

1

Přednáška DIFR 16.3.20

Pozn. Probrali jsme Osgoodovu větu o jednoznačnosti, která předpokládá pro úlohu

$$(4) : \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

že existuje f -a $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ spoj., $\Phi(0) = 0, \Phi(s) > 0$ pro $s > 0$

tak, že $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \Phi(|y_1 - y_2|)$ bez ohledu na x

Pro Φ má platit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\varepsilon}^c \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty \quad \text{pro } c > 0$$

Příklady f -a Φ :

① $\Phi(u) = Ku$ pro $K > 0$ tj. $\int_{\varepsilon}^c \frac{du}{Ku} = \frac{1}{K} \ln \frac{c}{\varepsilon}$

② $\Phi(u) = Ku| \ln u |$ pro $K > 0$

ověřte, že $\int_{\varepsilon}^c \frac{du}{Ku| \ln u |} \rightarrow +\infty$ pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$

③ $\Phi(u) = Ku (| \ln u | \ln | \ln u |)$ pro $K > 0$

ověřte, že $\int_{\varepsilon}^c \frac{du}{Ku (| \ln u | \ln | \ln u |)} \rightarrow +\infty$ pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$

Odtud je možné získat f -a dle ①?

Pokud $\partial_y f(x, y) \in C(\Pi)$, pak $\forall [\tilde{x}, \tilde{y}] \in \Pi$ existuje otevřená okolí $B \subset \Pi$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in B \subset \bar{B} \subset \Pi$ tak, že

$$| \partial_y f(x, y) | \leq L \quad \text{na } \bar{B} \quad \text{a } \bar{B} \text{ je konvexní}$$

a lze využít lokální Lipschitzovskosti na $\bar{B}$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

(dokažte s využitím stability f -a $g(s) = f(x, y_1 + s(y_2 - y_1))$ a přivrácení f -a)

②

Protipříkladů počátečních úloh

①

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

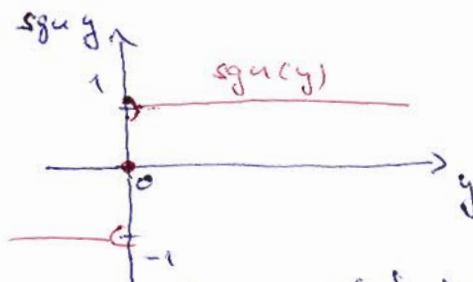
$$y(0) = 0$$

tedy pravá strana je $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ a $\partial_y f(x, y) = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ není spojitá pro $y = 0$!a zde je dokonce neomezenáPřitom řešením je $y(x) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$!a separací získáme $y(x) = \frac{x^3}{24}$ (vypočítejte sami) } tedy není jedinečné

②

$$y' = \operatorname{sgn}(y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

zde každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ prochází jediné řešení (lokálně),a přitom $f(x, y) = \operatorname{sgn}(y)$ není ani spojitáHistorické poznámky

Seznamte se pomocí internetových zdrojů s osobnostmi této teorie:

- Cesare Arzelà (1847 - 1912)
- Giuseppe Peano (1858 - 1932)
- William Fogg Osgood (1864 - 1943)

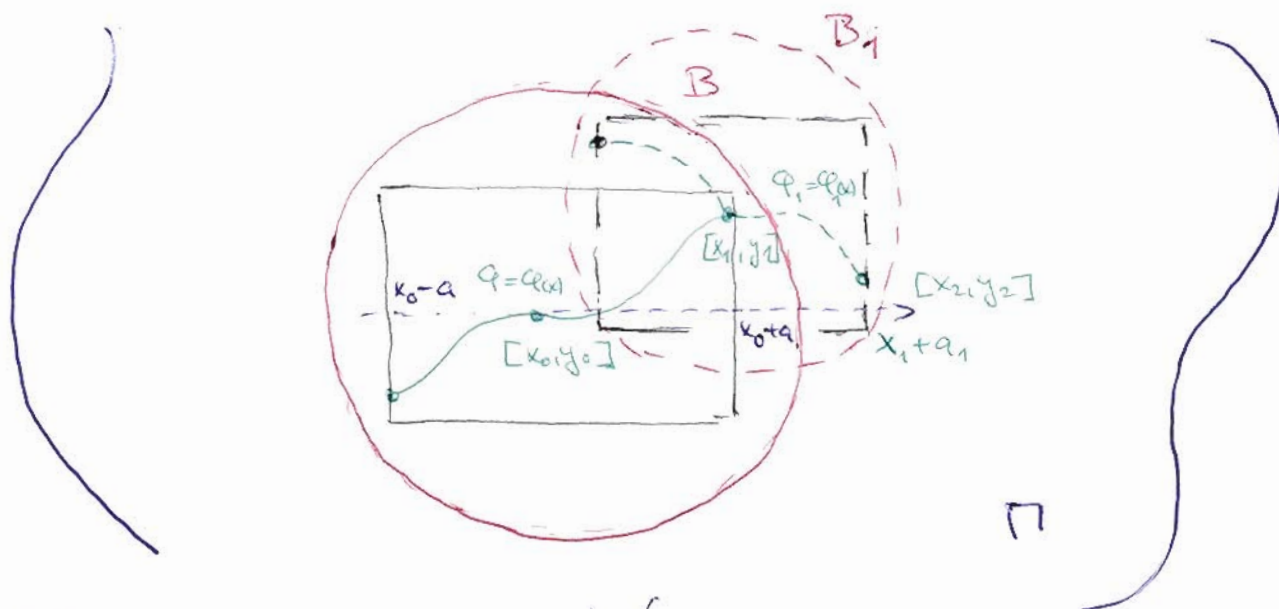
Pojem prodloužitelnosti řešení :

Pozn. Peanova věta poskytuje informaci o existenci řešení úlohy (4)

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

na intervalu $\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle$ v rámci malého okolí $[x_0, y_0] \in B \subset \bar{B} \subset \Pi$.



Popíšeme proces prodloužování

bod $x_1 \stackrel{\text{ozn.}}{=} x_0 + a$, $y_1 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \varphi(x_1)$ je stále v $\bar{B} \subset \Pi$, proto

můžeme složit jako nová počáteční podmínka :

(4.) $y' = f(x, y)$, úloha (4.) je opět řešitelná rovnou
 $y(x_1) = y_1$ Peanovy věty na intervalu $[x_1 - a, x_1 + a]$
 řešením $\varphi_1 = \varphi_1(x)$

Pozn. - toto řešení sice prochází bodem $[x_1, y_1]$, tj. $\varphi(x_1) = \varphi_1(x_1)$, ale jinak se s φ nemůže shodovat (následuje splnění předpokladů Osgoodovy věty) - značeno čárkovaně φ_1

Takto řešení φ na $\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle$ prodloužíme stejně o část $\varphi_1(x)$, $x \in \langle x_1, x_1 + a \rangle$ a získáme bod $x_2 = x_1 + a$ a $y_2 = \varphi_1(x_2)$

Tento proces můžeme opakovat a získáme posloupnost bodů $x_1, x_2, x_3, \dots$ a hodnot $a_1, a_2, \dots$

Otázka : jak tento proces skončí ?

(4)

DIFR 16.3.20

Def Necht' $\varphi = \varphi(x)$ řeší úlohu (4) na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.
 Řekneme, že φ je prodloužitelná doprava (analogicky doleva),
 pokud existuje $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ řeší (4) na intervalu $\langle \alpha, \beta_1 \rangle$, $\beta_1 > \beta$.
 Řešení $\varphi = \varphi(x)$ úlohy (4) na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ se nazývá neprodloužitelná doprava (analogicky doleva), pokud není doprava prodloužitelná.

Pozn. Prodloužitelnost z listu (3) tedy máme pojmenovanou,
 ale nevíme, jak ji ověřit. O tom je následující věta.

Věta Necht' $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $[x_0, y_0] \in \Gamma$ a $f \in C(\Gamma)$.

Řešení úlohy (4) $y' = f(x, y)$ označené $\varphi = \varphi(x)$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$
 $y(x_0) = y_0$ je neprodloužitelná doprava,

právě když platí alespoň jedna z podmínek:

1. $\beta = +\infty$

2. $\varphi = \varphi(x)$ je na levém okolí β neomezená

3. $\lim_{x \rightarrow \beta_-} \varphi([x, \varphi(x)], \partial \Gamma) = 0$

kde $\varphi(\cdot, \cdot)$ je vzdálenost bodů v rovině, $\partial \Gamma$ je hranice Γ .

Pozn. • Analogicky lze větu uplatnit pro „doleva“

• pan tajemník značí hranici $\bar{\Gamma}$:))

dk: súter L=1 :

ad 1. $\beta = +\infty \Rightarrow$ již více neprodloužitelná

ad 2. kdyby φ šlo prodloužit za β , pak $\exists \lim_{x \rightarrow \beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \varphi$ by bylo na okolí β omezená (spor)

ad 3. kdyby φ šlo prodloužit za β , pak $\exists \lim_{x \rightarrow \beta_-} \varphi(x) \in \mathbb{R}$

a tedy i $\varphi([\beta, \lim_{x \rightarrow \beta_-} \varphi(x)], \partial \Gamma) = 0$ a tedy limitní bod

je z hranice $\partial \Gamma$, tedy není uvnitř Γ (spor)

5

PIF12 16.3.20

dlc : směr $\Rightarrow$:

Máme doložit : že je neprodloužitelná doprava $\Rightarrow$ 1. v 2. v 3.

Předpokládáme opat : že je neprodloužitelná $\wedge$ 1. $\wedge$ 2. $\wedge$ 3.
(tj ani jedna podmínka neplatí)

Použijeme následující lemma, které dokážeme až pak.

Lemma Necht' za daných předpokladů neplatí ani jedna z podmínek 1., 2., 3. Pak $\exists$ lim $C(x) \in \mathbb{R}$ $x \rightarrow B_-$.

V důsledku těchto faktů dostaneme :

$$\neg 1. \Rightarrow B \in \mathbb{R}$$

$$\text{lemma} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow B_-} C(x) = Y \in \mathbb{R}$$

$$\neg 3. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow B_-} p([x, C(x)], \partial \Pi) = p([B, Y], \partial \Pi) > 0$$

tedy $\neg 3.$ a zároveň tato limita existuje $\Rightarrow > 0$

$\Rightarrow [B, Y] \in \Pi$ a lze zde opět definovat podstřední úlohu a věnovat se prodloužit za $B \Rightarrow$ (sprav)

Pozn Půlšte tedy dokážeme užé použít Lemma

Moderní zájmovost - FitzHugh - Nagumovy rovnice

pro šíření signálu v excitovatelném prostředí (1961)

jako model přenosu signálu v nervové soustavě

- lze také dohledat informace pomocí internetu