Kuchařka
4. semestr

$$\left\| \begin{matrix} \Delta & & \Delta \\ & & \\ & \bigcup & \end{matrix} \right\|$$

Lukáš Vácha

20. února 2023

Obsah

1 Úvod

1.1 $\mathscr{L}$egendrova duální transformace

Věta 1 *Nechť f je konvexní/konkávní* $(f'' \neq 0), f = f(x_i, t_i)$

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1}$$

$$g(y_i, t_i) = f(x_i, t_i) - \sum_j x_j y_j \tag{2}$$

potom:

$$x_i = -\frac{\partial g}{\partial y_i} \tag{3}$$

1.2 funkce vnitřku skalárního součinu

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{b} = (\overrightarrow{b} \otimes \overrightarrow{a})\overrightarrow{x} \tag{4}$$

1.3 sin a cos

Sum Identities
Addition Formulas

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Difference Identities
Subtraction Formulas

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 MAA4

2.1 Kvadriky

Kvadratická funkce:

Definice 1

$$F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^T \mathbb{A} \overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{b}^T \overrightarrow{x} + c$$

Kvadrika:

Definice 2

$$Q = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n | f(\overrightarrow{x}) = 0\}$$

1. $$det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \to \sigma(\mathbb{A}) \to \overrightarrow{x}_1; ...; \overrightarrow{x}_n$$

   vlastní vektory

2. $$\mathbb{A}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{b}$$

   - s je střed

   - Kanonický soubor souřadnic je ((
     $$\frac{\overrightarrow{x}_1}{||x_1||}; ...; \frac{\overrightarrow{x}_n}{||x_n||}); \overrightarrow{s})$$
   - $$f_0 = c - \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{s}$$
   - $$f_1(\overrightarrow{y}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i^2 + f_0$$
   - $$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{|\lambda_i|}{\alpha_i} \right)^2 \right) = \begin{cases} 1; f_0 \neq 0 \\ 0; f_0 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

3. $$\mathbb{A}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{b}$$

   - nemá řešení pro s

   - $$\mathbb{X}\overrightarrow{k} = \overrightarrow{b} \to \overrightarrow{b}_{ker} = \sum k_i \overrightarrow{x_0}; \overrightarrow{b}_{Im} = \sum k_i \overrightarrow{x_\Delta} \to \mathbb{A}\overrightarrow{s} = \overrightarrow{b}_{Im} \wedge (2b - b_{Im})^T s = c$$

     - s vrchol
   - $$\overrightarrow{y}_{n+1} = \frac{\overrightarrow{b}_{ker}}{||b_{ker}||}$$
   - $$f_1(\overrightarrow{y}) = \sum \lambda_i y_i^2 - 2||b_{ker}||\overrightarrow{y_{n+1}}$$

2.2 Implicitní (inverzní) fce extrémy

Definice 3

$$\Phi : \mathbb{R}^{m+r} \to \mathbb{R}^m$$

m jsou nezávislé; r jsou závislé

1.
$$h\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{(r)}}\right) = m$$

2.
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{(m)}} = 0$$
$$x_{(r)}(x_{(m)})$$

odsud:
$$\varphi' = \frac{\partial x_{(r)}}{\partial x_{(m)}} = 0$$

$$\overrightarrow{x}_{(m)}$$

jsou stacionární body

3.
$$\varphi''(x_{(m)})$$

PD nebo ND
$$\to$$

ostré lokální min. nebo max.

2.3 Vázané extrémy

Definice 4

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

a varieta
$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0\} \subset Domf$$

1.
$$\Lambda(\overrightarrow{x}) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi_j(x)$$

2. vyřešit systém:

   •
$$\Lambda'(x_0) = (grad\Lambda)(x_0) = 0$$

- $$\Phi(x_0) = 0$$

3. $$T_M(x_0) = ker(\Phi'(x_0))$$

4. $$\Lambda''(x_0) \mid_{T_M(x_0)}$$

   (vlastě se obalí matice vektory patřící do ker) PD nebo ND

   $$\rightarrow$$

   ostré lokální min. nebo max. vzhledem k M

2.4 Transformace souřadnic

zobrazení

$$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$$

regulární:

1. otevřené
2. invezní (lokálně) ← regulární
3. hladké (dle záměn diff. výrazů) i inverzní

diferenciální výrazy z derivování základní rovnosti! (vztah obsahjící všechny závislé proměnné (y,u) nebo (z,w)

1. polární
   $x = \rho \cos \varphi$
   $y = \rho \sin \varphi$
   $\rho \in \mathbb{R}_+$
   $\varphi \in (-\pi; \pi)$
   $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus P_\pi$
   $|J| = \rho$

   $$P_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in (-\infty; 0) \right\}$$

2. válcová
   $x = \rho \cos \varphi$
   $y = \rho \sin \varphi$
   $z = \zeta$
   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2 \setminus P_\pi) \times \mathbb{R}$

$\rho \in \mathbb{R}_+$
$\varphi \in (-\pi; \pi)$
$\zeta \in \mathbb{R}$
$|J| = \rho$

3. sférické
   $x = \rho \cos \varphi \sin \vartheta$
   $y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$
   $z = \rho \cos \vartheta$
   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2 \setminus P_\pi) \times \mathbb{R}$
   $\rho \in \mathbb{R}_+$
   $\varphi \in (-\pi; \pi)$
   $\vartheta \in (0, \pi)$
   $|J| = \rho^2 sin\vartheta$

4. sférická v $\mathbb{R}^n$
   $x^1 = \rho \sin \vartheta^1$
   $x^2 = \rho \cos \vartheta^1 \sin \vartheta^2$
   ...
   $x^n = \rho \cos \vartheta^1 ... \cos \vartheta^{n-2} \sin \varphi$
   $x^n = \rho \cos \vartheta^1 ... \cos \vartheta^{n-2} \cos \varphi$
   $\rho \in \mathbb{R}_+$
   $\vartheta_i \in (0, \pi)$
   $\varphi \in (-\pi; \pi)$
   $|J| = \rho^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin \vartheta_i$

2.5 integrály

1. Substituce

$$\varphi : H \to \mathbb{R}^n : \int\limits_{\varphi(H)} = \int\limits_H f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|dt \tag{6}$$

2. Fubini

$$\int\limits_M f = \int\limits_{M_1} \left(\int\limits_{M_x} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{M_2} \left(\int\limits_{M_y} f(x,y)dx \right) dy \tag{7}$$

3. počítání Riemanova integrálu

4. Eulerovy integrály, fce Γ a B

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt; p > 0 \tag{8}$$

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, p, q > 0 \tag{9}$$

$B(p,q) = B(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}; p \in (0,1)$
$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$
$\Gamma(n+1) = n!; n \in \mathbb{N}$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^m t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \tag{10}$$

Koule v $\mathbb{R}^n$:

$$V_n(B(\overrightarrow{0}, R)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n \tag{11}$$

2.6 Parametrické integrály

Pokud existuje pro každé alfa integrabilní majoranta:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \int f(x,\alpha) dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} dx \tag{12}$$

2.7 Křivkový integrál 1. druhu

L - křivka

Definice 5

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\int\limits_L f dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) \|\dot{\varphi}(t)\|_2 dt \tag{13}$$

kde je parametrizace:

Definice 6

$$\varphi : \langle t_1; t_2 \rangle \to L$$

2.8 Křivkový integrál 2. druhu

Definice 7

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\int\limits_L \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}(t) \cdot \overrightarrow{\dot{\varphi}(t)} dt \tag{14}$$

kde je parametrizace:

Definice 8

$$\varphi : \langle t_1; t_2 \rangle \to L$$

2.9 Plošný integrál 1. druhu

Definice 9

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\int\limits_S f dS = \int\limits_{u_1}^{u_2} \int\limits_{v_1}^{v_2} f(u,v) \| \frac{\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\varphi(u,v)}{\partial v} \|_2 dudv \tag{15}$$

kde je parametrizace:

Definice 10

$$\varphi : \langle u_1; u_2 \rangle \times \langle v_1; v_2 \rangle \to S$$

2.10 Plošný integrál 2. druhu

Definice 11

$$\overrightarrow{dS} = \begin{pmatrix} dydz \\ dxdz \\ dxdy \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\int\limits_S F dS = \int\limits_{u_1}^{u_2} \int\limits_{v_1}^{v_2} F(u,v) \left(\frac{\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\varphi(u,v)}{\partial v} \right) dudv \tag{17}$$

kde je parametrizace:

Definice 12

$$\varphi : \langle u_1; u_2 \rangle \times \langle v_1; v_2 \rangle \to S$$

Věta 2 *Greenova:*

$$\varphi = \partial V$$

!orientace

$$\int\limits_\varphi F_x dx + F_y dy = \int\limits_V \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{18}$$

Věta 3 *Gaussova:*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{D^\circ} d\omega \tag{19}$$

2.11 Komplexní analýza

Věta 4 *Cauchy, Riemann podmínka:*
f je diferencovatelná v z_0

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 diferencovatelne \wedge \frac{\partial Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial Im(f)}{\partial y}; \frac{\partial Im(f)}{\partial x} = -\frac{\partial Re(f)}{\partial y} \tag{20}$$

$$e^{a+bi} = e^a(cosb + isinb) \tag{21}$$

$$\int_\varphi f dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{22}$$

Lauerantovy řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{23}$$

parciální zlomky

Věta 5 *poznámka:*

1. *f je v* z_0 *holomorfní* $\Rightarrow$ *f= Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0) \tag{24}$$

2. *f má v* z_0 *singularitu:*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{ind_\vartheta z_0}{2\pi i} \oint_\vartheta \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n \tag{25}$$

$\forall y \in \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$

Věta 6 *reziduová:*
f holomorfní na $M \backslash \{z_1, ..., z_m\}$, φ *uzavřená, jednoduchá, + orientovaná,* $z_1, ..., z_m \in int\varphi, [\varphi] \subset M \Rightarrow$

$$\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Rezf(z_k) \tag{26}$$

z_k *póly l-tého řádu*

$$Rezf(z_k) = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} \left((z - z_0)^l f(z)\right) \tag{27}$$

Integrál přes $\mathbb{R}$

1. vypočítat singularity (póly) s jejich řády
2. Vypočítat Rez pólů s $Im > 0$
3. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Rez f(a_j) \tag{28}$$
4. najít mocninu $\alpha > 1$
$$\lim_{z\to\infty} z^{\alpha} f(z) = 0 \tag{29}$$

3 DIFR

3.1 Separace

1. $$P(x) + Q(y)y' = 0$$

2. $$\int P(X)dX + \int Q(Y)dY = konst.$$

3. $$\Phi(x,y) = p(x) + q(y) - c$$

   -je implicitní fce

4. pokud existuje a lze
   $$y = y(x)$$
   $$x = x(y)$$
   řešení
   $$y = c$$

5. diskuze
   $$Dom(y)$$
   v závislosti na c

3.2 Homogenní fce

Definice 13
$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$
tak, že
$$P, Q(tx, ty) = t^{\alpha} P, Q(x,y)$$

1. $$y = xu$$
   , kde
   $$u = u(x)$$

   $$y' = u + xu'$$

2. převést na separovatelnou a separovat

3.3 Kvazihomogenní fce

Definice 14

$$y' = f(x,y)$$

tak, že

$$f(t^\alpha x, t^\beta y) = t^{\beta-\alpha} f(x,y)$$

1. $$y = x^k u(x)$$

   $$y' = kx^{k-1}u + x^k u'$$

   $$\to F(x,u,u') = 0$$

2. všechny exponenty x = a hledám řešení k (existuje?)
3. dosadím za k, vykrátím x^k, separuji

3.4 DR tvaru $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

různé případy:

1. $$b \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$$

   - $$z = ax + by$$

     $$z' = a + by'$$

   - $$\frac{1}{b}z' - a = f\left(\frac{z+c}{\frac{\beta}{b}z+\gamma}\right)$$

   separovatelná

2. $$b \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$$

   - $$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- $$x = \xi - x_0$$
$$y = \eta - y_0$$
$$y' = \eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Definice 15

$p, q \in C(I) : y' + p(x)y = q(x)$ *s pravou stranou* $y' + p(x)y = 0$*bez pravé strany*

1. Řešení na 2 kroky
$$y = C(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) \tag{30}$$
$$y(x) = C_0 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \tag{31}$$

2. integrační faktor
$$e^{\int p(x)dx}$$
$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

3.5 Bernoulliho DR

Definice 16
$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}; \alpha \neq 0, 1; p, q \in C(I)$$

1. $$/ \cdot (1-\alpha)y^{-\alpha}$$

2. $$z = y^{1-\alpha}$$
$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

3.6 Riccatiho DR

Definice 17 *RDR:*

$$y' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

1. Kánonický tvar:

$$y' = a_0 \pm y^2$$

2. Nechť v řeší RDR:

$$z' = (a_1 + 2a_2 v)z = -a_2$$

$$y = v(x) + \frac{1}{z(x)}$$

řeší RDR

3.

$$u = \exp\left(\int a_2 y dx\right); u'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right) + a_0 a_2 u = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{u'}{u a_2}$$

řeší RDR

4. Speciální Riccatiho rce

$$y' = bx^\omega - ay^2 \tag{32}$$

$$k = -\frac{\omega}{2\omega + 4} \in \mathbb{Z} \tag{33}$$

k je kladné
k je sudé:

$$t = \int \frac{dz}{\frac{b}{(\omega+1)^k} - \frac{a}{(\omega+1)^k} z^2} + C \tag{34}$$

k je liché:

$$t = \int \frac{dz}{\frac{a}{(\omega+1)^k} - \frac{b}{(\omega+1)^k} z^2} + C \tag{35}$$

$x_0 = t$
$x_{n+1} = x_n^{\omega+3}$
$y_0 = z$
$y_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 \left(y_n - \frac{1}{a x_n}\right)}$
$\rightarrow y(x) = y_k(x_k)$

k je záporné
k je sudé:

$$t = \int \frac{dz}{\frac{b}{(\omega+3)^k} - \frac{a}{(\omega+3)^k} z^2} + C \tag{36}$$

k je liché:

$$t = \int \frac{dz}{\frac{a}{(\omega+3)^k} - \frac{b}{(\omega+3)^k} z^2} + C \tag{37}$$

$x_0 = t$
$x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{\omega+3}}$
$y_0 = z$
$y_{n+1} = \frac{1}{y_n x_n^2} + \frac{1}{a x_n}$
$\to y(x) = y_k = y(x_k)$

3.7 implicitní DR

$$x = f(y') \Rightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = \int t\dot{f}(t)dt = tf(t) - \int f(t)dt \end{cases} \tag{38}$$

$$y = g(y') \Rightarrow \begin{cases} y = g(t) \\ x = \int \frac{1}{t}\dot{g}(t)dt \end{cases} \tag{39}$$

Clairoutova DR

Definice 18

$$y = xy' + g(y')$$

$$y = Cx + g(C) \tag{40}$$

a

$$\begin{aligned} x &= -\dot{g}(t) \\ y &= -t\dot{g}(t) + g(t) \end{aligned} \tag{41}$$

3.8 Lineární DR n-tého řádu

Definice 19 *LDR:*

$$p_k; q \in C\left((a,b)\right)$$

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)} = q \tag{42}$$

3.8.1 s konstatními koeficienty

Definice 20 *LDR n-tého řádu s konstantními koef. a 0 PS*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0 \tag{43}$$

,kde $a_n \neq 0$
charakteristický polynom:

$$l(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{44}$$

Fundamentální systém (FS):

$$(y_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}; y_{ij}(x) = x^{j-1}e^{\lambda_i}; \lambda \in \mathbb{R}; m = \nu_a(\lambda) \tag{45}$$

$$\lambda_{k,l} \in \mathbb{C}; \bar{\lambda}_k = \lambda_l \quad \begin{matrix} y_k(x) = \frac{e^{\lambda_k x}+e^{-\lambda_k x}}{2} \\ y_l(x) = \frac{e^{\lambda_k x}-e^{-\lambda_k x}}{2i} \end{matrix} \tag{46}$$

$$\Omega_0 = span(FS)$$

Definice 21 *wronckián:*

$$(W_{y_1,\ldots,y_n})_{ij} = y_j^{(i-1)} \tag{47}$$

Cramerovo pravidlo na:

$$W\overrightarrow{C'} = q\overrightarrow{e_n}; C_i = \int C_i' dx + D_i \tag{48}$$

řešení:

$$y(x) = \sum D_k y_k + \sum C_k y_k \tag{49}$$

Speciální tvar LS:

$$Ly = e^{\beta y}(P_1(x)\cos\gamma x + P_2(x)\sin\gamma x) \tag{50}$$

$\beta + \gamma i$ je k-násobným kořenem Řešení tvaru:

$$y_p = x^k e^{\beta y}\left(Q_1(x)\cos\gamma x + Q_2(x)\sin\gamma x\right); deg(Q_1, Q_2) \leq max(deg(P_1); deg(P_2)) \tag{51}$$

3.9 Systémy LDR 1. řádu s konst. koef.

Definice 22

$$\overrightarrow{y}' = \mathbb{A}\overrightarrow{y} + \overrightarrow{b}$$

1. řešíme vlastní čísla A, tj. $|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}| = 0$
2. $\forall i$ vlastní vektory $\overrightarrow{y}_{i,j}(\lambda_i); j \in \hat{\nu}_g(\lambda_i)$
   pokud jich není dost($\nu_g(\lambda_i) < \nu_a(\lambda_i)$):

3. volíme:

$$\overrightarrow{y}_i = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\nu_a(\lambda_i)} a_{1k}x^k \\ \sum_{k=0}^{\nu_a(\lambda_i)} a_{2k}x^k \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{k=0}^{\nu_a(\lambda_i)} a_{nk}x^k \end{pmatrix}$$

   dosadíme a dopočítáme soustavu $(n+k) \times (n+k)$

4. v případě komplexních λ_i a $\bar{\lambda}_{i+1}$ volíme:

$$z_i = Re(y_i); z_{i+1} = Im(y_i) \tag{52}$$

5. Metoda neurčitých koeficientů (Variace kontstant) - při jednoduchých násobnostech lambd:

$$(W_{y_1,\ldots,y_n})_{.j} = \overrightarrow{y}_j \tag{53}$$

   Cramerovo pravidlo na:

$$W\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{b}; C_i = \int C_i' dx + D_i \tag{54}$$

4 TEF

4.1 Variace

$$\varphi : \langle x_1, x_2 \rangle \to \mathbb{R} \wedge \varphi \in C^{(1)}(\langle x_1, x_2 \rangle) \text{ je prostor křivek} \tag{55}$$

$$I(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx \text{ je fuknkcionál} \tag{56}$$

$$(56) \text{ je extrmální} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{57}$$

4.2 Hamiltoniáni

1. Lagrangián:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t) \tag{58}$$

2. obecná hybnost:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}, t}) \to p_j^{-1} = \dot{q}_j = f(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t) \tag{59}$$

3. obecná energie

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L \tag{60}$$

4. Hamiltonián

$$H = E(\overrightarrow{q}, f(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t), t) = p_j \dot{q}_j(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t) - L(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, t), t) \tag{61}$$

5. pohybové rce:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{q_j, H\} \tag{62}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{p_j, H\} \tag{63}$$

4.3 Poissonovy závorky

Definice 23

$F(\overrightarrow{q}; \overrightarrow{p}, t)$ *je integrál pohybu* $\Leftrightarrow F = konst \forall \mathbb{R}$ *trajektorií* $\Leftrightarrow \frac{dF}{dt} = 0 = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$

Poissonova závorka

Definice 24

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k} \tag{64}$$

vlastnosti: $\{G,F\} = -\{F,G\}$
$\{cF_1 + F_2, G\} = c\{F_1, G\} + \{F_2, G\}$
$\{\{F_1 + F_2\}, G\} + \{\{F_2, G\}, F_1\} + \{\{G, F_1\}, F_2\} = 0$
$\{F_1 \cdot F_2, G\} = F_1 \cdot \{F_2, G\} + F_2 \cdot \{F_1, G\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} = \{\frac{\partial F}{\partial t}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial t}\}$
$\{q_i, q_j\} = 0$
$\{p_i, p_j\} = 0$
$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
F_1 a F_2 jsou IP $\Rightarrow \{F_1, F_2\}$je IP

4.4 Kánonické transformace

vytvořující fce F_1 a $F_2 \forall \phi$ kánonické:

$$I^k[\phi(D)] = I^k[D] \tag{65}$$

Liouvilleova forma objemu:

$$V(D) = \int\limits_D \bigwedge_i^s q_i \bigwedge_i^s p_i \tag{66}$$

$$V(D) = V(\phi(D)) \tag{67}$$

Theorém Noetherové:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

a

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

, pak F je IP

$$\Leftrightarrow \{F, H\} = 0 \tag{68}$$

4.5 Hamilton-Jacobiho rovnice

$$S : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}; S(\overrightarrow{q}, t) =?$$
$$H\left(\overrightarrow{q}, \frac{\partial S}{\partial \overrightarrow{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{69}$$

4.6 Pozorovatelné

Každá pozorovatlná systému generuje 1-parametrickou množinu kánonických transformací fázového prostoru.

$$G : \Gamma \to \mathbb{R}; dG = \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i; X_G = \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = \{G, \} \tag{70}$$

tedy:

$$\omega : dp_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_i}; dq_i \leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{71}$$

transformace:

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i(0) + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ P_i &= p_i(0) - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{72}$$

nebo soustava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon} &= -\frac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{73}$$

4.7 intergrály pohybu

$\forall F_i = 0$, kde F_i je IP generuje obecnou varietu ve fázovém prostoru, H generuje Energetickou nadplochu
$\forall$ trajektorie $\in \bigcap$ variet
$(\nabla F_i)_i$ jsou LN

Definice 25 *soustava $(H, s), s = dim\Gamma$ je integrabilní $\Leftrightarrow \exists$ s nezávislých globálních integrálů pohybu P_j:*
$P_1 = H$

1. $$\{P_j, H\} = 0; \forall j \in \hat{s} \tag{74}$$
2. $$\{P_j, P_k\} = 0; \forall j, k \in \hat{s} \tag{75}$$
3. $(\nabla F_1; \nabla F_2, ...; \nabla F_s)$ *je LN na* Γ

Věta 7 *Liouviellova: Pohybové rovnice integrabilní soustavy jsou řešitelné kvadraturami.*

4.8 STR

Definice 26 *Lorenzova speciální transformace (boost):*

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt)\gamma \\ t' &= (t - \tfrac{v}{c^2}x)\gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta &= \tfrac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{76}$$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{77}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \tag{78}$$

$$\frac{E^2}{c^2} + p^2 = m_0^2 c^2 \tag{79}$$

Hamiltonův princip pole
Lagrangeovy rce

5 TSFA

5.1 Pravděpodobnost...

množina možných výsledků náhodného pokusu

$$\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$$

, I je indexová množina a ω_i jsou elementární jevy
pravděpodobnopstní rozdělení jevů

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

1. $$P(A) \geq 0$$

2. $$P(\Omega) = 1$$

3. $$(\forall \{B_i \mid i \in I\})(\forall i \neq j)(B_i \cap B_j = \emptyset) \Rightarrow (P(\bigcup_i B_i) = \sum_i P(B_i))$$

náhodná veličina X tak, že

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

hustota pravděpodobnosti w(X);

$$\forall A \subset \mathbb{R}; Pr(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

a

$$w(X) = \int_A w(x)dx$$

nezávislé

$$x_1 \wedge x_2 \Leftrightarrow w(x_1; x_2) = w_1(x_1) \cdot w_2(x_2)$$

střední hodnota:

$$\langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \cdot w(x)dx$$

střední kvadratická odchylka:

$$(\Delta X) = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

relativní středmí kvadratická odchylka:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{\langle x \rangle}$$

kovariance

$$X_1 \wedge X_2$$

:

$$(\Delta X_1 \Delta X_2) = \langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_1 \rangle$$

5.2 Typy rozdělení

1. Binomické

$$p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$\langle x \rangle = Np$$
$$(\Delta X) = \sqrt{Np(1-p)}$$

2. Poissonovo

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$\langle n \rangle = \lambda$$
$$(\Delta X) = \sqrt{\lambda}$$

3. Gaussovo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\langle w \rangle = \mu$$
$$(\Delta X) = \sqrt{\sigma}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^n e^{-ax^2} dx = \begin{cases} 0\text{; n liché} \\ \frac{1}{a^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma(\frac{n+1}{2})\text{;n sudé} \end{cases} \tag{80}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{81}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \tag{82}$$

4. Maxwell-Boltzmanovo rozdělení

$$w(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

5. Nejpravděpodobnější rozdělení
   informační obsah: I(A)=I(p_A)

   - $$I(p) \geq 0$$
   - $$I(1) = 0$$
   - $$I' < 0$$
   - nezávislá

$$A \wedge B : p(A \cap B) = p_A \cdot p_B \Rightarrow I(A, B) = I(A) + I(B)$$

$$I = -k \ln p$$

mikrostavy a makrostavy:

$$S = \langle I \rangle = -k \int_{\Omega} w(\omega) \ln w(\omega) d\omega$$

min. S s danými podm.

$$\Leftrightarrow p_\gamma = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j^\gamma\right); Z = \sum_{\gamma \in \Omega} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j^\gamma\right) \tag{83}$$

$$\Leftrightarrow w(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j(x)\right); Z = \int_{\Omega} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j(x)\right) dx \tag{84}$$

5.3 Termodynamické potenciály

1. vnitřní energie U

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

2. volná (Hlemholtzova) energie F

$$F = U - TS$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

3. enthalpie H

$$H = U + PV$$

$$dH = TdS + VdP + \mu dN$$

4. Gibbsův potenciál G

$$G = U - TS + PV$$

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN$$

5. grandkanonický potenciál

$$\Omega$$

$$\Omega = U - TS - \mu N$$

$$d\Omega = -SdT - pdV - nd\mu$$

$$\frac{\partial(P,V)}{\partial(T,S)} = 1 \tag{85}$$

Gibbs - Duhemův vztah

$$SdT + nd\mu - VdP = 0 \tag{86}$$

5.4 Ideální a neideáalní plyny

$$pV \overset{\text{IP}}{=} nRT = NkT \tag{87}$$

$$C_v = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{88}$$

$$dU \overset{\text{IP}}{=} C_v dT \tag{89}$$

Mayerův vztah:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \overset{\text{IP}}{=} R \tag{90}$$

$$S(T, V, n) \overset{\text{IP}}{=} nC_v \ln T + nR\ln V - nR\ln n + Kn + konst. \tag{91}$$

****:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \tag{92}$$

$$\frac{C_p}{C_V} = \kappa \overset{\text{IP}}{=} = \frac{R}{C_V} + 1 \tag{93}$$

Clausiova-Clapeyronova rce:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T\Delta v} \tag{94}$$

l - molární skupenské Q; Δv - rozdíl molárních objemů

$$= v_p(1 - \frac{v_{kap.}}{v_p}) \approx v_p \overset{\text{IP}}{=} \frac{RT}{P}$$

Gulberg-Waageho zákon:

$$n_1 A \leftrightarrow n_2 B + n_3 C$$

$$\frac{c_B^{n_2} c_C^{n_3}}{c_A^{n_1}} = K(T) \tag{95}$$

Le Chatelierův princip:

$$n \sim \frac{1}{P} \tag{96}$$

5.5 Entropie

$$S = \langle I \rangle = -k_B \sum_\gamma w_\gamma \ln(w\gamma) \tag{97}$$

Vázané maximum S za podm.:

$$\sum_\gamma w_\gamma = 1 \tag{98}$$

$$\sum_{\gamma} w_\gamma A_{l\gamma} = \langle A_l \rangle \, ; \forall l \in \hat{k} \tag{99}$$

platí:

$$Z = \sum_{\gamma} \exp\left(-\sum_{l=1}^{k} \lambda_l A_{l\gamma}\right) = \int_{\Omega/\chi} \exp\left(-\sum_{l=1}^{k} \lambda_l A_l(x)\right) dx \tag{100}$$

$$w_\gamma = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{l=1}^{k} \lambda_l A_{l\gamma}\right) \tag{101}$$

$$S = k_B \left(\ln Z + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \langle A_l \rangle\right) \tag{102}$$

$$dS = k_B \sum_{l=1}^{k} \lambda_l d \langle A_l \rangle \tag{103}$$

$$\langle A_l \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_l} (\ln Z) \tag{104}$$

$$(\Delta A_i \Delta A_j) = \langle A_i A_j \rangle - \langle A_l \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\ln Z) \tag{105}$$

$$(\Delta A_l)^2 = \left\langle A_l^2 \right\rangle - \langle A_i A_j \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_l^2} (\ln Z) \tag{106}$$

Nejpravděpodobnější rozdělení:

$$S(\rho) = -k \int \rho(x) \ln \rho(x) dx \tag{107}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{108}$$

$$\langle x \rangle = \mu$$

$$\left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle = \sigma^2$$

5.6 Statistické soubory

plyn:

$$\chi = \bigtimes^{N} \Gamma = \Gamma_N = \frac{\Gamma^N}{N!}$$

1. Kánonický soubor (F)

$$A = H(p,q)$$

$$\langle A \rangle = \langle H_N \rangle = U$$

$$x = (p,q)$$

$$\lambda = \beta = \frac{1}{kT}$$

$$Z_k = \frac{z^N}{N!}$$

$$z == \frac{1}{h^3} \int\limits_{\Gamma} \exp\left(-\beta H\right) dq dp$$

$$dN = dV = 0$$

$$P = \left(-\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}$$

2. Grandkánonický soubor (Ω)

$$\langle A \rangle = \langle N \rangle$$

$$\lambda = \alpha = -\beta c = \frac{c}{kT}$$

$$Z_G = \exp z e^{\alpha}$$

$$dV = 0$$

$$\Omega = -PV = -kt \ln Z_G$$

3. Izotermicko-izobarický systém (G)

$$\langle A \rangle = \langle V \rangle$$

$$\lambda = \gamma = \frac{P}{kT}$$

$$Z = \int\limits_0^{\infty} Z_k e^{-\gamma V} dV$$

$$dN = dP = 0$$

4. IP v rotující nádobě

$$\langle A \rangle = \left\langle \overrightarrow{L} \right\rangle$$

$$\lambda = \overrightarrow{\lambda} = -\beta \overrightarrow{\omega}$$

$$Z_G = \frac{1}{N! h^{3N}} \int\limits_{\Gamma_N} \exp\left[-\beta H_N\right] \exp\left[-\overrightarrow{\lambda} \overrightarrow{L}_N\right] dq dp$$

$$dN = 0$$

$$dW = \overrightarrow{\omega} \overrightarrow{dL}$$

1 částice IP	$\frac{p^2}{2m}$
ultrarelativistický IP	$H = pc$
LHO	$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$
Homogenní pole	$\frac{p^2}{2m} + mgz$

Tabulka 1: Hamiltoniáni