\infty)$.

2.3 Rovnice separovatelné

Definice 2.12. Nechť $P_1 = P_1(x)$, $Q_1 = Q_1(x)$, $P_2 = P_2(y)$ a $Q_2 = Q_2(y)$ jsou spojité funkce. Pak rovnice tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0 \tag{2.5}$$

se nazývá **separovatelná diferenciální rovnice 1. řádu**.

POZNÁMKA 2.13 (**Formální postup**). Rovnici (2.5), kde P_1, Q_1 jsou spojité na intervalu $I = (a, b)$ a P_2, Q_2 jsou spojité na intervalu $J = (c, d)$, upravíme pro $Q_1(x), P_2(y) \neq 0$ do tvaru

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0. \tag{2.6}$$

Poznamenejme ještě, že jsme provedli obecně neekvivalentní úpravu. Nemáme totiž zaručeno, že funkce Q_1 a P_2 nenabývají na svých definičních oborech (resp. na intervalech I a J) nulových hodnot. Tímto problémem se budeme zabývat později.

Rovnice (2.6) je separovaná a můžeme pro její vyřešení použít postup ze sekce 2.2. Hledaná funkce $y = y(x)$ je implicitně definovaná vztahem

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Pro jednoznačnost navíc požadujeme, aby $Q_2(y) \neq 0$ (na intervalu J).

Další řešení rovnice (2.5) se objevují v důsledku provedení neekvivalentní úpravy. Požadavkem $P_2(y) \neq 0$ jsme vyloučili všechny takové funkce y, pro něž $P_2(y(x)) = 0$ pro nějaké $x \in I$. Označme $b_j \in J$, kde $j = 1, \dots, n_p$, kořeny rovnice $P_2(y) = 0$. Snadno se lze přesvědčit dosazením, že funkce ve tvaru $y(x) \equiv b_j$, pro $\forall j \in \widehat{n}_p$ jsou řešením rovnice (2.5).

Dále je třeba vyšetřit případ, kdy $Q_1(x) = 0$. Označme $a_i \in I$, kde $i = 1, \dots, n_q$, kořeny rovnice $Q_1(x) = 0$. Přímky $x = a_i$, $i = 1, \dots, n_q$ a $y = b_j$, $j = 1, \dots, n_p$ rozdělují interval $I \times J$ na částečné otevřené intervaly, kde $Q_1(x), P_2(y) \neq 0$. Rovnice (2.5) a (2.6) jsou na těchto částečných intervalech ekvivalentní. Takto získaná řešení je však třeba ručně prozkoumat z hlediska definičního oboru přímo na rovnici (2.5).

Řešení diferenciální rovnice (2.5) jsou tedy funkce $y(x) \equiv b_j$, $j = 1, \dots, n_p$, kde čísla b_j jsou kořeny rovnice $P_2(y) = 0$, a všechna řešení rovnice (2.6), u nichž je ale třeba ručně ověřit jejich definiční obor.

Příklad 2.14. Řešme rovnici

$$y - xy' = 0. \tag{2.7}$$

Rovnice je ve tvaru (2.5), kde $P_1(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $P_2(y) = y$ a $Q_2(y) = -1$ (všechny tyto funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$). Interval $I \times J$ ve smyslu předchozí poznámky je tedy celé $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že $xy \neq 0$. Pak lze (2.7) upravit do tvaru

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} y' = 0. \tag{2.8}$$

Tato rovnice je již separovaná a její řešení pro $xy \neq 0$ je implicitně definované rovnicí $\ln|x| - \ln|y| = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Věta 2.10 nám navíc zaručuje jednoznačnost tohoto řešení. Snadnou úpravou získáme řešení ve tvaru

$$|y(x)| = D\,|x|\,, \qquad \text{kde } D = \mathrm{e}^{-C} > 0.$$

V prvním a třetím kvadrantu lze řešení psát ve tvaru $y(x) = Dx$, zatímco ve druhém a čtvrtém kvadrantu ve tvaru $y(x) = -Dx$. Tato řešení si geometricky představíme jako polopřímky s počátkem v bodě $\binom{0}{0}$. Bod $\binom{0}{0}$ však na těchto polopřímkách neleží. Přímky $y = 0$ a $x = 0$ řešením této rovnice pochopitelně nejsou. Řešení lze zřejmě zapsat jednotně

$$y(x) = Dx, \qquad \text{kde } D \neq 0, D_y = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+.$$

Soustřeďme se nyní na řešení rovnice (2.7). Rovnice $P_2(y) = 0$ má právě jeden kořen $y_1 = 0$ a rovnice $Q_1(x) = 0$ má rovněž jeden kořen $x_1 = 0$. Podle předchozí poznámky je tedy funkce $y(x) \equiv 0$ řešením rovnice (2.7), což snadno ověříme dosazením. Podmínka $xy \neq 0$ rozděluje $\mathbb{R}^2$ na čtyři kvadranty, na nichž jsou rovnice (2.7) a (2.8) ekvivalentní. Proto zde mají tyto rovnice stejná řešení. Je však třeba ověřit jejich definiční obor. Snadno zjistíme, že funkce $y(x) = Dx$, kde $D \neq 0$ řeší (2.7) na celém $\mathbb{R}$. Proto lze všechna řešení zapsat v jednotném tvaru

$$y(x) = Dx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}.$$

Lze si všimnout, že každým bodem $\mathbb{R}^2$, který neleží na přímce $x = 0$, prochází právě jedna integrální křivka. Bodem $\binom{0}{0}$ jich prochází nekonečně mnoho. Ostatními body na přímce $x = 0$ neprochází žádná.

2.4 Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 2.15. Funkce $F = F(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **homogenní stupně** k, pokud platí

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big)\Big(F(tx_1, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, \dots, x_n)\Big), \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 2.16.

1. $F(x, y) = x^2+y^2-xy$. Protože $F(tx, ty) = t^2x^2+t^2y^2-t^2xy = t^2F(x, y)$, je F homogenní stupně 2.
2. $F(x, y, z) = x + y - z$ je homogenní stupně 1 (lineární funkce jsou homogenní stupně 1 přímo z definice).
3. $F(x, y) = \dfrac{x^2 - xy}{y^2 - 4x^2}$, pro $y^2 - 4x^2 \neq 0$ je homogenní stupně 0.
4. $F(x, y) = x^2 - y$ není homogenní.
5. $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (tj. eukleidovská norma v $\mathbb{R}^2$). Potom $F(tx, ty) = |t|\, F(x, y)$ (což je definiční vlastnost normy). V tomto případě se také říká, že F je pozitivně homogenní stupně 1. Pokud bychom v definici 2.15 připouštěli pouze $t > 0$, mohli bychom říct, že F je homogenní stupně 1.
6. $F(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$. Potom $F(tx, ty) = \sqrt{|t|}F(x, y)$ a F je pozitivně homogenní stupně 1/2.
7. $F(x, y) = \sqrt{x}$, pro $x > 0$. F je homogenní stupně 1/2 pro $t > 0$.

Definice 2.17. Nechť $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ jsou homogenní funkce stupně k (na průniku svých definičních oborů, který budiž neprázdný). Pak diferenciální rovnice tvaru

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{2.9}$$

se nazývá **homogenní diferenciální rovnice stupně** k.

POZNÁMKA 2.18 (**Formální postup**). Rovnici typu (2.9) pomáhá řešit substituce „$y = xu$“, kde u je nová funkce. Chceme tedy provést záměnu proměnných (funkcionální úprava). Za tímto účelem definujeme zobrazení Φ, které nám právě přechod $(x, y) \leftrightarrow (t, u)$ umožní. Na zobrazení Φ přitom klademe požadavek, aby bylo regulární a dostatečně diferencovatelné. Nápověda pro správné zavedení zobrazení Φ je právě ve vztahu „$y = xu$“. Položme tedy $x = t$ a $y = tu$ a potom zřejmě můžeme psát

$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & t \end{pmatrix} \implies \det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = t.$$

Tj. zobrazení Φ je regulární právě tehdy, když $t \neq 0$.

Abychom propojili funkční závislost $y = y(x) \leftrightarrow u = u(t)$ sestavíme základní funkční identitu
$$y\big(x(t)\big) = tu(t),$$
kterou lze derivovat podle proměnné t. Levá strana pak bude $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y(x(t)\big) = y'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t)$. Pravá strana bude mít tvar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(tu(t)\big) = u(t) + t\dot{u}(t)$. Dostaneme se tedy ke vztahu
$$y'(t) = u(t) + t\dot{u}(t),$$
který dosadíme do rovnice (2.9). Tím dojdeme ke vztahu
$$P\big(t, tu(t)\big) + Q\big(t, tu(t)\big)\big(u(t) + t\dot{u}(t)\big) = 0.$$
Z homogenity funkcí P a Q plyne
$$t^k\Big[P\big(1, u(t)\big) + Q\big(1, u(t)\big)\big(u(t) + t\dot{u}(t)\big)\Big] = 0.$$
Protože předpokládáme $t \neq 0$ (např. kvůli regularitě Φ), můžeme rovnici vykrátit výrazem t^k a po snadné úprave dostaneme
$$\Big[P\big(1, u(t)\big) + Q\big(1, u(t)\big)u(t)\Big] + tQ\big(1, u(t)\big)\dot{u}(t) = 0, \tag{2.10}$$
což je separovatelná rovnice v proměnných t a u.

Vztah mezi řešeními rovnice (2.9) a (2.10) nám dává následující věta.

Věta 2.19. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$ je otevřená množina. Je-li $u = u(t)$ řešení rovnice (2.10), pak $y(x) = xu(x)$ je řešení rovnice (2.9) na M.*

Je-li $y = y(x)$ řešení rovnice (2.9), pak $u = u(t)$, kde $u(t) = \frac{1}{t}y(t)$, je řešení rovnice (2.10).

Důkaz. Viz předchozí poznámka. V obou směrech použita regulární substituce $t = x$, $tu = y$ pro $t \in M$. V prvním případě přejdeme od (2.10) k (2.9) vynásobení nenulovým číslem t^k. Při opačném směru budeme číslem t^k dělit. □

Příklad 2.20. Řešme rovnici
$$y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) - xy' = 0. \tag{2.11}$$

Zde zřejmě $P(x, y) = y\,(1 + \ln(y/x))$ a $Q(x, y) = -x$. Snadno se přesvědčíme, že P i Q jsou homogenní stupně 1. Ve funkci P se vyskytuje zlomek a logaritmus, což omezuje její definiční obor na množinu $D_P = \left\{\binom{x}{y} \mid y/x > 0\right\}$. Abychom vyhověli podmínce $y/x > 0$, omezujeme se na I. a III. kvadrant $\mathbb{R}^2$.

Jak víme z poznámky 2.18, homogenní rovnice řešíme substitucí
$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix},$$
která je regulární pro $t \neq 0$ (tato podmínka je vzhledem k D_P automaticky splněna). Po dosazení dostaneme
$$tu\left(1 + \ln\frac{tu}{t}\right) - t(u + t\dot{u}) = 0,$$

odkud po úpravě obdržíme

$$u \ln u - t\dot{u} = 0, \tag{2.12}$$

což je separovatelná rovnice.

Rovnici (2.12) úpravíme za předpokladu $t \neq 0$, $u \neq 0$ a $u \neq 1$ do tvaru

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{u \ln u}\dot{u} = 0. \tag{2.13}$$

Předpoklad $t \neq 0$ je v našem případě automaticky splněn a dělení rovnice výrazem t tedy bylo ekvivalentní úpravou. Dělení výrazem $u \ln u$ ovšem ekvivalentní úpravou nebylo. Funkce $u(t) \equiv 0$ zřejmě nevyhovuje (kvůli logaritmu), a proto neřeší rovnici (2.12). Funkce $u(t) \equiv 1$ ale rovnici (2.12) vyhovuje.

Řešení rovnice (2.13) jsou diferencovatelné funkce, které vyhovují rovnici

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u \ln u} = \ln C, \qquad \text{kde } C > 0,$$

z níž po integraci dostaneme

$$\ln|t| - \ln|\ln u(t)| = \ln C.$$

Odlogaritmováním tedy obdržíme vztah

$$|t| = C\,|\ln u(t)|\,.$$

Snadno si rozmyslíme, že pokud řešení zapíšeme ve tvaru

$$u(t) = \mathrm{e}^{Dt}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R},\ t \neq 0,$$

postihli jsme tím všechna řešení rovnice (2.12) včetně řešení $u(t) \equiv 1$ pro volbu $D = 0$. Všechna řešení původní rovnice (2.11) lze tedy zapsat ve tvaru

$$y(x) = x\mathrm{e}^{Dx}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Poznámka 2.21 (**Kvazihomogenní rovnice**). Funkci $F = F(x, y)$ nazvu **kvazihomogenní funkcí**, pokud platí

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\Big)\Big(F(t^{\alpha}x, t^{\beta}y) = t^{\beta-\alpha}F(x, y)\Big), \quad \text{kde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Rovnici tvaru

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

kde $P = P(x, y), Q = Q(x, y)$ jsou kvazihomogenní funkce se stejnými exponenty α, β, nazvu **kvazihomogenní diferenciální rovnicí**.

Řešení: Pokud $\beta \neq 0$, pak lze pomocí substituce $y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}u$ rovnici převést na rovnici separovatelnou. Existence a jednoznačnost řešení bude mimo body $x = 0$ zaručena větou analogickou 2.19.

2.5 Diferenciální rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Poznámka 2.22. Řešíme rovnici ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \tag{2.14}$$

kde f je spojitá funkce (na nějakém intervalu), $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ jsou reálné konstanty. Pro rovnici v tomto tvaru nemáme žádné zvláštní pojmenování.

Poznámka 2.23 (**Formální postup**). Při řešení diferenciální rovnice (2.14) rozlišíme následující případy:

1. Nechť $a = b = \alpha = \beta = 0$. Potom rovnice (2.14) je tvaru

$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)$$

   a řešením je zřejmě

$$y(x) = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

2. Nechť $b = \beta = 0$. Pak z (2.14) máme ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right),$$

   což je již separovaná rovnice. Řešením tedy je

$$y(x) = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)\mathrm{d}x.$$

3. Nechť $c = \gamma = 0$. Potom z (2.14) dostaneme

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$

   což je vlastně homogenní diferenciální rovnice. To snadno ověříme, srovnáme-li tuto rovnici s (2.9). Zjistíme

$$P(x,y) = -f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right) \qquad \text{a} \qquad Q(x,y) = 1$$

   a tedy

$$P(tx,ty) = -f\left(\frac{atx+bty}{\alpha tx+\beta ty}\right) = -f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right) = t^0 P(x,y).$$

   Vidíme, že funkce P i Q jsou homogenní stupně 0. Naši rovnici řešíme postupem z odstavce 2.4.

4. Nechť $b^2 + \beta^2 \neq 0$ a $D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$.

a) Nechť navíc $b \neq 0$. Potom z $D = a\beta - \alpha b = 0$ plyne $\alpha = \beta a/b$ a rovnici (2.14) lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}\right). \tag{2.15}$$

Poznamenejme, že funkce $z(x) = ax + by(x)$ má stejnou diferencovatelnost jako funkce $y(x)$. Dalším krokem řešení je provedení substituce $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definované následujícím předpisem

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax + by \end{pmatrix}.$$

Transformace Φ je zřejmě regulární, protože

$$\Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že $\det \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, což znamená regularitu Φ.

Naše základní funkční identita je $u(t) = at + by(t)$ a její derivace je $\dot{u}(t) = a + by'(t)$ ($y = y(x)$ derivujeme podle t jako složenou funkci). Touto substitucí převedeme naši rovnici do tvaru

$$\frac{1}{b}(\dot{u}(t) - a) = f\left(\frac{u(t) + c}{\frac{\beta}{b}u(t) + \gamma}\right), \tag{2.16}$$

což je diferenciální rovnice separovatelná.

Můžeme tedy konstatovat, že každému řešení $y(x)$ rovnice (2.15) odpovídá řešení $u(t) = at + by(t)$ rovnice (2.16). Snadno se dokáže i opačné tvrzení, že ke každému řešení $u(t)$ rovnice (2.16), existuje řešení $y(x)$ rovnice (2.15) takové, že $u(x) = ax + by(x)$.

b) Nechť nyní $b = 0$. Zřejmě $\left(b = 0 \wedge b^2 + \beta^2 \neq 0\right) \Rightarrow (\beta \neq 0)$. Potom z $D = 0$ dostaneme $a\beta = 0$, a tedy $a = 0$. Nyní je zřejmé, že $ax + by = 0$ a naše rovnice přejde do tvaru

$$y' = f\left(\frac{c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

Podobně jako v předchozím případě, použijeme regulární substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha x + \beta y \end{pmatrix}.$$

A dále pokračujeme analogicky jako v předchozím případě.

5. Nechť $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$. Potom soustava

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + c &= 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

má jednoznačně určené řešení. Lineární transformace $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

je zřejmě regulární. Základní funční identita je $y(x) = y_0 + u(x - x_0)$ a její derivace je $y'(x) = \dot{u}(x - x_0)$. Snadno nahlédneme, že platí

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) &= \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0), \\ ax + by + c = ax + by + c - \underbrace{(ax_0 + by_0 + c)}_{=0} &= a\underbrace{(x - x_0)}_{=t} + b\underbrace{(y - y_0)}_{=u}. \end{aligned}$$

Tím jsme naši rovnici převedli do tvaru

$$\dot{u}(t) = f\left(\frac{at + bu}{\alpha t + \beta u}\right). \tag{2.17}$$

Řešení rovnice v tomto tvaru jsme již provedli v případě (3). Snadno ověříme dosazením, že pokud $u(t)$ řeší (2.17), pak $y(x) = y_0 + u(x - x_0)$ řeší rovnici (2.14). A naopak, je-li $y(x)$ řešením rovnice (2.14), pak funkce $u(t) = -y_0 + y(x_0 + t)$ řeší rovnici (2.17).

Příklad 2.24. Mějme rovnici

$$y' = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2. \tag{2.18}$$

Rovnice je typu $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, kde $f(s) = 2s^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = -1$. Snadno si rozmyslíme, že se jedná o případ 5.

Soustavě lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0x_0 + 1y_0 + 2 &= 0 \\ 1x_0 + 1y_0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

vyhovuje řešení $(x_0, y_0) = (3, -2)$. Provádíme tedy regulární substituci $t = x - 3$ a $u = y + 2$. Tím se dostaneme k homogenní rovnici stupně 0

$$\dot{u} = 2\left(\frac{u}{t + u}\right)^2. \tag{2.19}$$

Porovnáním s (2.9) zjistíme, že $P(t, u) = -2\left(\frac{u}{t+u}\right)^2$ a $Q(t, u) = 1$. Homogenní rovnici řešíme substitucí typu „$u = tw$“. Zvolíme tedy regulární substituci $\Phi : (s, w) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi \begin{pmatrix} s \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ sw \end{pmatrix}.$$

Potom zřejmě platí $\dot{u}(s) = w + s\dot{w}(s)$ a tedy

$$w + s\dot{w} = 2\left(\frac{sw}{s + sw}\right)^2.$$

Tuto rovnici snadno upravíme do tvaru

$$s\dot{w} = -\frac{w(1+w^2)}{(1+w)^2}. \tag{2.20}$$

Jedná se tedy o separovatelnou rovnici.

Předpokládejme, že $s \neq 0$ a $w \neq 0$. Potom

$$\frac{1}{s} + \frac{(1+w)^2}{w(1+w^2)}\dot{w} = 0, \tag{2.21}$$

z čehož plyne

$$\ln|s| + \ln|w| + 2\operatorname{arctg} w = \ln C, \qquad \text{kde } C > 0.$$

Odlogaritmováním této rovnice dostaneme

$$|w(s)| \exp\left(2\operatorname{arctg} w(s)\right) = \frac{C}{|s|}, \qquad \text{kde } C > 0, \tag{2.22}$$

což je implicitní zápis funkce $w(s)$. Tato funkce, je-li diferencovatelná, řeší (2.21) pro $s \neq 0$.

Protože jsme provedli neekvivalentní úpravu, je třeba ještě diskutovat řešení rovnice (2.20). Požadovali jsme, aby $w \neq 0$. Pak funkce $w(s) \equiv 0$ řeší (2.20) pro všechna $s \in \mathbb{R}$, což snadno ověříme dosazením. Toto řešení lze postihnout zápisem (2.22), připustíme-li v něm navíc $C = 0$. Pokud v (2.22) připustíme také $C < 0$, zbavíme se absolutních hodnot. Můžeme konstatovat, že diferencovatelné funkce $w(s)$, které řeší rovnici

$$w(s) \exp(2\operatorname{arctg} w(s)) = \frac{C}{s}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R},$$

jsou řešením rovnice (2.20) pro $s \neq 0$.

Po dosazení původních proměnných obdržíme implicitní zápis funkce $y = y(x)$, která řeší původní rovnici (2.18) (je-li diferencovatelná)

$$(y(x)+2)\exp\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)+2}{x-3}\right)\right) = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor funkce y je zřejmě $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. Snadno si rozmyslíme, že tento zápis zahrnuje všechna nalezená řešení, včetně konstantního řešení $y(x) \equiv -2$, které odpovídá řešení $w(s) \equiv 0$ pro volbu $C = 0$.

2.6 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 2.25. Nechť $p = p(x)$, $q = q(x)$ jsou spojité. Pak rovnici ve tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.23}$$

nazýváme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu**.

Pokud $q(x) \equiv 0$, pak (2.23) nazveme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu bez pravé strany** a má tvar

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2.24}$$

Pokud $q(x) \not\equiv 0$, pak (2.23) nazveme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou**.

Poznámka 2.26 (**Formální postup**, rovnice bez pravé strany). Rovnice (2.24) má triviální řešení $y(x) \equiv 0$. Navíc je separovatelná a lze ji řešit postupem ze sekce 2.3. Její řešení je implicitně dáno rovnicí

$$\int p(x)\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C, \quad \text{tj. po integraci} \quad \int p(x)\mathrm{d}x + \ln|y(x)| = C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Odlogaritmováním poslední rovnosti dostaneme vztah $|y(x)| \exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right) = D$, kde $D = \mathrm{e}^C > 0$. Snadno si rozmyslíme, že jednotný zápis řešení, zahrnující všechny uvedené alternativy je následující

$$y(x) = D\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R}.$$

Uvedené řešení nazýváme *obecné řešení rovnice* (2.24).

Věta 2.27. *Nechť $p = p(x)$ je spojitá na (a, b). Pak pro každé $\binom{x_0}{y_0} \in (a, b) \times \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ úlohy*

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

na (a, b).

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

(I) Nejprve dokážeme existenci (viz také poznámka 2.26). Uvažme případ $y_0 = 0$. Potom řešení má zřejmě tvar $y(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$. Nechť dále $y_0 \neq 0$. Pak řešením je funkce $y(x) = D \exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$, pro každé $x \in (a, b)$, $D \in \mathbb{R}$.

Konstantu D je třeba určit. Uvažme proto počáteční podmínku ve tvaru $y(x_0) = y_0$. Potom zřejmě musí platit $D = y_0 \exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x|_{x=x_0}\right\}$. Dostáváme tak výsledné řešení ve tvaru

$$y(x) = y_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}.$$

(II) Nyní dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že jsme podle předchozí části důkazu a podle poznámky 2.26 získali řešení $y_1(x) = y_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}$ (separací proměnných). Předpokládejme dále, že existuje nějaké řešení y_2. O těchto řešeních ukážeme, že jsou shodná. Protože y_1 a y_2 řeší úlohu (2.25), platí

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)y_1 &= 0 \\ y_1(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} y_2' + p(x)y_2 &= 0 \\ y_2(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Dále definujeme funkci $u = u(x)$ následujícím předpisem

$$u(x) = y_2(x) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},$$

zkoumejme její chování pomocí první derivace.

$$\begin{aligned} u'(x) &= y_2'(x)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} + y_2(x)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} p(x) = \\ &= \underbrace{(y_2'(x) + y_2(x)p(x))}_{=0}\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = 0. \end{aligned}$$

To ale znamená, že u je konstantní (tzn. $(\exists C \in \mathbb{R})\,(\forall x \in (a,b))\,(u(x) = C)$). Konstantu C lze přitom určit z počátečních podmínek $u(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, a tedy $C = y_0$. Odtud zřejmě dostáváme

$$y_2(x)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = y_0,$$

což po zřejmé úpravě dává vztah

$$y_2(x) = y_0\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Pro libovolné dvě řešení y_1 a y_2 tedy platí $y_1(x) = y_2(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$, což už znamená jednoznačnost. $\square$

Poznámka 2.28. Z důkazu předchozí věty vyplývá, že počáteční podmínce $y(x_0) = 0$ vždy odpovídá řešení $y(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Poznámka 2.29 (**Formální postup**, rovnice s pravou stranou). Pro řešení rovnice s pravou stranou se používá **metoda variace konstanty**. Aplikace zmíněné metody na tuto úlohu spočívá v tom, že ve vztahu pro obecné řešení rovnice (2.24) předpokládáme, že D již není konstanta, ale je funkcí proměnné x, tj. $D = D(x)$. Řešení pak předpokládáme ve tvaru

$$y(x) = D(x)\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

Dosadíme-li předpokládaný tvar řešení do rovnice (2.23) dostaneme

$$D'(x)\exp\{\,\cdots\,\} + D(x)\exp\{\,\cdots\,\}(-p(x)) + p(x)D(x)\exp\{\,\cdots\,\} = q(x).$$

Druhý a třetí sčítanec na levé straně se navzájem vyruší a dostaneme vztah pro $D'(x)$

$$D'(x) = q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\},$$

odkud integrací určíme $D(x)$.

Obecné řešení rovnice s pravou stranou potom je

$$y(x) = \left[\int q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]\cdot\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}. \tag{2.26}$$

Uvědomme si, že v části $\left[\int q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]$ je schována i integrační konstanta (jedná se o neurčitý integrál) a je zde tedy i zabudováno řešení rovnice bez pravé strany.

Poznámka 2.30. Poznamenejme ještě, že řešení rovnice s pravou stranou se často zapisuje ve tvaru součtu obecného řešení rovnice bez pravé strany a partikulárního řešení rovnice s pravou stranou (viz řešení lineárních rovnic [4]).

Věta 2.31. *Nechť $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b). Pak pro každé $\binom{x_0}{y_0} \in (a, b) \times \mathbb{R}$ existuje právě 1 řešení úlohy*

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

na (a, b).

Důkaz. Podobně jako v předchozí větě, je i zde třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

(I) Dokažme existenci za pomoci poznámky 2.29. Pomocí separace proměnných a metody variace konstanty navrhneme řešení úlohy (2.27) ve tvaru

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(\xi) \exp\left\{ \int_{x_0}^{\xi} p(\tau) \mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}\xi + D \right) \exp\left\{ - \int_{x_0}^{x} p(\xi) \mathrm{d}\xi \right\}.$$

Z tohoto vztahu ihned plyne $y(x_0) = D$ a vzhledem k počáteční podmínce zřejmě $D = y_0$. Funkce $y = y(x)$ řeší úlohu (2.27).

(II) Při dokazování jednoznačnosti se postupuje obvyklým způsobem. Předpokládáme, že jsme našli řešení y_1 ve tvaru z předchozí části důkazu. Dále předpokládáme, že máme nějaké další řešení y_2, o němž ukážeme, že musí být shodné s řešením y_1, čímž bude jednoznačnost dokázána. Pro funkce y_1 a y_2 tedy platí

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)y_1 &= q(x) \\ y_1(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} y_2' + p(x)y_2 &= q(x) \\ y_2(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Odečtením příslušných rovnic získáme

$$\begin{aligned} \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\text{ozn. } z}{}' + p(x)(y_1 - y_2) &= 0, \\ (y_1 - y_2)(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

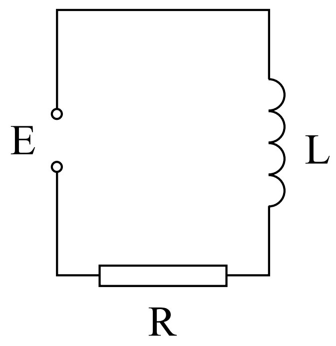
Označme $z = y_1 - y_2$. Pro takto definovanou funkci z tedy dostáváme

$$\begin{aligned} z' + p(x)z &= 0, \\ z(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Pro funkci z tedy řešíme úlohu ve tvaru (2.25). Tato úloha však má právě jedno řešení, a to $z(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$. Odtud $y_1(x) = y_2(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Tím je však jednoznačnost dokázána. □

Příklad 2.32. **Elektrický obvod**.
Mějmě RL obvod (viz obr. 2.2). Označme E napětí, R elektrický odpor, L indukčnost a J elektrický proud. Předpokládejme, že průběh připojeného napětí je dán vztahem

$$E(t) = E_0 \sin \omega t,$$



Obrázek 2.2: RL obvod.

a nechť počáteční stav proudu v čase $t_0 = 0$ je $J(0) = J_0$.

Z Kirchhoffových zákonů dostáváme pro tento obvod rovnici

$$L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ = E(t).$$

Při řešení této diferenciální rovnice postupujeme tak, že nejprve najdeme řešení příslušné rovnice bez pravé strany (separací proměnných) a poté metodou variace konstanty najdeme obecné řešení rovnice s pravou stranou. Na závěr je třeba určit integrační konstantu z počáteční podmínky.

Řešení rovnice bez pravé strany je zřejmě

$$J(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \qquad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro použití metody variace konstanty předpokládáme, že $\alpha = \alpha(t)$ a tedy, že řešení rovnice bez pravé strany je ve tvaru

$$J(t) = \alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Toto řešení dosadíme do původní diferenciální rovnice (s pravou stranou), abychom dostali vztah

$$L\left(\alpha'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}\right)\right) + R\alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = E(t),$$

odkud po úpravě

$$\alpha'(t) = \frac{1}{L}E(t)\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L}\int\limits_0^t \sin\omega\tau\ \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\tau}\mathrm{d}\tau = \underbrace{\cdots}_{\text{per partes}} = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right].$$

Dospěli jsme tedy k řešení

$$J(t) = \underbrace{\frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right]}_{\text{partikulární řešení}} + D\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

kde je ještě třeba určit integrační konstantu D z počátečních podmínek

$$J(0) = J_0 = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega) + D.$$

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ &= E_0 \sin \omega t \\ J(0) &= J_0 \end{aligned}$$

tedy je

$$J(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t\right] + \left[J_0 + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right] \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Položíme-li $R = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cos \gamma$ a $L = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \sin \gamma$, lze psát

$$R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \sin(\omega t - \gamma),$$

odkud je patrné, že přiložené napětí vybudí v RL obvodu proud se stejnou frekvencí a s fázovým zpožděním γ.

2.7 Bernoulliho diferenciální rovnice

Definice 2.33. Nechť $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b), $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pak rovnice ve tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \tag{2.28}$$

se nazývá **Bernoulliho**[1] **diferenciální rovnice 1. řádu**.

Poznámka 2.34. V definici jsme zdůraznili, že $\alpha \neq 0, 1$. Pro $\alpha = 0$ je rovnice (2.28) lineární diferenciální rovnice s pravou stranou. Pro $\alpha = 1$ dostáváme lineární diferenciální rovnici bez pravé strany. Tyto rovnice byly řešeny v předchozím odstavci. Stejně tak bychom zřejmě mohli požadovat, aby $q(x) \not\equiv 0$ na (a, b).

Poznámka 2.35. Pro $\alpha > 0$ připouštíme také $y(x) = 0$. Funkce $y(x) \equiv 0$ je v tomto případě řešením rovnice (2.28) na (a, b).

Poznámka 2.36 (**Formální postup**). Nechť $y \neq 0$ (vzhledem k předchozím poznámkám si tento předpoklad zřejmě můžeme dovolit). Vydělením výrazem y^α převedeme rovnici (2.28) do tvaru

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Provedeme substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Požadujeme, aby substituce Φ byla regulární neboli požadujeme, aby $\det \Phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$.

$$\Phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)y^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

[1] **Jakob Bernoulli** (1654–1705), švýcarský matematik.

Protože od začátku předpokládáme, že $\alpha \neq 1$ a $y \neq 0$, je $\det \Phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zřejmě nenulový a transformace Φ je proto regulární.

Základní funkční identita je $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$. Zderivujeme základní identitu podle parametru x a dostaneme $\dot{u}(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$. Z těchto vztahů lze dosadit do rovnice (2.28) za $y^{1-\alpha}(x)$ a $y^{-\alpha}(x)y'(x)$, čímž dostaneme

$$\frac{1}{1-\alpha}\dot{u}(t) + p(t)u(t) = q(t),$$

odkud po snadné úpravě

$$\dot{u}(t) + (1-\alpha)p(t)u(t) = (1-\alpha)q(t). \tag{2.29}$$

To je ovšem lineární diferenciální rovnice s pravou stranou (typu (2.23)).

Věta 2.37. *Nechť $\alpha \neq 0, 1$, $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b), $q(x) \not\equiv 0$ na (a, b).*

(I) Nechť $u = u(t)$ řeší rovnici (2.29). Pak každá funkce $y = y(x)$ daná na $I \subset (a, b)$ vztahem $y^{1-\alpha}(x) = u(x)$, $y(x) \neq 0$ na I, a mající derivaci y' na I, řeší rovnici (2.28) na I.

(II) Pokud $y = y(x)$ je řešení rovnice (2.28) na $I \subset (a, b)$ takové, že $y(x) \neq 0$ na I, pak funkce $u(t) = y^{1-\alpha}(t)$ je na intervalu I řešení rovnice (2.29).

Důkaz. Věta je důsledkem předchozí poznámky a existenční věty pro (2.29). □

Poznámka 2.38. Případná platnost řešení vně I (v rámci (a, b)) se ověřuje na základě konkrétní podoby rovnice (2.28).

Příklad 2.39. Mějme rovnici

$$xy' - y = x^2y^{-1},$$

která je ještě v o něco obecnějším tvaru než rovnice (2.28) (y' je násobeno proměnnou x). Jinak rovnice opovídá tvarem rovnici (2.28), kde $\alpha = -1$. Odtud ovšem plyne, že $y(x) \equiv 0$ nemůže být řešením této rovnice. Na řešení máme podmínku $y(x) \neq 0$ pro všechna x z relevantního rozsahu, který eventuelně najdeme během řešení rovnice.

Násobení rovnice závisle proměnnou y vede na tvar

$$xyy' - y^2 = x^2.$$

Provedeme regulární substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (u, t)$ takovou, že $t = x$ a $u = y^2$. Základní funkční identita je potom $u(x) = y^2(x)$ a pro derivaci dostáváme $\dot{u}(x) = 2y(x)y'(x)$. Po dosazení do původní rovnice dostáváme lineární diferenciální rovnici s pravou stranou

$$\frac{t}{2}\dot{u}(t) - u(t) = t^2,$$

kterou řešíme standardním postupem z odstavce 2.6, tj. separací a metodou variace konstanty.

Pro rovnici bez pravé strany dostáváme

$$\frac{t}{2}\dot{u}(t) - u(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{u}}{u} = \frac{2}{t}.$$

Funkce u pak zřejmě musí vyhovovat rovnici $\ln|u| = 2\ln|t| + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ a tedy

$$u(t) = Dt^2, \qquad \text{kde } D \neq 0.$$

Řešení rovnice s pravou stranou pak předpokládáme ve tvaru

$$u(t) = D(t)t^2.$$

Řešení dosadíme do příslušné rovnice, čímž obdržíme rovnost

$$\frac{t}{2}(\dot{D}(t)t^2 + D(t)2t) - D(t)t^2 = t^2.$$

Pro derivaci $\dot{D}(t)$ jsme tedy dostali $\dot{D}(t) = 2/t$. Integrace právě uvedené rovnosti vede na

$$D(t) = 2\ln|t| + E, \qquad \text{kde } E \in \mathbb{R}.$$

Potom zřejmě $u(t) = (\ln t^2 + E)t^2$ a po zpětném dosazení

$$y(x) = |x|\sqrt{\ln x^2 + E},$$

kde definiční obor y je dán konstantou E a bodem $x = 0$. Zřejmě totiž $x \neq 0$, protože v bodě $x = 0$ nemá funkce y derivaci a zároveň požadavek $y(x) \neq 0$ vede na podmínku $\ln x^2 + E > 0$.

2.8 Riccatiho diferenciální rovnice

Definice 2.40. Nechť funkce $a_0 = a_0(x)$, $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$ jsou spojité na (a, b). Pak rovnice ve tvaru

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \qquad \text{na } (a, b) \tag{2.30}$$

se nazývá **Riccatiho[2] diferenciální rovnice 1. řádu**.

Poznámka 2.41. Pro $a_0(x) \equiv 0$ je (2.30) Bernoulliho rovnice (s $\alpha = 2$). Pro $a_2(x) \equiv 0$ je (2.30) lineární diferenciální rovnice s pravou stranou.

Poznámka 2.42. Z pozdější existenční teorie vyplyne, že počáteční úloha

$$\begin{aligned} y' &= a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

má jednoznačné řešení.

Riccatiho rovnice je analyticky řešitelná v případech, které uvedeme dále.

Poznámka 2.43. **Pokus o úpravy rovnice (2.30).**

1. **Záměna nezávisle proměnné.**

   Provedeme transformaci $\Phi : (t, u) \mapsto (x, y)$ definovanou vztahem

$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix}.$$

[2] **Jacopo Francesco Riccati** (1676–1754), italský matematik.

Za účelem ověření regularity Φ sestavíme matici derivace Φ v bodě (t,u) a spočteme její determinant

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\varphi(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \dot\varphi(t)$$

Vidíme, že uvažovaná transformace je regulární právě tehdy, když $\dot\varphi(t) \neq 0$.

Sestavíme základní funkční identitu $y\big(\varphi(t)\big) = u(t)$, odkud $y'\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t) = \dot u(t)$. Uvedené vztahy dosadíme do (2.30) a po vynásobení $\dot\varphi(t)$ dostaneme

$$\dot u(t) = \dot\varphi(t)a_0\big(\varphi(t)\big) + \dot\varphi(t)a_1\big(\varphi(t)\big)u(t) + \dot\varphi(t)a_2\big(\varphi(t)\big)u^2(t),$$

což je opět rovnice ve tvaru (2.30). Vidíme tedy, že libovolné přeškálování nezávisle proměnné vede opět k Riccatiho rovnici.

2. **Substituce závisle proměnné.**

   Zavedeme substituci

$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou spojité funkce proměnné t, na které dále klademe požadavek

$$\begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

U transformace Φ je jako obvykle třeba ověřit regularitu. Matice derivace zobrazení Φ je

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right) & \frac{\alpha(\gamma u+\delta)-\gamma(\alpha u+\beta)}{(\gamma u+\delta)^2} \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne požadavek

$$\det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\gamma u+\delta) - \gamma(\alpha u+\beta)}{(\gamma u+\delta)^2} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma u+\delta)^2} \neq 0.$$

Základní funkční identita je

$$y(x) = \frac{\alpha(x)u(x)+\beta(x)}{\gamma(x)u(x)+\delta(x)}$$

a pro derivaci tedy dostaneme

$$\begin{aligned} y'(x) \quad = \quad & \frac{\big[\alpha'(x)u(x)+\alpha(x)u'(x)+\beta'(x)\big]\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]}{\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]^2} - \\ & - \frac{\big[\alpha(x)u(x)+\beta(x)\big]\big[\gamma'(x)u(x)+\gamma(x)u'(x)+\delta'(x)\big]}{\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]^2}. \end{aligned}$$

Z posledních dvou vztahů dosadíme do (2.30) a pro pravou stranu rovnice obdržíme vztah

$$\text{R.H.S.} = a_0(t) + a_1(t)\frac{\alpha(t)u(t)+\beta(t)}{\gamma(t)u(t)+\delta(t)} + a_2(t)\left(\frac{\alpha(t)u(t)+\beta(t)}{\gamma(t)u(t)+\delta(t)}\right)^2.$$

Po vynásobení celé rovnice nenulovým výrazem $(\gamma u+\delta)^2$ a zřejmé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}(\alpha\delta-\gamma\beta)u' &= (-\beta'\delta+\beta\delta'+a_0\delta^2+a_1\beta\delta+a_2\beta^2)+\\ &+(-\alpha'\delta+\beta\gamma'-\beta'\gamma+\alpha\delta'+2a_0\gamma\delta+a_1\alpha\delta+a_1\beta\gamma+2a_2\alpha\beta)u+\\ &+(-\alpha'\gamma+\alpha\gamma'+a_0\gamma^2+a_1\alpha\gamma+a_2\alpha^2)u^2.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu $\alpha\delta-\gamma\beta\neq 0$, je výsledná rovnice opět ve tvaru (2.30).

3. **Kanonický tvar Riccatiho rovnice.**

Definice 2.44. Rovnice (2.30) má **kanonický tvar**, právě když

$$\Big(\forall x\in(a,b)\Big)\Big(a_2(x)=\pm 1\wedge a_1(x)\equiv 0\Big).$$

Převod rovnice (2.30) do kanonického tvaru provedeme pomocí substituce

$$\Phi\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\\omega(t)u+\alpha(t)\end{pmatrix}.$$

Protože

$$\Phi'\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\dot\omega(t)u+\dot\alpha(t)&\omega(t)\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow\qquad\det\Phi'\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\omega(t),$$

plyne z požadavku na regularitu Φ podmínka $\omega(t)\neq 0$.

Základní funkční identita je $y(x)=\omega(x)u(x)+\alpha(x)$, odkud pro derivaci dostaneme $y'(x)=\omega'(x)u(x)+\omega(x)u'(x)+\alpha'(x)$. Z těchto vztahů dosadíme do původní rovnice (2.30) a získáme vztahy

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \omega'(t)u(t)+\omega(t)u'(t)+\alpha'(t),\\ \text{R.H.S.} &= a_0(t)+a_1(t)\omega(t)u(t)+a_1(t)\alpha(t)+a_2(t)\omega^2(t)u^2(t)+\\ &+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)u(t)+a_2(t)\alpha^2(t).\end{aligned}$$

Po zřejmých úpravách pak dostaneme

$$\begin{aligned}u'(t) &= \frac{1}{\omega(t)}\Big(\big[a_0(t)+a_1(t)\alpha(t)+a_2(t)\alpha^2(t)-\alpha'(t)\big]+\\ &\quad+\big[a_1(t)\omega(t)+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)-\omega'(t)\big]u(t)+\\ &\quad+a_2(t)\omega^2(t)u^2(t)\Big).\end{aligned}$$

Při převodu do kanonického tvaru jsme podle definice požadovali splnění následujících dvou podmínek

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(t)}a_2(t)\omega^2(t) &= \pm 1,\\ a_1(t)\omega(t)+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)-\omega'(t) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud pro neznámé funkce $\omega(t)$ a $\alpha(t)$ plynou vztahy

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \pm\frac{1}{a_2(t)},\\ \alpha(t) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{a_1(t)}{a_2(t)} + \left(\frac{1}{a_2(t)}\right)'\right].\end{aligned}$$

Věta 2.45 (Řešení Riccatiho rovnice při znalosti jednoho řešení)**.** *Nechť $y_1 = y_1(x)$ je řešení (2.30) na (a,b). Pak ostatní řešení lze najít integrací (řešením) lineární rovnice s pravou stranou.*

Důkaz. Nechť funkce $y_1 = y_1(x)$ řeší rovnici (2.30) na (a,b). Hledáme nějaké jiné řešení $y \neq y_1$. Provedeme substituci $x = t$ a $u = 1/(y - y_1)$, tj.

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{y - y_1(x)} \end{pmatrix}.$$

Opět nás zajímá regularita této transformace. Proto sestavíme matici derivace Φ

$$\Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y_1'(x)}{(y-y_1(x))^2} & -\frac{1}{(y-y_1(x))^2} \end{pmatrix}.$$

Odtud zřejmě $\det \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\big(y - y_1(x)\big)^2} \neq 0$ a tedy transformace Φ je regulární.

Základní funkční identita je

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

a její derivací podle proměnné x dostaneme

$$y'(x) = y_1'(x) - \frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x).$$

Dosadíme-li z obou uvedených vztahů za y a y' v rovnici (2.30), dostaneme

$$y_1'(x) - \frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x) \quad = \quad a_0(x) + a_1(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u(x)}\right) + a_2(x)\left(y_1^2(x) + 2\frac{y_1(x)}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)}\right).$$

Při dalších úpravách poslední rovnosti si uvědomíme, že podle předpokladů platí $y_1'(x) = a_0(x) + a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_1^2(x)$. Rovněž také víme, že $u(x) \neq 0$ a lze tedy celou rovnost vynásobit výrazem $-u^2(x)$, čímž získáme

$$\dot{u}(x) = -a_1(x)u(x) - 2a_2(x)y_1(x)u(x) - a_2(x).$$

Odtud, po drobných úpravách a záměně $t = x$, vyplývá rovnost

$$\dot{u}(t) + \Big[a_1(t) + 2a_2(t)y_1(t)\Big]u(t) = -a_2(t)$$

Tato rovnice je lineární diferenciální s pravou stranou a lze ji řešit obvyklým postupem. Tím je ovšem věta dokázána. □

PŘÍKLAD 2.46. Řešme diferenciální rovnici

$$y' = 2x + x^3y - xy^2.$$

Jedná se zřejmě o Riccatiho rovnici pro $a_0(x) = 2x$, $a_1(x) = x^3$ a $a_2(x) = -x$. Můžeme si také všimnout, že funkce $y_1(x) = x^2$ řeší na $\mathbb{R}$ tuto rovnici. Potom lze postupovat podle důkazu předchozí věty a regulární substitucí $t = x$ a $u = 1/(y - y_1(x))$ převést rovnici do tvaru

$$\dot{u} - t^3u = t,$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou. Tu už umíme snadno vyřešit. Jejím řešením je

$$u(t) = \left[\int t \exp\left\{-\frac{t^4}{4}\right\} \mathrm{d}t + \alpha\right] \exp\left\{\frac{t^4}{4}\right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nyní stačí provést zpětnou substituci, čímž dostaneme

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{u(x)} = x^2 + \left[\int x \exp\left\{-\frac{x^4}{4}\right\} \mathrm{d}x + \alpha\right]^{-1} \exp\left\{-\frac{x^4}{4}\right\},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Nalezli jsme tedy jedno řešení $y_1(x) = x^2$ a všechna ostatní řešení jsme dostali ve tvaru $y(x)$.

Věta 2.47 (Převod na LDR 2. řádu)**.** *Nechť $a_0 = a_0(x)$, $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$ a $a_2'(x)$ jsou spojité na (a, b) a $a_2(x) \neq 0$.*

(I) Nechť $y = y(x)$ řeší (2.30). Pak funkce

$$u(x) = \exp\left\{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x\right\}$$

řeší rovnici

$$a_2(t)\ddot{u} - \Big[a_2'(t) + a_1(t)a_2(t)\Big]\dot{u} + a_0(t)a_2^2(t)u = 0 \tag{2.31}$$

na intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

(II) Nechť naopak $u = u(t)$ řeší (2.31) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$, $u(t) \neq 0$ $\forall t \in (\gamma, \delta)$. Pak funkce

$$y(x) = -\frac{\dot{u}(x)}{a_2(x)u(x)}$$

řeší původní rovnici (2.30) na intervalu (γ, δ).

Důkaz.

(I) Nechť $y = y(x)$ řeší (2.30). Provedeme funkcionální substituci ve tvaru

$$u(t) = \exp\left\{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x\Big|_{x=t}\right\}.$$

Uvedený vztah zároveň představuje funkční identitu. Abychom mohli dosadit do rovnice (2.30), musíme si z funkční identity vyjádřit y a y'. Zřejmě tedy

$$\dot{u}(t) = \Big[-a_2(t)y(t)\Big] \exp\left\{ - \int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x\Big|_{x=t} \right\},$$

a protože $a_2(t) \neq 0$ lze psát

$$y(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{a_2(t)} \underbrace{\exp\left\{ \int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x \right\}}_{=\frac{1}{u(t)}} = -\frac{\dot{u}(t)}{a_2(t)u(t)}.$$

Pro y' dostaneme

$$y'(t) = -\frac{\ddot{u}(t)a_2(t)u(t) - \dot{u}(t)a_2'(t)u(t) - \big(\dot{u}(t)\big)^2 a_2(t)}{\big(a_2(t)u(t)\big)^2}.$$

Vzhledem k tomu, že $a_2(t) \neq 0$ (podle předpokladu) a $u(t) \neq 0$ (u je exponenciela), lze rovnici (2.30) po dosazení za y a y' násobit výrazem $\big(a_2(t)u(t)\big)^2$. Po snadných úpravách pak dostáváme výslednou rovnost

$$a_2(t)\ddot{u}(t) - \Big[a_2'(t) + a_1(t)a_2(t)\Big]\dot{u}(t) + a_0(t)a_2^2(t)u(t) = 0.$$

Funkce $u = u(t)$ tedy řeší rovnici (2.31), což jsme chtěli dokázat.

(II) Nechť naopak $u = u(t)$ řeší rovnici (2.31) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$, $u(t) \neq 0$ $\forall t \in (\gamma, \delta)$. Funkce u řeší diferenciální rovnici 2. řádu a je tudíž dvakrát diferencovatelná. Položme

$$y(x) = -\frac{\dot{u}(x)}{a_2(x)u(x)}$$

a podle postupu v předchozí části důkazu zpětně snadno ověříme, že $y = y(x)$ řeší rovnici (2.30) na (γ, δ). □

Poznámka 2.48. **Speciální tvar Riccatiho rovnice** je

$$y' + ay^2 = bx^\alpha, \qquad \text{kde } a, b \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Pro následující volby parametrů umíme rovnici (2.32) řešit analyticky:

1. Nechť $\alpha = 0$. Potom je rovnice (2.32) separovatelná.
2. Nechť $\alpha = -2$. Potom má rovnice (2.32) tvar

$$y' + ay^2 = \frac{b}{x^2}.$$

Provedeme substituci $\Phi : (t, u) \mapsto (x, y)$, takovou, že $x = t$ a $y = 1/u$. Ověříme její regularitu

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/u^2 \end{pmatrix}.$$

Potom $\det \Phi' \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = -\frac{1}{u^2} \neq 0$, a tedy transformace je regulární.

Základní funkční identita má tvar

$$y(x) = \frac{1}{u(x)},$$

odkud

$$y'(x) = -\frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x).$$

Dosadíme do rovnice (2.32) za y a y' a po zřejmých úpravách dostáváme

$$\dot{u}(t) - a + b\frac{u^2(t)}{t^2} = 0.$$

Tato rovnice je ve tvaru (2.9), kde $P(t,u) = -a + bu^2/t^2$ a $Q(t,u) = 1$. Snadno ověříme, že se jedná o rovnici homogenní stupně 0.

3. Pro některé další hodnoty parametru α (které určíme později), lze s výhodou zavést substituci tvaru

$$y = \omega u + \delta,$$

kde $\omega = \omega(t)$ a $\delta = \delta(t)$ jsou zatím neznámé funkce. Už víme, že tato substituce převádí Riccatiho rovnici v jinou Riccatiho rovnici (viz poznámka 2.43). Budeme požadovat, aby tato nová Riccatiho rovnice byla opět ve speciálním tvaru (2.32). Regularitu navrhované substituce jsme již ověřili (poznámka 2.43). V tomto speciálním případě vede požadavek na regularitu k podmínce $\omega(t) \neq 0$.

Základní funkční vztah máme ve tvaru

$$y(t) = \omega(t)u(t) + \delta(t)$$

a pro derivaci y' platí

$$y'(t) = \dot{\omega}(t)u(t) + \omega(t)\dot{u}(t) + \dot{\delta}(t).$$

Po dosazení a úpravě původní rovnice (2.32) dostáváme

$$\omega\dot{u} + (\dot{\omega} + 2a\omega\delta)u + a\omega^2u^2 = bt^\alpha - \dot{\delta} - a\delta^2. \tag{2.33}$$

Má-li být uvedená rovnice opět ve tvaru (2.32), musí být zřejmě splněny podmínky

$$\begin{aligned} \dot{\omega} + 2a\omega\delta &= 0, \\ \dot{\delta} + a\delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tyto podmínky představují soustavu diferenciálních rovnic a funkce ω a δ musí být jejím řešením. Druhá rovnice je separovatelná a snadno ověříme, že jejím řešením je např. funkce $\delta(t) = 1/at$. Dosadíme-li nalezenou funkci δ do první rovnice, převedeme ji tím rovněž na rovnici separovatelnou a opět snadno ověříme, že funkce $\omega(t) = 1/t^2$ této rovnici vyhovuje.

Nyní jsme určili původně neznámé funkce ω a δ a naše substituce má tedy tvar

$$y = \frac{1}{t^2}u + \frac{1}{at}.$$

Pokračujeme v úpravách rovnice (2.33), kterou po dosazení za $\omega(t)$ a $\delta(t)$ a vynásobení nenulovým výrazem t^2 převedeme do tvaru

$$\dot{u} + \frac{a}{t^2}u^2 = bt^{\alpha+2}, \tag{2.34}$$

což je sice Riccatiho rovnice, ale stále není v požadovaném speciálním tvaru. Provedeme proto další substituci $\Phi : (t, u) \mapsto (s, w)$ definovanou vztahem

$$\Phi \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\alpha+3} \\ 1/u \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem vyšetříme regularitu transformace Φ. Tak zjistíme, že transformace Φ je regulární právě tehdy, když $(\alpha+3)t^{\alpha+2}/u^2 \neq 0$. Zřejmě tedy musí platit, že $\alpha \neq -3$, $t \neq 0$ (splnění této podmínky již ale máme zajištěno) a $u \neq 0$.

Základní funkční identita je

$$w\big(t^{\alpha+3}\big) = \frac{1}{u(t)}$$

a její derivací podle proměnné t získáme

$$w'\big(t^{\alpha+3}\big)(\alpha+3)t^{\alpha+2} = -\frac{1}{u^2(t)}\dot{u}(t).$$

Z posledních dvou vztahů vyjádříme $u(t)$ a $\dot{u}(t)$ a dosadíme do rovnice (2.34), čímž získáme

$$-\frac{1}{w^2}w'(\alpha+3)t^{\alpha+2} + \frac{a}{t^2}\frac{1}{w^2} = bt^{\alpha+2},$$

odkud po snadných úpravách získáme

$$w' + \frac{b}{\alpha+3}w^2 = \frac{a}{\alpha+3}t^{-\alpha-4}.$$

V poslední rovnici ještě přejdeme od t k s

$$w' + \frac{b}{\alpha+3}w^2 = \frac{a}{\alpha+3}s^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}. \tag{2.35}$$

Poslední rovnice již je v požadovaném speciálním tvaru (2.32). Můžeme si všimnout, že při transformaci proměnných se nám rovněž transformovaly koeficienty a a b, ale především exponent z α na $\alpha_1 = -(\alpha+4)/(\alpha+3)$.

Může se stát, že exponent α_1 je roven 0 nebo -2. Potom rovnici (2.35) umíme řešit. Pokud nenastane ani jeden z těchto případů, můžeme zopakovat předchozí postup, pomocí něhož dostaneme další exponent α_2. S tímto novým exponentem můžeme provést celou úvahu znovu. Cílem je odvodit přípustné hodnoty pro parametr α tak, aby po k krocích platilo, že $\alpha_k = 0$ nebo $\alpha_k = -2$. V těchto případech totiž umíme rovnici (2.32) po konečném počtu substitucí převést do tvaru, v němž ji umíme vyřešit. Za tím účelem nejdříve spočtěme

$$\alpha_1 + 2 = \frac{2\alpha + 6 - \alpha - 4}{\alpha+3} = \frac{\alpha+2}{\alpha+3}.$$

Z této rovnosti ovšem vyplývá, že požadavek $\alpha_1 = -2$ je splněn právě tehdy, když $\alpha = -2$. Úvahu lze zřejmě zobecnit i na α_k. V dalším se proto omezíme na požadavek $\alpha_k = 0$. Z předchozí rovnosti plyne

$$\frac{1}{\alpha_1 + 2} = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2} = 1 + \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Snadno si rozmyslíme, že po k krocích dojdeme ke vztahu

$$\frac{1}{\alpha_k + 2} = 1 + \frac{1}{\alpha_{k-1} + 2} = \cdots = k + \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Abychom odvodili podmínku na α položme $\alpha_k = 0$. Potom

$$\frac{1}{0 + 2} = k + \frac{1}{\alpha + 2},$$

odkud

$$\alpha = \frac{4k}{1 - 2k}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Věta 2.49. *Pro hodnoty $\alpha \in \{4k/(1-2k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ lze rovnici (2.32) transformovat na rovnici separovatelnou pomocí opakovaného použití těchto dvou substitucí:*

$$y = \frac{1}{t^2}u + \frac{1}{at}, \qquad x = t$$

a následně

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\alpha+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Viz předchozí poznámka. □

Poznámka 2.50. Ve skutečnosti lze řeši pro všechna $\alpha \in \{-4k/(1+2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (Vzniklo záměnou k na $-k$ v předchozí větě.) Pro k záporná provedu substituce podle předchozí věty, pro k kladná substituce inverzní. Pro ostatní α je dokázáno, že rovnice (2.32) nemá řešení v elementárních funkcích.

2.9 Diferenciální rovnice ve tvaru $x = f(y')$ a $y = g(y')$

Poznámka 2.51. Řešíme-li obecnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$F(x, y, y') = 0,$$

obvykle se snažíme ji „rozřešit“ vzhledem k y'. To ale není vždy možné. V některých případech se ukazuje výhodné vyřešit tuto rovnici vzhledem k x nebo k y. Ve zvláštních případech se nám pak může podařit převést tuto rovnici do tvaru

$$x = f(y') \tag{2.36}$$

nebo

$$y = g(y'). \tag{2.37}$$

Poznámka 2.52 (**Formální postup**, rovnice (2.36)). Řešení budeme hledat v parametrickém tvaru. Za tím účelem zavedeme parametr t tak, že $t = y'$ odkud

$$x = f(t)$$

což představuje parametrickou rovnici pro x. Nyní odvodíme, jak by mělo vypadat parametrické vyjádření y. Vyjdeme z rovnice $t = y'$, z níž plyne

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} t \mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $t = t(x)$. Položíme-li $y_0 = y(x_0)$ a $x_0 = f(t_0)$ a přejdeme-li v integrálu od proměnné x k proměnné t dostaneme

$$y(x(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Tato rovnice spolu s rovnicí $x(t) = f(t)$ představuje hledané řešení rovnice (2.36) v parametrickém tvaru.

V dalším textu budeme pro jednoduchost místo $y(x(t))$ psát jednoduše $y(t)$. Na závěr ještě dodejme, že aby uvedený postup byl korektní, je třeba zajistit splnění jistých předpokladů. Především je třeba zajistit proveditelnost substituce v integrálu a dále je třeba zjistit existenci inverzní funkce k funkci f. Následující věta nám zajistí splnění postačujících předpokladů, za kterých je uvedený postup správný.

Věta 2.53. *Nechť f má na intervalu (t_1, t_2) spojitou derivaci, která zde nemění znamení. Nechť $a = \inf\{f(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$ a $b = \sup\{f(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$. Pak každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka $y = y(x)$ diferenciální rovnice*

$$x = f(y') \tag{2.36}$$

jejíž tečna v bodě $[x_0, y_0]$ má směrnici v intervalu (t_1, t_2), a která je řešením rovnice (2.36) na intervalu (a, b). Parametrické rovnice této křivky jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t), \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau) \mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

kde $t_0 \in (t_1, t_2)$ takové, že $x_0 = f(t_0)$.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že funkce f je na (t_1, t_2) spojitá a ryze monotónní a existuje k ní tedy inverzní funkce $h : (a, b) \overset{\text{na}}{\to} (t_1, t_2)$. Funkce h je na (a, b) také ryze monotónní, spojitá a má zde spojitou derivaci. Potom rovnici (2.36) lze rozřešit vzhledem k y' a platí

$$y' = h(x). \tag{2.38}$$

Rovnice (2.38) je rovnice se separovanými proměnnými a podle věty 2.10 prochází každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times \mathbb{R}$ právě jedna integrální křivka

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} h(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{2.39}$$

Funkce $y(x)$ je řešením rovnice (2.38) na celém (a, b). Přitom rovnice (2.36) a (2.38) jsou ekvivalentní, protože pokud pro nějakou funkci $\varphi(x)$ platí $x = f(\varphi'(x))$, pak platí i $\varphi'(x) = h(x)$ a naopak. Každým bodem pásu $(a, b) \times \mathbb{R}$ tedy prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením rovnice (2.36) na (a, b).

Hledáme parametrické vyjádření řešení $y(x)$. Zavedeme do integrálu v rovnici (2.39) substituci $\xi = f(t)$. Z vlastností funkce f plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ existuje právě jedno $t \in (t_1, t_2)$ tak, že $f(t) = x$. Speciálně tedy i $f(t_0) = x_0$. Potom

$$y = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(f(\tau)) f'(\tau) \mathrm{d}\tau = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Z poslední rovnice a z rovnice $\xi = f(t)$ dostáváme hledané parametrické vyjádření řešení $y(x)$ rovnice (2.36) na (a, b) ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t), \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau) \mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

kde $t \in (t_1, t_2)$. □

Poznámka 2.54 (**Formální postup**, rovnice (2.37)). Řešení budeme opět hledat v parametrickém tvaru. Podobně jako v předchozím příkladě nejdřív naznačíme princip odvození tohoto parametrického vztahu, přičemž se nebudeme zabývat předpoklady, za kterých naše odvození platí. Posléze zformulujeme a dokážeme větu, která náš postup ospravedlní.

Položme $t = y'$. Potom rovnici (2.37) máme ve tvaru $y = g(t)$. Protože $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = t$, pak za určitých předpokladů lze také psát $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/t$, odkud

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{t(y)} \mathrm{d}y.$$

Položme $y_0 = g(t_0)$ a v integrálu proveďme substituci $y = g(t)$. Potom

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} g'(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Hledaný parametrický popis řešení tedy je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} g'(\tau) \mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Věta 2.55. *Nechť g má na intervalu (t_1, t_2) spojitou derivaci, která zde nemění znamení. Nechť $0 \notin (t_1, t_2)$. Položme $\alpha = \inf\{g(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$ a $\beta = \sup\{g(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka diferenciální rovnice*

$$y = g(y'), \tag{2.37}$$

jejíž směrnice tečny v $[x_0, y_0]$ leží v intervalu (t_1, t_2), a která je řešením rovnice (2.37) na intervalu (a, b), kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 + \inf_{t \in (t_1, t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau, \\ b &= x_0 + \sup_{t \in (t_1, t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau, \\ y_0 &= g(t_0). \end{aligned}$$

Parametrické rovnice této křivky jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Důkaz. Z předpokladů plyne, že funkce g je ostře monotónní a spojitá na (t_1, t_2), přičemž $g(t_1, t_2) = (\alpha, \beta)$. Proto zde existuje i inverzní funkce h k funkci g, která je rovněž ostře monotónní a spojitá taková, že $h(\alpha, \beta) = (t_1, t_2)$. Funkce h má na (α, β) také spojitou derivaci. Rovnici (2.37) lze přepsat do tvaru

$$y' = h(y), \tag{2.40}$$

což je separovatelná rovnice. Protože $0 \notin (t_1, t_2)$, pak $h(y) \neq 0$ na (α, β) a tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{y'}{h(y)} = 1.$$

Potom každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice (2.40). Řešením rovnice (2.40) je pak každá diferencovatelná funkce implicitně zadaná rovnicí

$$x + c = \int \frac{1}{h(y)} \mathrm{d}y, \qquad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází zřejmě integrální křivka určená rovnicí

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}v}{h(v)}. \tag{2.41}$$

Vzhledem k tomu, že g a h jsou inverzní funkce, jsou rovnice (2.37) a (2.40) ekvivalentní. Bodem $[x_0, y_0]$ prochází tedy také právě jedna integrální křivka rovnice (2.37), která je implicitně zadána rovnicí (2.41).

V integrálu v rovnici (2.41) zavedeme substituci $\upsilon = g(t)$, čímž dostaneme

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{h(g(\tau))} g'(\tau)\mathrm{d}\tau = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau,$$

kde $t_0 \in (t_1, t_2)$ takové, že $y_0 = g(t_0)$. Parametrické rovnice integrální křivky (2.41) jsou tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Tato křivka je integrální křivkou rovnice (2.37) na intervalu (a, b), kde

$$a = x_0 + \inf_{t \in (t_1, t_2)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \qquad \text{a} \qquad b = x_0 + \sup_{t \in (t_1, t_2)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau. \qquad \square$$

Příklad 2.56. Řešme rovnici

$$(y')^3 + y' - x = 0.$$

Rovnici lze zřejmě přepsat do tvaru

$$x = (y')^3 + y',$$

a je tedy tvaru (2.36). Provedeme substituci $y' = t$, odkud

$$x = f(t) = t^3 + t.$$

Funkce f je zřejmě ostře rostoucí na $\mathbb{R}$ a má zde spojitou derivaci. Tím máme splněny předpoklady věty 2.53 ($a = -\infty$ a $b = +\infty$), a parametrické rovnice řešení jsou tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 + t, \\ y(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tau(3\tau^2 + 1)\mathrm{d}\tau = \\ &= y_0 - \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{3}{4}t_0^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^4, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3 Teoretické vlastnosti řešení diferenciálních rovnic

3.1 Diferenciální rovnice tvaru $y' = f(x, y)$

3.1.1 Existence řešení

Definice 3.1. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a $\mathscr{M}$ je množina funkcí definovaných na I. Potom říkáme, že funkce z $\mathscr{M}$ jsou **stejně omezené** právě tehdy, když

$$\Big(\exists K > 0\Big)\Big(\forall f \in \mathscr{M}\Big)\Big(\forall x \in I\Big)\Big(|f(x)| < K\Big).$$

Říkáme, že funkce z $\mathscr{M}$ jsou **stejně spojité** právě tehdy, když

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall f \in \mathscr{M}\Big)\Big(\forall x_1, x_2 \in I\Big)\Big(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\Big).$$

Poznámka 3.2. Bolzanova[1]–Weierstrassova[2] věta (viz např. [6, Věta 3.6]) nám zaručuje, že máme-li posloupnost definovanou na kompaktním intervalu $[a, b]$, lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost. Následující věta nám poskytuje analogické tvrzení pro funkce.

Věta 3.3 (Arzelàova[3]–Ascoliova[4])**.** *Nechť $\mathscr{M}$ je množina funkcí definovaných na omezeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které jsou na I stejně omezené a stejně spojité. Pak z každé posloupnosti funkcí $\{g_n\}_{n\geq 1}$ v $\mathscr{M}$ lze vybrat podposloupnost $\{g_{n'}\}_{n'\geq 1}$, která je na I stejnoměrně konvergentní.*

Důkaz. Označme např. $I = (a, b)$. O intervalu I víme, že je částí $\mathbb{R}$ a je omezený. Na intervalu I zkonstruujeme hustou množinu bodů (tj. množinu, jejíž uzávěr je roven celému intervalu I). Tuto množinu navíc zkonstruujeme tak, aby byla spočetná.

V prvním kroku rozdělíme interval $I = (a, b)$ na dvě poloviny. Dělicí bod označíme x_1 a zřejmě platí

$$x_1 = a + \frac{b - a}{2}.$$

Ve druhém kroku rozdělíme dvě poloviny intervalu I opět na dvě poloviny. Tím dostaneme dělicí body x_2 a x_3, pro které platí

$$x_2 = a + \frac{1}{2}\frac{b - a}{2} \qquad \text{a} \qquad x_3 = x_1 + \frac{1}{2}\frac{b - a}{2}.$$

[1] **Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano** (1781–1848), německy hovořící český matematik, filozof a katolický kněz.
[2] **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897), německý matematik.
[3] **Cesare Arzelà** (1847–1912), italský matematik.
[4] **Guilio Ascoli** (1843–1896), italský matematik.

Ve třetím analogicky sestrojíme body x_4 až x_7 definované následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} x_4 &= a + \frac{1}{4}\frac{b-a}{2} \\ x_5 &= x_2 + \frac{1}{4}\frac{b-a}{2} \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} x_6 &= x_1 + \frac{1}{4}\frac{b-a}{2} \\ x_7 &= x_3 + \frac{1}{4}\frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Dále postupujeme analogicky. Je zřejmé, že takto konstruujeme posloupnost bodů z I. Tyto body jsou rozmístěny rovnoměrně a neustále se přibližují. Množina těchto bodů je tedy hustá v I. V každém kroku konstrukce jsou vzdálenosti mezi body stejné.

Nechť $\{g_n\}_{n\geq 1}$ je posloupnost funkcí z množiny $\mathscr{M}$. Potom:

1. Pro $x = x_1$ je číselná posloupnost $\{g_n(x_1)\}_{n\geq 1}$ omezená na kompaktu a podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje její konvergentní číselná podposloupnost, kterou označíme $\{g_n^{(1)}(x_1)\}_{n\geq 1}$. Posloupnost $\{g_n^{(1)}\}_{n\geq 1}$ je funkční posloupnost vybraná z původní funkční posloupnosti $\{g_n\}_{n\geq 1}$ a má tedy i příslušné vlastnosti.

2. Pro $x = x_2$ je číselná posloupnost $\{g_n^{(1)}(x_2)\}_{n\geq 1}$ omezená a opět tedy existuje její konvergentní podposloupnost, kterou analogicky označíme $\{g_n^{(2)}(x_2)\}_{n\geq 1}$. Potom $\{g_n^{(2)}(x)\}_{n\geq 1}$ je funkční posloupnost, která konverguje v bodě x_1 a x_2.

3. V procesu můžeme pokračovat matematickou indukcí. Předpokládejme, že $\{g_n^{(k)}(x)\}_{n\geq 1}$ je posloupnost funkcí z $\mathscr{M}$, konvergující v bodech $x = x_1, \ldots, x_k$. Potom v $(k+1)$-ním kroku položme $x = x_{k+1}$. Pak číselná posloupnost $\{g_n^{(k)}(x_{k+1})\}_{n\geq 1}$ je omezená. A opět tedy existuje její konvergentní podposloupnost, kterou označíme $\{g_n^{(k+1)}(x_{k+1})\}_{n\geq 1}$. Potom analogicky $\{g_n^{(k+1)}(x)\}_{n\geq 1}$ je funkční posloupnost v $\mathscr{M}$, která konverguje v bodech $x = x_1, \ldots, x_{k+1}$.

Z množiny vybraných posloupností vybereme jednu za pomoci diagonálního schématu. Uvažujeme tedy posloupnost $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$, pro kterou platí: je-li $x = x_k$, $k \in \mathbb{N}$ pevné, potom číselná posloupnost $\{g_n^{(n)}(x_k)\}_{n\geq 1}$ konverguje.

Stejnoměrnou konvergenci takto sestrojené funkční posloupnosti $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ nám zaručí následující lemma. Tím bude důkaz ukončen.

Lemma 3.4. *Posloupnost $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n\geq 1}$ je na I stejnoměrně konvergentní.*

Důkaz. K důkazu použijeme Bolzanovo–Cauchyho[5] kritérium (viz např. [6, Věta 3.11]), podle něhož zkoumaná posloupnost konverguje na I stejnoměrně právě tehdy, když

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall n > n_0\Big)\Big(\forall p \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x \in I\Big)\left(\left|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)\right| < \varepsilon\right).$$

Mějme tedy zadáno libovolné $\varepsilon > 0$. Dále využijeme vlastností posloupnosti $\{g_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$. Především víme, že tato posloupnost je stejně spojitá, což znamená, že platí

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x', x'' \in I\Big)\left(\left|x' - x''\right| < \delta \Rightarrow \left|g_n^{(n)}(x') - g_n^{(n)}(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

[5] **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857), francouzský matematik.

Z konstrukce posloupnosti $\{g_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$ je pak zřejmé, že existuje $\overline{p} \in \mathbb{N}$ takové, že sousední body v množině $\{x_1, \ldots, x_{\overline{p}}\}$ jsou k sobě blíže než δ (o němž víme, že existuje ze stejné spojitosti). Posloupnost $\{g_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$ v těchto bodech $\{x_1, \ldots, x_{\overline{p}}\}$ konverguje, tzn. pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\Big(\exists n_0\Big)\Big(\forall n > n_0\Big)\Big(\forall p \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall j = 1, \ldots, \overline{p}\Big)\Big(\Big|g_{n+p}^{(n+p)}(x_j) - g_n^{(n)}(x_j)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

Zřejmě platí, že vezmeme-li libovolný bod $x \in I$, pak tento bod určitě leží v některém z intervalků vyrobených prostřednictvím bodů $\{x_1, \ldots, x_{\overline{p}}\}$. Tj. existují jeho sousední body $x_l, x_{l'} \in \{x_1, \ldots, x_{\overline{p}}\}$ tak, že $x \in [x_l, x_{l'}]$ a $|x_l - x_{l'}| < \delta$.

Z trojúhelníkové nerovnosti zřejmě platí

$$\Big|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)\Big| \leq \underbrace{\Big|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_{n+p}^{(n+p)}(x_l)\Big|}_{A} + \underbrace{\Big|g_{n+p}^{(n+p)}(x_l) - g_n^{(n)}(x_l)\Big|}_{B} + \underbrace{\Big|g_n^{(n)}(x_l) - g_n^{(n)}(x)\Big|}_{C}.$$

Ze stejné spojitosti posloupnosti $\{g_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$ plyne $A, C < \varepsilon/3$. Z konvergence $\{g_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$ v bodech $\{x_1, \ldots, x_{\overline{p}}\}$ pak plyne $B < \varepsilon/3$. Shrneme-li dosavadní výsledky, zjistíme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $x \in I$ platí

$$\Big|g_{n+p}^{(n+p)}(x) - g_n^{(n)}(x)\Big| < \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Důkazem tohoto lemmatu je zakončen i důkaz Arzelàovy–Ascoliovy věty. □

POZNÁMKA 3.5. Zabývejme se **existencí řešení počáteční úlohy**

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, Γ je oblast, $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$ a $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Důkaz existence řešení této úlohy je konstrukční a postupuje se podle úvah Leonharda Eulera[6]. Pro ilustraci použijeme následující příklad.

PŘÍKLAD 3.6. Mějme sklenici s pivem, jehož pěna postupně v čase opadává. Zajímal by nás časový průběh rozpadu pivní pěny. Předpokládejme, že rozpad pivní pěny se řídí diferenciální rovnicí ve tvaru

$$y' = -\alpha y, \tag{3.2}$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta rozpadu pěny a y označuje výšku pěny. Dále předpokládejme, že počáteční výška pěny v čase $t = 0$ je $y(0) = y_0$. Je zřejmé, že řešíme úlohu typu (3.1).

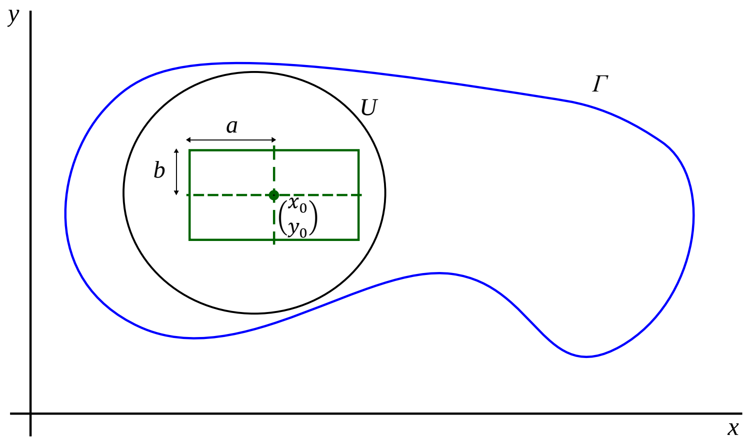
Označme $\tau > 0$ časový krok řešení. Derivaci aproximujeme diferencí

$$y'(k\tau) \approx \frac{y(k\tau) - y((k-1)\tau)}{\tau}.$$

Označme $y(k\tau) = y_k$. Potom diferenciální rovnici (3.2) nahradíme diferenční rovnicí ve tvaru

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{\tau} = -\alpha y_{k-1},$$

[6]**Leonhard Euler** (1707–1783), švýcarský matematik a fyzik.



Obrázek 3.1: Ke konstrukci Eulerovy lomené čáry.

kterou lze postupnými úpravami převést do tvaru

$$y_k = (1 - \alpha\tau)^k y_0.$$

Nechť $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$ je libovolný, ale pevně zvolený, časový okamžik. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ lze interval $\left[0, \bar{t}\right]$ rozdělit na kroky $\tau = \bar{t}/n$. Potom lze psát

$$y_n = (1 - \alpha\tau)^n y_0 = \left(1 - \alpha\frac{\bar{t}}{n}\right)^n y_0.$$

Přejdeme-li v předchozí rovnosti k limitě $n \to \infty$, dojdeme k přesnému řešení

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} y_0.$$

Poznámka 3.7. Pokračujme dále v úvahách o existenci řešení úlohy (3.1). Zkonstruujeme tzv. **Eulerovu lomenou čáru** (resp. **funkci**).

Předpokládejme, že máme oblast Γ, dále nechť bod $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$. Pak zřejmě existuje okolí U bodu $\binom{x_0}{y_0}$ tak, že je omezené a $U \subset \overline{U} \subset \Gamma$. Zřejmě platí následující tvrzení

$$f \in \mathcal{C}(\overline{U}) \Rightarrow \Big(\exists M > 0\Big)\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U\right)\Big(|f(x,y)| \leq M\Big).$$

Potom volíme $b \geq aM$ tak, aby $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset U$. Tak okolo bodu $\binom{x_0}{y_0}$ sestrojíme obdélník o délkách hran $2a$ a $2b$, který celý leží v U (viz obr. 3.1).

Dále se zabývejme intervalem $[x_0, x_0 + a]$ (všechny úvahy, které dále provedeme, bude možné analogicky provést i v intervalu $[x_0 - a, x_0]$). Interval $[x_0, x_0 + a]$ rovnoměrně rozdělíme na m podintervalů tvaru $[x_{j-1}, x_j]_{j=1,\ldots,m}$, kde $x_m = x_0 + a$. Délka jednotlivých dílčích intervalů je zřejmě $h = a/m$. V jednotlivých dílčích intervalech pak začneme postupně konstruovat Eulerovu lomenou funkci $\varphi_m(x)$ (o této funkci lze také říci, že je po částech lineární). Definujme tedy

$$\varphi_m(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \qquad \text{pro } x \in [x_0, x_1]\,.$$

Dále označme

$$y_1 = \varphi_m(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Tím jsme sestrojili bod $\binom{x_1}{y_1}$, který je východiskem pro další krok konstrukce. Ve druhém podintervalu postupujeme analogicky a klademe

$$\varphi_m(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1) \qquad \text{pro } x \in [x_1, x_2]\,.$$

Pro krajní bod pak platí

$$y_2 = \varphi_m(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Takto postupujeme dále. Obecně tedy můžeme psát

$$\varphi_m(x) = y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})(x - x_{j-1}) \qquad \text{pro } x \in [x_{j-1}, x_j]\,, \tag{3.3}$$

pro $j = 1, \dots, m$ a kde $y_j = y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h$.

O právě zkonstruované funkci φ_m je třeba ověřit, že pro libovolné $x \in [x_0, x_0 + a]$ splňuje $\varphi_m(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Jinými slovy, požadujeme, aby funkce φ_m protínala náš obdélník pouze na svislých hranách. Tuto vlastnost nám zaručí následující lemma.

Lemma 3.8. *Funkce $\varphi_m(x)$ má pro $x \in [x_0, x_0 + a]$ hodnoty z intervalu $[y_0 - b, y_0 + b]$. Přitom využíváme vztahu $b \geq Ma$.*

Důkaz. Chceme dokázat, že pro libovolné $x \in [x_0, x_0 + a]$ platí $|\varphi_m(x) - y_0| \leq b$. Jestliže $x \in [x_0, x_0 + a]$, pak zřejmě $\exists k \in \{1, \dots, m\}$ tak, že $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne následující odhad

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - y_0| \quad &\leq \quad |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_{k-1})| + |\varphi_m(x_{k-1}) - \varphi_m(x_{k-2})| + \cdots \\ &\quad\;\; \cdots + |\varphi_m(x_2) - \varphi_m(x_1)| + |\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_0)|\,, \end{aligned}$$

kde jsme označili $y_0 = \varphi_m(x_0)$. Uvědomíme-li si, že $\varphi_m(x_j) = y_j$, můžeme prostřednictvím (3.3) jednotlivé absolutní hodnoty na pravé straně nerovnosti odhadnout následujícím způsobem

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_{k-1})| \quad &\leq \quad |f(x_{k-1}, y_{k-1})|\,|x - x_{k-1}|\,, \\ |\varphi_m(x_j) - \varphi_m(x_{j-1})| \quad &\leq \quad |f(x_{j-1}, y_{j-1})|\,h, \end{aligned}$$

kde $j = 1, \dots, k - 1$. Můžeme tedy psát

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leq \underbrace{|f(x_{k-1}, y_{k-1})|}_{\leq M} |x - x_{k-1}| + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{|f(x_{j-1}, y_{j-1})|}_{\leq M} h \leq M\,|x - x_0| \leq Ma \leq b.$$

Tuto úvahu provádíme postupně pro $x \in [x_0, x_1]$, poté pro $x \in [x_1, x_2]\,, \dots, x \in [x_{m-1}, x_m]$. Tak je zajištěno, že pro všechna $x \in [x_0, x_0 + a]$ je $|\varphi_m(x) - y_0| \leq b$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 3.9. Konstrukcí funkcí $\varphi_m(x)$ pro $m = 1, 2, \dots$ vzniká funkční posloupnost

$$\{\varphi_m(x)\}_{m \geq 1} \tag{3.4}$$

na intervalu $[x_0, x_0 + a]$. Zabývejme se dále vlastnostmi této posloupnosti.

Lemma 3.10. *Funkční posloupnost (3.4) je stejně omezená.*

Důkaz. Z předchozího lemmatu víme, že platí $|\varphi_m(x) - y_0| \leq b$ pro libovolné m. Odtud zřejmě

$$\Big(\forall m \in \mathbb{N}\Big)\Big(|\varphi_m(x)| \leq |y_0| + b\Big),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Lemma 3.11. *Funkční posloupnost* (3.4) *obsahuje stejně spojité funkce.*

Důkaz. Podle definice stejné spojitosti chceme ukázat, že platí

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall m \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x, x' \in [x_0, x_0 + a]\Big)\Big(|x - x'| < \delta \Rightarrow |\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| < \varepsilon\Big).$$

Protože $x, x' \in [x_0, x_0 + a]$, zřejmě existují indexy $k, l \in \widehat{m}$ tak, že $x \in [x_{k-1}, x_k]$ a $x' \in [x_{l-1}, x_l]$. Bez újmy na obecnosti nechť $k \leq l$. Potom tedy platí

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| &\leq |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k)| + |\varphi_m(x_k) - \varphi_m(x_{k+1})| + \cdots \\ &\quad \cdots + |\varphi_m(x_{l-2}) - \varphi_m(x_{l-1})| + |\varphi_m(x_{l-1}) - \varphi_m(x')|. \end{aligned}$$

Odhadneme-li dílčí absolutní hodnoty na pravé straně této nerovnosti pomocí vztahu (3.3), dostaneme

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k)| &= |f(x_{k-1}, y_{k-1})|\,|x - x_k|, \\ |\varphi_m(x_{l-1}) - \varphi_m(x')| &= |f(x_{l-1}, y_{l-1})|\,|x' - x_{l-1}|, \\ |\varphi_m(x_j) - \varphi_m(x_{j-1})| &= |f(x_{j-1}, y_{j-1})|\,h, \end{aligned}$$

kde $j = k+1, \ldots, l-1$. Uvážíme-li, že pro každé $j \in \widehat{m}$ platí $|f(x_{j-1}, y_{j-1})| \leq M$, dostáváme odhad

$$|\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| \leq M\left(|x - x_k| + |x_k - x_{k+1}| + \cdots + |x' - x_{l-1}|\right) = M\,|x - x'|.$$

Potom tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ položíme $\delta = \varepsilon/M$ a pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ a pro každé $x, x' \in [x_0, x_0 + a]$ platí $|x - x'| < \delta \Rightarrow |\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| < \varepsilon$. Tím je důkaz ukončen. □

Poznámka 3.12. Sestrojili jsme funkční posloupnost $\{\varphi_m\}_{m \geq 1}$, o níž jsme zjistili, že obsahuje funkce stejně omezené a stejně spojité na intervalu $[x_0, x_0 + a]$. Podle věty 3.3 lze z této posloupnosti vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost na $[x_0, x_0 + a]$. Zřejmě tedy

$$\Big(\exists y(x) \text{ na } [x_0, x_0 + a]\Big)\Big(\varphi_{m'} \overset{[x_0, x_0+a]}{\rightrightarrows} y\Big).$$

O funkci y je třeba dokázat, že řeší úlohu (3.1).

(1) Zřejmě platí $(\forall m \in \mathbb{N})(\varphi_m(x_0) = y_0)$, odkud $y(x_0) = y_0$ a funkce y tedy splňuje počáteční podmínku.

(2) O tom, že funkce y vyhovuje i příslušné diferenciální rovnici, nás přesvědčí následující lemma.

Lemma 3.13. *Platí*

$$\Big(\forall x \in (x_0, x_0 + a)\Big)\left(\lim_{\overline{h} \to 0}\left(\frac{y(x + \overline{h}) - y(x)}{\overline{h}} - f(x, y(x))\right) = 0\right).$$

Důkaz. Zvolíme $\overline{x} \in (x_0, x_0 + a)$ pevně a $\overline{h} \in \mathbb{R}$ tak, aby $\overline{x} + \overline{h} \in (x_0, x_0 + a)$ a budeme zkoumat chování výrazu

$$\left|\varphi_{m'}(\overline{x} + \overline{h}) - \varphi_{m'}(\overline{x}) - \overline{h} f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))\right| \overset{\text{ozn.}}{=} A$$

pro vysoká m'.

Protože $\overline{x}, \overline{x} + \overline{h} \in (x_0, x_0 + a)$, zřejmě existují indexy $k, l \in \widehat{m'}$ tak, že $\overline{x} \in [x_{k-1}, x_k]$ a $\overline{x}+\overline{h} \in [x_{l-1}, x_l]$. Bez újmy na obecnosti nechť $\overline{h} > 0$, tj. také $k \leq l$ a pro dostatečně vysoká m' bude tato nerovnost ostrá – k tomu stačí[7] $m' > a/\overline{h}$ (toho ještě později využijeme). Zkoumaný výraz pak lze přepsat a odhadnout následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
A \;=\;& \Big|\varphi_{m'}(\overline{x}) - \varphi_{m'}(x_k) + \sum_{j=k}^{l-2}\big[\varphi_{m'}(x_j) - \varphi_{m'}(x_{j+1})\big] + \varphi_{m'}(x_{l-1}) - \varphi_{m'}(\overline{x} + \overline{h}) + \\
& +(x_k - \overline{x} + \sum_{j=k}^{l-2}\big[x_{j+1} - x_j\big] + \overline{x} + \overline{h} - x_{l-1}) f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))\Big| \\
\leq\;& |\varphi_{m'}(\overline{x}) - \varphi_{m'}(x_k) + (x_k - \overline{x}) f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))| + \\
& + \sum_{j=k}^{l-2}\left|\varphi_{m'}(x_j) - \varphi_{m'}(x_{j+1}) + (x_{j+1} - x_j) f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))\right| + \\
& + \left|\varphi_{m'}(x_{l-1}) - \varphi_{m'}(\overline{x} + \overline{h}) + (\overline{x} + \overline{h} - x_{l-1}) f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))\right|.
\end{aligned}$$

Využijeme-li definice funkce Eulerovy lomené funkce φ_m (3.3) dostaneme

$$\begin{aligned}
\varphi_m(\overline{x}) - \varphi_m(x_k) &= f(x_{k-1}, y_{k-1})(\overline{x} - x_k), \\
\varphi_m(x_j) - \varphi_m(x_{j+1}) &= f(x_j, y_j)(x_j - x_{j+1}), \\
\varphi_m(x_{l-1}) - \varphi_m(\overline{x} + \overline{h}) &= f(x_{l-1}, y_{l-1})(x_{l-1} - (\overline{x} + \overline{h})),
\end{aligned}$$

pro $j = k, \ldots, l - 2$. V souladu se zavedeným značením platí $x_j - x_{j+1} = -h$. Pomocí právě získaných vztahů upravíme odhad výrazu A, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}
A \;\leq\;& |\overline{x} - x_k|\, |f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))| + \\
& + \sum_{j=k}^{l-2} h\, |f(x_j, y_j) - f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))| + \\
& + \left|x_{l-1} - (\overline{x} + \overline{h})\right| |f(x_{l-1}, y_{l-1}) - f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))|.
\end{aligned}$$

Protože $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ je funkce f spojitá také na kompaktu $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \Gamma$. Funkce spojitá na kompaktu je na něm spojitá stejnoměrně [6, Věta 4.19] a platí tedy

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall (x, y), (x', y') \in [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]\Big)$$
$$\Big(\left|x - x'\right| < \delta \wedge \left|y - y'\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x, y) - f(x', y')\right| < \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Dále víme, že funkce $\{\varphi_m\}$ jsou stejně spojité na $[x_0, x_0 + a]$ a platí tedy

$$\Big(\forall \delta > 0\Big)\Big(\exists \delta' = \delta/M > 0\Big)\Big(\forall m \in \mathbb{N}\Big)\Big(|x - \overline{x}| < \delta' \Rightarrow |\varphi_m(x) - \varphi_m(\overline{x})| < \delta\Big).$$

[7] Požadujeme totiž $h < \overline{h}$, kde $h = a/m'$, odkud $m' > a/\overline{h}$.

V předchozí poznámce jsme ukázali, že funkční podposloupnost $\{\varphi_{m'}\}$ konverguje stejnoměrně k $y(x)$ na $[x_0, x_0 + a]$ a rovněž tedy platí

$$\lim_{m' \to \infty} \varphi_{m'}(x) = y(x),$$

pro každé $x \in [x_0, x_0 + a]$.

Vezměme $m' > a/\overline{h}$ (viz začátek důkazu, zajímá nás $m' \to +\infty$). Dále zvolme pevné $\overline{h}$ tak, aby $\overline{h} < \min\{\delta, \delta/M\}$. Potom zřejmě $\left|\overline{x} + \overline{h} - x_{l-1}\right|, \ldots, |x_k - \overline{x}| \le \overline{h}$ a také $|x_j - \overline{x}| \le \overline{h}$ pro všechna $j \in \{k-1, \ldots, l-1\}$. Potom tedy

$$\begin{aligned} |\varphi_{m'}(x_j) - \varphi_{m'}(\overline{x})| &< \delta, \\ |f(x_j, y_j) - f(\overline{x}, \varphi_{m'}(\overline{x}))| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pomocí provedených odhadů můžeme dokončit odhad výrazu A, čímž dostaneme

$$A < \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\left[|\overline{x} - x_k| + \sum_{j=k}^{l-2} h + \left|x_{l-1} - (\overline{x} + \overline{h})\right|\right]}_{=\overline{h}} = \frac{\overline{h}\varepsilon}{2}.$$

Provedeme-li nyní v nerovnosti limitní přechod $m' \to \infty$ obdržíme vztah

$$\left|y(\overline{x} + \overline{h}) - y(\overline{x}) - \overline{h} f(\overline{x}, y(\overline{x})\right| \le \frac{\overline{h}\varepsilon}{2},$$

odkud zřejmě

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists h_0 > 0\Big)\Big(\forall \overline{h} < h_0\Big)\left(\left|\frac{y(\overline{x} + \overline{h}) - y(\overline{x})}{\overline{h}} - f(\overline{x}, y(\overline{x})\right| < \varepsilon\right),$$

a tedy

$$\lim_{\overline{h} \to 0} \left(\frac{y(x + \overline{h}) - y(x)}{\overline{h}} - f(x, y(x))\right) = 0,$$

pro libovolné $x \in (x_0, x_0 + a)$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Poznámka 3.14. Podle právě dokázaného lemmatu a jemu předcházející poznámky je tedy funkce y, která je limitní funkcí podposloupnosti $\{\varphi_{m'}\}$, řešením úlohy (3.1).

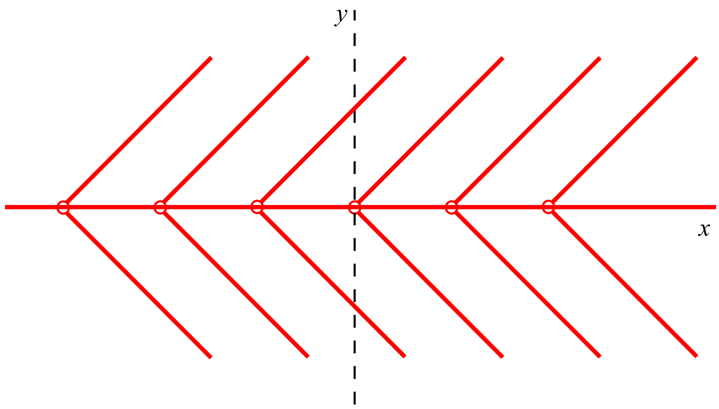
Věta 3.15 (Peanova[8], o existenci)**.** *Nechť funkce f je spojitá na oblasti $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice $y' = f(x, y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$.*

Důkaz. Podle předchozí poznámky je hledaným řešením funkce y, která je limitní funkcí podposloupnosti $\{\varphi_{m'}\}$. $\square$

Poznámka 3.16. Peanova věta nám dává k dispozici **postačující podmínku** existence řešení, nikoliv však nutnou. Uvažme diferenciální rovnici

$$y' = \operatorname{sgn} y.$$

[8]**Giuseppe Peano** (1858–1932), italský matematik.



Obrázek 3.2: Integrální křivky rovnice $y' = \operatorname{sgn} y$.

Je zřejmé, že funkce $f(x, y) = \operatorname{sgn} y$ není spojitá na $\mathbb{R}^2$, proto na tuto rovnici nelze rovnou použít Peanova věta. Snadno se však přesvědčíme, že každým bodem $\mathbb{R}^2$ prochází právě jedna integrální křivka.

Pro $y > 0$ dostáváme $y' = 1$ odkud pro hledané řešení získáme vztah $y(x) = x + C_1$ pro $x > -C_1$. Konstantu C_1 dopočítáme jednoznačně z počátečních podmínek. Podobně pro $y < 0$ je zřejmě $y' = -1$ a tedy hledané řešení má tvar $y(x) = -x + C_2$ pro $x < C_2$. Konstantu C_2 opět jednoznačně určíme z počátečních podmínek. Nakonec uvažme, že funkce $y(x) \equiv 0$ také vyhovuje dané diferenciální rovnici pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Integrální křivky jsou zachyceny na obr. 3.2.

3.1.2 Jednoznačnost řešení

Poznámka 3.17. Peanova věta **nezaručuje jednoznačnost řešení**. Uvažme rovnici

$$y' = \sqrt[3]{y^2}.$$

Podle Peanovy věty prochází každým bodem $\mathbb{R}^2$ alespoň jedna integrální křivka této rovnice. Snadno se však přesvědčíme, že funkce

$$\begin{aligned} y(x) &= 0, \\ y(x) &= \frac{x^3}{27}, \end{aligned}$$

řeší tuto diferenciální rovnici pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Bodem $\binom{0}{0}$ tedy prochází alespoň dvě různé integrální křivky.

Věta 3.18 (Osgoodova[9], o jednoznačnosti)**.** *Nechť funkce $f = f(x, y)$ má vlastnost*

$$\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \in \Gamma\right)\Big(|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \Phi\left(|y_2 - y_1|\right)\Big),$$

kde $\Phi : [0, C] \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce spojitá a kladná na $(0, C]$, $\Phi(0) = 0$ a dále platí, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon}^{C} \frac{\mathrm{d}u}{\Phi(u)} = +\infty.$$

[9] **William Fogg Osgood** (1864–1943), americký matematik.

Potom každým bodem $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$ *prochází nejvýše jedna integrální křivka rovnice* (3.1).

Důkaz. Důkaz se provede sporem. Nechť funkce y_1 a y_2 jsou dvě navzájem různá řešení úlohy (3.1). Zřejmě tedy platí $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ a zároveň existuje x_1 (bez újmy na obecnosti nechť např. $x_1 > x_0$) takové, že $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$.

Dále definujme $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Zřejmě tedy $z(x_0) = 0$. Bez újmy na obecnosti nechť $z(x_1) > 0$. Funkce z je zřejmě spojitá, a proto $\exists H_{x_1}$ tak, že $z(x) > 0$ pro $\forall x \in H_{x_1}$. Potom podle předpokladů můžeme psát

$$z'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq \Phi(|z(x)|),$$

kde jsme využili odhadu, že žádné číslo nepřevýší svoji absolutní hodnotu a předpokladů věty. Protože $z(x) > 0$ na H_{x_1}, platí $|z(x)| = z(x)$ na H_{x_1}.

Je tedy potřeba řešit diferenciální nerovnici ve tvaru

$$z'(x) \leq \Phi(z(x)) \qquad \forall x \in H_{x_1}.$$

Nerovnici lze upravit na tvar

$$\frac{z'(x)}{\Phi(z(x))} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_x^{x_1} \frac{z'(x)\mathrm{d}x}{\Phi(z(x))} \leq x_1 - x.$$

Podle věty o integraci substitucí ([6, Věta 6.19]) upravíme integrál v nerovnosti pomocí substituce $u = z(x)$ na tvar

$$\int_{z(x)}^{z(x_1)} \frac{\mathrm{d}u}{\Phi(u)} \leq x_1 - x.$$

Uvážíme-li, že funkce z je spojitá, zřejmě $\exists x_2 \in [x_0, x_1)$ tak, že $z(x_2) = 0$. Bodů splňujících tento požadavek může být v intervalu $[x_0, x_1)$ více. Určitě je tam alespoň jeden, a to přímo bod x_0. Bod x_2 vybereme tedy tak, aby platilo $z(x_2) = 0$ a zároveň $z(x) > 0$ pro $x_2 < x \leq x_1$ (je tedy co nejblíže bodu x_1). Potom přejdeme v nerovnosti k limitě $x \to x_2$, odkud $z(x) \to 0$ a dostaneme

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon}^{z(x_1)} \frac{\mathrm{d}u}{\Phi(u)}}_{+\infty} \leq \underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathbb{R}},$$

což je ovšem spor. □

Poznámka 3.19. Osgoodova věta neurčuje přesně funkci Φ. Pouze nám říká, jaké vlastnosti mít musí. V praxi se funkce Φ nejčastěji volí ve tvaru

$$\Phi(u) = ku.$$

Dále se také můžeme setkat s volbami

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= ku \cdot |\ln u|, \\ \Phi(u) &= ku \cdot |\ln u| \cdot |\ln |\ln u|| \end{aligned}$$

a podobně.

Definice 3.20. Nechť funkce $f = f(x, y)$ je definová na oblasti $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Pak říkáme, že **funkce f splňuje na Γ Lipschitzovu[10] podmínku s konstantou $L > 0$ vzhledem k y** právě tehdy, když

$$\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \in \Gamma\right)\Big(|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\Big).$$

Řekneme, že **funkce f splňuje na Γ lokálně Lipschitzovu podmínku s konstantou L vzhledem k y** právě tehdy, když $\forall\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$ existuje okolí H bodu $\binom{x_0}{y_0}$ tak, že f splňuje na H Lipschitzovu podmínku s konstantou L vzhledem k y.

Poznámka 3.21. O funkci f, která na Γ splňuje (resp. lokálně splňuje) Lipschitzovu podmínku s konstatnou L vzhledem k y také říkáme, že je **lipschitzovská** (resp. **lokálně lipschitzovská**) **na Γ vzhledem k y**.

Věta 3.22. *Nechť je $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, kde Γ je oblast v $\mathbb{R}^2$ a dále nechť $\partial_y f \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Potom f je lokálně lipschitzovská na Γ vzhledem k y.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$. Protože podle předpokladů je funkce $\partial_y f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, existuje konstanta $L > 0$ a okolí H bodu $\binom{x_0}{y_0}$ takové, že $\forall\binom{x}{y} \in H$ platí, že $|\partial_y f(x, y)| \leq L$. ($L$ existuje podle věty o omezenosti spojité funkce na kompaktu $\overline{H}$, bod $\binom{x_0}{y_0}$ musí být z vnitřku H.) Okolí H lze zřejmě zvolit konvexní.

Pro pevné x se můžeme na funkci $f(x, y)$ dívat jako na funkci jedné reálné proměnné y a na rozdíl $|f(x, y_1) - f(x, y_2)|$ aplikovat větu o přírůstku funkce (viz [6, Věta 5.10]). Potom pro libovolné $\binom{x}{y_1}, \binom{x}{y_2} \in H$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\partial_y f(x, \xi)|\,|y_1 - y_2| \leq L\,|y_1 - y_2|\,,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 3.23. *Nechť funkce f je spojitá na Γ a lokálně lipschitzovská vzhledem k y na Γ. Potom každým bodem $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$ prochází právě jedna integrální křivka úlohy (3.1).*

Důkaz. Věta je důsledkem věty 3.15 a 3.18. □

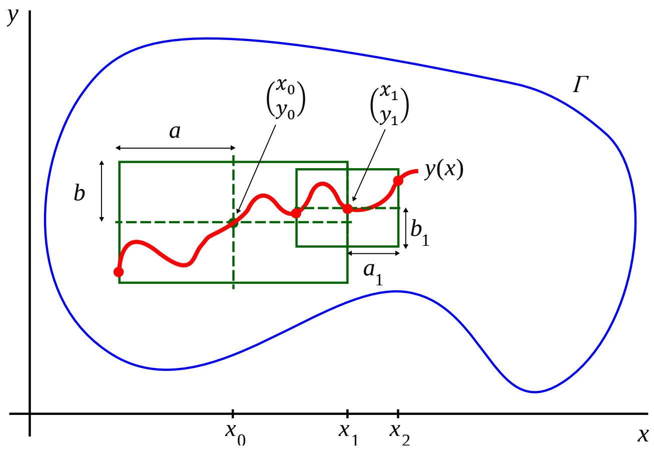
3.1.3 Prodloužitelné a neprodloužitelné řešení

Poznámka 3.24. Podle důkazu Peanovy věty 3.15 jsme k bodu $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$ sestrojili obdélník tak, že funkce $y(x)$ definovaná na intervalu $[x_0 - a, x_0 + a]$ splňovala $\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ rovnici $y'(x) = f(x, y(x))$ a zároveň $y(x_0) = y_0$. Peanova věta nám tedy zaručuje existenci řešení úlohy (3.1) **lokálně**, na jistém okolí (viz obr. 3.3).

Označme

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a, \\ y_1 &= y(x_0 + a). \end{aligned}$$

[10] **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832–1903), německý matematik.



Obrázek 3.3: Peanova věta zaručuje existenci řešení lokálně, ke konstrukci prodloužení řešení.

Zřejmě platí $\binom{x_1}{y_1} \in \Gamma$ a lze tedy řešit úlohu s novou počáteční podmínkou (díky tomu, že nalezené řešení bylo definované na uzavřeném intervalu)

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_1) &= y_1. \end{aligned}$$

Z Peanovy věty vyplývá existence funkce $y^{(1)}(x)$ definované na intervalu $[x_1 - a_1, x_1 + a_1]$, která řeší uvedenou úlohu na otevřeném intervalu $(x_1 - a_1, x_1 + a_1)$. Původní funkci $y(x)$ definovanou na intervalu $[x_0 - a, x_0 + a]$ lze zřejmě prodloužit na interval $[x_0 - a, x_1 + a_1]$ tak, že položíme

$$y(x) = \begin{cases} y(x) & \text{pro } x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ y^{(1)}(x) & \text{pro } x \in (x_0 + a, x_1 + a_1] \end{cases}.$$

Prodloužená funkce y potom řeší původní úlohu na prodlouženém intervalu $(x_0 - a, x_1 + a_1)$.

Tímto postupem lze pokračovat v prodlužování řešení úlohy (3.1) dále. V k-tém kroku prodlužování položíme

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + a_{k-1}, \\ y_k &= y^{(k-1)}(x_{k-1} + a_{k-1}). \end{aligned}$$

Platí $\binom{x_k}{y_k} \in \Gamma$ a z Peanovy věty existuje $y^{(k)}(x)$ definované na intervalu $[x_k - a_k, x_k + a_k]$. Původní řešení tedy můžeme prodloužit o interval $[x_k, x_k + a_k]$ a $\forall x \in (x_0 - a, x_k + a_k)$ je splněna rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$.

Z provedených úvah je zřejmé, že analogicky bychom mohli původní řešení prodlužovat doleva.

V dalším textu se budeme zabývat definicí prodloužitelného a neprodloužitelného řešení, existencí neprodloužitelného řešení a budeme zkoumat, kam až lze řešení prodloužit.

Definice 3.25. Nechť funkce $\varphi(x)$ je řešením úlohy (3.1) na $[\alpha, \beta]$. Říkáme, že řešení φ je **prodloužitelné** právě tehdy, jestliže existuje funkce $\varphi_1(x)$, definovaná na $[\alpha_1, \beta_1]$ (takovém, že $\alpha_1 \le \alpha$, $\beta_1 \ge \beta$ a přitom $\alpha_1 < \alpha \vee \beta_1 > \beta$), taková, že $\varphi_1|_{[\alpha,\beta]} = \varphi$ a φ_1 řeší úlohu (3.1).

Funkce φ_1 se pak nazývá **prodloužením** funkce φ. Řešení úlohy (3.1) definované na (α, β), pro které neexistuje prodloužení, se nazývá **neprodloužitelné**.

Poznámka 3.26. Řešení definované na uzavřeném intervalu lze vždy prodloužit. Neprodloužitelné řešení je definováno pouze na otevřených intervalech.

Věta 3.27. *Nechť $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Pak řešení $\varphi = \varphi(x)$ úlohy (3.1) definované na (α, β) je neprodloužitelné právě tehdy, když platí alespoň jedna z následujících podmínek (pro neprodloužitelnost v daném směru):*

(1) $\beta = +\infty$ (ve směru doprava), resp. $\alpha = -\infty$ (ve směru doleva),

(2) $|\varphi(x)| \to +\infty$ pro $x \to \beta_-$, resp. pro $x \to \alpha_+$,

(3) $\varrho(\binom{x}{\varphi(x)}, \partial\Gamma) \to 0$ pro $x \to \beta_-$, resp. pro $x \to \alpha_+$.

Důkaz. Věta je ekvivalencí a je tedy třeba dokázat obě implikace.

1. $\underline{\Leftarrow}$: Předpokládejme postupně splnění podmínky (1), (2) a (3).
   (1) Nechť $\beta = +\infty$. Potom (α, β) nelze prodloužit za β, a tedy φ je neprodloužitelné (doprava). Analogicky se ukáže neprodloužitelnost doleva pro bod α.
   (2) Pokud φ lze prodloužit za β, pak lze určitě vyčíslit φ v bodě $x = \beta$, tzn. φ je řešením (3.1). Potom $\exists \lim\limits_{x\to\beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$, což je spor s podmínkou (2).
   (3) Pokud lze φ prodloužit za β, pak $\lim\limits_{x\to\beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$. Potom také $\lim\limits_{x\to\beta_-} \binom{x}{\varphi(x)} \in \Gamma$. Z podmínky (3) pak plyne $\lim\limits_{x\to\beta_-} \binom{x}{\varphi(x)} \in \partial\Gamma$. Pak tedy $\lim\limits_{x\to\beta_-} \binom{x}{\varphi(x)} \in \Gamma \cap \partial\Gamma$, což je spor s předpokladem, že Γ je oblast.
2. $\underline{\Rightarrow}$: Důkaz se provede sporem. Nechť $\varphi = \varphi(x)$ je neprodloužitelné řešení a zároveň nechť není splněna žádná z podmínek (1), (2), (3), tj. platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Z lemmatu 3.29 pak $\exists \lim\limits_{x\to\beta_-} \binom{x}{\varphi(x)} \in \mathbb{R}^2$ a ze spojitosti funkce $\varrho(\binom{x}{y}, \partial\Gamma)$ (kde za argument funkce považujeme $\binom{x}{y}$) plyne, že

$$\exists \lim_{x\to\beta_-} \varrho\left(\begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \partial\Gamma\right) \overset{\text{ozn.}}{=} \underbrace{d > 0}_{\text{z } \neg(3)}.$$

   Tento limitní bod tedy leží uvnitř Γ, tj. platí

$$\lim_{x\to\beta_-} \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \lim_{x\to\beta_-} \varphi(x) \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

   Označme $\lim\limits_{x\to\beta_-} \varphi(x) = \varphi(\beta)$. Lze tedy řešit počáteční úlohu $y' = f(x, y)$, $y(\beta) = \varphi(\beta)$ a řešení φ prodloužit za bod β, což je spor.

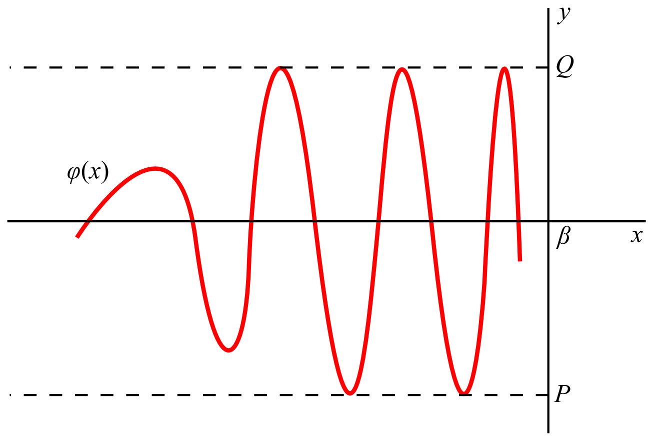
□

Poznámka 3.28. Větu lze intuitivně pochopit tak, že řešení nelze prodloužit, pokud

(1) není kam,

(2) není co,

(3) není kudy.



Obrázek 3.4: Ke konstrukci bodů P a Q.

Lemma 3.29. *Nechť platí předpoklady předchozí věty a navíc nechť platí* $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$*. Potom existuje* $\lim\limits_{x \to \beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$*.*

Důkaz. Při dokazování využijeme následující lemma:

Lemma 3.30. *Spojitá funkce na* $[a, b]$ *nabývá všech hodnot mezi svým maximem a minimem, resp. mezi hodnotami* $f(x')$ *a* $f(x'')$ *pro každé* $x', x'' \in [a, b]$*.*

Důkaz. Viz např. [6, Věta 4.23] □

Z předpokladu $\neg(1)$ plyne $\beta \in \mathbb{R}$. Definujme

$$\pi = \left\{ \{x_n\}_{n \geq 1} \;\middle|\; x_n \xrightarrow{n \to \infty} \beta_- \right\}$$

množinu všech posloupností, které konvergují k bodu β zleva. Dále označme

$$\begin{aligned} P &= \inf \left\{ \liminf_{n \to \infty} \varphi(x_n) \;\middle|\; \{x_n\}_{n \geq 1} \in \pi \right\}, \\ Q &= \sup \left\{ \limsup_{n \to \infty} \varphi(x_n) \;\middle|\; \{x_n\}_{n \geq 1} \in \pi \right\}. \end{aligned}$$

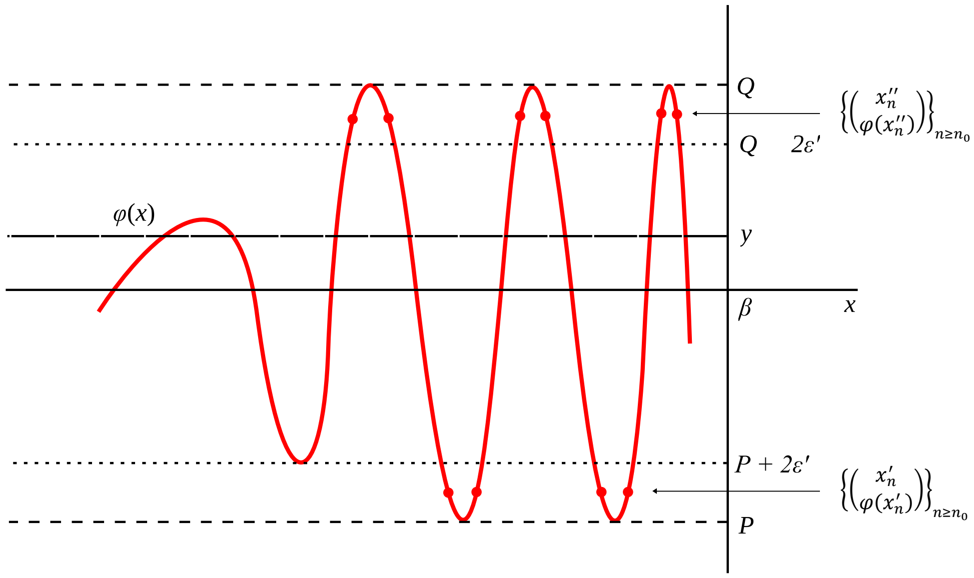
Z konstrukce je zřejmé, že $P \leq Q$ a jistě také platí: $P < +\infty$ a $Q > -\infty$. Dále budeme uvažovat případ, kdy $P, Q \in \mathbb{R}$ – situace by tedy mohla vypadat např. jako na obr. 3.4. Případ, kdy alespoň jedno z P nebo Q není konečné, si laskavý čtenář jistě s radostí přidokáže sám. Hledaná limita zřejmě existuje právě, když $P = Q$ (a v tom případě je reálná). Při dokazování této rovnosti budeme postupovat sporem, tj. předpokládejme, že $P < Q$. Nejdříve vyslovíme pomocné tvrzení.

Tvrzení 3.31.

$$\Big(\forall y \in [P, Q]\Big)\Big(y \textit{ je hromadný bod hodnot } \varphi(x) \textit{ pro } x \to \beta_-\Big).$$

Důkaz. Chceme ukázat, že platí

$$\Big(\forall y \in [P, Q]\Big)\left(\begin{pmatrix} \beta \\ y \end{pmatrix} \text{ je hromadný bod grafu funkce } \varphi\right).$$



Obrázek 3.5: Ke konstrukci posloupností $\{x'_n\}_{n\geq 1}$ a $\{x''_n\}_{n\geq 1}$.

Body $\binom{\beta}{P}$ a $\binom{\beta}{Q}$ tento požadavek zřejmě splňují, což okamžitě vyplývá z definice P a Q (jako limes superior a limes inferior). Pro body $\binom{\beta}{y}$ takové, že $y \in (P, Q)$ postupujume následujícím způsobem.

Vezměme $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}\min\{|y-P|, |y-Q|\}$. Z definice bodu P pak plyne

$$\Big(\exists \{x'_n\}_{n\geq 1} \in \pi\Big)\Big(\liminf_{n\to\infty} \varphi(x'_n) \in \big[P, P+\varepsilon'\big)\Big).$$

Podobně z definice bodu Q plyne

$$\Big(\exists \{x''_n\}_{n\geq 1} \in \pi\Big)\Big(\limsup_{n\to\infty} \varphi(x''_n) \in \big(Q-\varepsilon', Q\big]\Big).$$

Z vlastností limes superior a limes inferior a posloupností $\{x'_n\}$ a $\{x''_n\}$ plyne existence vybraných posloupností (vzhledem k tomu, že původní posloupnosti už nebudeme potřebovat, označíme tyto vybrané posloupnosti stejně jako ty původní), pro něž platí

$$\Big(\exists n_0\Big)\Big(\forall n > n_0\Big)\Big(\varphi(x'_n) \in \big[P, P+2\varepsilon'\big) \wedge \varphi(x''_n) \in (Q-2\varepsilon', Q\big]\Big).$$

Situace je zachycena na obr. 3.5.

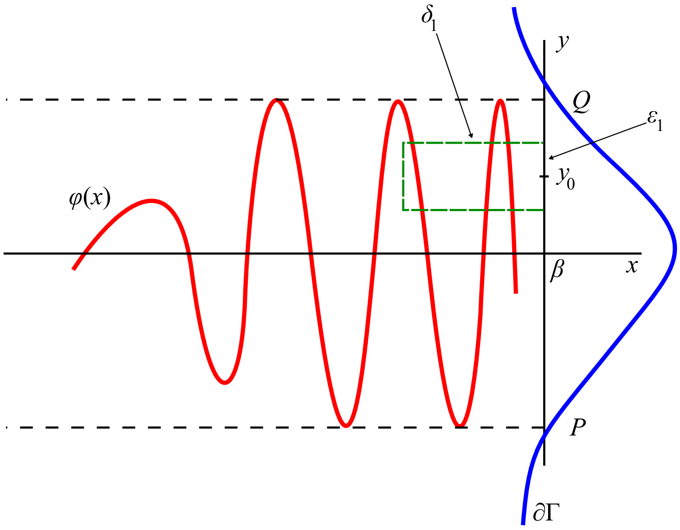
Potom pro $n > n_0$ máme $x'_n, x''_n \in (\alpha, \beta)$ a

$$\begin{aligned} \varphi(x'_n) &< P + 2\varepsilon' < y, \\ \varphi(x''_n) &> Q - 2\varepsilon' > y. \end{aligned}$$

Funkce φ je spojitá a tedy pro každé $n_1, n_2 > n_0$ nabývá všech hodnot mezi $\varphi(x'_{n_1})$ a $\varphi(x''_{n_2})$. Speciálně tedy φ nabývá i hodnoty y. Potom tedy musí platit

$$\Big(\exists \{x'''_n\}_{n\geq 1} \in \pi\Big)\Big(\varphi(x'''_n) = y\Big).$$

Odtud zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} [x'''_n, \varphi(x'''_n)] = \binom{\beta}{y}$ a tedy $\binom{\beta}{y}$ je hromadný bod grafu φ, což jsme chtěli dokázat. $\square$



Obrázek 3.6: Ke konstrukci obdélníku $D \subset \Gamma$.

Ukázali jsme, že všechny body úsečky

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in [P, Q] \right\}$$

jsou hromadnými body grafu φ. Z předpokladu $\neg(3)$[11] plyne, že graf funkce φ se neblíží k hranici $\partial\Gamma$. Situace je zachycena na obr. 3.6. Zřejmě každý bod úsečky M leží buď v Γ anebo v $\partial\Gamma$, není však možné, aby všechny tyto body ležely v $\partial\Gamma$ (to by byl spor s $\neg(3)$).

Zvolme libovolné $y_0 \in (P, Q)$ tak, aby $\binom{\beta}{y_0} \in \Gamma$. Okolo bodu $\binom{\beta}{y_0}$ sestrojíme obdélník (viz obr. 3.6)

$$D = [\beta - \delta_1, \beta] \times [y_0 - \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_1]\,,$$

kde konstanty ε_1, δ_1 volíme tak, aby $D \subset \Gamma$. Označme dále

$$B = \max\left\{ |f(x, y)| \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}.$$

Potom

$$\Big(\exists \{x_n'\}_{n\geq 1}, \{x_n''\}_{n\geq 1} \in \pi\Big)\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\Big(\varphi(x_n') = y_0 - \varepsilon_1 \wedge \varphi(x_n'') = y_0 + \varepsilon_1\Big).$$

Zvolme $\delta > 0$ tak, že $\delta < \delta_1 \wedge \delta < \varepsilon_1/2B$. Potom

$$\Big(\exists n_0\Big)\Big(\forall n > n_0\Big)\Big(x_n', x_n'' \in (\beta - \delta, \beta)\Big)$$

a přitom platí

$$\big|\varphi(x_n') - \varphi(x_n'')\big| = 2\varepsilon_1.$$

[11] tj. $\neg\left(\varrho\left(\binom{x}{\varphi(x)}, \partial\Gamma\right) \xrightarrow{x \to \beta_-} 0\right)$.

Protože však φ je řešením, musí zároveň platit

$$\left|\varphi(x_n') - \varphi(x_n'')\right| = \underbrace{\left|\varphi'(\xi_n)\right|}_{=|f(\xi_n,\varphi(\xi_n))|\leq B} \underbrace{\left|x_n' - x_n''\right|}_{<\delta} < B\delta < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Odtud $|\varphi(x_n') - \varphi(x_n'')| = 2\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_1}{2}$, což je spor.

Potom tedy $P = Q$ a $\lim\limits_{x\to\beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$. □

Poznámka 3.32. Je-li $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast, potom

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \neg(1)$,

(2) $|\varphi(x)|$ omezené $\Rightarrow \neg(2)$.

Může tedy nastat pouze podmínka (3).

Věta 3.33. *Nechť $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$. Potom existuje alespoň jedno neprodloužitelné řešení úlohy (3.1).*

Důkaz. Opakovaně využijeme Peanovy věty a její konstrukce. Řešení budeme prodlužovat bez újmy na obecnosti doprava. Definujme

$$E_n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; |x - x_0| < n,\ |y - y_0| < n, \varrho(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \partial\Gamma) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Potom platí $\overline{E}_n \subset E_{n+1}$ a dále

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E_n\right),$$
$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\Big(\exists M_n > 0\Big)\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_n\right)\Big(|f(x,y)| \leq M_n\Big).$$

V E_1 lze pomocí Peanovy věty sestrojit řešení ψ definované na intervalu $[x_0 - \tilde{a}, x_0 + \tilde{a}]$. Prodlužováním tohoto řešení stejnou konstrukcí lze získat řešení φ na intervalu $[x_0, a_0]$ tak, že $\binom{a_0}{\varphi(a_0)} \notin \overline{E}_1$ (kdyby to nešlo, tj. kdyby neprodloužitelné řešení φ bylo celé v $\overline{E}_1$, pak by bylo omezené a daleko od $\partial\Gamma$, což by byl spor s větou 3.27).

Bod $\binom{a_0}{\varphi(a_0)} \in \Gamma$. Nechť n_1 je nejmenší index takový, že $\binom{a_0}{\varphi(a_0)} \in \overline{E}_{n_1}$. Vezmeme tento bod za počáteční podmínku a (opakovanou) Peanovou konstrukcí φ prodloužíme na $[x_0, a_1]$ tak, že $\binom{a_1}{\varphi(a_1)} \notin \overline{E}_{n_1}$.

Bod $\binom{a_1}{\varphi(a_1)} \in \Gamma$. Nechť n_2 je nejmenší index takový, že $\binom{a_1}{\varphi(a_1)} \in \overline{E}_{n_2}$. Opakovaně prodloužíme na $[x_0, a_2]$ tak, že $\binom{a_2}{\varphi(a_2)} \notin \overline{E}_{n_2}$.

Takto sestrojíme posloupnosti $\{n_k\}_{k\geq 1}$, $\{a_k\}_{k\geq 1}$ rostoucí, tj. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ a přitom

$$\Big(\forall k \in \mathbb{N}\Big)\left(\begin{pmatrix} a_k \\ \varphi(a_k) \end{pmatrix} \notin \overline{E}_{n_k}\right)$$

a řešení φ je prodlouženo na interval $\left[x_0, \lim\limits_{k\to\infty} a_k\right]$. Označme $\overline{a} = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$.

Nechť neplatí ani jedna z podmínek věty 3.27 (tj. platí $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$). Potom, podle lemmatu 3.29, existuje $\lim\limits_{k\to\infty} \binom{a_k}{\varphi(a_k)}$ a je rovna $[\overline{a}, \varphi(\overline{a})] \in \Gamma$ a tedy

$$\Big(\exists \varrho_0 > 0\Big)\Big(\overline{B}([\overline{a}, \varphi(\overline{a})], \varrho_0) \subset \Gamma\Big).$$

Pak

$$\Big(\exists d_0 > 0\Big)\Big(\exists k_0\Big)\Big(\forall k > k_0\Big)\left(\begin{pmatrix} a_k \\ \varphi(a_k)\end{pmatrix} \in B([\overline{a}, \varphi(\overline{a})], \varrho_0) \ \wedge \ \varrho([\begin{pmatrix} a_k \\ \varphi(a_k)\end{pmatrix}, \partial\Gamma) > d_0\right).$$

Navíc

$$\Big(\exists k_1\Big)\Big(\forall k > k_1\Big)\Big(d_0 > \frac{1}{n_k} \ \wedge \ |x_0 - \overline{a}| + \varrho_0 + |y_0 - \varphi(\overline{a})| < n_k\Big).$$

Pak ovšem

$$\Big(\forall k > \max\{k_0, k_1\}\Big)\left(\begin{pmatrix} a_k \\ \varphi(a_k)\end{pmatrix} \in E_{n_k}\right),$$

což je spor s předpokladem $\neg(1) \wedge \neg(2) \wedge \neg(3)$. Z věty 3.27 pak plyne, že φ je neprodloužitelné. □

3.1.4 Věta o hladkosti a o spojité závislosti na datech

Věta 3.34 (o hladkosti, resp. o tzv. regularitě)**.** *Nechť $f = f(x, y)$ má na Γ spojité derivace vzhledem k x a y řádu $p \geq 0$. Pak řešení úlohy (3.1) má spojité derivace podle x řádu $p + 1$.*

Důkaz. Řešíme úlohu

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

kde $f \in \mathcal{C}^{(p)}(\Gamma)$, $p \geq 0$. Důkaz se provede neúplnou matematickou indukcí podle $k \leq p$.

Zvolme $k = 0$. Potom z Peanovy věty 3.15 máme řešení $\varphi = \varphi(x)$ na $[x_0 - a, x_0 + a]$, a platí $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ pro $\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$. Funkce φ je tedy spojitá (f je také spojitá), a tedy $f(x, \varphi(x))$ je také spojitá. Odtud zřejmě φ' je spojitá, což znamená $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}$.

Předpokládejme, že tvrzení věty platí, pro $0 \leq k - 1 < p$ a dokažme jej i pro k. Víme tedy, že $\varphi \in \mathcal{C}^{(k)} \wedge f \in \mathcal{C}^{(k)}$. Potom zřejmě $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \in \mathcal{C}^{(k)}$, a tedy $\varphi \in \mathcal{C}^{(k+1)}$. □

Poznámka 3.35. Následovat by měla věta o spojité závislosti na datech. Při jejím dokazování však narazíme na nerovnost, s níž se ještě setkáme i v dalších částech textu. Připravíme si pro ni proto zvláštní způsob zpracování – pomocí tzv. Grönwallova lemmatu.

Lemma 3.36 (Grönwallovo[12])**.** *Nechť $u : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}_0^+$ je spojitá a nechť $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ platí*

$$u(x) \leq \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} \beta u(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

kde $\alpha, \beta \geq 0$.

[12] **Thomas Hakon Grönwall** (1877–1932), švédský matematik.

Potom $\forall x \in [x_0, x_0 + a]$ *platí*

$$u(x) \leq \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} \beta u(\xi)\mathrm{d}\xi \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}.$$

Důkaz. Označme

$$v(x) = \alpha + \int\limits_{x_0}^{x} \beta u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Funkce v je zřejmě spojitě diferencovatelná a pro její derivaci platí

$$v'(x) = \beta u(x) \leq \beta v(x).$$

Dostali jsme diferenciální nerovnost, kterou po snadné úpravě a po vynásobení kladným výrazem $\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}$ převedeme na tvar

$$v'(x)\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)} - \beta v(x)\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v(x)\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)}\right) \leq 0.$$

Tuto nerovnost můžeme integrovat (v mezích x_0 až x). Z věty o nerovnostech v integrálech ([6, Věta 6.12]) plyne, že nerovnost mezi integrandy se po integraci zachová. Dostaneme tedy

$$v(x)\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)} - v(x_0) \leq 0,$$

odkud

$$v(x) \leq \underbrace{v(x_0)}_{=\alpha} \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)} = \alpha \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}.$$

Potom tedy platí

$$u(x) \leq v(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(x-x_0)},$$

čímž je důkaz lemmatu ukončen. □

Poznámka 3.37. Snadno si také rozmyslíme, že lze vyslovit i následující tvrzení.

Nechť $u : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}_0^+$ je spojitá a nechť $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ platí

$$u(x) \leq \alpha + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \beta u(\xi)\mathrm{d}\xi \right|,$$

kde $\alpha, \beta \geq 0$.

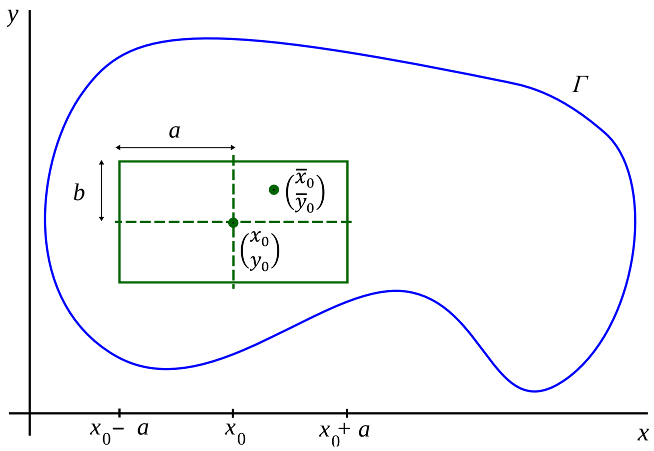
Potom $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ platí

$$u(x) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta|x-x_0|}.$$

Věta 3.38 (o spojité závislosti na datech)**.** *Nechť* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *je oblast, nechť*

$$\mathscr{F} = \left\{ f : \Gamma \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \textit{ je spojitá }, |f(x,y)| \leq M \textit{ na } \Gamma, |f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq L\,|y - \overline{y}| \right\},$$

kde $M, L > 0$*. Nechť* $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$*,* $y = y(x)$ *řeší úlohu* (3.1) *pro* $f \in \mathscr{F}$ *a je definováno na intervalu* $[x_0 - a, x_0 + a]$*.*



Obrázek 3.7: K důkazu věty o spojité závislosti na datech.

Potom $\Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists \delta > 0\Big)\Big(\forall \overline{x}_0 \in (x_0 - a, x_0 + a)\Big)\Big(\forall \overline{y}_0 \in \mathbb{R}\Big)\Big(\forall \overline{f} \in \mathscr{F}\Big)$*:*
pokud $\Big(|\overline{x}_0 - x_0| < \delta\Big) \wedge \Big(|\overline{y}_0 - y_0| < \delta\Big) \wedge \Big(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma\Big)\Big(\big|\overline{f}(x,y) - f(x,y)\big| < \delta\Big)$*,*
pak $\Big(\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)\Big)\Big(|\overline{y}(x) - y(x)| < \varepsilon\Big)$*, kde* $\overline{y} = \overline{y}(x)$ *řeší úlohu* $y' = \overline{f}(x,y)$*,* $y(\overline{x}_0) = \overline{y}_0$.

Důkaz. Nechť $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$. Potom zřejmě existuje okolí U takové, že $\binom{x_0}{y_0} \in U \subset \overline{U} \subset \Gamma$. V blízkosti bodu $\binom{x_0}{y_0}$ zvolíme bod $\binom{\overline{x}_0}{\overline{y}_0}$ tak, aby ležel v obdélníku sestrojeném během Eulerovy konstrukce okolo bodu $\binom{x_0}{y_0}$ (viz obr. 3.7).

Potom počáteční úlohy

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} y' &= \overline{f}(x,y) \\ y(\overline{x}_0) &= \overline{y}_0 \end{aligned}$$

mají jednoznačně určená řešení definovaná na intervalu $[x_0 - a, x_0 + a]$, která označíme postupně $y = y(x)$ a $\overline{y} = \overline{y}(x)$. Tyto funkce tedy splňují na intervalu $(x_0 - a, x_0 + a)$ rovnosti

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} (\overline{y})'(x) &= \overline{f}(x, \overline{y}(x)) \\ \overline{y}(\overline{x}_0) &= \overline{y}_0 \end{aligned}$$

Po integraci uvedených rovnic s přihlédnutím k počátečním podmínkám obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\mathrm{d}\xi, \\ \overline{y}(x) &= \overline{y}_0 + \int\limits_{\overline{x}_0}^{x} \overline{f}(\xi, \overline{y}(\xi))\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Snadno si rozmyslíme, že integrály na pravé straně uvedených rovnic jsou vlastní Riemannovy.

Jejich odečtením dostaneme

$$
\begin{aligned}
y(x)-\overline{y}(x) &= y_0-\overline{y}_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,y(\xi))\mathrm{d}\xi-\int_{\overline{x}_0}^{x}\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\mathrm{d}\xi\\
&= y_0-\overline{y}_0+\int_{x_0}^{x}\Big[f(\xi,y(\xi))-\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\Big]\mathrm{d}\xi+\int_{x_0}^{\overline{x}_0}\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Výraz $y(x)-\overline{y}(x)$ budeme chtít odhadnout. Proto si připravíme odhady pro jednotlivé výrazy na pravé straně.

(a) Zřejmě lze volit $|y_0-\overline{y}_0|<\delta$, kde $\delta>0$.

(b) Protože $\overline{f}\in\mathscr{F}$ a lze volit $|x_0-\overline{x}_0|<\delta$, platí odhad

$$
\left|\int_{x_0}^{\overline{x}_0}\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\mathrm{d}\xi\right|\le\left|\int_{x_0}^{\overline{x}_0}\underbrace{\left|\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\right|}_{\le M}\mathrm{d}\xi\right|\le M\underbrace{|x_0-\overline{x}_0|}_{<\delta}.
$$

(c) Při odhadu prostředního členu využijeme toho, že při konstrukci, podle předpokladů věty, rovnou požadujeme splnění podmínky

$$
\left(\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\Gamma\right)\left(\left|\overline{f}(x,y)-f(x,y)\right|<\delta\right).
$$

Označme $A=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(\xi,y(\xi))-\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\right]\mathrm{d}\xi\right|$. Protože $f\in\mathscr{F}$, platí

$$
\begin{aligned}
A &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,y(\xi))-\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\right|\mathrm{d}\xi\right|\\
&\le \left|\int_{x_0}^{x}\underbrace{\left|f(\xi,y(\xi))-f(\xi,\overline{y}(\xi))\right|}_{\le L|y(\xi)-\overline{y}(\xi)|}\mathrm{d}\xi\right|+\left|\int_{x_0}^{x}\underbrace{\left|f(\xi,\overline{y}(\xi))-\overline{f}(\xi,\overline{y}(\xi))\right|}_{<\delta}\mathrm{d}\xi\right|\\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x}|y(\xi)-\overline{y}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right|+\delta\underbrace{|x-x_0|}_{\le a}.
\end{aligned}
$$

Potom zřejmě platí následující odhad

$$
|y(x)-\overline{y}(x)|\le\delta+M\delta+a\delta+L\left|\int_{x_0}^{x}|y(\xi)-\overline{y}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\right|.
$$

Označíme-li $u(x)=|y(x)-\overline{y}(x)|$ (u je zřejmě spojitá a nezáporná na $[x_0-a,x_0+a]$), můžeme výše uvedenou nerovnost přepsat do tvaru

$$
u(x)\le(1+M+a)\delta+L\left|\int_{x_0}^{x}u(\xi)\mathrm{d}\xi\right|.
$$

Z Grönwallova lemmatu 3.36, resp. z poznámky 3.37, potom $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ platí

$$|y(x) - \overline{y}(x)| \leq (1 + M + a)\ \delta\ \mathrm{e}^{L|x-x_0|} \leq (1 + M + a)\ \delta\ \mathrm{e}^{La}.$$

Potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ klademe

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + M + a} \mathrm{e}^{-La}$$

a, volíme-li $|\overline{x}_0 - x_0| < \delta$, $|\overline{y}_0 - y_0| < \delta$ a lib. $\overline{f} \in \mathscr{F}$ takovou, že $\left|f(x,y) - \overline{f}(x,y)\right| < \delta$, pak $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ platí, že $|y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon$, což jsme chtěli dokázat. □

3.2 Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice 3.39. Nechť $F = (F^1, \dots, F^n)$, kde $F^k : (\mathbb{R}^{1+n+n}) \to \mathbb{R}$, $k \in \widehat{n}$. Potom soustava

$$\begin{aligned} F^1\left(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ F^n\left(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

pro neznámou vektorovou funkci $y = (y^1, \dots, y^n)$, kde $y^k : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $k \in \widehat{n}$ se nazývá **soustava diferenciálních rovnic 1. řádu**.

Poznámka 3.40. Libovolný systém vyššího řádu (tím máme na mysli, že na levé straně soustavy (3.5) by vystupovaly netriviálně i derivace vyšších řádů), lze převést na systém 1. řádu. Uvažme následující soustavu diferenciálních rovnic řádu $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F^1\left(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^k y^1}{\mathrm{d}x^k}, \dots, \frac{\mathrm{d}^k y^n}{\mathrm{d}x^k}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ F^n\left(x, y^1, \dots, y^n, \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^k y^1}{\mathrm{d}x^k}, \dots, \frac{\mathrm{d}^k y^n}{\mathrm{d}x^k}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Do této soustavy zavedeme substituci ve tvaru

$$z_j^l = \frac{\mathrm{d}^l y^j}{\mathrm{d}x^l},$$

pro všechna $j \in \widehat{n}$ a pro všechna $l = 0, 1, \dots, k-1$. Uvedená soustava pak přejde do tvaru

$$\begin{aligned} F^1\left(x, z_1^0, \dots, z_n^0, z_1^1, \dots, z_n^1, \dots, z_1^{k-1}, \dots, z_n^{k-1}, \frac{\mathrm{d}z_1^{k-1}}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}z_n^{k-1}}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ F^n\left(x, z_1^0, \dots, z_n^0, z_1^1, \dots, z_n^1, \dots, z_1^{k-1}, \dots, z_n^{k-1}, \frac{\mathrm{d}z_1^{k-1}}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}z_n^{k-1}}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z_1^0}{\mathrm{d}x} &= z_1^1, & \dots, && \frac{\mathrm{d}z_n^0}{\mathrm{d}x} &= z_n^1 \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}z_1^{k-2}}{\mathrm{d}x} &= z_1^{k-1}, & \dots, && \frac{\mathrm{d}z_n^{k-2}}{\mathrm{d}x} &= z_n^{k-1}
\end{aligned}$$

což už je soustava 1. řádu.

Definice 3.41. Nechť $f = (f^1, \dots, f^n)$, kde $f^k : (\mathbb{R}^{1+n}) \to \mathbb{R}$, $k \in \widehat{n}$. Pak soustava

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x} &= f^1\left(x, y^1, \dots, y^n\right) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x} &= f^n\left(x, y^1, \dots, y^n\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

se nazývá **soustava diferenciálních rovnic 1. řádu v normálním tvaru** s vektorovým zápisem

$$y' = f(x, y), \tag{3.7}$$

pro neznámou vektorovou funkci $y = (y^1, \dots, y^n)$.

Definice 3.42. Vektorová funkce $y : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, je **řešením** soustavy (3.41) právě tehdy, když splňuje (3.41) $\forall x \in I$ (tj. bodově).

Definice 3.43. Nechť funkce $g = g(x, y^1, \dots, y^n)$ je definována na $A \subset \mathbb{R}^{1+n}$ ($g : A \to \mathbb{R}$). Říkáme, že g **splňuje na A Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y^1, \dots, y^n$ s konstantou** $L > 0$ právě tehdy, když platí

$$\left(\forall (x, y^1, \dots, y^n), (x, \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^n) \in A\right)\left(\left|g(x, y^1, \dots, y^n) - g(x, \hat{y}^1, \dots, \hat{y}^n)\right| \leq L \sum_{k=1}^{n} \left|y^k - \hat{y}^k\right|\right).$$

Říkáme, že funkce g splňuje na A Lipschitzovu podmínku **lokálně** právě tehdy, když pro každý bod $(x_0, y_0^1, \dots, y_0^n) \in A$ existuje jeho okolí $H \subset A$ tak, že g splňuje na H Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y^1, \dots, y^n$ s konstantou $L > 0$.

Poznámka 3.44. Pokud A je otevřená a $\dfrac{\partial g}{\partial y^j} \in \mathcal{C}(A)$, $j \in \widehat{n}$, pak g splňuje na A lokálně Lipschitzovu podmínku.

Věta 3.45 (o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy)**.** *Nechť $\Gamma \subset \mathbb{R}^{1+n}$ je oblast, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ a*

$$\left(\forall j, k \in \widehat{n}\right)\left(\frac{\partial f^k}{\partial y^j} \in \mathcal{C}(\Gamma)\right).$$

Nechť dále $\binom{x_0}{y_0} \in \Gamma$.

Potom existuje $\delta > 0$ a $\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ tak, že funkce $\varphi = \varphi(x)$ řeší počáteční úlohu s vektorovým zápisem

$$\begin{aligned}
y' &= f(x, y), \\
y(x_0) &= y_0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený, $x_0 \in I$, $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení (3.8), potom platí

$$\left(\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\right)\left(\varphi(x) = \psi(x)\right).$$

Poznámka 3.46. Důkaz právě uvedené věty vynecháváme. Analogický důkaz bude proveden pro větu o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Postup důkazu však shrneme do krátkého komentáře.

Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost. Zabývejme se nejdříve existencí řešení počáteční úlohy (3.8). Existence se dokazuje pomocí tzv. **Picardových**[13] **iterací**. Snadno si rozmyslíme, že funkce $\varphi = \varphi(x)$ je řešením úlohy (3.8) právě tehdy, vyhovuje-li integrální rovnici (ve vektorovém tvaru)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi.$$

Nechť je funkce φ řešením úlohy (3.8). Potom zřejmě platí $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Integrací této rovnosti, s přihlédnutím k počátečním podmínkám, přejdeme ke tvaru

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

Odtud tedy plyne, že řešení úlohy (3.8) vyhovuje i uvedené integrální rovnici (tato rovnice v sobě automaticky zahrnuje i příslušné počáteční podmínky). Naopak nechť funkce φ splňuje uvedenou integrální rovnici. Potom je φ zřejmě diferencovatelná a také vyhovuje počátečním podmínkám úlohy (3.8). Derivací integrální rovnosti pak dostaneme rovnost $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, tj. funkce φ je řešením úlohy (3.8).

Nyní provedeme Picardovy iterace. Budeme pracovat na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde parametr δ se blíže určí v průběhu důkazu. V prvním kroku označme

$$\varphi_1(x) = y_0$$

a položme

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

Tímto způsobem postupujeme dále. V k-tém kroku tedy položíme

$$\varphi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{k-1}(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

Vytváříme tak posloupnost funkcí definovaných na symetrickém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. O této posloupnosti ukážeme, že pro vhodné $\delta > 0$ na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ stejnoměrně konverguje k limitní funkci φ, která je řešením dané úlohy.

Jednoznačnost se dokazuje pomocí Grönwallova lemmatu.

[13] **Charles Émile Picard** (1856–1941), francouzský matematik.

3.3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice 3.47. Nechť $a_{ij} : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Pak soustava

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}x} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x)y^j + b_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}x} &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x)y^j + b_n(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

se nazývá **soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu** s vektorovým zápisem

$$y' = \mathbf{A}(x)y + b(x),$$

pro neznámou vektorovou funkci $y = (y^1, \dots, y^n)$.

Poznámka 3.48. Soustavu (3.9) lze formulovat také pro případ

$$\begin{aligned} a_{ij} &: (\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \\ b_j &: (\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \\ y^j &: (\mathbb{R}) \to \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Věta 3.49 (o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $b_j : I \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak úloha*

$$\begin{aligned} y' &= \mathbf{A}(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

má na I řešení $\varphi = \varphi(x)$. Je-li $J \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $x_0 \in J$, $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ řešení (3.10), pak

$$\Big(\forall x \in I \cap J\Big)\Big(\varphi(x) = \psi(x)\Big).$$

Důkaz. Budeme postupovat podle poznámky 3.46.

(1) Nejprve dokážeme existenci. Uvažme, že $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ řeší (3.10) právě tehdy, když

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Big[\mathbf{A}(\xi)\varphi(\xi) + b(\xi)\Big] \mathrm{d}\xi.$$

Položme (Picardovy iterace) pro každé $x \in I$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0, \\ &\vdots \\ \varphi_k(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \Big[\mathbf{A}(\xi)\varphi_{k-1}(\xi) + b(\xi)\Big] \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Tak jsme na intervalu I sestrojili vektorovou funkční posloupnost $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$. Dále dokážeme následující lemma.

Lemma 3.50. *Funkční posloupnost* $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ *konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu* $[\alpha,\beta]\subset I$ *takovém, že* $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $[\alpha,\beta]\subset I$, $x_0\in(\alpha,\beta)$. Chceme ukázat, že $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ konverguje na $[\alpha,\beta]$ stejnoměrně. K tomu využijeme Bolzanovo–Cauchyho kritérium (viz např. [6, Věta 7.8]), které lze zformulovat ve tvaru

$$\Big(\forall\varepsilon>0\Big)\Big(\exists k_0\in\mathbb{N}\Big)\Big(\forall k\in\mathbb{N},k>k_0\Big)\Big(\forall p\in\mathbb{N}\Big)\Big(\forall x\in[\alpha,\beta]\Big)\Big(\left|\varphi^i_{k+p}(x)-\varphi^i_k(x)\right|<\varepsilon\Big),$$

pro všechna $i\in\widehat{n}$.

Dále víme, že funkce $a_{ij}(x)$ a $b_i(x)$ jsou spojité na kompaktním intervalu $[\alpha,\beta]$ a jsou tedy omezené, tj. platí

$$\Big(\exists K>0\Big)\Big(\forall i,j\in\widehat{n}\Big)\Big(\forall x\in[\alpha,\beta]\Big)\Big(|a_{ij}(x)|\leq K,|b_i(x)|\leq K\Big).$$

Zřejmě také platí

$$\Big(\exists Y>0\Big)\Big(\forall j\in\widehat{n}\Big)\Big(\left|y^j_0\right|\leq Y\Big).$$

Z B.-C. kritéria je zřejmé, že budeme muset odhadovat rozdíly tvaru $\left|\varphi^i_{k+1}(x)-\varphi^i_k(x)\right|$. Proto si tyto odhady nejprve připravíme. Zřejmě $\forall i\in\widehat{n}$ platí

$$\begin{aligned}\left|\varphi^i_1(x)-\varphi^i_0(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\xi)y^j_0+b_i(\xi)\Big]\mathrm{d}\xi\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}\Big[\sum_{j=1}^{n}\underbrace{|a_{ij}(\xi)|}_{\leq K}\ \underbrace{|y^j_0|}_{\leq Y}+\underbrace{|b_i(\xi)|}_{\leq K}\Big]\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}\Big[\sum_{j=1}^{n}KY+K\Big]\mathrm{d}\xi\right| = (nY+1)K\left|x-x_0\right|.\end{aligned}$$

Při odhadu $(k+1)$-ního rozdílu dojdeme k rekurentnímu vztahu $\forall i\in\widehat{n}$

$$\begin{aligned}\left|\varphi^i_{k+1}(x)-\varphi^i_k(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\xi)(\varphi^j_k(\xi)-\varphi^j_{k-1}(\xi))\Big]\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{|a_{ij}(\xi)|}_{\leq K}\ \left|\varphi^j_k(\xi)-\varphi^j_{k-1}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\right|.\end{aligned}$$

Abychom tuto rekurenci vyřešili, odhadněme nejdříve rozdíl $\left|\varphi^i_2(x)-\varphi^i_1(x)\right|$, který nám pomůže určit tvar řešení. Jeho platnost potom ověříme prostřednictvím matematické indukce. Zřejmě tedy $\forall i\in\widehat{n}$

$$\left|\varphi^i_2(x)-\varphi^i_1(x)\right|\leq\left|\int_{x_0}^{x}(nY+1)K^2\left|\xi-x_0\right|n\ \mathrm{d}\xi\right|=\frac{1}{2}(nK)^2\left(Y+\frac{1}{n}\right)\left|x-x_0\right|^2.$$

Očekáváme tedy, že platí $\forall i\in\widehat{n}$

$$\left|\varphi^i_k(x)-\varphi^i_{k-1}(x)\right|\leq\frac{1}{k!}(nK)^k\left(Y+\frac{1}{n}\right)\left|x-x_0\right|^k.$$

Pro $k = 1, 2$ již máme platnost tohoto vztahu ověřenu. Předpokládejme, že pro k platí a dokažme ji i pro $k+1$. Pro každé $i \in \widehat{n}$

$$\begin{aligned} \left|\varphi^i_{k+1}(x) - \varphi^i_k(x)\right| &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} K \frac{1}{k!}(nK)^k \left(Y + \frac{1}{n}\right) |\xi - x_0|^k \, \mathrm{d}\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{(k+1)!}(nK)^{k+1} \left(Y + \frac{1}{n}\right) |x - x_0|^{k+1} . \end{aligned}$$

Tím je platnost našeho odhadu ověřena.

Potom $\forall i \in \widehat{n}$

$$\begin{aligned} \left|\varphi^i_{k+p}(x) - \varphi^i_k(x)\right| &\leq \sum_{l=1}^{p} \left|\varphi^i_{k+l}(x) - \varphi^i_{k+l-1}(x)\right| \\ &\leq \underbrace{\sum_{l=1}^{p} \left(Y + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{(k+l)!}(nK)^{k+l} |x - x_0|^{k+l}}_{\text{úsek řady SK na lib. omez. intervalu}} . \end{aligned}$$

Vidíme, že na pravé straně našeho odhadu stojí úsek řady, která je stejnoměrně konvergentní na libovolném omezeném intervalu (poloměr konvergence této řady je zjevně $+\infty$, stejnoměrná konvergence pak plyne např. z [7, Věta 5.5]). V důsledku toho se zřejmě pro $k \to +\infty$ a $p \to +\infty$ musí pravá strana blížit k 0 a lze ji tedy udělat libovolně malou. Odtud funkční posloupnost $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ konverguje na $[\alpha, \beta]$ stejnoměrně a na I lokálně stejnoměrně (vzhledem k libovolnosti $[\alpha, \beta]$).

Tím je důkaz lemmatu dokončen. □

Pokračujeme v dokazování věty o existenci a jednoznačnosti. Označme

$$\varphi_*(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x).$$

Potom v iteračním vztahu

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \big[\mathbf{A}(\xi)\varphi_k(\xi) + b(\xi)\big] \mathrm{d}\xi$$

provedeme limitní přechod $k \to +\infty$, přičemž využijeme stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ na libovolném intervalu $[\alpha, \beta] \subset I$ (tj. i na intervalu s krajními body x_0 a x). Lze tedy provést záměnu limity a integrálu. Dostaneme

$$\varphi_*(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \big[\mathbf{A}(\xi)\varphi_*(\xi) + b(\xi)\big] \mathrm{d}\xi.$$

Odtud vidíme, že platí

$$\Big(\varphi_*(x_0) = y_0\Big) \wedge \Big(\exists \varphi_*'(x)\Big)\Big(\forall x \in I\Big)\Big(\varphi_*'(x) = \mathbf{A}(x)\varphi_*(x) + b(x)\Big).$$

To ale znamená, že φ_* řeší úlohu (3.10), což jsme chtěli dokázat.

(2) Zbývá dokázat jednoznačnost řešení. Nechť $\psi = \psi(x)$ je řešením úlohy (3.10) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Nechť z předchozího postupu máme řešení φ_* na intervalu I. Dosadíme obě řešení do (3.10) a dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_*(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \big[\mathbf{A}(\xi)\varphi_*(\xi) + b(\xi)\big]\mathrm{d}\xi, \\ \psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \big[\mathbf{A}(\xi)\psi(\xi) + b(\xi)\big]\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic získáme rovnici

$$\varphi_*(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi)(\varphi_*(\xi) - \psi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

Uvažme nyní $[\alpha, \beta] \subset I \cap J$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Potom

$$\begin{aligned} \left|\varphi_*^i(x) - \psi^i(x)\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{ij}(\xi)|}_{\le K} \underbrace{\left|\varphi_*^j(\xi) - \psi^j(\xi)\right|}_{\le \|\varphi_*(\xi)-\psi(\xi)\|_2} \mathrm{d}\xi\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} nK \left\|\varphi_*(\xi) - \psi(\xi)\right\|_2 \mathrm{d}\xi\right| \end{aligned}$$

kde jsme využili zřejmou nerovnost

$$\left|\varphi_*^i(x) - \psi^i(x)\right| \le \|\varphi_*(x) - \psi(x)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_*^j(x) - \psi^j(x)\right|^2\right)^{1/2}$$

a odhadů z předchozích částí důkazu. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} \|\varphi_*(x) - \psi(x)\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varphi_*^i(x) - \psi^i(x)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_0}^{x} nK \left\|\varphi_*(\xi) - \psi(\xi)\right\|_2 \mathrm{d}\xi\right|^2\right)^{1/2} \\ &\le n^{1/2}\left|\int_{x_0}^{x} nK \left\|\varphi_*(\xi) - \psi(\xi)\right\|_2 \mathrm{d}\xi\right| \\ &\le n^{3/2}K\left|\int_{x_0}^{x} \left\|\varphi_*(\xi) - \psi(\xi)\right\|_2 \mathrm{d}\xi\right|. \end{aligned}$$

Označíme-li tedy $u(x) = \|\varphi_*(x) - \psi(x)\|_2$, dostáváme nerovnost

$$u(x) \leq n^{3/2} K \left| \int_{x_0}^{x} u(\xi) \mathrm{d}\xi \right|.$$

Z Grönwallova lemmatu 3.36, resp. z poznámky 3.37, pak plyne

$$u(x) \leq 0.$$

Odtud zřejmě

$$\Big(\forall x \in [\alpha, \beta] \subset I \cap J\Big)\Big(\varphi_*(x) = \psi(x)\Big),$$

Sporem ukážeme, že uvedená rovnost musí platit i pro ostatní $x \in I \cap J$. Nechť tedy existuje $x_1 \in I \cap J$ tak, že $\varphi_*(x_1) \neq \psi(x_1)$. Potom zřejmě existuje interval $[\alpha_1, \beta_1] \subset I \cap J$ tak, že $x_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ a $x_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$. Zopakujeme-li nyní předchozí postup, dojdeme ke sporu. Platí tedy

$$\Big(\forall x \in I \cap J\Big)\Big(\varphi_*(x) = \psi(x)\Big).$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

4 Analytické řešení lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu

Definice 4.1. Nechť $q, p_j : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $j \in \widehat{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak rovnice

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{4.1}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.**

Levá strana rovnice (4.1) je hodnotou lineárního diferenciálního operátoru L, tj.

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y. \tag{4.2}$$

Rovnice

$$Ly = 0 \tag{4.3}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice n-tého řádu bez pravé strany**.

Rovnice

$$Ly = q(x) \tag{4.4}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s pravou stranou**.

Poznámka 4.2. V dalším textu budeme o funkcích p_j a q předpokládat, že jsou spojité na nějakém otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Poznámka 4.3. Ukážeme, že lineární diferenciální rovnici n-tého řádu lze převést na soustavu n lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Mějme diferenciální rovnici (4.1) s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0^1 \\ y'(x_0) &= y_0^2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^n \end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned} y^1(x) &= y(x) \\ y^2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ y^n(x) &= y^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Pak soustava 1. řádu

$$\begin{aligned}
(y^1)' &= y^2\\
(y^2)' &= y^3\\
&\vdots\\
(y^{n-1})' &= y^n\\
(y^n)' &= -p_n(x)y^1 - p_{n-1}(x)y^2 - \cdots - p_1(x)y^n + q(x)
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
y^1(x_0) &= y_0^1\\
y^2(x_0) &= y_0^2\\
&\vdots\\
y^n(x_0) &= y_0^n
\end{aligned}$$

je ekvivalentní s úlohou (3.10), kde

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & -p_{n-3} & \cdots & -p_1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ q(x) \end{pmatrix}.$$

Pak existence a jednoznačnost řešení této úlohy je dána příslušnou větou pro úlohu (3.10), tj. větou 3.49.

Tvrzení 4.4. *Nechť $(y_1, \ldots, y_l)$ jsou řešení (4.3). Pak $y = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j y_j$, kde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l$, je řešením (4.3).*

Důkaz. Zřejmě platí $(\forall j \in \widehat{l})(Ly_j = 0)$. Odtud a z linearity operátoru L plyne

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j L y_j = 0 = L\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j y_j\right). \qquad \square$$

Tvrzení 4.5. *Nechť z řeší (4.4). Potom funkce $(y+z)$ řeší (4.4) právě tehdy, když y řeší (4.3).*

Důkaz. Podle předpokladů věty platí $Lz = q$.

(1) $\underline{\Rightarrow}$: $L(y+z) = q \Rightarrow Ly + Lz = q \Rightarrow Ly = 0$.

(2) $\underline{\Leftarrow}$: $Ly = 0 \Rightarrow Lz + Ly = q \Rightarrow L(y+z) = q$. $\square$

Poznámka 4.6. Funkce z se nazývá *partikulární řešení rovnice* (4.4). Funkce y se někdy nazývá *obecné řešení rovnice* (4.3). Blíže k tomu, kdy nazveme funkci y obecným řešením, viz poznámka 4.21.

4.1 Řešení rovnice bez pravé strany

Definice 4.7. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f_j : I \to \mathbb{R}$, $j \in \widehat{k}$. Funkce f_j jsou **lineárně závislé (LZ) na intervalu** I právě tehdy, když platí

$$\Big(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{k}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(x) = 0, x \in I\Big).$$

V opačném případě jsou **lineárně nezávislé (LN) na** I.

Poznámka 4.8. Nechť $J \subset I$. Pak jsou-li funkce f_j LZ na I, jsou LZ také na J.

Příklad 4.9. Uvažme funkce $1, x, x^2, \dots, x^k$ na intervalu $(-1, 1)$. Snadno si rozmyslíme, že tyto funkce jsou na každém intervalu LN, a tedy i na $(-1, 1)$. Fakt, že pro $x = 0$ přejde soubor funkcí do tvaru $1, 0, 0, \dots, 0$, nemá vliv na lineární nezávislost funkcí na celém intervalu $(-1, 1)$.

Ukážeme, že funkce $1, x, x^2, \dots, x^k$ jsou LN na libovolném intervalu I. Podle definice tedy zkoumáme, jaké musejí být koeficienty lineární kombinace, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^{j-1} = 0$$

pro všechna $x \in I$. Zderivujeme-li tuto rovnost k-krát, zjistíme, že odtud plyne $\alpha_k = 0$. Potom rovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x^{j-1} = 0.$$

pro všechna $x \in I$. Rovnost opět zderivujeme, tentokrát $(k-1)$-krát, odkud vyplyne $\alpha_{k-1} = 0$. Tímto postupem nakonec ověříme, že má-li být rovnost splněna pro všechna $x \in I$, musí platit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Tedy funkce $1, x, x^2, \dots, x^k$ jsou LN na libovolném intervalu.

Definice 4.10. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený, a nechť $\forall j \in \widehat{k}$ mají funkce $f_j : I \to \mathbb{R}$ derivace do řádu $k - 1$. Funkce

$$W(x) = W_{f_1,\dots,f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ & & \ddots & \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá **Wrońskiho**[1] **determinant (wrońskián) funkcí** $f_1, \dots, f_k$ **na intervalu** I.

Poznámka 4.11. Matice wrońskiánu se také nazývá *Wrońskiho matice.*

Věta 4.12. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, f_j jsou na I diferencovatelné do řádu $k - 1$ pro všechna $j \in \widehat{k}$, $(f_1, \dots, f_k)$ LZ na I. Pak*

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{f_1,\dots,f_k}(x) = 0\Big).$$

[1] **Józef Maria Hoëne-Wroński** (1778–1853), polský filozof, matematik, fyzik, vynálezce, právník a ekonom.

Důkaz. Protože $(f_1, \ldots, f_k)$ LZ na I, pak podle definice

$$\Big(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{k}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \forall x \in I : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(x) = 0\Big).$$

Z předpokladu diferencovatelnosti pak také plyne, že $\forall x \in I$ a $\forall l \in \widehat{k-1}$ platí

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j^{(l)}(x) = 0.$$

Vidíme tedy, že sloupce Wrońskiho determinantu jsou LZ (pro každé $x \in I$ a se stejnými koeficienty α_i). Proto musí platit

$$W_{f_1,\ldots,f_k}(x) = 0, \qquad \forall x \in I,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 4.13. Předchozí větu jsme vyslovili ve formě implikace. Snadno si rozmyslíme, že opačná implikace za daných předpokladů neplatí.

Uvažme např. funkce $f_1(x) = x^3$ a $f_2(x) = \left|x^3\right|$. Tyto funkce jsou na intervalu $(-1, 1)$ LN. Spočtěme nyní wrońskián funkcí f_1 a f_2 na intervalu $(-1, 1)$. Nejdříve uvážíme, že platí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \qquad \text{pro } x \geq 0, \\ f_1(x) &= -f_2(x) \qquad \text{pro } x < 0. \end{aligned}$$

Zřejmě tedy

$$\begin{aligned} W_{f_1,f_2}(x) &= \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{pro } x > 0, \\ W_{f_1,f_2}(x) &= \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{pro } x < 0, \\ W_{f_1,f_2}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $W_{f_1,f_2}(x) = 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$ i přesto, že funkce f_1 a f_2 jsou na $(-1, 1)$ LN.

Poznámka 4.14. V poznámce 4.3 jsme převedli řešení počáteční úlohy pro rovnici (4.1) na řešení počáteční úlohy příslušné soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Dále se budeme zabývat počáteční úlohou pro rovnici (4.1), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y &= q(x), \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Poznámka 4.15. Několik poznámek k rovnici bez pravé strany (4.3).

(1) Funkce definovaná předpisem $y(x) = 0$ pro $\forall x \in I$, řeší (4.3).

(2) Pro $q \equiv 0$ a $y_0 = 0, y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0$ v úloze (4.5) platí

$$\Big(\exists_1 \text{ řešení (4.5) } Y = Y(x)\Big)\Big(\forall x \in I\Big)\Big(Y(x) = 0\Big).$$

Důkaz. Z poznámky 4.3 a z věty 3.49 plyne pro (4.5) existence právě jednoho řešení $y = y(x)$ na I. Z bodu (1) této poznámky plyne, že $Y \equiv 0$ (na I) řeší rovnici bez pravé strany, tj. rovnici $Ly = 0$. Funkce Y zřejmě vyhovuje i daným počátečním podmínkám. Odtud tedy plyne

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(Y(x) = y(x) = 0\Big),$$

což jsme chtěli dokázat. □

(3) Nechť $y_1, \dots, y_k$ řeší (4.3) na I, $k \geq n$ a nechť

$$W_{y_1,\dots,y_k}(x_0) = 0 \qquad \text{pro nějaké } x_0 \in I.$$

To znamená, že sloupce matice

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_k(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_k'(x_0) \\ & & \ddots & \\ y_1^{(k-1)}(x_0) & y_2^{(k-1)}(x_0) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

jsou LZ, tj.

$$\Big(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{k}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \Big(\forall l = 0, 1, \ \dots, k-1\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j^{(l)}(x_0) = 0\Big)\Big).$$

Označme $Y(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j y_j(x)$ pro $\forall x \in I$. Potom zřejmě $Y(x_0) = 0, \dots, Y^{(k-1)}(x_0) = 0$ a Y řeší (4.3). Protože $k \geq n$, pak z bodu (2) této poznámky plyne, že $Y(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. Odtud potom

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_k}(x) = 0\Big).$$

Věta 4.16. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení (4.3) na intervalu I:*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0.$$

Pak platí buď

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0\Big)$$

nebo

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0\Big).$$

Důkaz. Mohou nastat dvě možnosti. Buď $(\exists x_0 \in I)(W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0)$ a potom z předchozí poznámky (z bodu (3)) plyne

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0\Big),$$

anebo takové x_0 neexistuje, tj. platí

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0\Big). \qquad \square$$

Poznámka 4.17. Nechť $y_1, \dots, y_n$ řeší (4.3) na I. Potom podle předchozí věty platí buď $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$, anebo $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$.

(a) Uvažme nejdříve první případ, tj. nechť platí $(\forall x \in I)(W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0)$. Zvolme $x_0 \in I$, $W(x_0) = 0$, pak zřejmě existují koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\exists i_0 \in \widehat{n}, \alpha_{i_0} \neq 0$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(l)}(x_0) = 0, \qquad \forall l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definujme

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x).$$

Platí $(\forall l = 0, 1, \dots, n-1)(Y^{(l)}(x_0) = 0)$ a z poznámky 4.15 (bod (2)) plyne $Y(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. Dohromady dostáváme

$$\Big(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{n}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \forall x \in I : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) = 0\Big).$$

To znamená, že funkce $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LZ na I.

Spojíme-li dosažený výsledek s větou 4.12, dostaneme kritérium pro lineární závislost funkcí na intervalu I. Nechť $y_1, \dots, y_n$ řeší (4.3) na I. Potom

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ jsou LZ na } I \Leftrightarrow \Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0\Big).$$

(b) Nechť nyní nastává druhá možnost, tj. pro všechna $x \in I$ platí $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$. Snadno dospějeme k závěru, že

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ jsou LN na } I \Leftrightarrow \Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0\Big).$$

Definice 4.18. Soubor řešení $y_1, \dots, y_n$ na intervalu I rovnice

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \tag{4.3}$$

se nazývá **fundamentální systém** (FS) právě tehdy, když funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou LN na I.

Věta 4.19. *Je-li $(y_1, \dots, y_n)$ fundamentální systém na I, pak každé řešení $y = y(x)$ rovnice (4.3) na I lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x), \qquad \forall x \in I.$$

Důkaz. Nechť $y = y(x)$ řeší (4.3) na I. Potom zřejmě existují derivace $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ na I. Pro zvolené $x_0 \in I$ vyčíslíme hodnoty $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$. Protože $(y_1, \dots, y_n)$ je FS, pak $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \neq 0$. Potom soustava rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(l)}(x_0) = y^{(l)}(x_0), \qquad l = 0, 1, \dots, n-1$$

má právě jedno řešení $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (matice této soustavy je totiž Wrońskiho matice, a ta je regulární).

Označme

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x), \qquad \text{pro každé } x \in I.$$

Potom musí platit $Y^{(l)}(x_0) = y^{(l)}(x_0)$, pro ostatní $x \in I$ zatím nevíme. Definujme

$$z(x) = Y(x) - y(x).$$

Pak z řeší rovnici (4.3) s počátečními podmínkami: $z(x_0) = 0, z'(x_0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(x_0) = 0$. Z poznámky 4.15 (z bodu (2)) pak plyne

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(z(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \in I\Big)\Big(Y(x) = y(x)\Big).$$

To tedy znamená

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x)\Big).$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

Poznámka 4.20. Z právě uvedené věty plyne, že každý soubor $(Y_1, \dots, Y_m)$, $m > n$, funkcí, jež řeší rovnici (4.3) na I, musí být na I LZ.

Poznámka 4.21. Nechť $(y_1, \dots, y_n)$ je FS řešení rovnice bez pravé strany. Potom funkci

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

nazveme *obecným řešením diferenciální rovnice* (4.3).

Poznámka 4.22. Podle předchozí věty platí, že máme-li fundamentální systém $(y_1, \dots, y_n)$, můžeme libovolné řešení rovnice (4.3) získat jako jeho lineární kombinaci. Fundamentální systém tedy tvoří bázi lineárního prostoru a nabízí se otázka volby jiné báze (tj. jiného FS). Tím se zabývá následující věta.

Věta 4.23. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení (4.3) a jsou LN (tj. tvoří FS). Nechť dále*

$$Y_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} y_i(x), \qquad \forall j \in \widehat{n}, \forall x \in I.$$

Potom

$$W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot W_{y_1,\dots,y_n}(x), \qquad \forall x \in I$$

a $(Y_1, \dots, Y_n)$ je FS právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Důkaz. Označme $\forall x \in I$ a $\forall j \in \widehat{n}$

$$Y_j^{(l)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} y_i^{(l)}(x), \qquad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Potom $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) &= \left| \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ & \ddots & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_k^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & \cdots & c_{n2} \\ & \ddots & \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ &= \underbrace{W_{y_1,\dots,y_n}(x)}_{\neq 0} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Odtud je již přímo vidět, že $(Y_1, \dots, Y_n)$ je FS právě tehdy, když $\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$ $\square$

Poznámka 4.24. Nechť $\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ & \ddots & \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ je maticová funkce. Potom

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\det \mathbf{A}(x)\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi \ a_{1\pi(1)}(x) a_{2\pi(2)}(x) \cdots a_{n\pi(n)}(x)\right) \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi \sum_{i=1}^{n} a_{1\pi(1)}(x) \cdots \frac{\mathrm{d}a_{i\pi(i)}(x)}{\mathrm{d}x} \cdots a_{n\pi(n)}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi \ a_{1\pi(1)}(x) \cdots \frac{\mathrm{d}a_{i\pi(i)}(x)}{\mathrm{d}x} \cdots a_{n\pi(n)}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}'(x) & \cdots & a_{in}'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Věta 4.25. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení (4.3) na I, $x_0 \in I$. Potom*

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x) = W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t}.$$

Důkaz. Podle poznámky 4.24 určíme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x)\Big) &= \sum_{l=0}^{n-1} \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(l+1)}(x) & \cdots & y_n^{(l+1)}(x) \\ y_1^{(l+1)}(x) & \cdots & y_n^{(l+1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow (l+1)\text{-ní řádek} \\ \leftarrow (l+2)\text{-hý řádek} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Snadno si totiž rozmyslíme, že všechny subdeterminanty v sumě, až na ten poslední (tj. pro $l = n-1$), jsou subdeterminanty z matic, které mají vždy alespoň dva řádky stejné. Rovněž si můžeme povšimnout, že výsledný determinant se liší od determinantu $W_{y_1,\dots,y_n}(x)$ pouze na posledním řádku.

Protože $y_1, \dots, y_n$ řeší (4.3) na I, lze zřejmě psát $\forall i \in \widehat{n}$

$$
y_i^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j(x) y_i^{(n-j)}(x) = 0, \qquad x \in I.
$$

Odtud můžeme dosadit za $y_i^{(n)}$ do vztahu pro $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x)\Big)$ a po úpravě podle pravidel práce s determinanty dostaneme

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x)\Big) = -\sum_{j=1}^{n} p_j(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-j)}(x) & \cdots & y_n^{(n-j)}(x) \end{vmatrix} = -p_1(x) W_{y_1,\dots,y_n}(x).
$$

Dostali jsme tedy lineární diferenciální rovnici 1. řádu bez pravé strany, tato rovnice je separovatelná a snadno ověříme, že jejím řešením je

$$
W_{y_1,\dots,y_n}(x) = W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t \right\},
$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 4.26. Vzorec z předchozí věty zřejmě platí i pro $(y_1, \dots, y_n)$ LZ na I. V tom případě totiž podle definice musí platit $W(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. Speciálně tedy také $W(x_0) = 0$. Dosadíme-li do vzorce z předchozí věty za $W(x_0) = 0$ zjistíme, že je tato podmínka splněna.

Poznámka 4.27. Zamysleme se nyní nad následující otázkou: Máme-li n funkcí $y_1, \dots, y_n$, které jsou na nějakém otevřeném intervalu I LN a mají na něm derivace do n-tého řádu včetně, zda existuje nějaká diferenciální rovnice bez pravé strany taková, že $(y_1, \dots, y_n)$ je její FS. To nám prozradí následující věta.

Věta 4.28. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ mají na otevřeném intervalu I spojité derivace n-tého řádu a nechť $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Potom existuje právě jedna diferenciální rovnice*

$$Ly = 0$$

tak, že na intervalu I ji funkce $y_1, \dots, y_n$ řeší.

Důkaz. Je třeba ukázat existenci a jednoznačnost.

(1) Nejdříve ukážeme existenci, a to tak, že příslušnou rovnici sestrojíme. Uvažme

$$W_{y,y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ & & \ddots & \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Provedeme rozvoj uvedeného determinantu podle prvního sloupce (viz [4, Věta 82]). Dostaneme

$$W_{y,y_1,\dots,y_n}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l y^{(l)}(x) W_l(x) + (-1)^n y^{(n)}(x) W_{y_1,\dots,y_n}(x),$$

kde $W_l(x)$ je determinant matice, která vznikne z matice determinantu $W_{y,y_1,\dots,y_n}(x)$ vynecháním prvního sloupce a $(l+1)$-ního řádku. Snadno si rozmyslíme, že

$$\Big(\forall i \in \widehat{n}\Big)\Big(W_{y_i,y_1,\dots,y_n}(x) = 0\Big).$$

Z předpokladů věty máme na I zaručeno $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$. Položme pro $\forall j \in \widehat{n}$

$$p_j(x) = \frac{(-1)^j W_{n-j}(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)}.$$

Takto definované funkce p_j jsou zřejmě spojité. Potom rovnice

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = 0$$

je lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s fundamentálním systémem $(y_1, \dots, y_n)$.

(2) Zbývá dokázat jednoznačnost. Důkaz se provede, jako obvykle, sporem. Nechť tedy funkce $y_1, \dots, y_n$ řeší dvě různé diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y &= 0, \\ y^{(n)} + r_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x) y &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic dostaneme diferenciální rovnici

$$(p_k(x) - r_k(x))y^{(n-k)} + \cdots + (p_n(x) - r_n(x))y = 0,$$

kde $k = \min\{j \mid p_j(x) \neq r_j(x)\}$, tzn. k je nejnižší index, kde se koeficienty p_k a r_k liší. Zřejmě platí $k \geq 1$. Je tedy vidět, že funkce $y_1, \ldots, y_n$ řeší diferenciální rovnici $(n-k)$-tého řádu a přitom jsou na I LN, a to je spor. □

Příklad 4.29. Najdeme lineární diferenciální rovnici 3. řádu, jejíž fundamentální systém je tvořen funkcemi x, x^2 a e^x.

Podle důkazu předchozí věty lze tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{(-1)^3\, W(x)} \begin{vmatrix} y & x & x^2 & \mathrm{e}^x \\ y' & 1 & 2x & \mathrm{e}^x \\ y'' & 0 & 2 & \mathrm{e}^x \\ y''' & 0 & 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & \mathrm{e}^x \\ 1 & 2x & \mathrm{e}^x \\ 0 & 2 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x.$$

Provedeme-li v hledané diferenciální rovnici rozvoj determinantu podle 1. sloupce, dostaneme

$$\frac{-1}{W(x)} \left\{ y \begin{vmatrix} 1 & 2x & \mathrm{e}^x \\ 0 & 2 & \mathrm{e}^x \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x & x^2 & \mathrm{e}^x \\ 0 & 2 & \mathrm{e}^x \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} x & x^2 & \mathrm{e}^x \\ 1 & 2x & \mathrm{e}^x \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} - y''' \begin{vmatrix} x & x^2 & \mathrm{e}^x \\ 1 & 2x & \mathrm{e}^x \\ 0 & 2 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Po úpravě a výpočtu příslušných determinantů dostaneme výslednou rovnici ve tvaru

$$y''' - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} y'' + \frac{2x}{x^2 - 2x + 2} y' - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} y = 0.$$

4.2 Řešení rovnice s pravou stranou

Poznámka 4.30 (**Metoda variace konstant** (Lagrange[2])). Uvažujeme diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{4.4}$$

a nechť $(y_1, \ldots, y_n)$ je FS příslušné rovnice bez pravé strany (4.3).

Hledáme řešení (4.4) ve tvaru

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x), \tag{4.6}$$

kde $c_j(x)$ jsou zatím neurčené funkce. Řešíme rovnici n-tého řádu, a proto potřebujeme derivace z až do n-tého řádu. První derivací získáme

$$z'(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j'(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j(x).$$

[2]**Joseph-Louis Lagrange** (1736–1813), italsko-francouzský matematik a astronom.

V poznámce 2.29, kde jsme řešili lineární diferenciální rovnici 1. řádu s pravou stranou, jsme na funkci $D(x)$, jejíž roli zde sehrávají právě funkce $c_j(x)$, kladli jednu dodatečnou podmínku. Snadno si rozmyslíme, že v případě rovnice n-tého řádu můžeme klást až n podmínek. Podmínky samozřejmě volíme tak, aby nám maximálně usnadnily hledání funkcí $c_j(x)$. Nechť tedy platí

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j(x) = 0.$$

Potom druhou derivací (s přihlédnutím k právě uvedené doplňující podmínce) obdržíme vztah

$$z''(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)y_j''(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j'(x).$$

Analogicky jako v prvním kroku požadujeme splnění podmínky

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j'(x) = 0.$$

Tímto způsobem postupujeme dále. V $(n-1)$-ním kroku dostaneme

$$z^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j^{(n-2)}(x),$$

přičemž požadujeme splnění podmínky

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j^{(n-2)}(x) = 0.$$

V posledním, n-tém kroku už jen spočítáme vztah pro n-tou derivaci

$$z^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)y_j^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j^{(n-1)}(x).$$

Odtud tedy dostáváme

$$Lz = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\underbrace{Ly_j}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j^{(n-1)}(x) = q(x),$$

kde jsme využili toho, že funkce z má řešit rovnici (4.4). Dostáváme pak soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j(x) &= 0\\
\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j'(x) &= 0\\
&\vdots\\
\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)y_j^{(n-1)}(x) &= q(x)
\end{aligned}$$

Matice soustavy je regulární, protože je přímo maticí wrońskiánu $W_{y_1,\dots,y_n}(x)$, o němž víme, že je nenulový ($(y_1,\dots,y_n)$ je FS). Existuje tedy právě jedno řešení $c_1'(x),\dots,c_n'(x)$. Podle Cramerova[3] pravidla (viz [4, Věta 83]) tedy platí

$$c_j'(x) = \frac{W_j(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)},$$

kde $W_j(x)$ je determinant matice, která vznikne z matice soustavy nahradíme-li j-tý sloupec sloupcem pravých stran. Odtud potom dostaneme

$$c_j(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_j(\xi)}{W_{y_1,\dots,y_n}(\xi)} \mathrm{d}\xi + d_j.$$

Obecné řešení rovnice (4.4) máme ve tvaru

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_j(\xi)}{W_{y_1,\dots,y_n}(\xi)} \mathrm{d}\xi \right] y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(x).$$

Poznámka 4.31. V předchozí větě jsme se zabývali konstrukcí řešení rovnice (4.4), přičemž jsme předpokládali, že máme k dispozici fundamentální systém $(y_1,\dots,y_n)$. Nyní ukážeme, jakým způsobem takový fundamentální systém získáme. Řešme počáteční úlohy tvaru

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y &= 0, \\ \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} &= \vec{e}_j, \end{aligned}$$

pro všechna $j \in \widehat{n}$. Zde $\vec{e}_j$ značí j-tý vektor standardní báze. Odtud získáme n řešení $y_1,\dots,y_n$. Vzhledem k počátečním podmínkám zřejmě platí $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \neq 0$ a z poznámky 4.15 (bod (3)) plyne $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ (kde I je nějaký otevřený interval, na kterém hledáme řešení). Potom funkce $y_1,\dots,y_n$ jsou LN na I a podle definice tedy tvoří fundamentální systém.

Na závěr jen podotkněme, že naši úvahu by bylo možné zobecnit i pro volbu vektorů libovolné báze (ne standardní).

4.3 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 4.32. Nechť $a_0 \neq 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \widehat{n}_0$, $q : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom rovnice

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = q(x) \tag{4.7}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

[3] **Gabriel Cramer** (1704–1752), švýcarský matematik.

Poznámka 4.33. Podobně jako v předchozím textu zjednodušíme zápis lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstatními koeficienty prostřednictvím diferenciálního lineárního operátoru L. Tzn. místo tvarů (4.7), resp. (4.8), budeme psát jednoduše $Ly = q(x)$, resp. $Ly = 0$.

Věta 4.34. *Funkce* $\mathrm{e}^{\lambda x}$ *je řešením rovnice*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{4.8}$$

právě tehdy, když λ *řeší algebraickou rovnici*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} = 0.$$

Důkaz. Položme $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dosadíme-li nyní do levé strany rovnice (4.8), dostaneme

$$Ly(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(n-j)}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}.$$

Odtud je ihned zřejmé, že $\mathrm{e}^{\lambda x}$ řeší (4.8) právě, když λ řeší $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} = 0$. □

Definice 4.35. Rovnice

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} = 0$$

se nazývá **charakteristická**.

Polynom

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$$

se nazývá **charakteristický**.

Poznámka 4.36. Vzhledem k definici 4.32 a 4.35 je charakteristický polynom $p(\lambda)$ polynomem s reálnými koeficienty. Takové polynomy ovšem mohou mít i komplexní kořeny (máme speciálně na mysli kořeny s nenulovou imaginární částí). Přitom komplexní funkce $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$, kde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je kořenem charakteristického polynomu, splňuje příslušnou diferenciální rovnici ve tvaru (4.8). Z tohoto důvodu by bylo vhodné rozšířit pojem řešení diferenciální rovnice.

Podle definice 1.8 totiž rozumíme řešením diferenciální rovnice reálnou funkci s jistými vlastnostmi. Mohli bychom nyní upustit od požadavku, že řešením může být pouze reálná funkce a nahradit jej požadavkem, že řešením může být komplexní funkce reálné proměnné (přičemž ostatní požadavky na řešení bychom ponechali beze změny). To by nám později ušetřilo práci s konstrukcí reálného fundamentálního systému.

Poznámka 4.37. Charakteristický polynom podle definice 4.35 je polynom stupně n. Takový polynom má právě n obecně komplexních kořenů. V následujících větách se budeme zabývat konstrukcí části fundamentálního systému v případech, kdy jsme nalezli několik navzájem různých kořenů nebo jeden kořen k-násobný.

Naším cílem přitom je zkonstruovat fundamentální systém v obecném případě, kdy máme celkem m navzájem různých kořenů λ_i s násobnostmi k_i, přičemž $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

Věta 4.38. *Nechť* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *jsou různé kořeny charakteristické rovnice. Pak* $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_m x}$ *jsou LN řešení rovnice* (4.8).

Důkaz. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Položme $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i x} = 0$$

a zkoumejme, jaké musejí být koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Derivováním této rovnosti dostaneme

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^l \mathrm{e}^{\lambda_i x} = 0, \qquad \text{pro } l = 0, 1, \dots, n.$$

Z povahy rovnice (4.7) je zřejmé, že $m \leq n$. Můžeme tedy použít právě prvních m takto vytvořených rovností. Dostaneme homogenní soustavu m lineárních rovnic pro m neznámých koeficientů $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Přitom pro determinant matice soustavy platí

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_m x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_m \mathrm{e}^{\lambda_m x} \\ & & \ddots & \\ \lambda_1^{m-1} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{m-1} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \mathrm{e}^{\lambda_m x} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{\lambda_i x} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ & & \ddots & \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}}_{\text{Vandermondeův determinant}} \neq 0.$$

K výpočtu Vandermondeova[4] determinantu viz např. [5, Příklad 516]. Matice homogenní lineární soustavy je regulární a soustava má tedy pouze triviální řešení, tj. $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ (viz [4, Poznámka 16, Věta 45]). Potom funkce $(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_m x})$ jsou LN. □

Věta 4.39. *Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu p. Pak (4.8) řeší LN funkce $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x^2\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$.*

Důkaz. Pro důkaz této věty se nám bude hodit následující lemma.

Lemma 4.40. *Pokud má λ_0 násobnost k, pak $\forall l = 0, 1, \dots, k-1$ je $p^{(l)}(\lambda_0) = 0$.*

Důkaz. Protože λ_0 má násobnost k, lze zřejmě psát

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda),$$

kde Q je polynom stupně $n-k$ takový, že $Q(\lambda_0) \neq 0$. Pro l-tou derivaci polynomu p dostaneme s pomocí známé *Leibnizovy*[5] *formule*[6]

$$p^{(l)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (\lambda - \lambda_0)^{k-j} Q^{(l-j)}(\lambda) \frac{k!}{(k-j)!}, \qquad \text{pro } l = 0, 1, \dots, k-1.$$

Odtud již okamžitě plyne tvrzení lemmatu. □

[4] **Alexandre-Théophile Vandermonde** (1735–1796), francouzský hudebník a chemik.
[5] **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716), německý matematik a filozof.
[6] Nechť funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ mají derivace n-tého řádu, pak platí

$$(\varphi\psi)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varphi^{(i)} \psi^{(n-i)}.$$

Zřejmě platí
$$L(\mathrm{e}^{\lambda x}) = p(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \overset{\text{ozn.}}{=} g(x,\lambda).$$
Nyní si vyjádříme l-tou derivaci g podle λ, $l = 0,1,\ldots,n$. S použitím Leibnizovy formule dostáváme
$$\partial_\lambda^l g(x,\lambda) = \partial_\lambda^l \left(p(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}\right) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j} \mathrm{e}^{\lambda x}.$$
Pro $\lambda = \lambda_0$ zřejmě platí
$$\Big(\forall l = 0,1,\ldots,k-1\Big)\Big(\partial_\lambda^l g(x,\lambda_0) = 0\Big).$$
Přitom pro $l = 0,1,\ldots,k-1$ také platí (záměna derivací, resp. derivace a L, je možná díky hladkosti)
$$\partial_\lambda^l g(x,\lambda_0) = \partial_\lambda^l \Big(L\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\Big)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = L\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)}_{=x^l \mathrm{e}^{\lambda_0 x}}\Bigg)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = 0.$$
To znamená, že funkce $x^l\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$, kde $l = 0,1,\ldots,k-1$, řeší rovnici (4.8).

Zbývá dokázat, že funkce $x^l\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ jsou LN. Položme tedy
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{i-1} \mathrm{e}^{\lambda_0 x} = 0$$
a zkoumejme, jaké odtud plynou požadavky na koeficienty $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Uvedená rovnost nastává zřejmě právě tehdy, když platí
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{i-1} = 0.$$
Snadno si rozmyslíme, že toto může nastat pouze tehdy, je-li $\alpha_1,\ldots,\alpha_k = 0$ (viz příklad 4.9). Tím je důkaz dokončen. □

Věta 4.41. *Nechť $p(\lambda)$ má kořeny $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ s násobnostmi $k_1,\ldots,k_m$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Potom funkce*
$$\begin{array}{cccc} \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ & & \vdots & \\ \mathrm{e}^{\lambda_m x}, & x\mathrm{e}^{\lambda_m x}, & \ldots, & x^{k_m-1}\mathrm{e}^{\lambda_m x} \end{array}$$
tvoří FS rovnice (4.8).

Důkaz. Z předchozí věty víme, že tyto funkce řeší (4.8). Zároveň víme, že funkce na jednotlivých řádcích jsou LN. Zbývá tedy vyšetřit lineární nezávislost i mezi řádky.

Jen pro účely tohoto důkazu definujme stupeň nulového polynomu: $\operatorname{st} p := -1$, je-li p nulový polynom.

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že funkce jsou LZ, tj. existují koeficienty $c_{ij} \in \mathbb{R}$, kde $j \in \widehat{m}, i = 0,1,\ldots,k_j-1$, tak, že
$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=0}^{k_j-1} c_{ij} x^i}_{P_j(x)} \mathrm{e}^{\lambda_j x} = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) \mathrm{e}^{\lambda_j x} = 0 \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R},$$

a přitom

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{k_j-1}|c_{ij}|>0.$$

P_j je zřejmě polynom stupně $s_j \le k_j-1$.

Lemma 4.42. *Za daných předpokladů platí:* $(\forall j\in \widehat{m})(\forall x\in\mathbb{R})(P_j(x)=0)$.

Důkaz. Po vydělení výrazem $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ můžeme rovnost $\sum_{j=2}^{m}P_j(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x}=0$ přepsat do tvaru

$$P_1(x)+\sum_{j=2}^{m}P_j(x)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_1)x}=0.$$

Stupeň polynomu P_1 je s_1. Zderivujeme tedy tuto rovnost (s_1+1)-krát, čímž získáme

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^{s_1+1}}{\mathrm{d}x^{s_1+1}}\Big(P_1(x)\Big)}_{=0}+\sum_{j=2}^{m}Q_j^{(2)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_1)x}=0,$$

kde $\dfrac{\mathrm{d}^{s_1+1}}{\mathrm{d}x^{s_1+1}}P_1(x)=0$, protože jsme derivovali vícekrát, než je stupeň polynomu. Snadno si také rozmyslíme, že stupeň polynomů $Q_j^{(2)}$ je právě s_j.[7]

Novou rovnost upravíme analogicky jako v předchozím kroku (tj. dělíme výrazem $\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$), tím dostaneme

$$Q_2^{(2)}(x)+\sum_{j=3}^{m}Q_j^{(2)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_2)x}=0.$$

Polymom $Q_2^{(2)}$ je stupně s_2. Zderivujeme tedy tuto rovnost (s_2+1)-krát, přejde na tvar

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^{s_2+1}}{\mathrm{d}x^{s_2+1}}\Big(Q_2^{(2)}(x)\Big)}_{=0}+\sum_{j=3}^{m}Q_j^{(3)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_2)x}=0,$$

kde $Q_j^{(3)}$ jsou opět polynomy stupně s_j.

Tento postup opakujeme, dokud nedojdeme k rovnosti

$$Q_m^{(m)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})x}=0 \qquad \text{pro } \forall x\in\mathbb{R},$$

odkud vyplývá $Q_m^{(m)}\equiv 0$. Přitom stupeň polynomu $Q_m^{(m)}$ je právě s_m, tj. stejný, jako stupeň polynomu P_m. Odtud tedy plyne

$$\Big(\forall x\in\mathbb{R}\Big)\Big(P_m(x)=0\Big).$$

Analogicky zpracujeme i ostatní polynomy P_j. □

[7] S použitím Leibnizovy formule totiž dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^{s_1+1}}{\mathrm{d}x^{s_1+1}}\Big(\sum_{j=2}^{m}P_j(x)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_1)x}\Big)=\sum_{j=2}^{m}\underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{s_1+1}\binom{s_1+1}{i}P_j^{(i)}(x)(\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1-i}\Big)}_{=Q_j^{(2)}(x)}\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_1)x}.$$

Pokračujeme v dokazování věty. Podle lemmatu tedy platí

$$\left(\forall j \in \widehat{m}\right)\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\left(P_j(x) = \sum_{i=0}^{k_j-1} c_{ij}x^i = 0\right).$$

Funkce jsou $(1, x, \ldots, x^{k_j-1})$ jsou podle příkladu 4.9 LN na $\mathbb{R}$, a proto pro všechna i, j musí platit, že $c_{ij} = 0$, což je spor. $\square$

Tvrzení 4.43. *Nechť* $z = z(x)$ *řeší* (4.8)*,* $z : (\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$*. Pak* $\operatorname{Re}\{z(x)\}$ *a* $\operatorname{Im}\{z(x)\}$ *řeší* (4.8)*.*

Důkaz. Označme

$$z_1(x) = \operatorname{Re}\{z(x)\} \qquad \text{a} \qquad z_2(x) = \operatorname{Im}\{z(x)\}.$$

Potom protože $z(x)$ řeší (4.8) (v $\mathbb{C}$), pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$Lz(x) = L(z_1(x) + \mathrm{i}z_2(x)) = Lz_1(x) + \mathrm{i}Lz_2(x) = 0.$$

To nastává právě, když $Lz_1(x) = 0$ a $Lz_2(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Poznámka 4.44. Již jsme uvedli, že polynom $p(\lambda)$ je polynom s reálnými koeficienty. Je známo, že je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kořenem tohoto polynomu, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{\lambda}$, a to se stejnou násobností (viz např. [4, Dodatek, Věta 4]). Potom tedy funkce

$$z_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \qquad \text{a} \qquad z_2(x) = \mathrm{e}^{\bar{\lambda} x}$$

řeší (4.8). Označme

$$\lambda = a + \mathrm{i}b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)$$

a analogicky

$$\mathrm{e}^{\bar{\lambda} x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - \mathrm{i}\sin bx).$$

Podle předchozí věty jsou tedy funkce

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda x}\cos(\operatorname{Im}\lambda x) \qquad \text{a} \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda x}\sin(\operatorname{Im}\lambda x)$$

řešením rovnice (4.8). Tato dvě řešení jsou navíc LN na $\mathbb{R}$. K funkci z_2 bychom našli reálné funkce y_1 a $-y_2$. Vidíme tedy, že pro dvě komplexně sdružené funkce z_1, z_2 jsme nalezli dvě LN reálné funkce y_1, y_2 tak, že z_1, z_2 jsou jejich lineární kombinací.

Nechť máme $(z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n)$ FS. Snadno si rozmyslíme, že $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ je rovněž fundamentální systém. K tomu stačí ukázat lineární nezávislost funkcí $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Zřejmě $y_1, y_2 \in [z_1, z_2]_\lambda$, protože

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda x}\cos(\operatorname{Im}\lambda x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{\bar{\lambda}x}}{2} = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2}, \\
y_2(x) &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda x}\sin(\operatorname{Im}\lambda x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{\bar{\lambda}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Sporem se ukáže, že je-li $y \in [z_1, z_2]_\lambda$, $y \neq \theta$, pak $y \notin [y_3, \dots, y_n]_\lambda$. Nechť tedy platí $y \in [z_1, z_2]_\lambda \wedge y \in [y_3, \dots, y_n]_\lambda$. Potom existují koeficienty α_i, $i \in \widehat{n}$ tak, že

$$y = -\alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 = \sum_{i=3}^{n} \alpha_i y_i \qquad \wedge \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0.$$

Po snadné úpravě dostaneme

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i y_i = \theta \qquad \wedge \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0,$$

což je spor s tím, že $(z_1, z_2, y_3, \dots, y_n)$ je FS. Odtud ihned plyne, že $(y_1, \dots, y_n)$ je FS.

Nyní provedeme převod wrońskiánu. Snadno prověříme, že platí

$$W_{z_1, z_2, y_3, \dots, y_n}(x) = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} & & & \\ 1 & -\mathrm{i} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot W_{y_1, \dots, y_n}(x) = -2\mathrm{i} \cdot W_{y_1, \dots, y_n}(x).$$

Provedené závěry lze zobecnit i na případ, kdy násobnost kořene charakteristického polynomu je větší než 1.

Poznámka 4.45. Reálný fundamentální systém tedy sestrojíme následujícím způsobem:

(1) je-li λ_i jednoduchý, reálný kořen, pak do FS zařadíme funkci

$$\mathrm{e}^{\lambda_i x};$$

(2) je-li λ_i k_i-násobný reálný kořen, pak do FS zařadíme funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \dots, x^{k_i - 1} \mathrm{e}^{\lambda_i x};$$

(3) a nakonec, je-li λ_i k_i-násobný kořen z $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, potom do FS zařadíme

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \cos(\operatorname{Im}\lambda_i x), \quad x\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \cos(\operatorname{Im}\lambda_i x), \quad \dots, \quad x^{k_i-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \cos(\operatorname{Im}\lambda_i x), \\ &\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \sin(\operatorname{Im}\lambda_i x), \quad x\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \sin(\operatorname{Im}\lambda_i x), \quad \dots, \quad x^{k_i-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i x} \sin(\operatorname{Im}\lambda_i x). \end{aligned}$$

Poznámka 4.46 (Jak uhodnout partikulární řešení má-li pravá strana speciální tvar.).

Doposud jsme se zabývali především otázkou konstrukce fundamentálního systému rovnice (4.7). Řešíme-li však rovnici s pravou stranou, je třeba kromě fundamentálního systému nalézt také partikulární řešení. Podle poznámky 4.30 můžeme hledat partikulární řešení např. za pomoci metody variace konstant. Snadno si však rozmyslíme, že tento postup je zdlouhavý a výpočetně namáhavý.

Ve zvláštních případech, kdy má pravá strana rovnice speciální tvar, umíme partikulární řešení nalézt snáze:

1. Mějme rovnici ve tvaru
$$Ly = P(x)\mathrm{e}^{ax},$$
kde P je polynom (stupně $p \geq 0$), a je reálná konstanta. Partikulární řešení potom hledáme ve tvaru
$$z(x) = x^k Q(x)\mathrm{e}^{ax},$$
kde k je násobnost čísla a jakožto kořene charakteristického polynomu uvedené diferenciální rovnice (není-li číslo a kořenem, klademe $k = 0$) a Q je polynom stejného stupně jako polynom P.

2. Mějme rovnici ve tvaru
$$Ly = \mathrm{e}^{ax}\big[P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\big],$$
kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce P_1, P_2 jsou polynomy stupňů p_1 a p_2. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$z(x) = \mathrm{e}^{ax}x^k\big[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\big],$$
kde k je násobnost čísla $a + \mathrm{i}b$ jakožto kořene charakteristického polynomu (není-li kořenem, klademe $k = 0$) a funkce Q_1, Q_2 jsou polynomy stupně $\max\{p_1, p_2\}$.

3. Mějme rovnici ve tvaru
$$Ly = q_1(x) + q_2(x),$$
kde q_1 a q_2 jsou reálné funkce spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom partikulární řešení hledáme ve tvaru součtu
$$z(x) = z_1(x) + z_2(x),$$
kde $z_1(x)$ je partikulární řešení rovnice $Ly = q_1(x)$ a $z_2(x)$ je partikulární řešení rovnice $Ly = q_2(x)$.

Rigorózní rozbor těchto případů je proveden např. v [3].

5 Analytické řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice 5.1. Systém ve tvaru
$$y' - \mathbf{A}(x)y = b(x) \tag{3.9}$$
se nazývá **soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu bez pravé strany** právě tehdy, když $b \equiv \theta$. V opačném případě se nazývá **soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s pravou stranou**.

POZNÁMKA 5.2. V dalším textu budeme kvůli větě o existenci a jednoznačnosti předpokládat, že funkce $\mathbf{A}(x)$ a $b(x)$ jsou spojité na nějakém otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

POZNÁMKA 5.3. Analogicky jako v předchozí kapitole můžeme rovnice zapsat kompaktněji pomocí lineárního diferenciálního operátoru L ve tvarech

$$Ly = b(x), \tag{5.1}$$
$$Ly = \theta, \tag{5.2}$$

kde $Ly = y' - \mathbf{A}(x)y$.

POZNÁMKA 5.4. Vzhledem k linearitě platí

$$Lz = b \wedge Ly = \theta \Rightarrow L(y+z) = b.$$

Libovolná funkce z taková, že $Lz = b$, se nazývá *partikulární řešení rovnice* (3.9).

5.1 Řešení soustavy bez pravé strany

POZNÁMKA 5.5. Uvedeme několik poznámek k řešení soustavy bez pravé strany:

(1) Funkce $y \equiv \theta$ řeší rovnici bez pravé strany (5.2).

(2) Počáteční úloha
$$\begin{aligned} y' - \mathbf{A}(x)y &= \theta \\ y(x_0) &= \theta \end{aligned} \tag{5.3}$$
má jediné řešení $y(x) = \theta$, $\forall x \in I$, kde I je definiční obor maticové funkce $\mathbf{A}(x)$. Tvrzení plyne z věty o existenci a jednoznačnosti 3.49.

(3) Pokud funkce $y_1, \ldots, y_n$ řeší rovnici (5.2), potom pro $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ je $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ také řešení rovnice (5.2). Tvrzení plyne z linearity L.

Definice 5.6. Nechť jsou dány funkce $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}^n$, I je interval v $\mathbb{R}$, kde $y_j(x) = (y_j^1(x), \dots, y_j^n(x))$. Potom **wrońskiánem funkcí** $y_1, \dots, y_n$ rozumíme determinant

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & \dots & y_n^2(x) \\ & \ddots & \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Definice 5.7. Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou **na intervalu** I **lineárně závislé (LZ)** právě tehdy, když

$$\Big(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{n}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \forall x \in I : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) = \theta\Big).$$

V opačném případě řekneme, že jsou **lineárně nezávislé (LN) na** I.

Věta 5.8. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou LZ na I. Pak $(\forall x \in I)(W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0)$.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé. □

Poznámka 5.9. Uvažme dvě funkce

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad y_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom zřejmě

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a přitom jsou funkce y_1, y_2 LN na libovolném intervalu.

Vidíme tedy, že tvrzení předchozí věty nelze jednoduše obrátit. Situace je podobná situaci v předchozí kapitole o lineárních diferenciálních rovnicích n-tého řádu, kde jsme zformulovali opačné tvrzení s dodatečným předpokladem, že funkce $y_1, \dots, y_n$ splňovaly rovnici bez pravé strany. Následující věta nás přesvědčí, že takové tvrzení lze zformulovat i zde.

Věta 5.10. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ řeší rovnici (5.2) na intervalu I a nechť*

$$\Big(\exists x_0 \in I\Big)\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0\Big).$$

Potom $y_1, \dots, y_n$ jsou LZ na I.

Důkaz. Je-li $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0$, pak jsou vektory $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ LZ a tedy

$$\Big(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big)\Big(\exists i_0 \in \widehat{n}\Big)\Big(\alpha_{i_0} \neq 0 \wedge \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x_0) = \theta\Big).$$

Definujme funkci Y tak, že

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) \qquad \text{pro každé } x \in I.$$

Potom $Y(x_0) = \theta$ a zároveň Y řeší rovnici (5.2) na intervalu I, což plyne z poznámky 5.5, bodu (3). Potom, využijeme-li ještě bod (2) poznámky 5.5, dostaneme

$$Y(x) = \theta \qquad \text{pro všechna } x \in I$$

a tedy funkce $y_1, \ldots, y_n$ jsou LZ na I. □

Poznámka 5.11. Důsledkem právě uvedené věty je následující tvrzení.

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ řeší rovnici (5.2) na I. Pak platí buď

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\ldots,y_n}(x) = 0\Big),$$

nebo

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(W_{y_1,\ldots,y_n}(x) \neq 0\Big).$$

Definice 5.12. Řekneme, že soubor $y_1, \ldots, y_n$ je **fundamentální systém (FS)** řešení rovnice (5.2) na I právě tehdy, když tyto funkce řeší rovnici (5.2) na I a zároveň jsou LN na I.

Věta 5.13. *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ je FS na I. Pak každé řešení rovnice (5.2) lze v něm jednoznačně vyjádřit (tj. lze jej jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci funkcí $y_1, \ldots, y_n$).*

Důkaz. Nechť $y(x)$ řeší (5.2) na I a nechť $x_0 \in I$. Dále nechť $(y_1, \ldots, y_n)$ je FS na I. Potom soubor vektorů $(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0))$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Pak

$$\Big(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big)\Big(y(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x_0)\Big).$$

Definujme

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) \qquad \text{pro každé } x \in I.$$

Ihned vidíme, že $Y(x_0) = y(x_0)$ a zároveň Y řeší (5.2) na I. Máme tedy počáteční úlohu

$$\begin{aligned} f' - \mathbf{A}(x) f &= \theta, \\ f(x_0) &= Y(x_0). \end{aligned}$$

Podle věty 3.49 má tato úloha jednoznačné řešení a přitom y i Y jsou jejím řešením na I. Musí tedy platit

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(Y(x) = y(x)\Big).$$

Odtud dostáváme

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

□

Poznámka 5.14. Doposud jsme se zabývali situacemi, kdy jsme měli k dispozici nějaký FS. Vůbec jsme však neřešili otázku existence FS. To napravíme v následující větě.

Věta 5.15. *Pro systém (5.2) existuje FS.*

Důkaz. FS získáme řešením počátečních úloh ve tvaru

$$\begin{aligned} y' - \mathbf{A}(x)y &= \theta, \\ y(x_0) &= \vec{e}_j, \end{aligned}$$

pro $j \in \widehat{n}$, kde $\vec{e}_j$ značí j-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$. □

Věta 5.16. *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ řeší (5.2) na I, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, $z_i(x) = \sum\limits_{j=1}^n c_{ij} y_j(x)$, $i \in \widehat{n}$, $x \in I$. Pak $z_1, \ldots, z_n$ řeší (5.2) a platí*

$$W_{z_1,\ldots,z_n}(x) = |\mathbf{C}|\, W_{y_1,\ldots,y_n}(x), \qquad \forall x \in I$$

a tedy $(z_1, \ldots, z_n)$ je FS právě tehdy, když $(y_1, \ldots, y_n)$ je FS a zároveň $|\mathbf{C}| \neq 0$.

Důkaz. Snadno prověříme

$$W_{z_1,\ldots,z_n}(x) = \begin{vmatrix} z_1^1(x) & \ldots & z_n^1(x) \\ & \ddots & \\ z_1^n(x) & \ldots & z_n^n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_n^1(x) \\ & \ddots & \\ y_1^n(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{n1} \\ & \ddots & \\ c_{1n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{C}|\, W_{y_1,\ldots,y_n}(x).$$

Zbývající tvrzení je již zřejmé. □

Věta 5.17. *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ řeší (5.2) na I, $x_0 \in I$. Pak*

$$W_{y_1\ldots,y_n}(x) = W_{y_1\ldots,y_n}(x_0) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr} \mathbf{A}(\xi) \mathrm{d}\xi \right\}, \qquad \forall x \in I.$$

Důkaz. Podle poznámky 4.24 platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\ldots,y_n}(x)\Big) = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_n^1(x) \\ & \ddots & \\ (y_1^j)'(x) & \ldots & (y_n^j)'(x) \\ & \ddots & \\ y_1^n(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix} = (*).$$

Využijeme nyní toho, že podle předpokladů věty řeší y_j rovnici (5.2) a platí tudíž

$$(y_i^j)'(x) = \sum_{l=1}^n a_{jl}(x) y_i^l(x).$$

Dostaneme

$$(*) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{jl}(x) \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_n^1(x) \\ & \ddots & \\ y_1^l(x) & \ldots & y_n^l(x) \\ & \ddots & \\ y_1^n(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow j\text{-tý řádek.} \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

Snadno si rozmyslíme, že determinanty v jednotlivých sčítancích jsou rovny 0 pro $l \neq j$. Pro $l = j$ z nich naopak dostáváme wrońskiány $W_{y_1,\dots,y_n}(x)$. Shrneme-li dosavadní výsledky, máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x)\Big) = (*) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x)}_{\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}(x)} W_{y_1,\dots,y_n}(x).$$

Dostali jsme tedy diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(W_{y_1,\dots,y_n}(x)\Big) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}(x)\; W_{y_1,\dots,y_n}(x),$$

jejímž řešením je (jak se snadno přesvědčíme dosazením)

$$W_{y_1\dots,y_n}(x) = W_{y_1\dots,y_n}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 5.18. *Nechť funkce $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{C}^{(1)}(I)$ a nechť $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ na I. Potom existuje právě jeden systém tvaru (5.2), pro nějž je $(y_1,\dots,y_n)$ FS na I.*

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

(1) Existenci dokážeme konstrukcí. Označme nejdříve

$$D_i(x,y(x)) = \begin{vmatrix} (y^i)'(x) & (y_1^i)'(x) & \dots & (y_n^i)'(x) \\ y^1(x) & y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & & \ddots & \\ y^n(x) & y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

Všimneme si, že pravý dolní minor matice na pravé straně je vlastně wrońskián $W_{y_1,\dots,y_n}(x)$. Rovněž pozorujeme, že

$$\Big(\forall j \in \widehat{n}\Big)\Big(D_i(x,y_j(x)) = 0\Big).$$

Rozvojem determinantu podle 1. sloupce dostáváme

$$D_i(x,y(x)) = (y^i)'(x)\underbrace{W_{y_1,\dots,y_n}(x)}_{\neq 0} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j y^j(x)\tilde{D}_{ij}(x),$$

kde $\tilde{D}_{ij}(x)$ je determinant matice, jež vznikne z matice determinantu $D_i(x,y(x))$ vynecháním 1. sloupce a $(j+1)$-ního řádku.

Sestavíme matici $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ tak, že

$$a_{ij}(x) = (-1)^j\frac{\tilde{D}_{ij}(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)}.$$

Potom

$$y' - \mathbf{A}(x)y = \theta$$

je hledanou diferenciální rovnicí s fundamentálním systémem $(y_1,\dots,y_n)$.

(2) Nechť funkce y_j řeší na intervalu I dvě různé diferenciální rovnice

$$y' - \mathbf{A}(x)y = \theta \qquad \text{a} \qquad y' - \mathbf{B}(x)y = \theta,$$

kde $(\exists x_0 \in I)(\mathbf{A}(x_0) \neq \mathbf{B}(x_0))$.

Potom zřejmě platí

$$\Big(\forall j \in \widehat{n}\Big)\Big(\forall x \in I\Big)\Big(\big(\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x)\big)y_j(x) = \theta\Big)$$

a zároveň vektory $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, pro libovolné pevné $x \in I$. Potom ale musí platit

$$\Big(\forall x \in I\Big)\Big(\mathbf{A}(x) = \mathbf{B}(x)\Big),$$

což je spor. □

5.2 Řešení soustavy s pravou stranou

POZNÁMKA 5.19 (**Metoda variace konstant**). Nechť $(y_1, \dots, y_n)$ je fundamentální systém pro (5.2) na intervalu I. Hledejme řešení rovnice (5.1) ve tvaru

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x),$$

kde $c_j : I \to \mathbb{R}$ pro všechna $j \in \widehat{n}$. Potom platí

$$z'(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \underbrace{y_j'(x)}_{=\mathbf{A}(x)y_j(x)} = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j(x) + \mathbf{A}(x) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) y_j(x)\right)}_{=z(x)}$$

a zároveň

$$z'(x) - \mathbf{A}(x)z(x) = b(x).$$

Dostali jsme tedy soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých $c_j'(x)$ ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x) y_j(x) = b(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ & \ddots & \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1(x) \\ \vdots \\ b^n(x) \end{pmatrix}.$$

Determinant matice soustavy je wrońskián $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$, a proto jsou neznámé $c_j'(x)$ určeny jednoznačně. S využitím Cramerova pravidla dostáváme

$$c_j'(x) = \frac{W_j(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)},$$

kde $W_j(x)$ je determinant matice, která vznikne z matice soustavy nahradíme-li j-tý sloupec sloupcem pravých stran. Potom

$$c_j(x) = \int \frac{W_j(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)} \mathrm{d}x + d_j,$$

kde d_j jsou integrační konstanty. Obecné řešení rovnice s pravou stranou (5.1) potom je

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int \frac{W_j(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)} \mathrm{d}x\right] y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j(x).$$

5.3 Soustavy s konstantními koeficienty

Definice 5.20. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Potom soustavu ve tvaru

$$y' - \mathbf{A}y = b(x) \tag{5.5}$$

nazveme **soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty**.

Poznámka 5.21. Uvažujme rovnici bez pravé strany ve tvaru

$$y' - \mathbf{A}y = \theta.$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} v,$$

kde $v \in \mathbb{R}^n$. Dosadíme-li za y do rovnice, získáme vztah

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} v - \mathbf{A}\mathrm{e}^{\lambda x} v = \theta \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})v = \theta.$$

Řešíme tedy úlohu hledání vlastních čísel a k nim příslušejících vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.

Poznámka 5.22. Než přistoupíme k další větě, připomeneme si tvrzení, které se nám pro její důkaz bude hodit.

Podle *Jordanovy*[1] *věty* (viz [1, Věta 17.8]) je každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ podobná[2] matici $\mathbf{J}$ v tzv. *Jordanově normálním tvaru*. Tj. existuje regulární matice $\mathbf{P}$ tak, že platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{P},$$

kde matici $\mathbf{J}$ lze zapsat v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1^1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{J}_{s_1}^1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{J}_1^p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{J}_{s_p}^p \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathbf{J}_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Zde $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})$, čtvercové matice $\mathbf{J}_j^i$ nazýváme Jordanovy bloky (buňky) příslušné vlastnímu číslu λ_i. Čísla $s_i = \nu_g(\lambda_i)$ jsou geometrické násobnosti vlastního čísla λ_i a zřejmě musí platit

$$\sum_{j=1}^{s_i} \dim \mathbf{J}_j^i = \nu_a(\lambda_i),$$

kde $\nu_a(\lambda_i)$ je algebraická násobnost vlastního čísla λ_i.

Snadno si také rozmyslíme, že každý blok $\mathbf{J}_j^i$ (považujeme-li jej za samostatnou matici) má právě jedno vlastní číslo λ_i s algebraickou násobností rovnou řádu matice $\mathbf{J}_j^i$ a s geometrickou násobností 1. K tomuto vlastnímu číslu tedy přísluší právě jeden vlastní vektor (a pochopitelně jeho libovolné nenulové násobky).

[1] **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838–1922), francouzský matematik.

[2] Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **podobná** matici $\mathbf{B}$ právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{T}$ tak, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$.

Věta 5.23. *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jsou různá vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ s algebraickými násobnostmi $k_1, \ldots, k_p$, $\sum\limits_{j=1}^{p} k_j = n$. Pak FS pro rovnici $y' - \mathbf{A}y = \theta$ má tvar*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} y_{11}(x), & \ldots, & \mathrm{e}^{\lambda_1 x} y_{1k_1}(x) \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x} y_{21}(x), & \ldots, & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} y_{2k_2}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_p x} y_{p1}(x), & \ldots, & \mathrm{e}^{\lambda_p x} y_{pk_p}(x) \end{array},$$

kde $y_{ij}(x)$ je vektorový polynom stupně nejvýše $j-1$ (resp. vektor o složkách ve tvaru polynomů stupně menšího než j).

Důkaz. V rovnici $y' - \mathbf{A}y = \theta$ provedeme substituci $y(x) = \mathbf{P}^{-1}z(x)$, kde $\mathbf{P}$ je matice z poznámky 5.22. Dostaneme tak novou rovnici ve tvaru

$$z' - \mathbf{J}z = \theta.$$

Ihned vidíme, že soustava se „rozpadla“ na několik nezávislých soustav podle bloků matice $\mathbf{J}$. Toho využijeme a řešení budeme hledat po jednotlivých blocích. Nechť např. první blok je tvaru

$$\mathbf{J}_1^1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{k \text{ sloupců}}.$$

Potom je třeba řešit soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} (z^1)' &= \lambda_1 z^1, \\ (z^2)' &= z^1 + \lambda_1 z^2, \\ &\vdots \\ (z^k)' &= z^{k-1} + \lambda_1 z^k. \end{aligned}$$

Přitom klademe $z^i(x) = 0$ pro $i > k$.

Provedeme-li další substituci $z^j(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} u^j(x)$, převedeme soustavu do tvaru

$$\begin{aligned} (u^1)' &= 0, \\ (u^2)' &= u^1, \\ &\vdots \\ (u^k)' &= u^{k-1}. \end{aligned}$$

Pro tuto soustavu však snadno nalezneme FS. Ten obsahuje k funkcí

$$u_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \; u_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x \\ x^2/2 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; u_k(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{k-2}/(k-2)! \\ x^{k-1}/(k-1)! \end{pmatrix}.$$

Nyní je potřeba provést zpětnou transformaci

$$y_j(x) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_j^1(x) \\ \vdots \\ z_j^k(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_j^1(x) \\ \vdots \\ u_j^k(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=y_{1j}(x)} \qquad \text{pro } j = 1, \dots, k.$$

Odtud také vidíme, že řešení je v požadovaném tvaru, kde y_{1j} je vektorový polynom stupně nejvýše $j-1$.

Analogicky se zpracují i ostatní bloky. $\square$

6 Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

Definice 6.1. Nechť $p, p', q \in \mathcal{C}^1\,[a,b]$ a $p(x) \geq c_0 > 0$, pak rovnice (6.1), (6.2) a (6.3)

$$\begin{aligned} -(p(x)y')' + q(x)y &= f(x), \qquad \text{na } x \in (a,b), &(6.1)\\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, &(6.2)\\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0, &(6.3)\end{aligned}$$

se nazývají **okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru** a vztahy (6.2) a (6.3) se nazývají **okrajové podmínky**.

Levou stranu rovnice (6.1) lze opět zapsat pomocí lineárního diferenciálního operátoru L ve tvaru $Ly = -(p(x)y')' + q(x)y$.

Poznámka 6.2. Okrajová úloha nemusí být řešitelná jednoznačně. Například za podmínek $q = 0,\ \alpha_{1,2} = 0,\ \beta_{1,2} = 1$ je $y(x)$ určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Poznámka 6.3 (**Formální postup**). Rovnici (6.1) lze upravit na LDR druhého řádu ve tvaru

$$-p'(x)y'(x) - p(x)y''(x) + q(x)y(x) = f(x).$$

Uvažujme nejprve obecné řešení. Zvolme si fundamentální systém $\{v_1(x), v_2(x)\}$ tak, aby platilo:

- $v_1(x)$ řeší (6.1) a (6.2) a přitom neřeší (6.3).
- $v_2(x)$ řeší (6.1) a (6.3) a přitom neřeší (6.2).

Sestrojíme Wrońskián

$$W_{y_1,y_2}(x) = W_{y_1,y_2}(x_0)\exp\underbrace{\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{p'(\xi)}{p(\xi)}\mathrm{d}\xi\right\}}_{=\ln p(x_0)-\ln p(x)},$$

z něhož získáme

$$\frac{W_{y_1,y_2}(x)}{W_{y_1,y_2}(x_0)} = \frac{p(x_0)}{p(x)} \implies W_{y_1,y_2}(x)p(x) \overset{ozn.}{=} K = \text{konst.} \quad \forall x \in [a,b] \tag{6.4}$$

Pro získání partikulárního řešení provedeme variaci konstanty ($y = y(x),\ v_i = v(x),\ c_i = c(x)$).

$$\begin{aligned} y &= c_1v_1 + c_2v_2\\ y' &= \underbrace{c_1'v_1 + c_2'v_2}_{:=0} + c_1v_1' + c_2v_2'\\ y'' &= c_1'v_1' + c_2'v_2' + c_1v_1'' + c_2v_2''\end{aligned}$$

Na y' jsme položili jednu podmínku. Dosadíme y, y', y'' zpět do (6.1) ($p = p(x),\ q = q(x)$).

$$Ly = p(-c_1'v_1' - c_2'v_2') + c_1(\underbrace{-p'v_1' - pv_1'' + qv_1}_{=Lv_1=0}) + c_2(\underbrace{-p'v_2' - pv_2'' + qv_2}_{=Lv_2=0}) = f(x)$$

Obě označené závorky jsou nulové, neboť $v_1(x)$ i $v_2(x)$ řeší (6.1) bez pravé strany.

Z této rovnice a z předcházející podmínky získáme soustavu rovnic pro c_1' a c_2'.

$$\begin{aligned} c_1'v_1' + c_2'v_2' &= \frac{-f(x)}{p} \\ c_1'v_1 + c_2'v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení nalezneme Cramerovým pravidlem (determinant soustavy je nenulový Wrońskián).

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{1}{W_{y_1,y_2}(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2(x) \\ -f(x)/p(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{v_2(x)f(x)}{K} \\ c_2'(x) &= \frac{1}{W_{y_1,y_2}(x)} \begin{vmatrix} v_1(x) & 0 \\ v_1'(x) & -f(x)/p(x) \end{vmatrix} = -\frac{v_1(x)f(x)}{K} \end{aligned}$$

Konstanta K je z (6.4). Dosadíme do okrajových podmínek:

- Z (6.2) získáme $\alpha_1(c_1v_1 + c_2v_2)(a) + \beta_1(c_1v_1' + c_2v_2')(a) = 0$
- Z (6.3) získáme $\alpha_2(c_1v_1 + c_2v_2)(b) + \beta_2(c_1v_1' + c_2v_2')(b) = 0$

Vytknutím upravíme na

$$\begin{aligned} c_1(a)\underbrace{(\alpha_1v_1(a) + \beta_1v_1'(a))}_{=0} + c_2(a)\underbrace{(\alpha_1v_2(a) + \beta_1v_2'(a))}_{\neq 0} &= 0 \\ c_1(b)\underbrace{(\alpha_2v_1(b) + \beta_2v_1'(b))}_{\neq 0} + c_2(b)\underbrace{(\alpha_2v_2(b) + \beta_2v_2'(b))}_{=0} &= 0 \end{aligned}$$

Nulovost dvou označených závorek vyplývá z volby $v_1(x)$ a $v_2(x)$. Z těchto podmínek tedy vyplývá, že $c_2(a) = c_1(b) = 0$.

Řešení získáme integrací.

$$c_1(x) = -\int_x^b \frac{v_2(s)f(s)}{K}\mathrm{d}s \qquad \text{a} \qquad c_2(x) = -\int_a^x \frac{v_1(s)f(s)}{K}\mathrm{d}s$$

Vztahy lze sjednotit do jednoho použitím tzv. **Greenovy funkce**.

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{K}v_1(s)v_2(x) & \forall s \in [a,x] \\ -\frac{1}{K}v_1(x)v_2(s) & \forall s \in [x,b] \end{cases}$$

Výsledné řešení je pak

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)\mathrm{d}s \tag{6.5}$$

Věta 6.4. *(o existenci) Za daných předpokladů existuje řešení okrajové úlohy ve tvaru* (6.5).

Důkaz. Tvrzení vyplývá z předchozí konstrukce. □

POZNÁMKA 6.5. Jednoznačnost prozkoumáme vyšetřením výrazu $\langle Ly, y\rangle$ (skalární součin na $\mathcal{L}^2$ prostoru všech kvadraticky integrabilních funkcí)

$$\begin{aligned}
\langle Ly, y\rangle &= \int_a^b Ly(x)y(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\left[(-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b \left[(p(x)y'(x))'y\right]\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{p.p.}{=} \left(-\left[p(x)y'(x)y(x)\right]_b^a + \int_a^b p(x)\left|y'(x)\right|^2\mathrm{d}x\right) + \int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x \\
&= -p(b)y'(b)y(b) + p(a)y'(a)y(a) + \int_a^b p(x)\left|y'(x)\right|^2\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ve třetím kroku jsme použili per partes na první sčítanec. V okrajových podmínkách existuje alespoň jedno z α, β nenulové.

- buď $\beta_1 = 0$, pak $y(a) = 0$;
  nebo $\beta_1 \neq 0$, pak $y'(a) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}y(a)$
- buď $\beta_2 = 0$, pak $y(b) = 0$;
  nebo $\beta_2 \neq 0$, pak $y'(b) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}y(b)$

Můžeme pokračovat v úpravách výrazu $\langle Ly, y\rangle$ a využijeme těchto podmínek.

$$\langle Ly, y\rangle = \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(b)y^2(b) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(a)y^2(a) + \int_a^b p(x)\left|y'(x)\right|^2\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

Z definice 6.1 platí $p(x) \geq \mathbf{c}_0 > 0$. Touto nerovností odhadneme výraz $\langle Ly, y\rangle$.

$$\langle Ly, y\rangle \geq \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(b)y^2(b) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(a)y^2(a) + \mathbf{c}_0\int_a^b \left|y'(x)\right|^2\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

Tuto nerovnost jsme si připravili pro důkaz následující věty.

Věta 6.6. *(o jednoznačnosti) Nechť $q(x) \geq 0$ a dále $\alpha_2, \beta_2 \geq 0$, $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ a $\alpha_1, -\beta_1 \geq 0$, $\alpha_1 - \beta_1 > 0$. Pak pokud $\beta_1 = 0 \wedge \beta_2 = 0 \wedge q(x) \geq q_0 > 0$, resp. pokud $\Big(\beta_1 \neq 0 \;\vee\; \beta_2 \neq 0\Big) \wedge \Big(\alpha_1 \neq 0 \;\vee\; \alpha_2 \neq 0\Big) \;\vee\; q(x) \geq q_0 > 0$, řešení okrajové úlohy je jednoznačné.*

Důkaz. Nechť y_1 a y_2 řeší okrajovou úlohu, tj. $Ly_1 = f(x)$ a $Ly_2 = f(x)$. Odečtením získám $L(y_1 - y_2) = 0$, pak i $\langle L(y_1 - y_2), y_1 - y_2\rangle = 0$. Dosadíme $|y_1 - y_2|$ za y do předchozí nerovnosti.

$$\begin{aligned} 0 \ \geq\ & \frac{\alpha_2}{\beta_2} p(b) \left|y_1 - y_2\right|^2 (b) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} p(a) \left|y_1 - y_2\right|^2 (a) + \\ & + c_0 \int_a^b \left|(y_1 - y_2)'\right|^2 (x) \mathrm{d}x + \int_a^b q(x) \left|y_1 - y_2\right|^2 (x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integrací nerovnosti získáme $(y_1 - y_2)(x) = \text{konst.}$ Po přidání předpokladů z tvrzení věty získáme $y_1(x) = y_2(x)$ na $[a, b]$. □

Poznámka 6.7 (**Fyzikální motivace**). Uvažme úlohu vedení tepla stěnou, známe-li teploty na obou stranách této stěny. Tuto úlohu lze formalizovat následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} -ky'' &= f(x), \qquad \text{na } x \in (a, b), \\ y(a) &= T_a, \\ y(b) &= T_b, \end{aligned}$$

kde $y(x)$ je neznámá funkce popisující průběh teploty ve stěně, $f(x)$ je funkce popisující zdroje/propady dané veličiny (tj. teploty) ve stěně, konstanta k je tepelná vodivost stěny a T_a, T_b jsou teploty na krajích stěny. Vidíme tedy, že řešíme *okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici*. Řešení této úlohy s nulovou pravou stranou je uvedeno v příkladu 1.12.

Obecné řešení naší úlohy lze zapsat v následujícím tvaru

$$y(x) = -\frac{1}{k} \int_a^x \int_a^s f(p) \mathrm{d}p \, \mathrm{d}s + C_1 x + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty, které je potřeba určit za pomoci okrajových podmínek. Má tedy platit

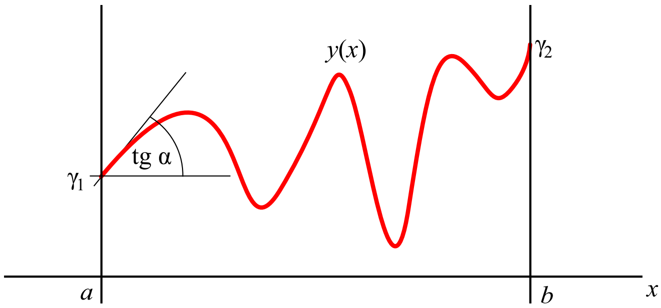
$$\begin{aligned} y(a) = T_a &= C_1 a + C_2, \\ y(b) = T_b &= \underbrace{-\frac{1}{k} \int_a^b \int_a^s f(p) \mathrm{d}p \, \mathrm{d}s}_{=D} + C_1 b + C_2, \end{aligned}$$

což přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} C_1 a + C_2 &= T_a, \\ C_1 b + C_2 &= T_b - D. \end{aligned}$$

Odtud nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{b - a}(T_b - T_a - D), \\ C_2 &= T_a - \frac{a}{b - a}(T_b - T_a - D). \end{aligned}$$



Obrázek 6.1: K vysvětlení metody střelby.

Poznámka 6.8 (**Metoda střelby**). Mějme typovou úlohu

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \qquad \text{kde } x \in (a, b), \\ y(a) &= \gamma_1, \\ y(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Jeden z možných postupů, jak vyšetřit existenci řešení této úlohy, je použití tzv. **metody střelby**, která byla původně určena pro numerické úlohy. Tato metoda spočívá v tom, že místo původní okrajové úlohy (6.6) budeme řešit následující počáteční úlohu

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \gamma_1, \\ y'(a) &= \alpha, \end{aligned} \tag{6.7}$$

kde neznámý parametr α chceme zvolit tak, aby řešení dospělo do bodu $\binom{b}{\gamma_2}$.

Řešením úlohy (6.7) je tedy funkce $y(x; \alpha)$ (v zápisu jsme zdůraznili závislost na parametru α). Volba parametru α přitom odpovídá volbě počátečního sklonu křivky $y(x; \alpha)$, přičemž jej volíme tak, aby platilo $y(b; \alpha) = \gamma_2$. To nám může připomínat volbu náklonu děla s požadavkem, aby vystřelený projektil zasáhl danou souřadnici. Odtud také pochází název této metody. Situace je znázorněna na obr. 6.1.

Úloha (6.7) je počáteční a tudíž můžeme rozhodnout o existenci a jednoznačnosti jejího řešení. Potom stačí zkoumat řešitelnost algebraické rovnice

$$y(b; \alpha) = \gamma_2,$$

které pak odpovídá existence a počet řešení původní okrajové úlohy (6.6).

Literatura

[1] Ladislav Bican. *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[2] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Feynmanovy přednášky z fyziky*, díl 1, Fragment, Havlíčkův Brod, 2000.

[3] Igor Kluvánek, Ladislav Mišík, Marko Švec, *Matematika II*, SVTL, Bratislava, 1961.

[4] Jiří Pytlíček, *Lineární algebra a geometrie*, ČVUT v Praze, 2005.

[5] Jiří Pytlíček, *Cvičení z algebry a geometrie*, ČVUT v Praze, 2008.

[6] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3. vyd., McGraw-Hill, 1976.

[7] Leopold Vrána, *Matematická analýza III – funkční posloupnosti a řady*, ČVUT v Praze.

[8] Leopold Vrána, *Matematická analýza III – diferenciální počet*, ČVUT v Praze.

Rejstřík