

Kombinatorické důkazy

Příklad: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, n \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \text{počet komisií o } k \text{ členech z } n.$$

Kolik je podmnožin n ?

① $\{1, 2, \dots, n\}$
 $\uparrow$
 A_N

② Pro pevné $k \dots \binom{n}{k}$ sečtu
 $0 \leq k \leq n$

Příklad: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1}$

podmnožiny
 n se sudým
počtem
členů

podmnožiny
 n s lichým
počtem
členů

Kde je Pepa?

$$f: S \rightarrow L$$

Najdeme-li k či

$$f(\text{podmnožina}) =$$

$$= \begin{cases} \text{podmnožina } \{P\}, \text{ když } P \in \text{podmnožina} \\ \text{podmnožina } \emptyset, \text{ když } P \notin \text{podmnožina} \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = ? \text{ počet } \dots$$

$$n! = k!(n-k)! \binom{n}{k}$$

Kolika způsoby lze seřadit n lidí

① $n(n-1) \dots 1 = n!$

② i) Vyberu k lidí, kterých budu prát $\binom{n}{k}$

ii) $k!$ způsoby je seřadím

iii) $(n-k)!$ způsoby je seřadím zbytek

Příklad: $\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{bez } P} + \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{s } P}$

- ① počet k -prvkových množin $\subset \hat{n}$
- ② podmínka na P ev

Příklad: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

① $\{ \underbrace{1}_{A_1}, \underbrace{2}_{A_2}, \dots, \underbrace{n-1}_{A_{n-1}} \mid n \}$

- ② počet podmnožin se sudým počtem prvků

Příklad: Binomická věta: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
 $\underbrace{(a+b) \dots (a+b)}_n$

↑
 vyber k závorek ze kterých a
 ze zbytku b
 sečten přes $k=0, \dots, n$

Příklad: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
 k -prvková komise
 nejmenší předseda
 rest členů komise

Příklad: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$
 počet podmnožin s předsedou
 nejprve vyberu předsedu, rest A_{n-1}

jinak: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{2^{n-1}} = n \cdot 2^{n-1}$

Příklad: $\frac{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$

PS: neba'lesí na uspořádání: $\{0, 1, \dots, n-1, n\}$

LS: $\frac{0 \binom{n}{0} + 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots}{2^n}$



Príklad: $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$, m, n, k permo'

LS: k -členová komisia z m mužů a n žen

PS: podmienka na počet mužů

Príklad: $\binom{m}{k} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} \binom{n-m}{k-m}$

vyberu k -členovú komisiu
a z nich vyberu m mužů

vyberu najprv m mužů
potom doplním komisiu

Príklad: $\gcd\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{m}\right) > 1$, pre $0 < k, m < n$

Dúkaz: sporom. keby $\binom{n}{k} \perp \binom{n}{m}$: vidieť, že $\binom{n}{m} \mid \binom{n}{k} \binom{k}{m}$

preto: $\binom{n}{m} \mid \binom{k}{m}$, spor, nebať $n > k$, keďže $\binom{k}{m} \nmid \binom{n}{m}$

Príklad: $\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

PS: $(k+1)$ prvkov podmnožiny z $n+1$

LS: podmienka na prvok r ^{podmnožiny} s najväčším indexom
 $1, 2, 3, \dots, m, \underbrace{m+1}_{k+1}, \dots, n, n+1$

Fibonacciho čísla

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_k \mid F_m \Leftrightarrow k \mid m$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = 1, f_1 = 1$

f_n - počet spôsobů jak vydláždit chodník o dĺžke n dlaždicami  

$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1$

chodník $n+2$ s akými 1 

podmienka na poslednú dlaždicu



příklad: $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f_n$

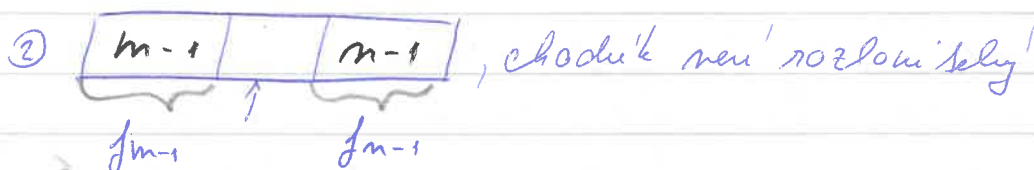
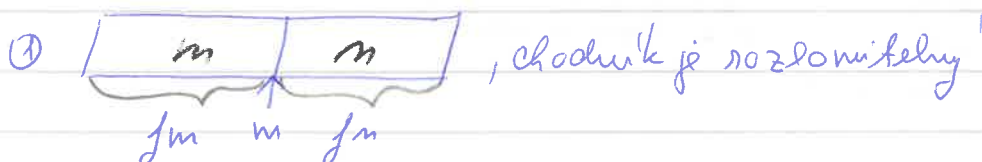
2. hodina

1. Prezentace: Martin Suchor

příklad: $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$

počet kombinací
jak rozdělít
chodník $m+n$

① ②



příklad: $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f_n$

počet možností, jak
rozdělít chodník n

↓ počet kombinací kombinací $\Rightarrow i$
domino $\wedge$ kombinace $\Rightarrow i$

$$0 \leq i \leq \frac{n}{2}$$

1 domino $\Rightarrow 2i$ pozic

čtverečky $\Rightarrow n - 2i$

* postupně projde všechny možnosti

příklad: $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+1}$



$i \dots$ # domino napravo } $(i+j)$ domino
 $j \dots$ # domino nalevo }
 $2(i+j)$ pozic
 $(2n+1) - 2(i+j) \dots$ # čtverečků

Catalanovy čísla

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}, \quad n \geq 2, \quad C_1 = 1$$

$$\bullet (C_n)_{n \geq 1} \longrightarrow \sum_{n \geq 1} C_n x^n = C(x)$$

$$\sum_{n \geq 2} C_n x^n = \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i} \right) x^n$$

$$C(x) - C_1 x = \left(\sum_{j \geq 1} C_j x^j \right) \left(\sum_{k \geq 1} C_k x^k \right)$$

$$(C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots) \cdot (C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots)$$

$$x^2 C_1^2 + x^3 (C_1 C_2 + C_2 C_1) + x^4 (C_1 C_3 + C_2^2 + C_3 C_1) + \dots$$

$$C(x) - C_1 x = C(x) \cdot C(x)$$

$$(C(x))^2 - C(x) + x = 0, \quad \text{~~minimální~~$$

$$C_{\pm}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}, \quad \text{vím: } C(0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} C_+(0) = 1 \\ C_-(0) = 0 \end{array} \right\} \text{Proto: } C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n \geq 1} C_n x^n$$

$$(1+y)^{\alpha} = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} y^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad y = -4x$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1-2k+2}{2})}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k!}$$

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k!} (-1)^k 4^k x^k + 1 =$$

$$= \sum_{k \geq 0} 2^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-3)(2k-2)}{k! (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2))} x^k = \sum_{k \geq 0} 2 \frac{(2k-2)!}{k! (k-1)!} x^k + 1$$

+1

$$* = 1 - 2 \sum_{k \geq 1} x^k \binom{2k-2}{k-1} \frac{1}{k}$$

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sum_{k \geq 1} x^k \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k = \sum_{n \geq 1} C_n x^n$$

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}, n \geq 1$$

• Lima' recurrence pro (C_n) :

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$C'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-4)}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$(1-4x)C'(x) = \sqrt{1-4x} = 1 - 2C(x)$$

$$(1-4x)C'(x) + 2C(x) - 1 = 0, \text{ where } C(x) = \sum_{n \geq 1} C_n x^n$$

$$C'(x) = \sum_{n \geq 1} n C_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) C_{n+1} x^n$$

$$C'(x) - 4xC'(x) + 2C(x) - 1 = 0$$

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) C_{n+1} x^n - 4 \sum_{n \geq 1} n C_n x^n + 2 \sum_{n \geq 1} C_n x^n - 1 = 0$$

Porovna'ne koef. u stejny'ch mocnin x:

$$x^0: 1 \cdot C_1 - 1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$n \geq 1: x^n: (n+1) C_{n+1} - 4n C_n + 2 C_n = 0$$

$$(n+1) C_{n+1} - 2(2n-1) C_n = 0$$

$$C_{n+1} = 2 \frac{2n-1}{n+1} C_n, n \geq 1, C_1 = 1$$

$$C_{n+1} = \prod_{k=1}^n \left(2 \frac{2k-1}{k+1} \right) C_1 = 2^n \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{(n+1)n \dots 2 \cdot 1} =$$

$$= 2^n \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)!(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} = 2 \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Formální mocninná řada

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \geq 0} &\longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n = A(x) \\ (b_n)_{n \geq 0} &\longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} b_n x^n = B(x) \end{aligned} \quad \swarrow \searrow \text{generující funkce}$$

$$(a_n + b_n)_{n \geq 0} \longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n = A(x) + B(x)$$

mate formální derivaci: $A'(x) := \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \longleftrightarrow ((n+1) a_{n+1})_{n \geq 0}$

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n \geq 0} \longleftrightarrow A(x) B(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

definují vzdálenost posloupností:

$$\rho((a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}) = \rho(A(x), B(x)) = \frac{1}{2^{\min \{i, a_i \neq b_i\}}}$$

$n-i-j$ na každé straně
 $n-i$, resp. $n-j$ různých částecí na levé, resp. pravé straně

$$\sum_{i,j \geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i}$$

příklad: $f_{2n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f_{k-1}$

$$3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$$

$$f_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n$$

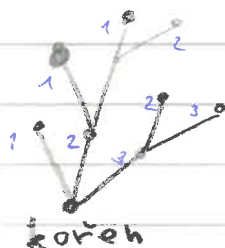
2. Presentace

- Ansoer: $2|m \wedge 2|k \Rightarrow 2|\binom{n}{k}$
 jinak $\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \pmod{2}$

důkaz: $\binom{n}{k} = \frac{n \binom{n-1}{k-1}}{k}$

• Catalanova čísla

C_n = počet lineárně uspořádaných zakoreněných stromů
 s n vrcholy

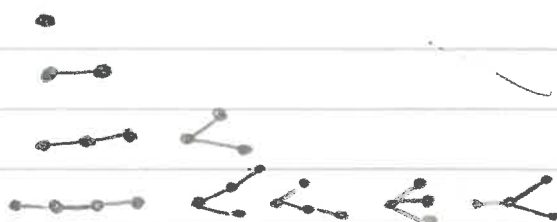


$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = 2$$

$$C_4 = 5$$



$$1 \leq k \leq n-1$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}, n \geq 2$$

1.11. (Čtvrtel)

Generující funkce

$$(a_n)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n = A(x)$$

$$(ca_n)_{n \geq 0} \rightarrow c \cdot A(x)$$

$$(c^n a_n)_{n \geq 0} \rightarrow A(cx)$$

$$(a_n)_{n \geq k} \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_{n+k} x^n = \frac{1}{x^k} \sum_{n \geq 0} a_{n+k} x^{n+k} = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n}{x^k}$$

$$(na_n)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq 0} na_n x^n = x \sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1} = x A'(x)$$

$$(a_1, 0, a_2, 0, \dots) \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n} = A(x^2)$$

$$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_1, a_2, \dots) \rightarrow x^k A(x)$$

$$(a_0, a_2, a_4, \dots) = (a_{2n})_{n \geq 0} \rightarrow \frac{A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x})}{2}$$

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots) \rightarrow A(2x^2) + xA(2x^2)$$

$$\text{Příklad: } \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = S_n$$

$$(1)_{n \geq 0} \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$((-1)^n n^2)_{n \geq 0} \rightarrow \frac{-x(1-x)}{(1+x)^3}$$

$$(n)_{n \geq 0} \rightarrow x \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(n^2)_{n \geq 0} \rightarrow x \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 \right)_{n \geq 0} \rightarrow \frac{-x(1-x)}{(1+x)^3(1-x)} = \frac{-x}{(1+x)^3}$$

$$(a_n)_{n \geq 0} \rightarrow A(x)$$

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \geq 0} \rightarrow A(x) \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k 1^{n-k} \right) x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)$$

$$(1+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} y^n$$

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-4) \dots \overbrace{(-3-n+1)}^{-(n+2)}}{n!} = \frac{-(n+2) \dots -3}{n!} (-1)^n =$$

$$= (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2} (-1)^n$$

$$\frac{-x}{(1+x)^3} = -x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+2}{2} x^n$$

$$\Rightarrow S_n = (-1)^n \frac{(n+1)n}{2}$$

$$k \text{ perve: } \left(\binom{n}{k} \right)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$$

$$k=0: \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} x^n = \frac{1}{1-x} A(x)$$

$$k=1: \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$k=2: \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n = x^2 \frac{A''(x)}{2}$$

$$k=3: \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{3} x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^n = x^3 \frac{A'''(x)}{3!}$$

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = x^k \frac{A^{(k)}(x)}{k!} = \frac{x^k}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$k \text{ perme! : } \left(\binom{k}{n} \right)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} x^n = (1+x)^k$$

$$k \text{ perme! : } \left(\binom{n+k}{k} \right)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

15. listopadu

Eulerova formula:

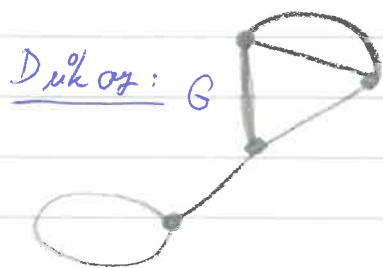
• Necht G je souvislý rovinný graf

n - počet vrcholů

e - počet hran

f - počet oblastí

Pak platí $n - e + f = 2$



$$n = 4$$

$$e = 6$$

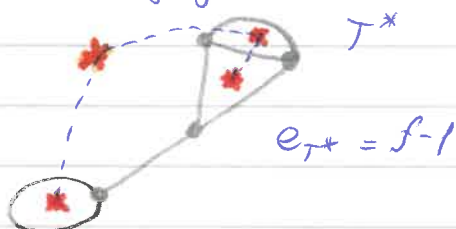
$$f = 4$$

Kostka grafu:



$$e_T = n - 1$$

Dvočluný graf:



T^*

$$e_{T^*} = f - 1$$

$$e = e_T + e_{T^*} = n - 1 + f - 1 \Leftrightarrow n - e + f = 2$$

Platónsko tělesa

s - počet hran vycházejících z jednoho vrcholu

m - počet hran tvořících jednu stěnu mnohoúhelníku

$$m \cdot s = 2e$$

$$m \cdot f = 2e$$

Pichův vzorec:

Teore'm přítelství

Předpokládejme, že G je konečný graf, ve kterém každé dva vrcholy mají právě 1 společného souseda.

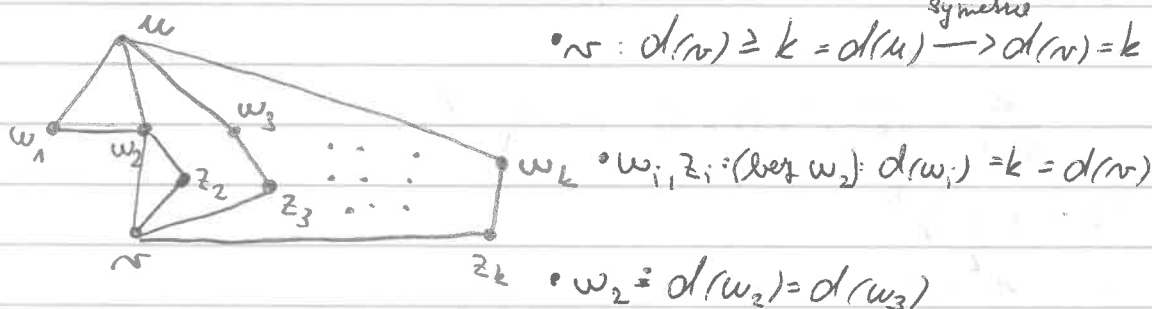
Dozvíte-li se vrchol, který sousedí se všemi ostatními

① spor: žádný vrchol z G není spojen se všemi ostatními

• G je regulární: $d(u) = d(v), \forall u, v \in V$

• jakékoliv dva nesuslední vrcholy mají stejný stupeň: $d(u) = d(v)$
 $d(u) = k$

• $\sim$: $d(v) \geq k = d(u) \xrightarrow{\text{symetrie}} d(v) = k = d(u)$



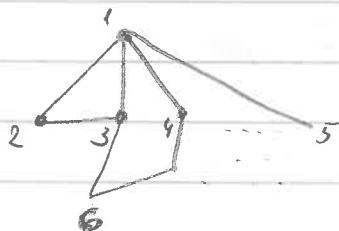
• w_1, z_1 (bez w_2): $d(w_1) = k = d(v)$

• w_2 : $d(w_2) = d(w_3)$

• počet vrcholů $G = n$

$$n = k \cdot k - k + 1 = k^2 - k + 1 \Rightarrow k > 2$$

② Matice sousednosti



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• v každém řádku k jedniček

• každé dva řádky mají jediný sloupec, ve kterém mají oba 1

$$A^2 = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k-1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} = (k-1)I + J$$

matice jedniček

• J : $n \times n$ matice

0 $\times$ matice $(n-1)$

$$A^2 \vec{n} = \lambda \vec{n} : A^2 \vec{n} = ((k-1)\mathbb{I} + J)\vec{n} = ((k-1)\lambda^{(I)} + \lambda^{(J)})\vec{n} = \lambda \vec{n}$$

$\vec{n}$ v. nello J

• jordan. matrice ma' diagonalizzabile nello zero

$$\lambda \vec{n} = \begin{cases} ((k-1) \cdot 1 + 1) \vec{n} \\ ((k-1) \cdot 1 + 0) \vec{n} \end{cases}$$

$$A: \lambda_1^{(A)} = \pm \sqrt{k-1+1} = \pm \sqrt{k^2} = k \text{ (no's 1)}$$

$$\lambda_2^{(A)} = \pm \sqrt{k-1} \quad (\text{no's } n)$$

$$\text{Tr}(A) = 0 = k \cdot 1 + n\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0$$

$$\frac{k}{s-1} = \sqrt{k-1} = h \in \mathbb{N} \Rightarrow s-n = 1$$

$$k-1 = h^2$$

$$k = h^2 + 1$$

$$\cancel{k \in \mathbb{N}} \quad \cancel{k \in \mathbb{N}}$$

$$\cancel{k \in \mathbb{N}} \quad \cancel{k \in \mathbb{N}}$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$\cancel{k \in \mathbb{N}} \quad \cancel{k \in \mathbb{N}}$$

$$h(s-n) = h^2 + 1 \Rightarrow h/h^2 + 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow k = 2, s=1$$

Linear recurrence k-th order $(a_n)_{n \geq 0} \rightarrow A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$a_{n+k} + \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n = 0, n \geq 0 \quad / \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k}$$

$$\sum a_{n+k} x^{n+k} + \alpha_{k-1} \sum a_{n+k-1} x^{n+k} + \dots + \alpha_0 \sum a_n x^{n+k} = 0$$

$$(A(x) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n) + \alpha_{k-1} x (A(x) - \sum_{n=0}^{k-2} a_n x^n) + \dots + \alpha_0 x^k A(x) = 0$$

$$A(x) \underbrace{(1 + \alpha_{k-1} x + \alpha_{k-2} x^2 + \dots + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_0 x^k)}_{R(x)} = Q(x), \text{ st } Q \leq k-1$$

$P(x) = x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, characteristic polynomial

$$R(x) = x^k P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x^k P\left(\frac{1}{x}\right) = x^k \left(\frac{1}{x^k} + \frac{\alpha_{k-1}}{x^{k-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{x} + \alpha_0 \right)$$

$$\sum a_n x^n = A(x) = \frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{(1-\lambda_1 x) \dots (1-\lambda_k x)} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ roots of } P$$

$$P(x) = \prod (x - \lambda_i)$$

$$R(x) = c \prod (x - \lambda_i) = c \prod (\lambda_i x - 1)$$

$$A(x) = \frac{k_1 x^{\lambda_1}}{(1-\lambda_1 x)^{\lambda_1}} + \frac{k_2 x^{\lambda_2}}{(1-\lambda_2 x)^{\lambda_2}} + \dots + \frac{k_n x^{\lambda_n}}{(1-\lambda_n x)^{\lambda_n}}$$

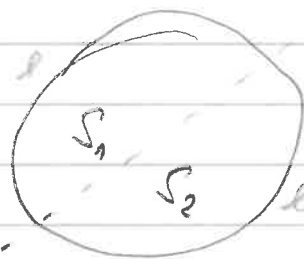
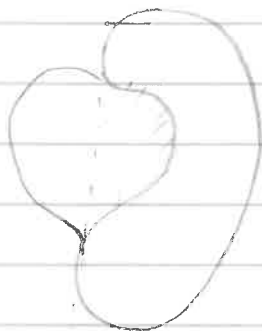
$$\sum \binom{m}{j_{i-1}} (\lambda_i x)^m$$

9. hodina (29. listopadu)

Isoperimetrická nerovnost

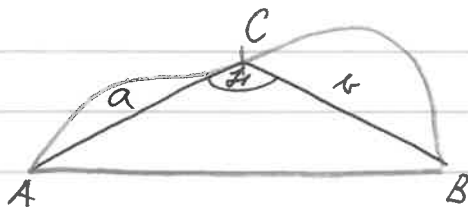
Théorème: Mezi všemi jednoduchými uzavřenými křivkami uzavřít křivice největší plochu.

Pozorování: hledaný útvar s maximálním uzavřeným obsahem za daného obvodu musí být konvexní!



p - obvod
 $l = \frac{p}{2}$

, je-li S_1 větší, než S_2
pak můžeme přeložit
 S_2 podle osy



$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

$$S \text{ je maximální} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Proč? C byl libovolný, což musí platit Thaletova věta,
a proto křivka je kruh

A - plocha uzavřít obvodem C

$$A \leq \pi \left(\frac{C}{2\pi} \right)^2 = \frac{C^2}{4\pi}$$

~~Principy~~

20. prosince

Teorem:

Je-li a_m počet způsobů, jak vytvořit strukturu I. typu mod $\xi_1, \dots, \xi_n$
 b_m II. typu mod $\xi_1, \dots, \xi_n$

Pak $C_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ je počet způsobů, jak vytvořit rozdělít
 $\xi_1, \dots, \xi_n$ na dva intervaly $\xi_1, \dots, \xi_k$ a $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$, $0 \leq k \leq m$
a mod prvním vytvořit strukturu I. typu, mod druhým II. typu.

Příklad:

Studium n ty'dnu, počet způsobů, jak rozdělit na
teoretickou a praktickou část.

V první části: 1 ty'den požadun, ve 2 části 2 ty'dny, pak

$$a_k = k, k \geq 0 \rightarrow A(x) = \sum_{m \geq 0} m x^m = \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$b_j = \binom{j}{2}, j \geq 0 \rightarrow B(x) = \sum_{m \geq 0} \binom{m}{2} x^m = \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

$$C_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^m k \binom{m-k}{2} \rightarrow C(x) = \sum_{m \geq 0} C_m x^m = A(x)B(x) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

$$* = \frac{x^3}{(1-x)^5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{(1-x)^5} \sum_{m \geq 0} \binom{m}{4} x^m$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^m k \binom{m-k}{2} = C_m = \binom{m+1}{2}$$

Příklad:

Semestr n dnů, počet způsobů, jak rozdělit na tři části,
v prvním lib. počet ročníků, ve druhé liché počet, ve třetí sudý!

$$a_k = 2^k, k \geq 0 \rightarrow A(x) = \sum_{k \geq 0} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}$$

$$b_j = \begin{cases} 2^{j-1}, & j \geq 1 \\ 0, & j = 0 \end{cases} \rightarrow B(x) = \sum_{j \geq 1} 2^{j-1} x^j = \frac{x}{1-2x}$$

$$C_m = \begin{cases} 2^{m-1}, & m \geq 1 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \rightarrow C(x) = \sum_{m \geq 0} 2^{m-1} x^m + 1 = 1 + \frac{x}{1-2x} = \frac{1-x}{1-2x}$$

$$d_m = \sum_{k+j+m=n} a_k b_j c_m \rightarrow D(x) = A(x)B(x)C(x) =$$

$$= \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{x}{1-2x} \cdot \frac{1-x}{1-2x} = \frac{x(1-x)}{(1-2x)^3} =$$

$$= \frac{(2x)^2}{(1-2x)^3} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{(2x)^2}{(1-2x)^3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{2} (2x)^n - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{2} (2x)^n = \sum_{n \geq 0} d_n x^n$$

$$d_0 = 0$$

$$d_1 = 1$$

$$d_n = \binom{n+1}{2} \frac{2^{n+1}}{4} - \frac{2^n}{4} \binom{n}{2} = 2^{n-2} \left(\binom{n+1}{2} \cdot 2 - \binom{n}{2} \right) =$$

$$= 2^{n-2} (n^2 + 3n)$$

$$\frac{n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2}}{2}$$

Skládání generujících funkcí

$$A(B(x)) = a_0 + a_1(b_0 + b_1x + \dots) + a_2(b_0 + b_1x + \dots)^2 + \dots$$

Dobře bychom $b_0 = 0$, pak koeficienty u literálů x jsou určeny konečnou sumou

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \\ B(x) &= \sum_{n \geq 1} b_n x^n \end{aligned} \right\} \rightarrow A(B(x)) = \frac{1}{1-B(x)}$$

Tvrzení

Je-li b_n počet způsobů, jak postavit strukturu B nad $\{1, \dots, n\}$, $b_0 = 0$.

Pak počet způsobů, jak rozdělit $\{1, \dots, n\}$ na literály, počet neprozkýpaných intervalů a nad každým intervalem postavit B je roven:

$$C(x) = A(B(x)) = \frac{1}{1-B(x)}$$

Příklad:

Počet způsobů, jak rozdělit n rojůvek n řádků na literály, počet jednotek a n každé učit relace

$$b_k = k, k \geq 0 \rightarrow B(x) = \sum_{k \geq 1} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{1-B(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{1-2x+x^2-x} = \frac{1-2x+x^2}{1-3x+x^2} = \frac{1-2x+x^2}{(1-x_1x)(1-x_2x)}$$

Twzeu:

Je-li a_n počet způsobů, jak provést B mod $\{1, \dots, n\}$, $a_0 = 0$,
 a_k A mod $\{1, \dots, k\}$

Pak $C(x) = A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, přičemž c_n udává počet způsobů jak rozdělit $\{1, \dots, n\}$ na libovolný počet neprotínajících intervalů, nad každým provést B a nad každou množinou intervalů provést A.

Příklad:

Kelitel rozdělí n vajinek na různé na lib. počet jednotek a někdy z nich vezme k noční službě

$$b_j = j, j \geq 1, b_0 = 0 \rightarrow B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j = \frac{x}{1-x}$$

$$a_k = 2^k, k \geq 0 \rightarrow A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}$$

$$C(x) = A(B(x)) = \frac{1}{1-2\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-2x} = \frac{1-x}{1-3x} =$$

$$= \frac{1}{1-3x} - \frac{3x}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n =$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}, n \geq 1$$

10. ležna

$$(a_n)_{n \geq 0} \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} a_n, \text{ Exponencialni generacijska funkcija}$$

$$(1)_{n \geq 0} \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x = A(x)$$

$$(c a_n)_{n \geq 0} \longrightarrow c A(x)$$

$$(c^n a_n)_{n \geq 0} \longrightarrow A(x)$$

$$(a_{n+1})_{n \geq 0} \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} a_{n+1} = A'(x)$$

$$(n a_n)_{n \geq 0} \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} n a_n = x \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = x A'(x)$$

Prilod: $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n+1), n \geq 0, a_0 = 1$

$$a_{n+1} = n a_n + a_n - (n+1)n + n+1$$

$$A'(x) = x A'(x) + A(x) + \sum_{n \geq 0} \frac{n(n+1)x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$A'(x) = x A'(x) + A(x) - x^2 e^x - x e^x + e^x$$

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1) a_n x^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-1) x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$A(x) - 1 = x A(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$A(x) - 1 = x A(x) - x^2 e^x + x e^x$$

$$A(x) (1-x) = 1 - x^2 e^x + x e^x = 1 + x e^x (1-x)$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + x e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} (1+n)$$

$$(a_n)_{n \geq 0} \xrightarrow{E} A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$$

$$(b_n)_{n \geq 0} \xrightarrow{E} B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}$$

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n x^n \frac{a_k b_{n-k}}{k!(n-k)!} \right) \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n x^n}{n!}$$

$$(c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k})_{n \geq 0}$$

Trvzení

Označme $a_n =$ počet způsobů, jak A mod $\{1, \dots, n\}$, $a_0 = 0$
 $b_n =$ počet zp. jak B mod $\{1, \dots, n\}$, $b_0 = 1$ rozdělit na
 libovolný počet nepořádaných podmnožin q
 a rozdělit prvky A , mod systémem B pomocí B

B_j d d

Bellara čísla

$B_n =$ počet ~~zp~~ rozdělení $\{1, \dots, n\}$ do
 nepořádaných podmnožin

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = 1$$

$$B_2 = 2$$

$$B_3 = 5$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$