

DIFR - zkouškové příklady

Menší kolekce příkladů z písemné části DIFRu. První verzi má na svědomí Petr Kolenko. Já jsem potom neodolal, trochu to překopal a přidal ještě jedno zadání.¹

Hodně štěstí u zkoušky z DIFRu.

zub

<http://linux.fjfi.cvut.cz/~zub/zkousky/>

Jak to funguje na zkoušce

Organizačně to funguje podobně jako numerika. Nejdřív rozdá zadání LIBu, pak je nechá chvíli usadit a pak si vás zavolá. Potom vytáhne tabuli, na které má zadání.²

V písemce jsou 3 příklady. Nebývají těžké. Pokud si projdete všechno, co se dělalo na cvikách, tak nemáte problém.³

Zaručeně tam bude jeden příklad na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, tak se na to podívejte. Bude to nejspíš soustava 2×2 , takže početně to nebude složité. Pokud to nevyřešíte, tak vás vyrazí. To prostě vyžaduje.

Potom se tam objeví nějaká homogenní diferenciální rovnice, možná nějaký Bernoulli nebo Riccati, s tím, že zadá tvar řešení a vy ho najdete a najdete všechna ostatní řešení – viz. teorie.

No a pochopitelně je třeba znát lineární diferenciální rovnice. Možná se taky hodí ty „recepty“ na hledání partikulárních řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, co dělal Humhal na cvikách. Ale bez toho se dá přežít.

Pokud napíšete písemku, čeká vás orál. Zeptá se, jestli umíte důkazy, případně jestli chcete něco lepšího.⁴ Pokud ne, tak bude nejspíš chtít vysypat všechno, co víte o...⁵ Jinak se vás zeptá (nebo bude zvědavě sondovat), co byste tak dokázali. Arzelà mu nestačí, Osgood nebo Peano stačí. $\Rightarrow$ Možná stačí naučit se důkaz jedné, dvou složitějších vět + věci, které chce na trojku, a můžete dostat za dva. On vám totiž nejspíš dá dokázat to, co mu řeknete, že umíte.

2. 6. 2003

1.

$$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$$

Existuje řešení tvaru: $y_1 = ax + b$. Nalezněte všechna řešení.⁶

Pozor: Vychází tam dvě řešení! Substitute: $y = y_1 + \frac{1}{u}$

¹Protože mám ten DIFR tak rád, že jsem si tam zašel ještě jednou. :-)

²To by mě zajímalo, kdy to tam píše. :-)

³Nejspíš tam nedává ty slovní úlohy, co se dělaly na cvikách, ale... bez záruky.

⁴To je ekvivalentní formulace. :-)

⁵Byl jsem svědkem otázek lin. difr., soustavy lin. difr., soustavy difr., lin. difr. n-tého řádu...

⁶Podobný příklad se dělal na cvikách.

2.

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x$$

Charakteristický polynom je polynom stupně 3, ale jeden kořen se dá uhodnout: 1, a pak už je to jasné. Na partikulární řešení se hodí ony již zmiňované Humhalovy recepty. Přímou to napasovat nejde, ale dá se to rozložit: $L(y) = 3e^{2x}$ a $L(y) = -4\sin 2x$ a hledat partikulární řešení pro každé zvlášť.⁷

3.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \cos t \\ \dot{y} &= -x + \sin t \end{aligned}$$

4. 6. 2003

1.

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

Homogenní diferenciální rovnice. Klasická substituce $y = xu$.

2.

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

Bernoulliho rovnice. Dá se to uhodnout i rovnou. Substituce: $y = \frac{1}{u}$

3.

$$\begin{aligned} y' &= -y + z \\ z' &= -y - 3z \end{aligned}$$

9. 6. 2003

1.

$$(2x + y - 4)y' - y - 2 = 0$$

Tak tohle vypadá na první pohled dost nechutně. Ale na druhý pohled to už není tak hrozné – stačí vhodně posunout a je z toho homogenní rovnice:⁸

Nechť $2x + y - 4 \neq 0$, potom:

$$y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4} = \frac{y + 2}{(y + 2) + 2(x - 3)}$$

⁷Kdo byl na Humiho cvikách, ví! :-)

⁸Vůbec jsem si neuvědomil, že je to příklad na rovnici typu $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$. Řešil jsem to alternativně. :-) Neváhejte a nasadte na to klasický postup.

Zavedete substituci:

$$\begin{aligned}u &= y + 2 \\ u' &= y' \\ t &= x - 3\end{aligned}$$

A je z toho homogenní diferenciální rovnice.

Nezapomeňte to dopočítat pro případ $2x + y - 4 = 0$. Z toho vám vyjde, že $y \equiv -2$ řeší rovnici!

2.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x - 4y \\ \dot{z} &= x - 3y\end{aligned}$$

Klasická soustava.

3.

$$y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$$

Tohle je lineární diferenciální rovnice, takže žádný problém.