

Matematická analýza A 3

František Štampach
KM FJFI ČVUT

10. prosince 2020

Abstrakt

Tento dokument obsahuje poznámky k přednášce **Matematická analýza A 3** vyučované na FJFI ČVUT v zimním semestru 2. ročníku bakalářského studia. Kurz je rozdělen do tří hlavních částí:

1. Funkční posloupnosti a řady s důrazem na řady Fourierovy.
2. Topologické a metrické prostory.
3. Diferenciální počet funkcí více proměnných.

Tento text je průběžně aktualizován. Jeho poslední verzi si můžete stáhnout na stránkách <http://people.fjfi.cvut.cz/stampfra/>. Jakékoliv chyby, překlepy, apod. hlašte prosím na stampfra@fjfi.cvut.cz. Děkuji.

Obsah

1	Funkční posloupnosti a řady	3
1.1	Bodová konvergence a diskuze základního problému	3
1.2	Stejněměrná konvergence	6
1.3	Věty o záměně	11
1.4	Funkční řady	17
1.5	Mocninné řady	27
1.6	Trigonometrické řady	38
1.7	Abstraktní Fourierovy řady v Hilbertových prostorech*	57
1.8	Cvičení	58

2	Topologické a metrické prostory	61
2.1	Úvod	61
2.2	Topologie	66
2.3	Spojitosť	79
2.4	Kompaktnost	86
2.5	Úplnost	99
2.6	Souvislost	104
2.7	Cvičení	114
3	Funkce více proměnných	119
3.1	Derivace funkce více proměnných	119
3.2	Parciální a směrové derivace	124
3.3	Věta o přírůstku	134
3.4	Derivace vyšších řádů	137
3.5	Taylorova věta	141
3.6	Lokální extrémy funkcí více proměnných	145
3.7	Věta o inverzní funkci	152
3.8	Věta o implicitní funkci	159
3.9	Vázané extrémy funkce více proměnných	163
3.10	Cvičení	174
4	Teorie míry	179
4.1	Úvod	179
4.2	σ -algebra	181
4.3	Míra	187
4.4	Vnější míra	192
4.5	Borelovské míry na reálné přímce	198
4.6	Cvičení	217
5	Teorie integrálu	219
5.1	Měřitelná funkce	219
5.2	Cvičení	224
6	Úvod do analýzy na varietách	225

1 Funkční posloupnosti a řady

Studium *funkčních* posloupností a řad navazuje na předchozí kapitulu z analýzy věnovanou posloupnostem a řadám *číselným*. Přirozené rozšíření pojmu konvergence z číselných posloupností na posloupnosti funkcí, které budeme nazývat bodová konvergence, bude z mnoha ohledů nedostačující, což si ukážeme hned v následující části. To bude hlavní motivací pro zavedení silnějšího pojmu konvergence - tzv. konvergence stejnoměrné, jejíž studium bude hlavní předmět následujících částí.

V této kapitole budeme uvažovat posloupnosti komplexních funkcí f_n definovaných na neprázdné podmnožině $A \subset \mathbb{C}$, ačkoliv nám v celém kurzu půjde zejména o reálnou analýzu. Práce v komplexním oboru nebude znamenat žádnou komplikaci. Jednotlivá tvrzení by se v reálném oboru dokazovala zcela analogicky jen bychom uvažovali absolutní hodnotu reálného čísla namísto komplexního. Na druhou stranu je komplexní obor vhodný např. pro speciální případ mocninných řad, jak uvidíte v navazujícím kurzu věnovanému komplexní analýze. Řadu definic a vět bychom mohli bez velkých změn zformulovat i obecněji v metrických prostorech. S těmi se ale seznámíme až v následující kapitole, a proto volíme komplexní obor jako zcela dostačující kompromis.

1.1 Bodová konvergence a diskuze základního problému

Definice 1.1 (Limitní funkce, bodová konvergence): Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *limitní funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na A a říkáme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k f na A . Tuto skutečnost značíme

$$f_n \xrightarrow{A} f.$$

Poznámka: Rozepíšeme-li definici bodové konvergence $f_n \xrightarrow{A} f$, dostáváme ekvivalenci

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$

Příklad 1.1: Uvažujme $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ a $A = [-1, 1]$. Potom

$$f_n \xrightarrow{[-1,1]} f,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases}$$

Podobně zavádíme bodovou konvergenci funkční řady.

Definice 1.2 (Součtová funkce, bodová konvergence řady): Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že pro každé $z \in A$ je posloupnost částečných součtů $\{s_n(z)\}_{n=1}^\infty$, kde

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^n f_k(z),$$

konvergentní. Potom funkci definovanou na A vztahem

$$s(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z), \quad z \in A,$$

nazýváme *součtovou funkcí* posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ na A a říkáme, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

konverguje bodově k s na A .

Příklad 1.2: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje bodově k součtové funkci

$$s(z) = \frac{1}{1-z}$$

na množině $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

V analýze a jejích aplikacích se často vyskytuje situace, kdy chceme vyšetřit nějakou vlastnost limitní funkce f na základě známých vlastností funkcí f_n . Fundamentální problém je, zda se zachovávají vlastnosti jako je spojitost, diferencovatelnost a integrabilita. Dále vyvstává otázka, zda je nějaký vztah mezi derivacemi, resp. integrály funkcí f_n a derivací, resp. integrálem limitní funkce f v případech, kdy tyto operace mají dobrý smysl.

Již jednoduchý Příklad 1.1 ukazuje, že ani spojitost, ani diferencovatelnost se při bodové konvergenci obecně nezachovává. Totéž se týká integrability. Tyto vlastnosti se nezachovávají ani v případě bodově konvergentních řad a součtové funkce. Dokonce ani pokud jsou funkce f_n a limitní funkce f diferencovatelné nemusí být f' bodovou limitou posloupnosti f'_n a podobně pro integrál. Tyto skutečnosti ilustrují následující příklady.

Příklad 1.3: Položme

$$f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud je $x \neq 0$, konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

jako geometrická řada s kvocientem v absolutní hodnotě menším než 1, a proto máme

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Je-li $x = 0$, potom je $f_n(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a proto také $s(0) = 0$. Celkem tedy je součtová funkce

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že součtová funkce spojitých funkcí nemusí být spojitá.

Příklad 1.4: Uvažujme nejprve funkci $f_n(x)$ definovanou pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ následovně

$$f_n(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos((n!) \pi x))^{2m}.$$

Pokud je $(n!)x \in \mathbb{Z}$, potom $\cos((n!) \pi x) \in \{\pm 1\}$, a proto je $f_n(x) = 1$. Je-li naopak $(n!)x \notin \mathbb{Z}$, máme $\cos((n!) \pi x) \in (-1, 1)$ a odtud plyne, že $f_n(x) = 0$.

Ukážeme, že existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud je $x \notin \mathbb{Q}$, potom $(\forall n \in \mathbb{N})(n!)x \notin \mathbb{Z}$, neboli $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n(x) = 0)$, což implikuje, že $f(x) = 0$. Je-li naopak $x \in \mathbb{Q}$, tedy $x = p/q$ pro nějaká $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, potom je $(n!)x \in \mathbb{Z}$ pro všechna $n \geq q$. Tudíž $f(x) = 1$. Zjišťujeme tedy, že limitní funkce f je známá Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Omezíme-li se např. na interval $[0, 1]$, je funkce f_n riemannovsky integrabilní na $[0, 1]$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, neboť je nenulová jen v konečně mnoha bodech. Dirichletova funkce je ale příklad funkce, která není na $[0, 1]$ riemannovsky integrabilní. Z toho plyne, že se integrabilita v Riemannově smyslu obecně nezachovává při bodové konvergenci.

Příklad 1.5: Uvažujme

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je jasné, že $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$, kde $f = 0$ (tj. $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$). Funkce f_n jsou diferencovatelné a pro jejich derivaci platí

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne, že i když jsou všechny funkce f_n a f diferencovatelné, $f' = 0$ není bodovou limitou f'_n . Skutečně např. pro $x = 0$ není posloupnost $\{f'_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, neboť

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

Příklad 1.6: Položme

$$f_n(x) := nx(1 - x^2)^n, \quad x \in [0, 1].$$

Je-li $x \in (0, 1)$, potom $f_n(x) \rightarrow 0$ např. podle podílového kritéria. Pro $x \in \{0, 1\}$ je $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a proto také $f_n(x) \rightarrow 0$. Celkem tedy

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} f,$$

kde $f = 0$ na $[0, 1]$. Snadno spočítáme integrál

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \int_0^1 x(1 - x^2)^n dx = \frac{n}{2} \int_0^1 y^n dy = \frac{n}{2n+2}.$$

Odtud vidíme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Poučení z předchozích příkladů je, že bodová konvergence nezachovává spojitost, diferencovatelnost, ani integrabilitu. Navíc záměny limit, derivace a limity, ani integrálu a limity nelze provádět zcela automaticky. Naším dalším cílem bude zformulovat podmínky, za kterých se uvažované vlastnosti zachovávají a bude možné provádět limitní záměny. Pro tyto účely nejprve nahradíme bodovou konvergenci silnější konvergencí, tzv. *konvergencí stejnoměrnou*.

1.2 Stejnoměrná konvergence

Definice 1.3 (Stejnoměrná konvergence): Buďte $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f na množině A , právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon).$$

Tuto skutečnost značíme

$$f_n \xrightarrow{A} f.$$

Poznámka: Pojem *stejnoměrná konvergence* je vždy svázán s množinou A . Samostatný výrok „posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně“ nemá smysl, neuvedeme-li na jaké množině.

Poznámka: Uvědomte si zdánlivě nepatrný rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí:

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{A} f &\Leftrightarrow (\forall z \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon), \\ f_n \xrightarrow{A} f &\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon), \end{aligned}$$

který spočívá „pouze“ v různém pořadí kvantifikátorů. V případě bodové konvergence je nalezené n_0 funkcí jak ϵ , tak z , tj. $n_0 = n_0(\epsilon, z)$. Potom nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ platí pro fixní ϵ a z pro všechna $n \geq n_0$. Naopak v případě stejnoměrné konvergence existuje univerzální n_0 , které závisí pouze na ϵ , tj. $n_0 = n_0(\epsilon)$, nikoli na z . Nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ potom platí pro každé $z \in A$ a $n \geq n_0$.

Poznámka: Stejnomořná konvergence je silnější než bodová konvergence, tzn., že

$$f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f.$$

Z toho také plyne, že pokud $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na A , musí konvergovat ke své (bodové) limitní funkci, neboť ta je určena jednoznačně, tj.

$$f_n \xrightarrow{A} g \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow f = g.$$

Následující tvrzení je jen ekvivalentní přepis definice stejnoměrné konvergence. Je to ale užitečný tvar definice, a proto si ho zformulujeme jako větu.

Věta 1.4: Budte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{A} f &\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyplývá okamžitě z ekvivalence výroků

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$$

a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \right).$$

□

Příklad 1.7: Uvažujme posloupnost $f_n(x) := x^n$. Potom je

$$f_n \xrightarrow{[0,1)} 0,$$

ale $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k 0 stejnoměrně na $(0, 1]$, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1)} |x^n| = 1 \neq 0.$$

Platí ovšem

$$f_n \xrightarrow{[0,1-\epsilon]} 0$$

pro libovolné $\epsilon \in (0, 1)$, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1-\epsilon]} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon)^n = 0.$$

Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence má i svou stejnoměrnou variantu, která je obsahem následující věty.

Věta 1.5 (Bolzano–Cauchy): Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na A (k nějaké limitní funkci), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Poznámka: Ekvivalentní formulace Bolzanovy–Cauchyho podmínky je

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon).$$

Důkaz Věty 1.5. Implikace $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že $f_n \xrightarrow{A} f$. Potom platí

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/2).$$

Vezmeme-li libovolné $\epsilon > 0$ a $m, n \geq n_0$ dostaneme s použitím trojúhelníkové nerovnosti

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $z \in A$.

Implikace $(\Leftarrow)$: Předpokládejme, že platí Bolzanova–Cauchyho podmínka z věty. Potom je pro každé $z \in A$ splněno Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **číslnou** posloupnost $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ a tedy tato posloupnost je konvergentní, viz také Cvičení 1.1. Označme si její limitu

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

pro každé $z \in A$. Předpoklad platnosti stejnoměrné verze Bolzanova–Cauchyho podmínky je ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \epsilon/2).$$

Nyní stačí poslat $p \rightarrow \infty$ v poslední nerovnosti a dostaneme tak

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/2 < \epsilon),$$

což znamená, že $f_n \xrightarrow{A} f$. □

Poznámka: Všimněte si, že se ve Větě 1.5 explicitně nevyskytuje výraz f pro limitní funkci. Bolzanova–Cauchyho podmínka umožňuje vyjádřit, že funkční posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na A bez použití limitní funkce.

Poznámka: Později uvidíme, že Bolzanovo–Cauchyho kritérium je ekvivalentní vyjádření tzv. *úplnosti* příslušného metrického prostoru. Věta 1.5 nám říká, že prostor omezených funkcí f na A s metrikou indukovanou normou

$$\|f\| := \sup_{z \in A} |f(z)|$$

je úplný (tzv. Banachův).

Věta 1.6: Budte $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty, f, g$ vesměs funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pokud

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \text{a} \quad g_n \xrightarrow{A} g,$$

potom platí:

1. $f_n + g_n \xrightarrow{A} f + g$,
2. $\alpha f_n \xrightarrow{A} \alpha f$,
3. $f_n g_n \xrightarrow{A} f g$, jsou-li f a g omezené na A .

Důkaz. Tvzení 1. a 2. vyplývá přímo z příslušných definic a je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.3.

K důkazu tvrzení 3. použijeme jednu implikaci následujícího pomocného tvrzení.

Lemma 1.7: Necht' $f_n \xrightarrow{A} f$, potom

$$f \text{ je omezená na } A \iff (\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right).$$

Důkaz Lemma 1.7. Implikace $(\Rightarrow)$: Položíme-li $\epsilon = 1$ v definici stejnoměrné konvergence, dostaneme z předpokladu $f_n \xrightarrow{A} f$, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < 1).$$

Z toho dále plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| < 1 + |f(z)|).$$

Protože je f omezená na A , existuje $L > 0$ tak, že $\sup_{z \in A} |f(z)| < L$, a proto

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| \leq 1 + \sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + L =: K.$$

Implikace $(\Leftarrow)$: Opět z předpokladu $f_n \xrightarrow{A} f$ speciálně vyplývá, že

$$(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f(z)| < 1 + |f_{m_0}(z)|).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m_0 \geq n_0$, a tedy $\sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < K$. Odtud dostaneme

$$\sup_{z \in A} |f(z)| < 1 + \sup_{z \in A} |f_{m_0}(z)| < 1 + K,$$

nebo-li f je omezená na A . □

Nyní se vrátíme k důkazu 3. tvrzení Věty 1.6. Jelikož jsou f i g omezené, máme

$$(\exists L > 0) \left(\sup_{z \in A} |g(z)| < L \right)$$

a

$$(\exists K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\sup_{n \geq n_0} \sup_{z \in A} |f_n(z)| < K \right)$$

podle Lemma 1.7. Dále z předpokladů

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \text{a} \quad g_n \xrightarrow{A} g$$

plyne

$$\begin{aligned} (\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)(\forall z \in A) & \left(|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L} \right), \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)(\forall z \in A) & \left(|g_n(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2K} \right). \end{aligned}$$

Odtud pro libovolné $\epsilon > 0$, $n \geq n_3 := \max(n_0, n_1, n_2)$ a každé $z \in A$ vyvodíme

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &= |f_n(z)(g_n(z) - g(z)) - (f(z) - f_n(z))g(z)| \\ &\leq |f_n(z)| |g_n(z) - g(z)| + |f_n(z) - f(z)| |g(z)| \\ &\leq K \frac{\epsilon}{2K} + \frac{\epsilon}{2L} L = \epsilon, \end{aligned}$$

což znamená, že $f_n g_n \xrightarrow{A} f g$. □

Příklad 1.8: Předpoklad omezenosti funkcí f a g ve 3. tvrzení Věty 1.6 nelze vypustit. Položme např.

$$f_n(x) := x \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě

$$f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f \quad \text{a} \quad g_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 0,$$

kde $f(x) = x$, ale funkční posloupnost

$$f_n(x)g_n(x) = \frac{x}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ (ověřte).

Uvedeme ještě definici tzv. *lokálně stejnoměrné konvergence*. Tento typ konvergence je „vlastní“ prostorům analytických funkcí, se kterými se čtenář může seznámit v partiích komplexní analýzy, viz např. [2].

Definice 1.8 (Lokálně stejnoměrná konvergence): Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f komplexní funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na množině A , právě když

$$(\forall z \in A)(\exists H_z \text{ okolí } z) \left(f_n \xrightarrow{H_z \cap A} f \right).$$

Poznámka: Pod pojmem okolí H_z zde rozumíme množinu $H_z = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$ pro nějaké $r > 0$ (otevřený kruh v $\mathbb{C}$ se středem v z a poloměrem $r > 0$).

Pokud $f_n \xrightarrow{A} f$, pak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje také lokálně stejnoměrně k f na A . Naopak to neplatí. Např. posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na intervalu $(0, 1)$, ale nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Pokud je ale množina A tzv. kompaktní, tj. omezená a uzavřená, splývá lokálně stejnoměrná konvergence na A se stejnoměrnou konvergencí na A . Kompaktností se budeme zabývat později v kapitole věnované topologii.

1.3 Věty o záměně

V následujících větách zformulujeme podmínky za jakých se spojitost, diferencovatelnost a integritabilita přenáší z funkční posloupnosti na limitní funkci a kdy můžeme zaměňovat limity, limitu a derivaci a limitu a integrál.

Nejprve zformulujeme tzv. větu o limitě. Připomeňme si definici *limity funkce vzhledem k množině A* :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = c \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, 0 < |z - z_0| < \delta)(|f(z) - c| < \epsilon).$$

Aby měla definice rozumný smysl, požadujeme navíc, aby množina $A \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ byla neprázdná pro libovolné $\delta > 0$. Jinými slovy limitu funkce vzhledem k A definujeme v tzv. *hromadném bodě* množiny A , tj. v takovém bodě $z \in \mathbb{C}$, v jehož libovolném okolí H_z leží nějaký bod z $A \setminus \{z\}$, tzn.

$$(\forall \delta > 0)(\exists w \in A)(0 < |w - z| < \delta).$$

Množinu hromadných bodů množiny A značíme A' .

Věta 1.9 (O limitě): Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

- i. $z_0 \in A'$.
- ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.
- iii. $f_n \xrightarrow{A} f$.

Potom platí:

- 1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

2. Existuje limita $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z)$.

3. Platí rovnost: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Zvolme pevně $\epsilon > 0$. Z předpokladu iii. a Věty 1.5 plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon).$$

Využijeme-li předpoklad ii. a pošleme $z \rightarrow z_0$ v poslední nerovnosti, dostaneme

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| \leq \epsilon),$$

což implikuje splnění Bolzanovy–Cauchyho podmínky konvergence číselné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

V druhé části důkazu ověříme najednou tvrzení 2. a 3. Označme $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|f(z) - a| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - a_m| + |a_m - a|.$$

pro libovolné $m \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu iii. lze najít nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, že

$$|f(z) - f_m(z)| < \epsilon/3$$

pro každé $z \in A$. Z již dokázaného tvrzení 1. můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že zvolené m je také dost velké, aby platilo

$$|a_m - a| < \epsilon/3.$$

Nakonec podle předpokladu ii. můžeme najít okolí H_{z_0} takové, že

$$|f_m(z) - a_m| < \epsilon/3$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A$, $z \neq z_0$. Celkem tak dostáváme, že

$$|f(z) - a| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

pro všechna $z \in H_{z_0} \cap A \setminus \{z_0\}$, což dokazuje obě tvrzení 2. a 3. □

Důsledek předchozí věty je, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost. Připomeňme, že o funkci f řekneme, že je *spojitá v bodě z_0 vzhledem k A* , pokud

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in A, |z - z_0| < \delta)(|f(z) - f(z_0)| < \epsilon).$$

Všimněte si, že pokud bod z_0 *není* hromadným bodem A (je to tzv. *izolovaný bod A*), je f automaticky spojitá v z_0 vzhledem k A .

Věta 1.10 (O spojitosti): Necht' $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ a f jsou funkce definované na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $f_n \xrightarrow{A} f$. Jsou-li f_n spojitě v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom je také f spojitá v bodě z_0 vzhledem k A .

Důkaz. Podle poznámky výše, stačí uvažovat případ $z_0 \in A'$. Potom je funkce f spojitá v z_0 vzhledem k A , právě když

$$f(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

Aplikujeme-li nyní Větu 1.9, jejíž předpoklad ii. je splněn díky spojitosti f_n v bodě z_0 vzhledem k A , dostaneme

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z).$$

□

Poznámka: Vzhledem k lokálnímu charakteru spojitosti v bodě můžeme předpoklad $f_n \xrightarrow{A} f$ ve Větě 1.10 nahradit $f_n \xrightarrow{H_{z_0} \cap A} f$, kde H_{z_0} je nějaké okolí z_0 . Speciálně Věta 1.10 platí, nahradíme-li předpoklad stejnoměrné konvergence lokálně stejnoměrnou konvergencí. Platí tedy tvrzení, které lze stručně vyslovit: „*Lokálně stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá.*“

Poznámka: V následujícím smyslu nelze tvrzení Věty 1.10 obrátit: Jsou-li $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ a f spojitě funkce na A (vzhledem k A) a $f_n \xrightarrow{A} f$, nevyplývá z toho nutně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ na A . Tuto skutečnost ilustruje např. Příklad 1.8. Konvergence, která zachovává spojitost a platí pro ni také obrácené tvrzení ve smyslu výše, je tzv. kvazistejněmá konvergence, která je slabší než konvergence stejnoměrná. My se v tomto kurzu kvazistejněmá konvergencí zabývat nebudeme. Čtenář se o ní může dozvědět více ve skriptu [10]. Obrácené tvrzení platí za jistých dodatečných předpokladů i pro stejnoměrnou konvergenci, viz např. [11, Thm. 7.13].

Poznámka: Věty 1.10 a 1.5 implikují, že prostor spojitých a omezených funkcí na A vybavený normou $\|f\| := \sup_{z \in A} |f(z)|$, který se obvykle značí $C(A)$, je úplný, tedy Banachův. Vlastnostmi prostoru $C(A)$ se budete hlouběji zabývat ve funkcionální analýze.

Další věta se týká vztahu integrace a stejnoměrné konvergence. V ní se omezíme na funkce definované na uzavřeném a omezeném intervalu, neboť na těchto funkcích je vystavěná klasická teorie Riemannova integrálu.

Věta 1.11: (O integraci) Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ a f reálné funkce definované na $[a, b]$. Předpokládejme, že

i. $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$,

ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f_n Riemannovsky integrabilní na $[a, b]$.

Potom platí:

1. Limitní funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

2. Platí rovnost:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a integrálu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme 1. tvrzení. Připomeňme, že funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \sigma \text{ } \delta\text{-rozdělení } [a, b])(S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \epsilon),$$

kde

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=1}^m M_i^{(f)}(x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^m m_i^{(f)}(x_i - x_{i-1})$$

jsou horní a dolní integrální součet f při rozdělení σ ,

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

a $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ jsou body rozdělení σ .

Zvolme $\epsilon > 0$. Podle předpokladu i. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \tag{1}$$

pro každé $x \in [a, b]$. Zvolme pevně nějaké $n \geq n_0$. Podle předpokladu ii. existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné δ -rozdělení σ intervalu $[a, b]$ platí

$$S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Nerovnost (1) lze napsat ve tvaru

$$f_n(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)},$$

ze které plyne

$$m_i^{(f_n)} - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq m_i^{(f)} \leq M_i^{(f)} \leq M_i^{(f_n)} + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

pro každé $i \in \hat{m}$. Vynásobíme-li nerovnosti výrazem $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i \in \hat{m}$, dostaneme

$$s_\sigma(f_n) - \frac{\epsilon}{4} \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{4}.$$

Přeuspořádáním nerovností a využitím odhadu (2) nakonec odvodíme, že

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f_n) - s_\sigma(f_n) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

což implikuje riemannovskou integrabilitu f na $[a, b]$.

Tvrzení 2. již ověříme snadno, neboť pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} dx = \frac{\epsilon}{4},$$

a proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Poznámka: Pro ospravedlnění záměny limity a integrálu je stejnoměrná konvergence podmínka postačující nikoliv nutná. Obvyklá argumentace pro tuto záměnu v matematické literatuře používá obecnější tzv. Lebesgueovu větu. Integrál v této větě ovšem není Riemannův, a proto si tuto větu dokážeme až mnohem později ve výkladu teorie Lebesgueova integrálu.

Poslední věta o záměně se týká vztahu derivace a stejnoměrné konvergence.

Věta 1.12 (O derivaci): Budte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b) . Předpokládejme dále, že:

- i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=1}^\infty$ konverguje.
- ii. Posloupnost $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje na (a, b) .

Potom platí:

1. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na (a, b) .
2. Limitní funkce f posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je diferencovatelná na (a, b) .
3. Derivace f' je limitní funkcí posloupnosti $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ na (a, b) , tzn.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme tvrzení 1. Zvolme $\epsilon > 0$. Bolzanova–Cauchyho podmínka a předpoklady i. a ii. implikují, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je

$$|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

a

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $x \in (a, b)$. Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku na funkci $f_n - f_m$, dostaneme

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| |x - t| \quad (3)$$

kde $x, t \in (a, b)$ a ξ je bod ležící mezi x a t . Výraz vpravo můžeme dále odhadnout a dostaneme nerovnost

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} |x - t| < \frac{\epsilon}{2},$$

ktelé platí pro všechna $x, t \in (a, b)$. Odtud máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| + |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in (a, b)$. Tvrzení 1. tedy platí podle Věty 1.5.

V druhé části důkazu dokážeme najednou tvrzení 2. a 3. Zafixujme $x \in (a, b)$ a definujme si pomocné funkce

$$\phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{a} \quad \phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pro $t \in (a, b) \setminus \{x\}$. Jelikož jsou f_n diferencovatelné, máme

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x)$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost (3), kterou jsme odvodili aplikací Lagrangeovy věty, lze napsat ve tvaru

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

pro všechna $m, n \geq n_0$ a $t \in (a, b) \setminus \{x\}$. Tedy podle Věty 1.5 je posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{x\}$. Přihlédneme-li navíc k tomu, že $f_n \xrightarrow{(a,b)} f$, zjistíme, že

$$\phi_n \xrightarrow{(a,b) \setminus \{x\}} \phi.$$

Nyní již můžeme aplikovat Větu 1.9 na posloupnost $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $A = (a, b) \setminus \{x\}$, z čehož vyplývá, že existuje limita $\lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$, což znamená z definice ϕ , že existuje derivace f v bodě x . Nakonec máme

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

□

Poznámka: Už na Příkladu 1.5 lze pozorovat, že ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nelze nic usuzovat o konvergenci posloupnosti derivací $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$. Na druhou stranu Věta 1.12 ukazuje, že naopak jistý vztah platí, jsou-li splněny předpoklady i. a ii. Věty 1.12. Tvrzení 1. Věty 1.12 představuje další kritérium stejnoměrné konvergence.

Poznámka: Tvrzení 2. a 3. Věty 1.12 zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad ii. slabším požadavkem lokálně stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ na (a, b) . Za tohoto slabšího předpokladu platí tvrzení 1. také pouze lokálně, tedy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) .

1.4 Funkční řady

Definice 1.13 (Stejnomořná konvergence řady): Necht' $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně* na množině A , právě když funkční posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná vztahem

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z), \quad z \in A,$$

konverguje stejnoměrně na A .

Poznámka: Zcela analogicky definujeme *lokálně stejnoměrnou konvergenci* řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na A .

Poznámka: Zde členy posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ indexujeme prvky $\mathbb{N}_0$ (od nuly). Občas ale budeme také indexovat prvky $\mathbb{N}$ (od jedničky). Způsob indexování je samozřejmě nepodstatný a my si ho budeme volit libovolně podle potřeby.

Příklad 1.9: Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

konverguje stejnoměrně na $A_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, kde $r \in (0, 1)$, neboť posloupnost částečných součtů

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

konverguje stejnoměrně na A_r . Na otevřeném jednotkovém kruhu $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ovšem posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně nekonverguje, a proto ani řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ není stejnoměrně konvergentní na A . Řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A (rozmyslete).

Poznatky získané v části o funkčních posloupnostech nyní můžeme aplikovat na posloupnost částečných součtů a dostaneme poměrně jednoduše odpovídající věty o funkčních řadách. První takovou větou je Bolzanovo–Cauchyho kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady. Jednoduchý přepis vět, který bychom získali prostým nahrazením funkční posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ by ale nebyl příliš užitečný, neboť posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ není typicky možné, na rozdíl od jednoduchého Příkladu 1.9, jednoduše vyjádřit a může být proto velmi nevhodné s ní přímo pracovat. Daleko užitečnější je zformulovat tvrzení o funkčních řadách $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ v termínech posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, kterou v řadě sčítáme.

Věta 1.14 (Bolzano–Cauchy): Necht' $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Potom Řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na A , právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in A) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \epsilon \right).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.5 na posloupnost částečných součtů. □

Důsledek 1.15 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence): Pokud řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině A , pak

$$f_n \xrightarrow{A} 0.$$

Důkaz. Stačí použít Větu 1.14 a položit $p = 1$. □

Příklad 1.10: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

konverguje bodově pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, což plyne např. z Dirichletova kritéria. Ukážeme, že řada není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 2\pi]$ pomocí Bolzanova–Cauchyho kritéria. Lze ukázat, že tato řada není stejnoměrně konvergentní na libovolném intervalu, který má neprázdný průnik s množinou $2\pi\mathbb{Z}$.

Pokud by řada byla stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$, potom bychom k libovolnému $\epsilon > 0$ našli $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ by platilo

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k} \right| < \epsilon.$$

Ukážeme, že to není možné. Položme $p := n + 2$ a $x = x_n := 1/(2n)$. Potom

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(1/2)}{k}.$$

Úsek harmonické řady můžeme zespodu odhadnout integrálem:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \geq \int_{n+1}^{2n+2} \frac{dx}{x} = \log \frac{2n+2}{n+1} = \log 2,$$

a proto pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{\sin(k/(2n))}{k} \geq \sin(1/2) \log 2 > 0.$$

Tedy, je-li $\epsilon < \sin(1/2) \log 2$, Bolzanova–Cauchyho podmínka neplatí.

Později budeme dokonce schopni řadu sečíst. V části věnované trigonometrickým řadám uvidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{je-li } x \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{je-li } x \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Tedy součtová funkce řady není spojitá na $[0, 2\pi]$. Pokud by ale řada konvergovala stejnoměrně na $[0, 2\pi]$, potom by její součtová funkce musela být spojitá, což plyne z Věty 1.10 aplikované na posloupnost částečných součtů. To je alternativní argument dokazující, že řada ze zadání není stejnoměrně konvergentní na $[0, 2\pi]$.

Věta 1.16 (Weierstrass): Necht' $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A) (|f_n(z)| \leq g_n(z)).$$

Potom, konverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ stejnoměrně na A , je také $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A .

Poznámka: Je-li speciálně $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ číselná posloupnost funkcí nezávislých na z , tzn., že platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists M_n \geq 0)(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n),$$

je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na A , pokud konverguje číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$. Toto kritérium se v literatuře objevuje pod názvem *Weierstrassův M-test*.

Důkaz Věty 1.16. Vyplývá ihned z nerovnosti

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$$

a Věty 1.14. □

Příklad 1.11: Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

na intervalu $[0, \infty)$. Vyšetřením průběhu funkce $f(t) := te^{-t}$ snadno zjistíme, že $0 \leq f(t) \leq f(1) = 1/e$ pro všechna $t \in [0, \infty)$. Tedy platí

$$\left| \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x} \right| = \frac{f(\sqrt{n}x)}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{en^{3/2}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Jelikož majorizující číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konverguje, je podle Věty 1.16 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

stejnoměrně konvergentní na $[0, \infty)$.

Příklad 1.12: Walter Rudin začíná svou knihu [12] tvrzením, že komplexní exponenciální funkce je nejdůležitější funkcí v matematice. Tato funkce je definována řadou

$$e^z \equiv \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

kteřá konverguje bodově pro každé $z \in \mathbb{C}$. Zafixujeme-li $R > 0$, vyplývá z Weierstrassova kritéria, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konverguje stejnoměrně na kruhu $A_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, neboť

$$\sup_{z \in A_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

a číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

je konvergentní. Speciálně z toho plyne, že řada z definice $\exp(z)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$.

Podobně se odpovídající řadou definují trigonometrické funkce

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$. Potom platí tzv. *Eulerův vzorec*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

jehož odvození je přenecháno čtenáři jako Cvičení 1.4.

Příklad 1.13: Slavná Riemannova zeta funkce je definovaná vztahem

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} z > 1$, neboť pro tato z řada vpravo bodově konverguje. Obecná mocnina s komplexním argumentem, která se v definici zeta funkce objevuje, je definována vztahem

$$n^z := e^{z \log n},$$

kde exponenciální funkce s komplexním argumentem byla definována v Příkladu 1.12. Buď $r > 1$, potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geq r$, je

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{n^r},$$

kde jsme použili vztah $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$ platný pro každé $w \in \mathbb{C}$, viz Cvičení 1.7. Z Weierstrassova kritéria potom vyplývá, že řada z definice funkce ζ konverguje stejnoměrně na polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq r\}$ pro libovolné $r > 1$. Speciálně z toho plyne, že tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na otevřené polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

Riemannova zeta funkce patří mezi tzv. *Dirichletovy řady*, což jsou funkční řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je komplexní posloupnost. Dirichletovy řady mají podobně jako např. mocninné řady mnoho speciálních vlastností. My se ovšem v tomto kurzu nebudeme studiem speciálních vlastností Dirichletových řad zabývat. Zaujatý čtenář najde více např. v knize [5].

Na rozdíl od Weierstrassova kritéria, které lze aplikovat jen na (bodově) absolutně konvergentní řady lze následující kritéria Dirichleta a Abela použít i v jiných případech.

Věta 1.17: Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotónní posloupnost reálných funkcí definovaných na A . Označme $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$. Nechť dále platí jedna z následujících podmínek

- i. (Dirichlet) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tzv. *stejně omezená*, tzn.

$$(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K),$$

$$\text{a } g_n \xrightarrow{A} 0.$$

- ii. (Abel) Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na A a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stejně omezená.

Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na A .

Důkaz. Důkaz staví na tzv. Abelově partiální sumaci. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k g_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} s_k g_{k+1} \\ &= s_{n+p} g_{n+p} - s_n g_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (g_k - g_{k+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

1. Předpokládejme, že platí podmínka i. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu $g_n \xrightarrow{A} 0$ plyne, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A) \left(|g_n(z)| < \frac{\epsilon}{4K} \right).$$

Potom pro libovolné $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ můžeme s využitím výrazu (4) odhadovat

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &\leq |s_{n+p}(z)| |g_{n+p}(z)| + |s_n(z)| |g_{n+1}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z)| |g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< K \frac{\epsilon}{4K} + K \frac{\epsilon}{4K} + K \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)|. \end{aligned}$$

Podle předpokladu je posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotónní, a proto je výraz $g_k(z) - g_{k+1}(z)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ buďto nezáporný, nebo nekladný. V každém případě z toho plyne, že

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (g_k(z) - g_{k+1}(z)) \right| = |g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|.$$

Odtud dále získáváme odhad

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &< \frac{\epsilon}{2} + K |g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} + K |g_{n+1}(z)| + K |g_{n+p}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + K \frac{\epsilon}{4K} + K \frac{\epsilon}{4K} = \epsilon, \end{aligned}$$

který platí pro každé $n \geq n_0, p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$, což podle Bolzanova–Cauchyho kritéria implikuje tvrzení věty.

2. Nyní předpokládejme, že platí podmínka ii. Nejprve mírně přepíšeme výraz (4) do tvaru:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = (s_{n+p} - s_n) g_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (s_k - s_n) (g_k - g_{k+1}).$$

Z předpokladu stejné omezenosti posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ na A plyne, že

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall z \in A) (|g_n(z)| \leq M),$$

Dále zvolme $\epsilon > 0$ libovolně ale pevně. Podle druhého předpokladu je $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na A , a proto podle Věty 1.5 existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$|s_k(z) - s_n(z)| < \frac{\epsilon}{3M}$$

pro všechna $z \in A$ a $n, k \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k \geq n \geq n_0$. Potom pro libovolné $n \geq n_0, p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| &\leq |s_{n+p}(z) - s_n(z)| |g_{n+p}(z)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(z) - s_n(z)| |g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3M} |g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| \\ &= \frac{\epsilon}{3M} |g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M} |g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)|. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí díky monotonii posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dále využijeme stejné omezenosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ a dostaneme finální odhad:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) g_k(z) \right| < \frac{\epsilon}{3M} |g_{n+p}(z)| + \frac{\epsilon}{3M} (|g_{n+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|) \leq \frac{\epsilon}{3M} M + \frac{\epsilon}{3M} 2M = \epsilon,$$

který platí pro každé $n \geq n_0, p \in \mathbb{N}$ a $z \in A$. Tvrzení věty nyní vyplývá z Bolzanova–Cauchyho kritéria. $\square$

Příklad 1.14: Ukážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

konverguje stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$, kde $\delta \in (0, \pi)$. Srovnajte s Příkladem 1.10. Použijeme Dirichletovo kritérium, kde položíme

$$f_n(x) := \sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$

Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě klesající a $g_n \xrightarrow{[\delta, 2\pi - \delta]} 0$. Stačí tedy ověřit, že posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ je stejně omezená na $[\delta, 2\pi - \delta]$. Podle Cvičení 1.8 máme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin(xn/2) \sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že pro $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí odhad

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)},$$

který implikuje stejnou omezenost posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Příklad 1.15: Vyšetříme ještě stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x) \sin(nx)}{n}$$

na $\mathbb{R}$. Podobně jako v předchozím příkladě aplikujeme Dirichletovo kritérium s

$$f_n(x) := \sin(x) \sin(nx) \quad \text{a} \quad g_n(x) := \frac{1}{n}.$$

V tomto případě dostaneme

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^n f_k(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x/2)} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right), \end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$|s_n(x)| \leq 2.$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejně omezená a také ostatní předpoklady Dirichletova kritéria jsou splněny. Proto řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x) \sin(nx)}{n}$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Tento příklad ukazuje, srovnáme-li ho s Příkladem 1.10, že nelze postupovat tak, že bychom funkci $\sin(x)$ „vytkli“ ven ze sumy a vyšetřovali řadu z Příkladu 1.10.

Podobně jako u funkčních posloupností nás také u funkčních řad zajímá, kdy je možné zaměnit např. limitu a sumu, integrál a sumu, apod. Abychom odvodili věty o záměně pro funkční řady, stačí věty o záměně pro funkční posloupnosti aplikovat na posloupnost částečných součtů funkční řady. Pro jejich důležitost si věty o záměně pro funkční řady zformulujeme.

Věta 1.18 (O limitě): Nechť $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Dále předpokládejme:

- i. $z_0 \in A'$.
- ii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z) =: a_n$.
- iii. Řada $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konverguje stejnoměrně na A k součtové funkci s .

Potom platí:

- 1. Řada $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konverguje.
- 2. Existuje limita $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} s(z)$.
- 3. Platí rovnost: $\sum_{n=0}^\infty a_n = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} s(z)$.

Jinými slovy lze zaměňovat pořadí limity a sumy:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} \sum_{n=0}^\infty f_n(z) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f_n(z).$$

Důkaz. Položme

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z) \quad \text{a} \quad A_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $z \in A$. Potom z předpokladu ii. plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} s_n(z) = A_n.$$

Dále bod iii. znamená, že $s_n \xrightarrow{A} s$. Tvrzení věty nyní plyne z Věty 1.9. □

Věta 1.19 (O spojitosti): Nechť $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost funkcí definovaných na $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ a spojitých v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A . Potom, pokud řada $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konverguje stejnoměrně na A , je její součtová funkce spojitá v bodě $z_0 \in A$ vzhledem k A .

Důkaz. Plyne z Věty 1.10. □

Poznámka: Věta 1.19 zůstává v platnosti i pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na A . Z toho plyne tvrzení, jež můžeme stručně vyjádřit jako: *Součtová funkce lokálně stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá.*

Věta 1.20 (O integraci): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $[a, b]$ k součtové funkci s . Potom je s riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a platí rovnost:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Neboli lze zaměňovat pořadí integrálu a sumy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.11 na posloupnost částečných součtů. □

Věta 1.21 (O derivaci): Budte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na (a, b) . Předpokládejme dále, že:

- i. Existuje $c \in (a, b)$ takové, že posloupnost řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ konverguje.
- ii. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ stejnoměrně konverguje na (a, b) .

Potom platí:

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b) .
2. Součtová funkce s řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ je diferencovatelná na (a, b) .
3. Derivace s' je součtovou funkcí řady $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ na (a, b) , tzn.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Důkaz. Stačí aplikovat Větu 1.12 na posloupnost částečných součtů. □

Poznámka: Předpoklad ii. Věty 1.21 lze nahradit lokálně stejnoměrnou konvergencí $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ na (a, b) . Potom místo tvrzení 1. máme pouze lokálně stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na (a, b) , ale tvrzení 2. a 3. zůstávají v platnosti beze změny.

Na závěr této sekce si ukážeme jako zajímavost, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která není v žádném bodě diferencovatelná. Takovou funkci je bezpochyby velmi obtížné si představit, neboť, přestože je spojitá, její graf musí být „hodně zubatý“. Údajně i velcí matematici 19. století předpokládali (např. Gauss), že množina bodů, v nichž spojitá funkce nemá derivaci, musí být v

nějakém smyslu omezená. To je pravda, když předpoklad spojitosti mírně zesílíme a vezmeme např. funkce *lipschitzovské*:

$$f \text{ je lipschitzovská na } (a, b) \Leftrightarrow (\exists K > 0)(\forall x, y, \in (a, b))(|f(x) - f(y)| < K|x - y|).$$

Potom množina bodů, v nichž není lipschitzovská funkce diferencovatelná, je podle Rademacherovy věty v jistém smyslu velmi malá (Lebesgueovy míry nula).

Příkladem spojitě funkce, která není nikde diferencovatelná, je tzv. Weierstrassova funkce:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

kde $a \in (0, 1)$ a b je liché přirozené číslo takové, že $ab > 1 + 3\pi/2$. K. Weierstrass prezentoval tuto funkci v roce 1872 a její graf byl jeden z prvních studovaných fraktálů, viz Obrázek 1. Později G. H. Hardy [4] ukázal, že stačí předpokládat $a \in (0, 1)$ a $b \geq 1/a$ a navíc funkci kosinus v definici Weierstrassovy funkce lze nahradit např. tzv. „zig-zag“ funkcí („pilou“), viz funkci ϕ v důkazu Věty 1.22.

Věta 1.22: Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá, ale není v žádném bodě diferencovatelná.

Důkaz. Označme ϕ funkci definovanou na $\mathbb{R}$, která splňuje

$$\phi(x) = |x|, \quad \text{je-li } x \in [-1, 1],$$

a která je 2-periodická, tzn. $\phi(x) = \phi(x + 2)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Není těžké si rozmyslet, že platí nerovnost

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq |s - t| \tag{5}$$

pro každé $s, t \in \mathbb{R}$. Speciálně je ϕ spojitá na $\mathbb{R}$.

Definujme

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož $|\phi(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, řada z definice funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ podle Věty 1.16. Dále z Věty 1.19 vyplývá, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Ukážeme, že f není diferencovatelná v žádném bodě. Zafixujme $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ a definujme

$$\delta_m := \pm \frac{1}{2} 4^{-m},$$

kde znaménko volíme tak, aby platilo $(4^m x, 4^m x + 4^m \delta_m) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. To je vždy možné, protože $|4^m \delta_m| = 1/2$. Dále pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\gamma_n := \frac{\phi(4^n(x + \delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}.$$

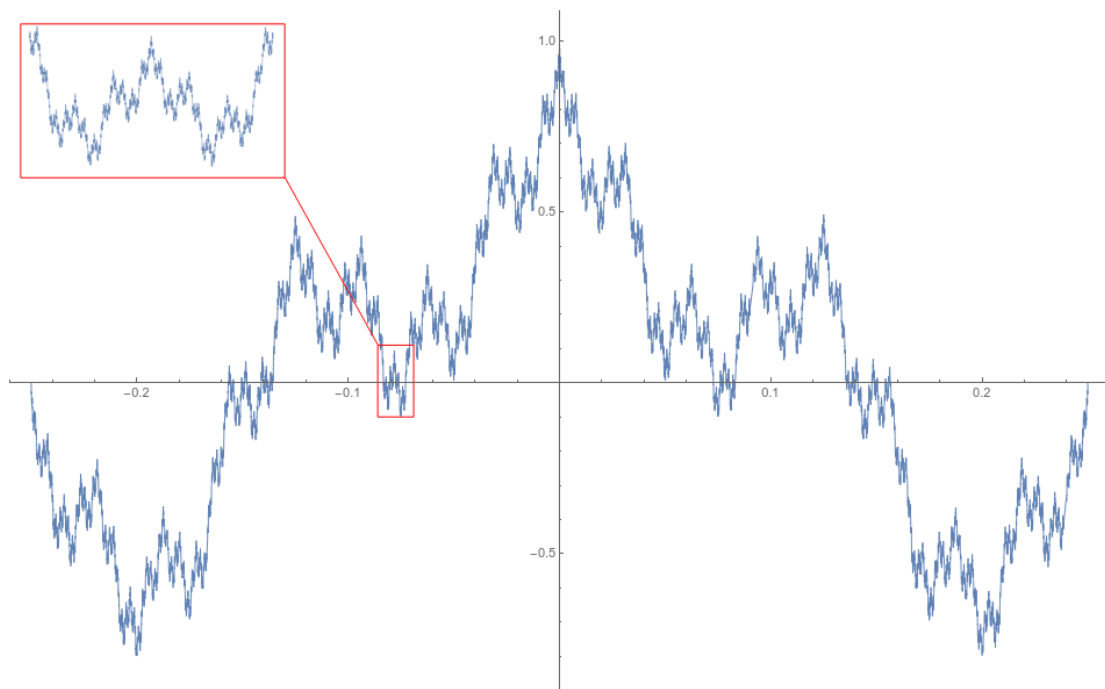
Je-li $n > m$, potom $4^n \delta_m = \pm 4^{n-m}/2$ je sudé číslo, a proto je $\gamma_n = 0$ z 2-periodičnosti funkce ϕ . Je-li $n \leq m$, máme podle (5) nerovnost $|\gamma_n| \leq 4^m$. Speciálně pro $m = n$ platí v předchozí nerovnosti dokonce rovnost $|\gamma_m| = 4^m$, což plyne z definice δ_m . Z těchto pozorování dostaneme

$$\left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_n \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m + 1}{2}.$$

Konečně, uvážíme-li, že $\delta_m \rightarrow 0$ pro $m \rightarrow \infty$, vyplývá z odhadu výše, že

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \right| = \infty.$$

Tedy f není diferencovatelná v bodě x . □



Obrázek 1: Graf Weierstrassovy funkce s $a = 1/2$ a $b = 4$.

1.5 Mocninné řady

Mocninné řady jsou speciální případ funkčních řad, který si zasluhuje zvláštní pozornost. *Mocninnou řadou* rozumíme funkční řadu s členy $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, tzn. řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Čtenář by měl být v tuto chvíli již se základními vlastnostmi mocninných řad seznámen. Úvodní část tohoto výkladu bude tedy spíše opakováním. V druhé části výkladu nám půjde zejména o speciální důsledky vyplývající z partií o stejnoměrné konvergenci.

Věta 1.23 (Cauchy–Hadamard): Buďte $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ komplexní posloupnost. Položme

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}},$$

kde speciálně klademe

$$R := \begin{cases} 0, & \text{je-li } \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \infty, \\ \infty, & \text{je-li } \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0. \end{cases}$$

Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně, pokud $|z - z_0| < R$ a diverguje, pokud $|z - z_0| > R$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $z_0 := 0$.

Předpokládejme nejdříve, že $R \in (0, \infty)$. Uvažujme fixní $z \in \mathbb{C}$ s $|z| < R$. Označme na chvíli $r := |z|$. Protože je $r < R$, existuje $\delta > 0$ tak, že $r + \delta < R$. Jelikož máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r + \delta},$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r + \delta},$$

nebo-li

$$|a_n| < \frac{1}{(r + \delta)^n}.$$

Odtud máme

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{r + \delta} \right)^n,$$

a proto řada $\sum_{n=0}^\infty |a_n z^n|$ konverguje podle srovnávacího kritéria.

Nyní zafixujme $z \in \mathbb{C}$ s $|z| > R$. Potom

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|},$$

a proto existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že $|a_n||z|^n > 1$. Z toho plyne, že posloupnost s členy $a_n z^n$ nekonverguje k 0, a tudíž řada $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ diverguje.

Nakonec si stačí rozmyslet, že první část důkazu lze zreprodukovat i pokud $R = \infty$ a podobně druhou pro případ, že $R = 0$. Tím je platnost tvrzení ověřena i pro krajní hodnoty $R = 0$ a $R = \infty$. $\square$

Definice 1.24 (Poloměr konvergence, obor konvergence): Číslo $R \in [0, \infty]$ z Věty 1.23 nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dále *oborem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme množinu

$$B = B(z_0, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{řada } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Z Věty 1.23 vyplývá, že obor konvergence mocninné řady splňuje

$$B_{z_0}(R) \subset B \subset \overline{B}_{z_0}(R),$$

kde jsme označili

$$B_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \quad \text{a} \quad \overline{B}_{z_0}(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}.$$

V bodech na hraniční kružnici $\overline{B}_{z_0}(R) \setminus B_{z_0}(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ mocninná řada konvergovat může, ale nemusí. V komplexním oboru je otázka konvergence mocninné řady v bodech na hraniční kružnici poměrně složitá a nad rámec tohoto kurzu, viz např. [12, Kap. 16].

Omezíme-li se jen na reálné body, je oborem konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jeden z intervalů

$$(x_0 - R, x_0 + R), \quad [x_0 - R, x_0 + R), \quad (x_0 - R, x_0 + R] \quad \text{a} \quad [x_0 - R, x_0 + R].$$

K vyšetření konvergence mocninné řady v krajních bodech $x_0 \pm R$ je zpravidla možné použít jemnější kritéria pro konvergenci číselných řad známá z 1. ročníku. Variabilitu chování mocninných řad na hranici oboru konvergence ilustrují následující příklady.

Příklad 1.16:

- Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ je $R = \infty$.
- Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ je $R = 0$.
- Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada diverguje, neboť posloupnost $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ nekongruje k nule.
- Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je $R = 1$. V bodě $z = 1$ řada diverguje jako harmonická řada. V bodě $z = -1$ řada konverguje např. podle Leibnitzova kritéria. Aplikací Dirichletova kritéria lze ukázat, že řada konverguje ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ kromě bodu $z = 1$.
- Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ je $R = 1$. Ve všech bodech kružnice $|z| = 1$ řada konverguje, neboť ji lze majorizovat konvergentní řadou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nyní obrátíme svou pozornost na studium stejnoměrné konvergence mocninných řad a její důsledky.

Věta 1.25: Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ pro každé $0 < r < R$. Speciálně mocninná řada konverguje lokálně stejnoměrně na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Zvolme $r \in (0, R)$. Potom

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n$$

pro všechna $z \in \overline{B}_{z_0}(r)$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Z Věty 1.23 plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ konverguje, a proto řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B}_{z_0}(r)$ podle Weierstrassova kritéria (Věta 1.16). $\square$

Pokud mocninná řada konverguje v bodě na hranici oboru konvergence, lze tvrzení o stejnoměrné konvergenci mocninné řady z Věty 1.25 rozšířit. V reálném oboru se tak dostáváme k následující Abelově větě.

Věta 1.26 (Abel): Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li tato řada v bodě $x_0 + R$ resp. $x_0 - R$, potom konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + R]$ resp. $[x_0 - R, x_0]$.

Důkaz. Větu dokážeme aplikací Abelova kritéria. Předpokládejme např., že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje v bodě $x_0 + R$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Navíc máme

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + R} \frac{|x - x_0|^n}{R^n} \leq 1.$$

Nyní stačí aplikovat Abelovo kritérium na řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^n.$$

$\square$

Poznámka: Podobnou ideou jako v důkazu Věty 1.26 lze dokázat, že *mocninná řada konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině jejího oboru konvergence*.

Věta 1.27: Součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je spojitá na $B_{z_0}(R)$.

Důkaz. Věta je okamžitým důsledkem Vět 1.25 a 1.19. $\square$

Tvrzení Věty 1.27 lze také rozšířit i na hraniční body jejího oboru konvergence. Omezíme-li se na reálné mocninné řady, dostaneme klasickou větu, které opět nese jméno Nielse Henrika Abela.

Věta 1.28 (Abel): Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0, \infty)$. Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, potom její součtová funkce s je spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva resp. v bodě $x_0 - R$ zprava, tzn.

$$s(x_0 + R) = \lim_{x \rightarrow (x_0 + R)^-} s(x) \quad \text{resp.} \quad s(x_0 - R) = \lim_{x \rightarrow (x_0 - R)^+} s(x).$$

Důkaz. Vyplývá z Abelovy Věty 1.26 a Věty 1.19. □

Poznámka: Věty 1.27 a 1.28 implikují následující tvrzení pro reálné mocninné řady: *Součtová funkce mocninné řady je spojitá na svém oboru konvergence vzhledem k tomuto oboru.* Nicméně toto tvrzení zůstává v platnosti i pro komplexní mocninné řady.

Příklad 1.17: Abelovu Větu 1.28 lze použít ke sčítání číselných řad. Připomeneme-li si známé Taylorovy rozvoje elementárních funkcí, dostaneme např. součty:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

nebo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg x = \frac{\pi}{4}.$$

Věta 1.29: Nechť s je součtová funkce mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s oborem konvergence B . Potom pro každý interval $[a, b] \subset B$ platí:

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Důkaz. Z Vět 1.25 a 1.26 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $[a, b] \subset B$. Tvrzení je proto důsledek Věty 1.20. □

Věta 1.30: Součtová funkce s mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je diferencovatelná v každém bodě $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a platí:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz. Podle předpokladu a Věty 1.23 je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Odtud plyne, že poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n$$

je také R , neboť

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1|^{1/n} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Potom podle Věty 1.25 řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$, a proto můžeme aplikovat Větu 1.21, která již implikuje tvrzení. $\square$

Poznámka: Věta 1.30 platí i pro komplexní mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ je nahrazen množinou $B_{z_0}(R)$ a derivaci $s'(z)$ chápeme v komplexním smyslu.

Mocninnou řadu můžeme tedy na vnitřku oboru konvergence derivovat člen po členu a výsledkem je opět mocninná řada se stejným poloměrem konvergence. Větu 1.30 můžeme aplikovat opakovaně a zjistíme tak, že součtová funkce s má na $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů a pro n -tou derivaci platí:

$$s^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n}, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dosadíme-li $x = x_0$ do této rovnosti dostaneme vztah mezi koeficienty mocninné řady a její součtové funkce:

$$a_n = \frac{s^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Funkce f , která má na intervalu (a, b) derivace všech řádů se nazývá *hladká* na (a, b) a množinu všech hladkých funkcí na (a, b) značíme $C^\infty(a, b)$. Součtová funkce mocninné řady je tedy hladká funkce na vnitřku oboru konvergence.

Definice 1.31 (Taylorova řada): Nechť funkce f má v bodě z_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě z_0 .

Z předchozí diskuze je jasné, že každá mocninná řada s kladným poloměrem konvergence je Taylorovou řadou své součtové funkce. Zamysleme se nad opačným problémem, tj. zda se součtová funkce Taylorovy řady hladké funkce f se středem v x_0 , která má kladný poloměr konvergence, rovná funkci f alespoň na nějakém okolí x_0 . Za chvíli uvidíme na konkrétním příkladu, že to obecně pravda není. Hladkost totiž k takové vlastnosti nestačí a dostáváme se tak pojmu *reálně analytická funkce*.

Definice 1.32 (Reálně analytická funkce): Buďte $-\infty < a < b < \infty$ a $f \in C^\infty(a, b)$. Funkci f nazýváme *reálně analytickou* na (a, b) , pokud ke každému $x_0 \in (a, b)$ existuje okolí H_{x_0} tak, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in H_{x_0},$$

tj. f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na H_{x_0} . Množinu reálně analytických funkcí na (a, b) značíme $C^\omega(a, b)$.

Z definice je zřejmé, že $C^\omega(a, b) \subset C^\infty(a, b)$, ovšem tato inkluze není rovnost. To znamená, že existují funkce, které jsou hladké, ale nejsou reálně analytické. Ukážeme si to na následujícím klasickém příkladě.

Příklad 1.18: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Nejprve ověříme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zřejmě má f derivace všech řádů v bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stačí si tedy rozmyslet, že je tomu tak i v bodě $x = 0$. Nejprve se jednoduše matematickou indukcí ověří, že

$$f^{(n)}(x) = p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kde p_n je polynom stupně $3n$ (ověřte). Ve výpočtech uijeme toho, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

(víte proč?) z čehož vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

pro libovolný polynom p .

Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f v bodě $x = 0$ derivaci řádu n a platí $f^{(n)}(0) = 0$. Je-li $n = 1$, máme

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že $f^{(n)}(0) = 0$. Potom

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Protože $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, je součtová funkce Taylorovy řady funkce f se středem v bodě 0 identicky nulová funkce. Funkce f ale není identicky nulová na žádném okolí bodu 0, a proto f není reálně analytická na žádném intervalu (a, b) obsahujícím bod 0. Speciálně $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Jak tedy poznat, jestli je zadaná hladká funkce reálně analytická? Opravdu užitečný aparát nabízí teorie funkcí komplexní proměnné, který je mimo rámec tohoto kurzu. Další možnost nabízí Taylorova věta, kterou čtenář zná z 1. ročníku. Předpokládejme pro jednoduchost, že f je daná hladká funkce na $\mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládejme dále, že Taylorova řada funkce f se středem v bodě x_0 má poloměr konvergence $R > 0$. Z Taylorovy věty plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde T_n je n -tý částečný součet Taylorovy řady (Taylorův polynom)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

a R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n -tém Taylorově polynomu. Odtud plyne, že pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$. V konkrétních případech lze využít např. Lagrangeova tvaru zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0 k ověření, že $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$. Tento postup by měl být znám z první ročníku. Lze tak získat Taylorovy řady elementárních funkcí, viz Cvičení 1.9.

Nakonec si uvedeme jednu charakteristiku reálně analytických funkcí. Dokážeme si však jen jednu implikaci, kterou lze jednoduše ukázat prostředky reálné analýzy. Obvyklý důkaz druhé implikace používá tzv. Cauchyův integrální vzorec, který je klasickým výsledkem z komplexní analýzy, avšak mimo rámec tohoto kurzu, viz např. [12].

Věta 1.33: Buďte $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a $f \in C^\infty(a, b)$. Potom $f \in C^\omega(a, b)$, právě když

$$(\forall x_0 \in (a, b)) (\exists H_{x_0} \text{ okolí } x_0) (\exists C > 0) (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\sup_{x \in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \leq C^{n+1} n! \right).$$

Poznámka: Alternativně můžeme podmínku z Věty 1.33 vyjádřit také takto:

$$(\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)) (\exists C > 0) (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n)}(x)| \leq C^{n+1} n! \right).$$

Důkaz postačující podmínky z Věty 1.33. Uvažujme $f \in C^\infty(a, b)$ a zvolme libovolné $x_0 \in (a, b)$. Podle předpokladu pak existuje $H_{x_0} \subset (a, b)$ okolí x_0 a konstanta $C > 0$ tak, že

$$\sup_{x \in H_{x_0}} |f^{(n)}(x)| \leq C^{n+1} n!$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že f je součtovou funkcí své Taylorovy řady se středem v x_0 na okolí bodu x_0 .

Nejprve si všimneme, že Taylorova řada funkce f se středem v x_0 má kladný poloměr konvergence, neboť její n -tý člen můžeme odhadnout

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq C^{n+1} |x - x_0|^n.$$

Ze srovnávacího kritéria potom plyne, že pro každé $x \in H_{x_0}$ splňující $|x - x_0| < 1/C$ je Taylorova řada funkce f se středem v x_0 konvergentní. Její poloměr konvergence je tedy alespoň $1/C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$H_{x_0} \subset \left(x_0 - \frac{1}{2C}, x_0 + \frac{1}{2C} \right),$$

jinak bychom vzali menší okolí H_{x_0} tak, aby to platilo.

Podle diskuze nad tvrzením nyní stačí ukázat, že pro každé $x \in H_{x_0}$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde R_{n+1} je zbytek v Taylorově vzorci po n -tém Taylorově polynomu funkce f . K tomu použijeme Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

kde ξ je bod ležící na spojnici bodů x a x_0 . Je-li $x \in H_{x_0}$, potom také $\xi \in H_{x_0}$ a navíc $|x - x_0| < 1/(2C)$. Proto můžeme odhadovat

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{C^{n+2}(n+1)!}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2C} \right)^{n+1} = \frac{C}{2^{n+1}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in H_{x_0}$. Jelikož výraz napravo konverguje k nule pro $n \rightarrow \infty$, je také $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in H_{x_0}$. $\square$

Již ve Cvičení 1.5 jsme naznačili, že řady (ne nutně mocninné) lze mezi sebou násobit. Na závěr této části si ukážeme, že mocninné řady můžeme za jistých předpokladů také dělit. Uvažujme dvě mocninné řady obě s kladným poloměrem konvergence:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{a} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Součtové funkce f a g jsou tedy definovány na nějakých kruzích se středem v počátku. Předpokládejme dále, že $g(0) \neq 0$, tzn. $b_0 \neq 0$. Potom je funkce

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

dobře definovaná na nějakém okolí počátku. Navíc lze ukázat, že h je součtovou funkcí své Taylorovy řady, která má kladný poloměr konvergence. Elegantní argument k důkazu tohoto tvrzení je opět předmětem komplexní analýzy, kde se ukazuje jednoduchý vztah mezi možností rozvoje funkce do Taylorovy řady a komplexní diferencovatelností. Zde přijmeme jako fakt, že funkci h lze na okolí počátku napsat ve tvaru mocninné řady

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

s kladným poloměrem konvergence. Naším cílem bude najít vztah pro neznámé koeficienty c_n . Dosadíme-li do rovnosti $f(z) = g(z)h(z)$ příslušné mocninné řady, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n b_m c_{n-m} \right) z^n.$$

Jelikož koeficienty mocninné řady s kladným poloměrem konvergence jsou určeny jednoznačně (její součtovou funkcí), vyplývá z poslední rovnice, že koeficienty u odpovídajících mocnin z musí být stejné, tj.

$$a_n = \sum_{m=0}^n b_m c_{n-m}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (6)$$

Rovnice (6) určuje koeficienty c_n rekurzivně:

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{m=1}^n b_m c_{n-m} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

protože $b_0 \neq 0$ podle předpokladu. Napočítáme-li první tři koeficienty, dostaneme

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0}, \\ c_1 &= \frac{1}{b_0} (a_1 - b_1 c_0) = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}, \\ c_2 &= \frac{1}{b_0} (a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0) = \frac{a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2 - a_1 b_0^2 b_1 + a_2 b_0^2}{b_0^3}. \end{aligned}$$

Snadno se ověří, že c_n je obecně funkcí koeficientů $a_0, \dots, a_n$ a $b_0, \dots, b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ve vzácných případech, je možné najít explicitní vzorec pro c_n , většinou ale zůstane u rekurzivní formule. Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Příklad 1.19: Najdeme Taylorovu řadu funkce

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

dodefinovanou spojitě v počátku, tj. $h(0) = 1$. Funkci h lze chápat jako převrácenou funkci

$$g(z) := \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

a proto v předchozím výkladu o dělení mocninných řad můžeme položit $f(z) := 1, \forall z \in \mathbb{C}$. Odtud pro koeficienty Taylorových řad funkcí f a g se středem v počátku dostaneme

$$a_n = \delta_{n,0} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dosadíme-li do rovnice (6), vyjde nám, že $c_0 = 1$ a

$$0 = \sum_{m=0}^n \frac{c_{n-m}}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^n \frac{c_m}{(n-m+1)!}, \quad \text{je-li } n \in \mathbb{N}.$$

Napišeme-li $c_n = B_n/n!$, dostaneme posloupnost $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ určenou rekurentně rovnicemi

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} B_m = 0 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

neboli

$$B_0 = 1 \quad \text{a} \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} B_m \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Členy posloupnosti $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou tzv. *Bernoulliho čísla*:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \text{atd.}$$

Celkem je tedy

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

na nějakém okolí bodu počátku. Bez bližší znalosti asymptotického chování B_n pro $n \rightarrow \infty$, nemůžeme určit poloměr nalezené mocninné řady z Věty 1.23. Jednoduchou odpověď nabídne opět až komplexní analýza, odkud vyplyne, že poloměr konvergence je roven absolutní hodnotě nenulového řešení rovnice $e^z = 1$, které je nejbliž počátku. Tato řešení jsou $\pm 2\pi i$, a proto je hledaný poloměr konvergence roven 2π .

Příklad 1.20: Předchozí příklad můžeme využít k nalezení Taylorova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2},$$

dodefinovanou spojitě v počátku hodnotou $f(0) = 1$, neboť

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \left(\frac{2}{e^z - 1} + 1 \right) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}.$$

Odtud a z výsledku předchozího příkladu dostaneme

$$f(z) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

a tato rovnost platí na kruhu $|z| < 2\pi$. Protože je funkce f sudá, musí být koeficienty její Taylorovy řady u lichých mocnin z rovny nule (rozmyslete). A proto z rozvoje f plyne, že $B_{2n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Celkem tedy

$$\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (7)$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 2\pi$.

1.6 Trigonometrické řady

Definice 1.34 (Trigonometrické řady): Necht' $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti a $T > 0$. Řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

nazýváme *trigonometrická řada s periodou $2T$* .

Poznámka: Všimněte si, že pokud trigonometrická řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, je její součtová funkce periodická s periodou $2T$. Při studiu trigonometrických řad se často omezíme na speciální případ $T = \pi$, neboť rozdíl mezi obecným a tímto speciálním případem není zásadní a vzorce pro $T = \pi$ mají jednodušší tvar.

Analýzu trigonometrických řad inicioval Jean-Baptiste Joseph Fourier na počátku 19. století. Ve svém článku z roku 1822 hledal řešení rovnice vedení tepla právě ve tvaru trigonometrické řady. V tomto článku se také objevila obecná domněnka, že každou periodickou a spojitou funkci lze rozvinout v trigonometrickou řadu. Protože ani základní pojmy jako funkce, spojitost, integrál, atd. nebyly v této době ještě jasně ukotveny, nebyly ani Fourierovy závěry dokázány zcela rigorózně. Nicméně Fourierova práce a jeho myšlenky odstartovaly výzkum, který má dnes mnoho aplikací a který přispěl zásadním způsobem k formování moderní analýzy.

Naším hlavním cílem bude vyjasnit si, co to znamená rozvinout funkci v trigonometrickou řadu a alespoň částečně vysvětlit, jaké funkce lze rozvíjet.

Nejprve najdeme vztah mezi koeficienty a_n a b_n trigonometrické řady a její součtovou funkcí F - tzv. *Eulerovy vzorce*. Pro tento účel předpokládejme, že trigonometrická řada s periodou 2π konverguje stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$ k součtové funkci F . Máme tedy

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (8)$$

pro $x \in [-\pi, \pi]$. Předpoklad stejnoměrné konvergence trigonometrické řady použijeme později pro ospravedlnění záměny integrálu a sumy. Nejprve ale budeme potřebovat následující jednoduché integrální identity.

Lemma 1.35: Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}.$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0.$$

Důkaz. Je přenechán čtenáři jako Cvičení 1.10. □

Vynásobíme-li obě strany rovnice (8) funkcí $\cos(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a integrujeme od $-\pi$ do π , dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(mx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx \right). \end{aligned}$$

Záměnu integrálu a sumy ospravedlňuje předpoklad stejnoměrné konvergence a Věta 1.20. Protože skoro všechny integrály napravo jsou nulové podle Lemma 1.35, výraz napravo se značně zjednoduší. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ tak dostaneme rovnost

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(mx) dx = \pi a_m,$$

neboli první Eulerovy vzorce:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(mx) dx, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Zcela analogickým postupem, kdy vynásobíme (8) funkcí $\sin(mx)$, kde $m \in \mathbb{N}$, a zintegrujeme od $-\pi$ do π , odvodíme druhé Eulerovy vzorce:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(mx) dx, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Odvození Eulerových vzorců lze jednoduše zobecnit na případ s obecnou periodou $T > 0$. Toto pozorování je motivací pro následující definici *Fourierovy řady* funkce. Pro zestručnění zápisu si ještě označme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$ prostor funkcí, které mají absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) .

Definice 1.36 (Fourierova řada): Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $b - a = 2\pi$. Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

s koeficienty a_n a b_n určenými Eulerovými vzorci:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

nazýváme *Fourierova řada funkce f na intervalu (a, b)* .

Poznámka: Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{R}(a, b)$ na obecném omezeném intervalu (a, b) délky $b - a = 2T > 0$ je trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka (Komplexní formulace): Někdy se používá komplexní formulace trigonometrické řady ve tvaru dvojité nekonečné sumy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$. Protože

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-\frac{ik\pi x}{T}} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos \frac{k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{T}, \end{aligned}$$

je mezi koeficienty a_k, b_k a c_k jednoduchý vztah:

$$c_0 = 2a_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a naopak

$$a_0 = \frac{c_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eulerovy vzorce pak mají kompaktní podobu

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-\frac{ik\pi x}{T}} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ačkoliv je komplexní formulace elegantní, my v tomto textu budeme striktně používat jen reálnou formulaci.

Při odvozování Eulerových vzorců jsme pozorovali, že stejnoměrně konvergentní trigonometrická řada na $[-\pi, \pi]$ (či obecněji na $[a, b]$) je Fourierovou řadou své součtové funkce. Přirozeně se nabízí minimálně dvě otázky: Jaké jsou to vlastně funkce, jejichž Fourierova řada bodově/stejnoměrně konverguje na $[-\pi, \pi]$? A je v takovém případě součtová funkce konvergentní Fourierovy řady rovna původní funkci? Účelem další části textu bude zodpovědět tyto otázky alespoň částečně.

Věta 1.37 (Dirichlet): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π -periodická. Potom máme:

i. Pro n -tý částečný součet F_n Fourierovy řady funkce f na (a, b) platí:

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, kde

$$D_n(t) := \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

je tzv. *Dirichletovo jádro*.

ii. Fourierova řada f na (a, b) konverguje v bodě $x \in \mathbb{R}$ k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) D_n(t) dt = 0.$$

Důkaz. i) Podle Cvičení 1.8 je

$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(tn/2) \cos(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t) - \sin(t/2)}{2 \sin(t/2)},$$

neboli

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2} D_n(t). \quad (9)$$

Nyní pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme přímým výpočtem, že

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_a^b (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt. \end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme využili identitu (9) a fakt, že pro integrabilní 2π -periodickou funkci g platí rovnost

$$\int_a^b g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

ii) Rovnost z tvrzení i. můžeme dále upravit do tvaru

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) D_n(\tau) d\tau$$

a využijeme-li opět toho, že integrand je 2π -periodická funkce, dostaneme

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \tau) D_n(\tau) d\tau.$$

Vezmeme-li také do úvahy, že D_n je sudá funkce, můžeme výraz ještě dále upravit

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(-t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Integrováním rovnice (9) snadno ověříme, že

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \pi.$$

Celkem tedy získáváme pro každé $x, s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$F_n(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) D_n(t) dt,$$

z čehož plyne tvrzení ii. □

Tvrzení ii. Věty 1.37 převádí vyšetřování konvergence Fourierovy řady na analýzu limity integrálu s Dirichletovým jádrem. K této analýze budeme potřebovat jedno pomocné, ale důležité tvrzení, které je speciálním případem věty známé jako *Riemannovo–Lebesgueovo lemma*.

Lemma 1.38 (Riemann): Necht' $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení s funkcí sinus. Druhé tvrzení s funkcí kosinus se dokáže analogicky.

1) Nejprve předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$ a f je riemannovsky integrabilní na $[a, b]$. Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje dělení σ intervalu $[a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x) dx - s_{\sigma}(f) < \frac{\epsilon}{2},$$

kde $s_{\sigma}(f)$ je dolní Darbouxův integrální součet f při rozdělení σ . Nyní můžeme zavést po částech konstantní funkci

$$s(x) := \sum_{i=1}^k m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x),$$

kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ jsou body z rozdělení σ , $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i)} f(x)$ a $\chi_{[c, d)}$ značí charakteristickou funkci intervalu $[c, d)$. Pro takovou funkci zřejmě platí $s(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ a

$$s_{\sigma}(f) = \int_a^b s(x) dx.$$

Odtud dostáváme nerovnost

$$\int_a^b |f(x) - s(x)| dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b s(x) dx = \int_a^b f(x) dx - s_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tvrzení věty platí pro funkci s , neboť

$$\int_a^b s(x) \sin(nx) dx = \sum_{i=1}^k m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i (\cos(nx_{i-1}) - \cos(nx_i))$$

a výraz na pravé straně konverguje k nule pro $n \rightarrow \infty$. Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall n \geq n_0) \left(\left| \int_a^b s(x) \sin(nx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Nakonec dostáváme

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - s(x)| \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1} dx + \left| \int_a^b s(x) \sin(nx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pro každé $n \geq n_0$, z čehož plyne tvrzení věty.

2) Nyní předpokládejme, že $\int_a^b f(x) dx$ absolutně konverguje jako nevlastní Riemannův integrál s jediným kritickým bodem b . To lze předpokládat bez újmy na obecnosti, jinak bychom integrál rozložili na součet konečně mnoha integrálů tohoto typu a větu aplikovali na každý sčítanec.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podle již dokázaného bodu 1) je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \sin(nx) dx = 0,$$

a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\left| \int_a^c f(x) \sin(nx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Celkem tedy pro každé $n \geq n_0$ dostáváme

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| \leq \left| \int_a^c f(x) \sin(nx) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) \sin(nx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Věta 1.39: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = 2\pi$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$ je 2π -periodická. Potom platí:

- i. Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když existuje $c \in (0, \pi)$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg \left(\frac{t}{2} \right) \sin(nt) dt = 0.$$

- ii. (Dini) Existují-li $c \in (0, \pi)$ a $s \in \mathbb{R}$ tak, že integrál

$$\int_0^c \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} dt$$

konverguje, potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Z tvrzení i. plyne tzv. *Riemannova věta o lokalizaci*: Konvergence Fourierovy řady funkce f i hodnota jejího součtu v bodě x závisí pouze na průběhu funkce f v bezprostředním okolí bodu x .

Důkaz Věty 1.39. i) Dirichletovo jádro můžeme zapsat ve tvaru

$$D_n(t) = \sin(nt) \cotg \left(\frac{t}{2} \right) + \cos(nt).$$

Z předpokladu vyplývá, že pro libovolné $x, s \in \mathbb{R}$ má funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s$$

absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $(0, \pi)$, a proto podle Lemma 1.38 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cos(nt) dt = 0.$$

Proto podle Věty 1.37 Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg \left(\frac{t}{2} \right) \sin(nt) dt = 0.$$

Ještě jednou můžeme aplikovat Lemma 1.38 tentokrát na funkci

$$t \mapsto \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg \frac{t}{2},$$

která má absolutně konvergentní Riemannův integrál na intervalu (c, π) pro libovolné $c \in (0, \pi)$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\pi \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg \left(\frac{t}{2} \right) \sin(nt) dt = 0$$

pro každé $c \in (0, \pi)$ a tudíž k tomu, aby Fourierova řada funkce f na (a, b) konvergovala v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$ je nutné a stačí, aby existovalo $c \in (0, \pi)$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) dt = 0.$$

ii) Je-li splněn předpoklad Diniho kritéria, potom konverguje také integrál

$$\int_0^c |f(x+t) + f(x-t) - 2s| \cotg\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^c \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} t \cotg\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

protože funkce $t \mapsto t \cotg(t/2)$ je omezená na intervalu $(0, c)$. Aplikací Lemma 1.38 odtud dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) \cotg\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) dt = 0$$

a tvrzení plyne z již dokázaného bodu i. □

Tvrzení i. Věty 1.39 charakterizuje funkce jejichž Fourierova řada konverguje v nějakém bodě. Nicméně čtenář může vnímat toto tvrzení jen jako jisté přeformulování základního problému, které stále nedává zcela jasnou představu o tom, jaké to tedy vlastně jsou funkce, jejichž Fourierova řada bodově konverguje. Na druhou stranu Diniho postačující podmínka je již snadno aplikovatelná pro poměrně širokou třídu funkcí, které se chovají „rozumně“ na okolí bodu x . Např. funkce $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pro kterou existují čísla $c > 0$, $L > 0$ a $\alpha \in (0, 1]$ takové, že platí

$$(\forall t \in (0, c)) (|f(x+t) + f(x-t) - 2s| \leq Lt^\alpha),$$

vyhovují předpokladům Diniho kritéria, a proto Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s .

V dalším výkladu ještě více omezíme množinu studovaných funkcí f s cílem získat snadno aplikovatelnou postačující podmínku pro bodovou konvergenci Fourierovy řady funkce f v termínech spojitosti a diferencovatelnosti f . Před tím si ještě vyjasníme dva pojmy.

Definice 1.40 (Po částech spojitá funkce): Řekneme, že funkce f je na omezeném intervalu $[a, b]$ *po částech spojitá*, právě když existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitá na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.

2. Existují konečné jednostranné limity

$$f(x_i+) := \lim_{x \rightarrow x_i+} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_i-) := \lim_{x \rightarrow x_i-} f(x),$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a také $f(a+)$ a $f(b-)$.

Jak jsme již pozorovali, součtová funkce konvergentní trigonometrické řady s periodou $2T$ je $2T$ -periodická funkce. To se odrazilo v předpokladech Vět 1.37 a 1.39, kde jsme uvažovali 2π -periodické funkce, neboť jsme pro jednoduchost vzali $T = \pi$. Abychom mohli odvozená tvrzení použít i na funkce definované na omezeném intervalu, pomáháme si periodickým prodloužením. Toto prodloužení ještě navíc jistým způsobem regularizujeme v bodech nespojitosti. Důvod tohoto kroku se vyjasní ve Větě 1.42.

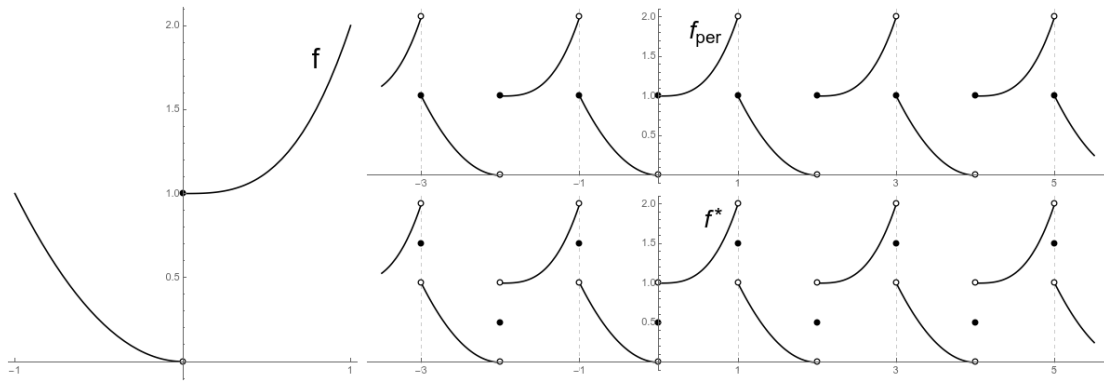
Definice 1.41 (Periodické a regularizované periodické prodloužení): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na $[a, b]$. *Periodickým prodloužením* f rozumíme funkci $f_{per} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f_{per}(x) := f\left(x - \left[\frac{x-a}{b-a}\right](b-a)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Je-li navíc f po částech spojitá na $[a, b]$, definujeme *regularizované periodické prodloužení* $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$f^*(x) := \frac{1}{2} (f_{per}(x+) + f_{per}(x-)).$$

Těžko čitelné vzorce z předchozí definice mají jednoduchý význam. Graf funkce f_{per} vznikne „nakopírováním“ grafu funkce f definované na $[a, b]$ do každého intervalu $[a + n(b-a), b + n(b-a))$, $n \in \mathbb{Z}$. Graf regularizovaného periodického prodloužení f^* se liší od grafu f_{per} pouze v bodech nespojitosti f_{per} , kde hodnota funkce f^* je průměrem jednostranných limitních hodnot v tomto bodě, viz Obr. 2.



Obrázek 2: Graf funkce f (vlevo), jejího periodického prodloužení f_{per} (vpravo nahoře) a jejího regularizovaného periodického prodloužení f^* (vpravo dole).

Věta 1.42 (O bodové konvergenci Fourierovy řady): Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na omezeném intervalu $[a, b]$. Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci f^* .

Důkaz. Důkaz provedeme ve speciálním případě, kdy $b - a = 2\pi$. Modifikace pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

1) Nejprve ukážeme, že z předpokladu věty vyplývá, že je f po částech spojitá funkce na $[a, b]$ a tudíž má na $[a, b]$ absolutně konvergentní Riemannův integrál. Podle předpokladu má f po částech spojitou derivaci na $[a, b]$, což znamená, že existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

1. f je spojitě diferencovatelná na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$.
2. Existují konečné jednostranné limity $f'(x_i \pm)$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a také konečné jednostranné limity $f'(a+)$ a $f'(b-)$.

První bod implikuje, že f je spojitá na intervalu (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \hat{n}$. Stačí tedy ukázat existenci a konečnost jednostranných limit v bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Zvolme pevně $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Zaměříme se např. na pravé okolí bodu x_i . Jelikož je f' spojitá na (x_i, x_{i+1}) a existují konečné limity $f'(x_i+)$ a $f'(x_{i+1}-)$, je f' spojitá na $[x_i, x_{i+1}]$, a tudíž

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f'(x)| =: K < \infty.$$

Aplikujeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku, dostaneme pro libovolné $y, z \in (x_i, x_{i+1})$ odhad

$$|f(y) - f(z)| = |f'(\xi)| |y - z| \leq K |y - z|,$$

kde ξ je číslo mezi y a z . Nyní když k libovolnému $\epsilon > 0$ zvolíme $0 < \delta < \epsilon/K$, dostaneme pro každé y a z z pravého okolí bodu x_i takové, že $|y - z| < \delta$ nerovnost $|f(y) - f(z)| < \epsilon$. To je Bolzanova–Cauchyho podmínka implikující existenci a konečnost $f(x_i+)$. Analogicky se ověří existence a konečnost $f(x_i-)$ i okrajové případy $f(a+)$ a $f(b-)$.

2) Uvažujme stále dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ a $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ pevné. Je-li $x \in (x_{i-1}, x_i)$, potom je f spojitě diferencovatelná na okolí x , a proto můžeme opět aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku, která implikuje

$$(\exists \delta > 0)(\exists L > 0)(\forall y \in (x - \delta, x + \delta))(|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|).$$

Jinými slovy dostáváme, že pro všechna $t \in (0, \delta)$ platí

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leq 2Lt.$$

Odtud plyne, že je splněno Diniho kritérium z Věty 1.39 pro bod x a $s = f(x)$, a proto Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje v bodě x k $f(x)$.

Zbývá vyšetřit konvergenci Fourierovy řady funkce f v bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$. Uvažujme nějaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a zaměříme se na pravé okolí bodu x_i . Podle bodu 1) důkazu existují konečné limity $f(x_i+)$ a $f(x_{i+1}-)$, a tudíž je f spojitá na $[x_i, x_{i+1}]$ a diferencovatelná na (x_i, x_{i+1}) . Můžeme tedy znovu aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku a dostaneme

$$(\forall y \in (x_i, x_{i+1})) (|f(y) - f(x_i+)| \leq K_+(y - x_i)),$$

kde $K_+ := \max_{x_i \leq \xi \leq x_{i+1}} |f'(\xi)| < \infty$. Analogicky pro levé okolí x_i najdeme $K_- > 0$ takové, že

$$(\forall y \in (x_{i-1}, x_i)) (|f(y) - f(x_i-)| \leq K_-(x_i - y)),$$

Z toho vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$|f(x_i + t) + f(x_i - t) - f(x_{i+}) - f(x_{i-})| \leq |f(x_i + t) - f(x_{i+})| + |f(x_i - t) - f(x_{i-})| \leq (K_- + K_+)t.$$

Odtud a z Diniho kritéria vyplývá, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě x_i k průměru $(f(x_{i-}) + f(x_{i+}))/2$.

Nakonec zbývá vyřešit konvergenci Fourierovy řady v krajních bodech a a b . K tomu stačí uvažovat periodické prodloužení f_{per} funkce f a postupem stejným jako v předchozím odstavci ukázat existenci čísel $L_- > 0$ a $L_+ > 0$ takových, že pro $t > 0$ dostatečně malá je

$$|f_{per}(a + t) - f_{per}(a_+)| = |f(a + t) - f(a_+)| \leq L_+ t$$

a

$$|f_{per}(a - t) - f_{per}(a_-)| = |f(b - t) - f(b_-)| \leq L_- t$$

a dále opět aplikací Diniho kritéria vyvodíme, že Fourierova řada f na (a, b) konverguje také v bodě $x = a$ tentokrát k průměru $(f(a_+) + f(b_-))/2$. Podobně pro bod b . $\square$

V důkazu Věty 1.42 jsme viděli, že předpoklad f má po částech spojitou derivaci na $[a, b]$ implikuje, že f je po částech spojitá na $[a, b]$. Je-li f dokonce spojitá na $[a, b]$, dá se ukázat, že její Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) k f , viz např. [6, Věta 185]. Přidáme-li ještě předpoklad $f(a) = f(b)$ dostaneme už stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$, což je obsahem Jordanovy věty, kterou dokážeme později (Věta 1.44).

Věta 1.42 ukazuje, že Fourierova řada funkce f konverguje jak v bodech spojitosti f , tak i v bodech nespojitosti f 1. druhu za předpokladu, že má f derivaci spojitou alespoň po částech. Pomocí Diniho kritéria se dá dokonce ukázat, že Fourierova řada spojitě funkce f konverguje v bodech, kde je f diferencovatelná. Naopak příklad Weierstrassovy funkce ukazuje, viz Obr. 1, že diferencovatelnost funkce není nutnou podmínkou pro konvergenci její Fourierovy řady.

Čtenář by se mohl domnívat, že už samotná spojitost funkce by mohla stačit pro bodovou konvergenci její Fourierovy řady. Že tomu tak není, ukázal již du Bois-Reymond v roce 1873, který našel příklad spojitě funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v jednom bodě. Jednodušší příklad později předložil L. Fejér. Dokonce lze nekonstruktivně dokázat pomocí tzv. Bairovy věty, že existuje spojitá funkce, jejíž Fourierova řada diverguje na nespočetné husté podmnožině (a, b) .

Na druhou stranu L. Carlson dokázal v roce 1966, že Fourierova řada spojitě funkce (dokonce kvadraticky integrabilní v Lebesgueově smyslu) konverguje skoro všude na $[a, b]$. Termín „skoro všude“ má exaktní význam, který si ale budeme moci vysvětlit až mnohem později. Nyní nám stačí mít povědomí o tom, že množina, na níž je Fourierova řada spojitě funkce divergentní, je v jistém smyslu značně omezená. Carlson svým důkazem vyřešil dlouho otevřený problém postulovaný N. N. Luzinem v roce 1915.

Ilustrujme si nyní aplikaci Věty 1.42 na jednoduchém příkladě.

Příklad 1.21: Spočítáme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$. Podle Eulerových vzorců máme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

neboť integrujeme lichou funkcií přes symetrický interval okolo počátku. Dále integrací per partes najdeme

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože f splňuje předpoklady Věty 1.42, dostáváme rovnost

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad \forall x \in (-\pi, \pi). \quad (10)$$

Řada (10) konverguje dokonce lokálně stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$. V krajních bodech $x = \pm\pi$ konverguje Fourierova řada (10) k průměru $(f(-\pi) + f(\pi))/2 = 0$, což lze také ověřit přímo. Součtová funkce řady (8) na $\mathbb{R}$ je rovna regularizovanému periodickému prodloužení funkce $f(x) = x$, viz Obrázek 3

Nyní si odvodíme jednu důležitou nerovnost. Pro její a pozdější potřebu si označíme $\mathcal{R}^2(a, b)$ množinu funkcí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pro které zobecněný Riemannův integrál

$$\int_a^b f^2(x) dx$$

konverguje.

Věta 1.43 (Bessel): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a, b) splňují Besselovu nerovnost:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx.$$

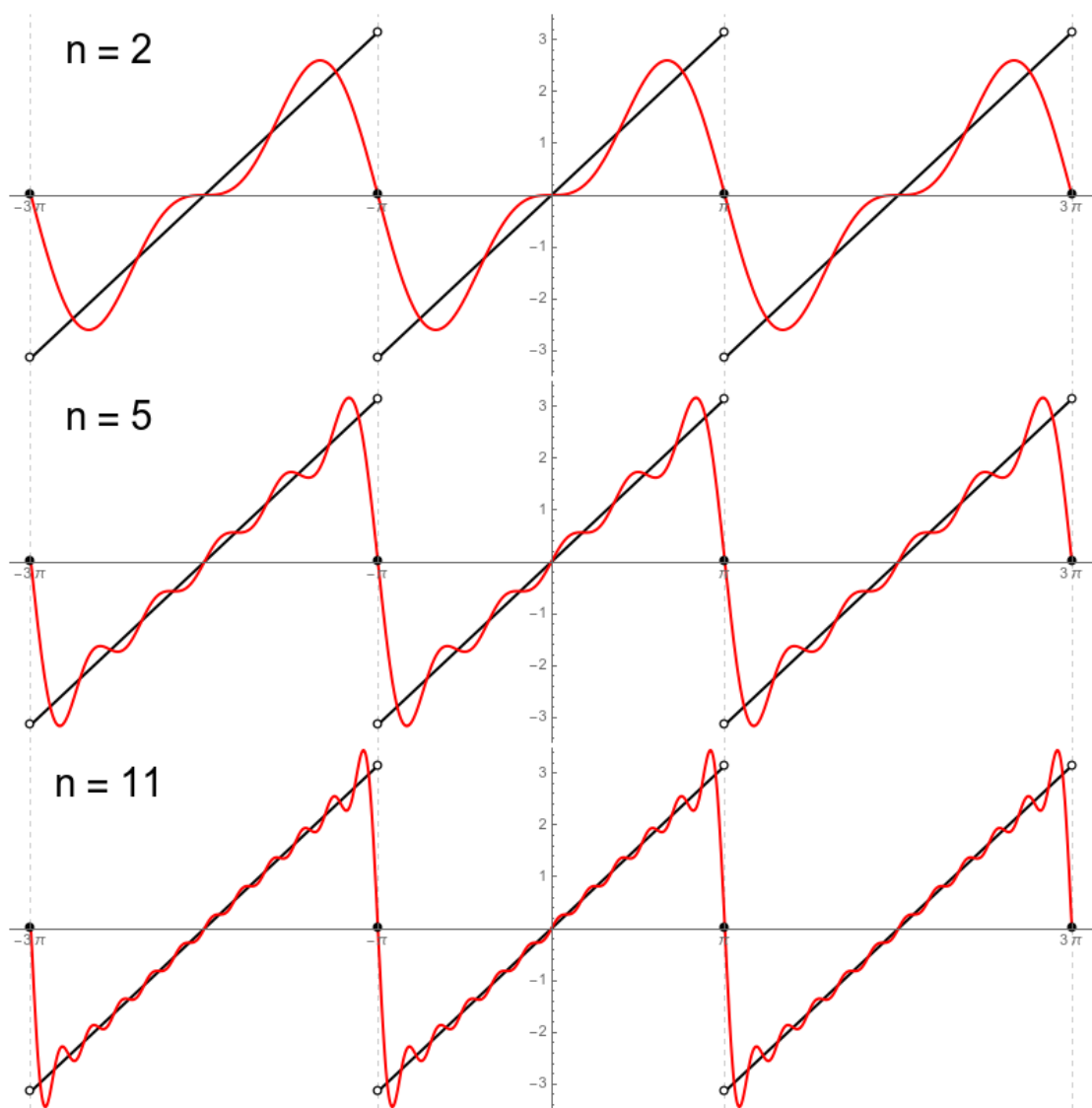
Důkaz. Označme F_n n -tý částečný součet Fourierovy řady funkce f na (a, b) . Důkaz provedeme pro speciální případ $b-a = 2\pi$. Modifikace postupu pro obecnou situaci je přenechána čtenáři.

Upravíme tzv. *střední kvadratickou odchylku* f a F_n na (a, b) :

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x) F_n(x) dx + \int_a^b F_n^2(x) dx.$$

Využijeme-li 2π -periodičnosti trigonometrických funkcí a identit z Lemma 1.35, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) F_n(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_a^b f(x) \cos(kx) dx + b_k \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \right) \\ &= \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$



Obrázek 3: Částečné součty Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$.

a

$$\begin{aligned} \int_a^b F_n^2(x) dx &= \frac{a_0^2}{4} \int_a^b dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2 \int_a^b \cos^2(kx) dx + b_k^2 \int_a^b \sin^2(kx) dx \right) \\ &= \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Tedy pro kvadratickou odchylku máme

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

z čehož vyplývá nerovnost

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_a^b f^2(x) dx$$

platná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní stačí poslat $n \rightarrow \infty$. □

Poznámka: Zopakujme důkaz Věty 1.43 s tím rozdílem, že funkci F_n nahradíme obecným trigonometrickým polynomem (s periodou 2π) stupně nejvýše n , tj. funkcí tvaru

$$T_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx),$$

kde $\{c_k\}_{k=0}^n, \{d_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$. Potom, je-li $b - a = 2\pi$, dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2\pi \left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) \right) + \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) \right) \\ &= \int_a^b f^2(x) dx + \pi \left(\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n ((a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2) \right) - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \\ &\geq \int_a^b f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx \geq \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx,$$

přičemž rovnost platí, právě když $a_k = c_k$ pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a $b_l = d_l$ pro všechna $l \in \hat{n}$. Jinými slovy, vidíme, že mezi všemi trigonometrickými polynomy T_n stupně nejvýše n , má n -tý částečný součet Fourierovy řady F_n funkce f nejmenší kvadratickou odchylku od f .

Nakonec se ukáže, že Besselova nerovnost platí dokonce jako rovnost pro funkce z $\mathcal{R}^2(a, b)$. Než se k této tzv. *Parsevalově rovnosti* dostaneme, dokážeme si Jordanovu větu o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady.

Věta 1.44 (Jordanova o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady): Nechť funkce f definovaná na omezeném intervalu $[a, b]$ splňuje:

1. $f(a) = f(b)$.
2. f je spojitá na $[a, b]$.
3. f má po částech spojitou derivaci na $[a, b]$.

Potom Fourierova řada funkce f na (a, b) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f_{per} .

Důkaz. Větu dokážeme pro případ $b - a = 2\pi$. Označme $x_0 := a < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m := b$ všechny body nespojitosti derivace f' . Integrací per partes dostaneme pro koeficienty Fourierovy řady f na (a, b) :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^m \left([f(x) \sin(nx)]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} (f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na)) - \frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

První člen v kulatých závorkách je roven nule, neboť $f(a) = f(b)$ a $b - a = 2\pi$. Dostáváme tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(x) \sin(nx) dx =: -\frac{b'_n}{n},$$

kde b'_n je příslušný koeficient Fourierovy řady funkce f' na (a, b) . Analogicky se pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokáže rovnost

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(x) \cos(nx) dx =: \frac{a'_n}{n}.$$

Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ můžeme odhadnout n -tý člen Fourierovy řady funkce f na (a, b) následovně:

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} + |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

kde jsme použili nerovnost $\alpha\beta \leq (\alpha^2 + \beta^2)/2$, která platí pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Z předpokladu 3. plyne, že $f' \in \mathcal{R}^2(a, b)$, a proto je podle Besselovy nerovnosti (Věta 1.43) výraz napravo v odhadu výše n -tý člen konvergentní číselné řady. Tvrzení věty nyní vyplývá z Weierstrassova kritéria (Věta 1.16). $\square$

Poznámka: Uvědomte si, že z Věty 1.19 víme, že součtová funkce stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá, a proto je předpoklad $f(a) = f(b)$ v Jordanově větě nezbytný pro stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady funkce f na celém $\mathbb{R}$.

Množinu funkcí $\mathcal{R}^2(a, b)$ můžeme vybavit zobrazením $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}^2(a, b) \rightarrow [0, \infty)$ definovaným pro $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$ vztahem

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Zobrazení $\|\cdot\|_2$ není norma, nýbrž pouze *seminorma* na $\mathcal{R}^2(a, b)$, tzn., že splňuje:

$$1. (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathcal{R}^2(a, b))(\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2),$$

$$2. (\forall f, g \in \mathcal{R}^2(a, b))(\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2),$$

avšak **neplatí** implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ pro $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$. Důkaz první vlastnosti je zřejmý. Důkaz trojúhelníkové nerovnosti plyne ze Schwarzovy nerovnosti pro bilineární formu

$$(f, g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in \mathcal{R}^2(a, b),$$

viz Cvičení 1.11.

Věta 1.45 (Parseval): Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$. Potom koeficienty Fourierovy řady funkce f na (a, b) splňují Parsevalovu rovnost:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x)dx.$$

Důkaz. Větu opět dokážeme pro speciální případ $b - a = 2\pi$. Důkaz provedeme v několika krocích. V důkazu Věty 1.43 jsme pro každé $n \in \mathbb{N}$ ukázali, že

$$\|f - F_n\|_2^2 = \int_a^b f(x)dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Tudíž Parsevalova rovnost platí, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. Naším cílem je dokázat právě tuto limitu.

1) Nejprve předpokládejme, že f je riemannovsky integrabilní funkce na $[a, b]$. Podle definice Riemannova integrálu musí být f omezená na $[a, b]$, tzn., že existuje $K > 0$ tak, že

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\epsilon > 0$ a libovolné, ale pevné dělení $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S_f(\sigma) - s_f(\sigma) < \frac{\epsilon^2}{8K},$$

kde $s_f(\sigma)$ a $S_f(\sigma)$ jsou dolní a horní integrální součty f při rozdělení σ . Definujme po částech lineární funkci g na $[a, b]$, jejíž graf je lomená čára spojující body $(x_i, f(x_i))$ pro $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, tzn.

$$g(x) := f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

pro $x \in [x_{i-1}, x_i]$ a $i \in \hat{m}$. Potom pro střední kvadratickou odchylku f a g dostaneme

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \leq 2K \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq 2K (S_f(\sigma) - s_f(\sigma)) < \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (11)$$

V první nerovnosti jsme odhadli $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K + K \leq 2K$ pro každé $x \in [a, b]$. Nerovnost $(\forall x \in [a, b])(|g(x)| \leq K)$ plyne z nerovnosti $(\forall x \in [a, b])(|f(x)| \leq K)$ a definice g . Druhá nerovnost v (11) platí, neboť

$$(\forall i \in \hat{m})(\forall x \in [x_{i-1}, x_i]) \left(|f(x) - g(x)| \leq M_i^{(f)} - m_i^{(f)} \right),$$

kde

$$M_i^{(f)} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i^{(f)} = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Jelikož nás bude zajímat střední kvadratická odchylka f a F_n na (a, b) , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(a) = f(b)$, neboť změníme-li integrovanou funkci v jednom bodě, nemá to vliv na hodnotu Riemannova integrálu. Potom také $g(a) = g(b)$ a navíc je g spojitá na $[a, b]$ a její derivace je spojitá po částech na $[a, b]$. Tedy g splňuje předpoklady Jordanovy věty 1.44, a tudíž

$$F_n^{(g)} \xrightarrow{[a,b]} g,$$

kde $F_n^{(g)}$ označuje n -tý částečný součet Fourierovy řady funkce g na (a, b) . Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$\sup_{x \in [a,b]} |g(x) - F_n^{(g)}(x)| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

Z toho plyne pro kvadratickou odchylku g a $F_n^{(g)}$ odhad:

$$\int_a^b (g(x) - F_n^{(g)}(x))^2 dx \leq \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (12)$$

Celkem z (11) a (12) a také z poznámky za Větou 1.43 dostáváme odhad

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - F_n^{(g)}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

platný pro všechna $n \geq n_0$, z čehož plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n\|_2 = 0$.

2) Nechť $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod b je jediný kritický bod f na $[a, b]$, tzn., že f je riemannovsky integrabilní na $[a, c]$ pro libovolné $c \in (a, b)$ a existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b+} \int_a^c f(x) dx.$$

Z toho plyne, že i f^2 je riemannovsky integrabilní na $[a, c]$ pro libovolné $c \in (a, b)$ a také existuje konečná limita

$$\lim_{c \rightarrow b+} \int_a^c f^2(x) dx,$$

neboť podle předpokladu je $f \in \mathcal{R}^2(a, b)$.

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int_c^b f^2(x) dx < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Neboli pro pomocnou integrovanou funkci

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a, c] \\ 0, & x \in (c, b], \end{cases}$$

máme $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Nyní podle již dokázaného bodu (1) a poznámky za Větou 1.43 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\|f - F_n\|_2 \leq \|f - F_n^{(g)}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - F_n^{(g)}\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n\|_2 = 0$. □

Parsevalova rovnost nám umožňuje určit součty zajímavých číselných řad, který bychom jinak určovali jen velmi obtížně. Např. můžeme tak určit součet řady převrácených hodnot kvadrátů přirozených čísel, což je úloha známá jako *Basilejský problém*, k níž se váže zajímavá historie.

Příklad 1.22: V Příkladu 1.21 jsem spočítali koeficienty

$$a_n = 0 \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Fourierovy řady funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. V tomto případě má Parsevalova rovnost tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Odtud najdeme řešení Basilejského problému:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tuto odpověď našel L. Euler v roce 1734 a vyřešil tak dlouhou otevřený problém z roku 1650!

Příklad 1.23: Spočítejme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na $(-\pi, \pi)$. Zřejmě

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

neboť integrujeme lichou funkci přes interval symetrický kolem počátku. Dále přímým výpočtem se ověří, že

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{a} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odtud podle Věty 1.42 vyplývá rovnost

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Funkce $f(x) = x^2$ dokonce vyhovuje předpokladům Jordanovy věty 1.44, a proto nalezená Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k periodickému prodloužení funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi]$. Dosadíme-li do poslední rovnosti $x = \pi$, najdeme opět součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Dále z Parsevalovy rovnosti dostaneme:

$$\frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5},$$

z čehož plyne, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Jiný způsob nalezení tohoto součtu nabízí Cvičení 1.12

V předchozím dvou příkladech jsme určili hodnoty $\zeta(2)$ a $\zeta(4)$, kde ζ je Riemannova zeta funkce, neboť

$$\zeta(2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Čtenáře by mohlo napadnout, že k nalezení dalších hodnot $\zeta(6), \zeta(8), \dots$ bychom mohli použít Parsevalovy rovnosti pro koeficienty Fourierovy řady funkcí $f(x) = x^3, f(x) = x^4, \dots$ na $(-\pi, \pi)$. To je sice pravda, ale postup se rychle komplikuje a těžko bychom tímto způsobem našli obecný vzorec pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

K odvození obecného vzorce pro $\zeta(2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$, vyjdeme z Fourierovy řady funkce $f(x) = \cosh \alpha x$ na $(-\pi, \pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Přímým výpočtem a z Věty 1.42 dostaneme rovnost

$$\cosh \alpha x = \frac{\sinh \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sinh(\alpha \pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos(nx),$$

které platí pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$. Detaily výpočtu jsou přenechány čtenáři jako Cvičení 1.13. Položíme-li $x = \pi$ a píšeme-li z místo α , dostaneme rovnost

$$\pi z \coth \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + n^2}. \quad (13)$$

Z našeho postupu vyplývá, že rovnost platí pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Dá se ale ukázat, že platí dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Uvažujme dále pouze $z \in \mathbb{C}$, pro která je $|z| < 1$. Potom platí:

$$\pi z \coth \pi z = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{n^2}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{z^2}{n^2} \right)^k = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) z^{2k}.$$

Prohození pořadí řad lze ospravedlnit díky absolutní konvergenci dvojité řady. Rigorózní argument uvidíme mnohem později u tzv. Fubiniho věty a na tomto místě ho prostě akceptujeme. Nyní stačí poslední rovnost srovnat s Taylorovou řadou (7), odkud dostaneme finální vzorec

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Poznámka: Rozvoj (13) lze přepsat do tvaru

$$\pi z \coth \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + in}.$$

Využijeme-li vztahů $\sinh(iz) = i \sin z$ a $\cosh(iz) = \cos z$ platných pro všechna $z \in \mathbb{C}$, dostaneme podobný rozvoj

$$\pi z \cotg \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z + n}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Tyto rozvoje představují zobecnění rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky. Funkce, které lze tímto způsobem rozvíjet jsou tzv. *meromorfní funkce* a jejich rozvoje v „nekonečné řady parciálních zlomků“ se nazývají *Mittag-Lefflerovy rozvoje*. Více o těchto rozvoji najde čtenář v klasických učebnicích komplexní analýzy.

Poznámka: Žádný vzorec podobný (14) pro hodnoty $\zeta(2n+1)$, kde $n \in \mathbb{N}$, není znám. V matematice existuje řada otevřených problémů týkající se nějakým způsobem funkce ζ . Vynecháme-li slavnou *Riemannovu hypotézu*, je to např. otázka iracionality čísel $\zeta(n)$, $n \geq 2$. Všimněte si, že ze vztahu (14) plyne, že číslo $\zeta(2n)$ je racionální násobek čísla π^{2n} . Dobře známý výsledek z teorie čísel je, že číslo π je tzv. transcendentní iracionální číslo, z čehož plyne, že π^k je iracionální pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, a tudíž také čísla $\zeta(2n)$ jsou iracionální pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Daleko obtížnější je otázka iracionality čísel $\zeta(2n+1)$. Jen pro zajímavost uvedme dnešní stav této problematiky. Zatím se ví, že je iracionální pouze $\zeta(3)$, což dokázal R. Apéry v roce 1978 a číslo $\zeta(3)$ se proto dnes nazývá *Apéryho konstanta*. Mnoho lidí se pokusilo rozšířit Apéryho výsledek i na další hodnoty $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$, ale doposud nikdo neuspěl. V roce 2000 T. Rivoal dokázal, že v posloupnosti $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ je nekonečně mnoho čísel iracionálních. W. Zudilin dokázal v roce 2001, že z čísel $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ je alespoň jedno iracionální. Další výsledky a reference lze nalézt v článkách W. Zudilina.

1.7 Abstraktní Fourierovy řady v Hilbertových prostorech*

Nepřednáší se. Těšte se na funkcionální analýzu:).

1.8 Cvičení

Cvičení 1.1: Dokažte Bolzanovo–Cauchyho kritérium konvergence pro **komplexní** (číselné) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(|a_n - a_m| < \epsilon)$$

s využitím známého Bolzanova–Cauchyho kritéria konvergence pro reálné posloupnosti.

Cvičení 1.2: Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na množině A . Dokažte, že potom také $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na libovolné podmnožině $B \subset A$.

Cvičení 1.3: Dokažte 1. a 2. tvrzení Věty 1.6.

Cvičení 1.4: Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Cvičení 1.5: Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou komplexní posloupnosti. Dokažte, že, pokud jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní, potom také tzv. *součinná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

je absolutně konvergentní a platí rovnost

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Cvičení 1.6: Dokažte, že

$$e^{w+z} = e^w e^z, \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Speciálně $e^{-z} = 1/e^z$.

(Hint: Použijte Cvičení 1.5.)

Cvičení 1.7: Dokažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

(Hint: Použijte Cvičení 1.6 a z Eulerova vzorce odvoďte, že $|e^{iy}| = 1$ pro $y \in \mathbb{R}$.)

Cvičení 1.8: Dokažte identity:

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin(xn/2) \sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}$$

a

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(xn/2) \cos(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)},$$

kde $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(Hint: Můžete využít vztahů: $\sin(kx) = \operatorname{Im} e^{ikx}$ a $\cos(kx) = \operatorname{Re} e^{ikx}$).

Cvičení 1.9: Ověřte následující rovnosti:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad \forall x \in \begin{cases} [-1, 1], & \text{je-li } a > 0, \\ (-1, 1], & \text{je-li } -1 < a \leq 0, \\ (-1, 1), & \text{je-li } a \leq -1; \end{cases}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Cvičení 1.10: Dokažte Lemma 1.35.

(Hint: Využijte identit: $2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$, $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ a $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$).

Cvičení 1.11: Dokažte, že zobrazení definované pro funkce z $\mathcal{R}^2(a, b)$ vztahy

$$(f, g)_2 := \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{a} \quad \|f\|_2 := \sqrt{(f, f)_2}$$

splňuje Schwarzovu nerovnost $|(f, g)_2| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ a trojúhelníkovou nerovnost $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

(Hint: Aplikujte obvyklý postup pro důkaz Schwarzovy a trojúhelníkové nerovnosti pro skalární součin a indukovanou normu známý z lineární algebry a uvědomte si, že platnost implikace $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ není pro důkaz třeba.)

Cvičení 1.12: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$ a s pomocí Parsevalovy rovnosti určete součet řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

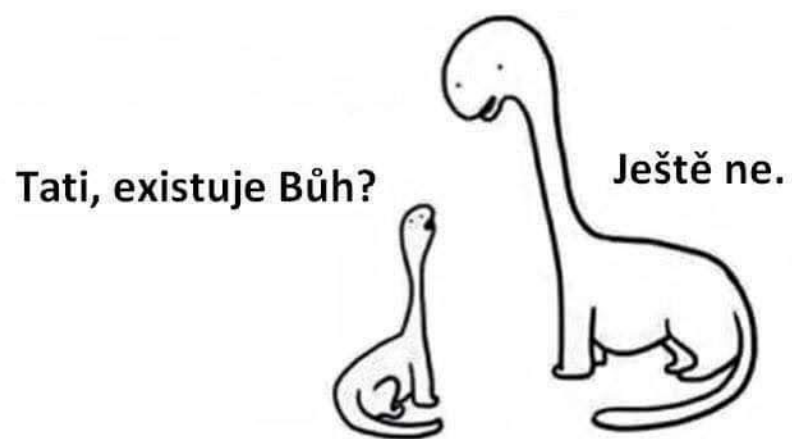
Cvičení 1.13: Ověřte následující Fourierovy rozvoje:

$$e^{\alpha x} = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi} \sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos(nx) - n \sin(nx)), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$\cosh(\alpha x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos(nx), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$\sinh(\alpha x) = \frac{2}{\pi} \sinh(\alpha\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\alpha^2 + n^2} \sin(nx), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.



Obrázek 4: Zdroj: ateiste.cz

2 Topologické a metrické prostory

2.1 Úvod

Jako motivaci pro následující definice uvažujme jednoduchý příklad množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ zavádíme absolutní hodnotu $|x|$ čísla $x \in \mathbb{R}$ obvyklým způsobem. Absolutní hodnotu $|x|$ můžeme chápat jako *velikost* prvku $x \in \mathbb{R}$. Absolutní hodnota je také zobrazení $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \alpha \in \mathbb{R})(|\alpha x| = |\alpha||x|)$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x + y| \leq |x| + |y|)$,
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$,

které je jednoduché ověřit.

Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme známou definici *normy* jako abstrakci *velikosti* prvku lineárního prostoru.

Definice 2.1 (Norma): Buď V je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ s vlastnostmi:

1. $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}))(\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|)$,
2. $(\forall x, y \in V)(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$, (tzv. trojúhelníková nerovnost)
3. $(\forall x \in V)(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$,

nazýváme *norma* na V a uspořádanou dvojici $(V, \|\cdot\|)$ *normovaný prostor*.

Poznámka: 1. Prostor V z definice normy musí být lineární, protože musí být jasné, co je součet $x + y$ a součin αx pro elementy $x, y \in V$ a číslo α . To už nebude třeba pro obecnější prostory metrické a topologické.

2. Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ splňující 1. a 2. se nazývá *seminorma* na V .

Příklad 2.1: Příklady normovaných prostorů:

1. Na $V = \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) definujeme tzv. p -normu

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \max_{i \in \tilde{n}} |x_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $x \in V$. Normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ a $\|x\|_\infty$ se někdy nazývají po řadě *součtová*, *euklidovská* a *maximová*.

2. Podobně lze zavést na prostoru spojitých funkcí $C([a, b])$ na intervalu $[a, b]$ p -normy

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

kde $f \in C([a, b])$.

Ukázat, že normy $\|\cdot\|_p$ pro $p \in (1, \infty)$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, není triviální a my si ji dokážeme až mnohem později v obecnější podobě. Ve speciálním případě $p = 2$ lze využít toho, že $\|\cdot\|_2$ je indukována euklidovským skalárním součinem, tzn. $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$ a použít k důkazu trojúhelníkové nerovnosti známou Schwarzovu nerovnost (Cvičení 2.2).

V důkazu implikace $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ je podstatný předpoklad spojitosti funkce f . Všimněte si, že pokud bychom prostor $C([a, b])$ nahradili (větším) prostorem Riemannovsky integrabilních funkcí na $[a, b]$, implikace už by neplatila a $\|\cdot\|_p$ by byla pouze semi-norma.

Vraťme se k příkladu reálných čísel. Vzdálenost mezi dvěma reálnými čísly x a y je rovna $\rho(x, y) := |x - y|$. Vzdálenost dvou elementů z $\mathbb{R}$ můžeme tedy chápat jako zobrazení $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, které má navíc tyto vlastnosti:

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\rho(x, y) = \rho(y, x))$,
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

Abstrahujeme-li od $\mathbb{R}$ k libovolné neprázdné množině X , pak axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme definici *metriky* jako abstrakci *vzdálenosti* dvou elementů z X .

Definice 2.2 (Metrika): Buď $X \neq \emptyset$ množina. Zobrazení $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ splňující

1. $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) = \rho(y, x))$, (tzv. symetrie)
2. $(\forall x, y, z \in X)(\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$, (tzv. trojúhelníková nerovnost)
3. $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,

nazýváme *metrika* na X a uspořádanou dvojici (X, ρ) *metrický prostor*.

Je-li X speciálně lineární prostor vybavený normou $\|\cdot\|$, potom je zobrazení

$$\rho(x, y) := \|x - y\|$$

metrikou na X (ověřte). O takové metrice říkáme, že je *indukovaná normou*. Příklad 2.1 nám proto ihned dává následující příklady metrik.

Příklad 2.2: Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) je

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \max_{i \in \hat{n}} |x_i - y_i|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

metrika (indukovaná normou $\|\cdot\|_p$) na $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Podobně pro $f, g \in C([a, b])$ je

$$\rho_p(f, g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, & \text{pro } p = \infty, \end{cases}$$

je metrika na $C([a, b])$.

Existují ovšem metriky, které nejsou indukovány žádnou normou.

Příklad 2.3 (Diskrétní metrika): Na lib. $X \neq \emptyset$ lze vždy zavést tzv. *diskrétní metrika*:

$$\rho_d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \neq y, \\ 0, & \text{je-li } x = y. \end{cases}$$

Je-li X lineární prostor s alespoň dvěma různými prvky, tj. $|X| \geq 2$, není ρ_d indukována žádnou normou na X . Předpokládejme, že naopak existuje norma $\|\cdot\|$ na X taková, že

$$\rho_d(x, y) = \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Z vlastností normy by potom metrika ρ_d musela splňovat

$$\rho_d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| \rho_d(x, y)$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) a $x, y \in X$. Pokud je $x \neq y$, dostaneme z definice ρ_d , že $|\alpha| = 1$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), což je spor.

Můžeme-li měřit vzdálenosti mezi prvky množiny. Můžeme měřit také vzdálenost množin a mluvit o omezených množinách.

Definice 2.3: Buď (X, ρ) metrický prostor a $\emptyset \neq A, B \subset X$. Číslo

$$d(A, B) := \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

nazýváme *vzdáleností množin* A a B . Dále číslo

$$\text{diam } A := \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$$

nazýváme *průměr* množiny A . Pro prázdnou množinu klademe $\text{diam } \emptyset := 0$. Řekneme, že A je *omezená*, právě když $\text{diam } A < \infty$.

Poznámka: 1. Je-li $|X| \geq 2$, zobrazení d není metrika na potenční množině 2^X , ať už dodefinujeme $d(A, B)$ jakkoliv pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$, neboť z $d(A, B) = 0$ neplatí $A = B$.
2. Pokud $A \subset B$, potom $\text{diam } A \leq \text{diam } B$.

Abychom se postupně dostali k obecnému topologickému prostoru, potřebuje si ujasnit pojem *otevřená množina* v metrickém prostoru. K tomu si nejprve zavedeme pojem *koule* v metrickém prostoru.

Definice 2.4: Buď (X, ρ) metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Množinu

$$B_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

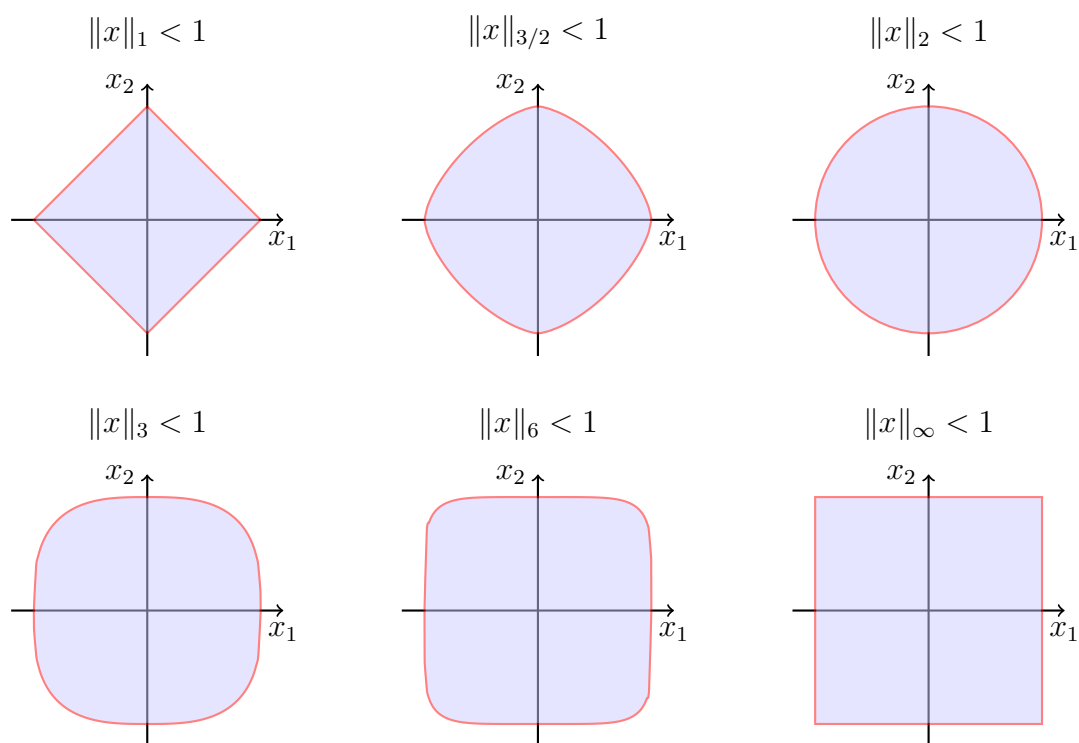
nazveme (*otevřenou*) *koulí* se středem v x a poloměrem r nebo stručněji *r-koulí* se středem v x .

Poznámka: Množina $B_x(r)$ se také někdy nazývá *r-okolím* bodu x .

Příklad 2.4: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p -normou $\|\cdot\|_p$, kde $p \geq 1$. Potom 1-koule se středem v 0 je množina

$$\begin{aligned} B_0(1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|^p + |x_2|^p < 1\}. \end{aligned}$$

Tvar množin $B_0(1)$ pro několik hodnot p je na Obrázku 5.



Obrázek 5: Příklady 1-koulí se středem v 0 v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ pro několik hodnot p .

Definice 2.5: Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset X$ je *otevřená*, pokud

$$(\forall x \in A)(\exists r > 0)(B_x(r) \subset A).$$

Tzn., že s každým bodem $x \in A$ leží v A také nějaká koule se středem v x . Množinu $B \subset X$ nazveme *uzavřenou*, právě když $X \setminus B$ je otevřená.

Příklad 2.5: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s metrikou indukovanou p -normou $\|\cdot\|_p$ pro nějaké $1 \leq p \leq \infty$. Množina $A = (0, 1) \times (0, 1)$ (otevřený čtverec) je otevřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $B = [0, 1] \times [0, 1]$ (uzavřený čtverec) je uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Množina $C = [0, 1) \times [0, 1)$ není ani otevřená, ani uzavřená v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

Věta 2.6: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Potom $B_x(r)$ je otevřená.

Důkaz. Buď $y \in B_x(r)$ libovolné ale fixní. Ukážeme, že $\exists r' > 0$ tak, že $B_y(r') \subset B_x(r)$. Položme $r' := r - d > 0$, kde $d := \rho(x, y) < r$. Je-li $z \in B_y(r')$, plyne z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < d + r' = r.$$

Tzn, že $z \in B_x(r)$. □

Následující vlastnosti se ukáží jako klíčové pro axiomatickou definici otevřené množiny v obecných prostorech **bez** metriky.

Věta 2.7: V metrickém prostoru (X, ρ) platí:

1. $\emptyset$ a X jsou otevřené.
2. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n \subset X$ otevřené, pak $A_1 \cap \dots \cap A_n$ je otevřená množina.
3. Je-li $I \neq \emptyset$ indexová množina lib. mohutnosti a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ otevřené, potom $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená.

Důkaz. Tvzení 1. je triviální.

2. Předpokládejme, že $A_1, \dots, A_n \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Potom $x \in A_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Z otevřenosti množin A_i plyne, že $\exists r_i > 0$ tak, že $B_x(r_i) \subset A_i$. Položíme-li $r := \min_{i \in \hat{n}} r_i > 0$ je

$$(\forall i \in \hat{n})(B_x(r) \subset A_i),$$

neboli

$$B_x(r) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

Z toho plyne, že $A_1 \cap \dots \cap A_n$ je otevřená.

3. Předpokládejme, že $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ jsou otevřené. Nechť $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Potom $\exists \alpha_0 \in I$ tak, že $x \in A_{\alpha_0}$. Protože je A_{α_0} otevřená, existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x(r) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Tedy $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená. □

Vidíme, že máme-li metriku na X , máme také systém otevřených podmnožin X , pro který platí tvrzení 1.-3. z Věty 2.7. Axiomatizací vlastností 1.-3. dostaneme abstraktní definici systému otevřených množin a dostaneme tak nejobecnější strukturu, kterou se budeme zabývat - topologický prostor.

2.2 Topologie

Definice 2.8 (Topologie): Necht $X \neq \emptyset$. Systém množin $\tau \subset 2^X$ splňující

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau)$,

nazýváme *topologie* na X a uspořádanou dvojici (X, τ) *topologický prostor*. Prvky $A \in \tau$ se nazývají *otevřené množiny*.

Poznámka: 1. Pojem *otevřená množina* z Definice 2.8 je vždy svázán s konkrétní topologií a zobecňuje pojem otevřená množina v metrickém prostoru z Definice 2.5.

2. Skutečně je-li (X, ρ) metrický prostor a

$$\tau_\rho := \{A \subset X \mid A \text{ otevřená podle Definice 2.5}\},$$

plyne z Věty 2.7, že τ_ρ je topologie na X . Topologie τ_ρ se nazývá *topologie indukovaná metrikou* ρ . Na druhou stranu ne každá topologie je indukovaná nějakou metrikou, viz Příklad 2.6.

3. Dostáváme tedy hierarchii striktních vložení

$$(X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Navíc víme z lineární algebry, že skalární součin indukuje normu na lineárním prostoru, můžeme si proto hierarchii ještě rozšířit o pre-Hilbertův prostor

$$(X, (\cdot, \cdot)) \prec (X, \|\cdot\|) \prec (X, \rho) \prec (X, \tau).$$

Následující dva příklady ukazují dva extrémy, kdy jsou otevřené pouze množiny $\emptyset$ a X , nebo všechny podmnožiny X .

Příklad 2.6 (Triviální topologie): Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *triviální topologii* $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$.

Pokud je $|X| \geq 2$, není τ_0 indukována žádnou metrikou. Pro spor předpokládejme naopak, že existuje metrika ρ na X indukující τ_0 . Zvolme $x, y \in X, x \neq y$ a označme $r := \rho(x, y) > 0$. Potom $x \in B_x(r/2)$, ale $y \notin B_x(r/2)$. Tzn., že $\emptyset \neq B_x(r/2) \neq X$, a tedy $B_x(r/2)$ není v topologii τ_0 . Na druhou stranu podle Věty 2.6 je $B_x(r/2)$ otevřená, což je spor.

Příklad 2.7 (Diskrétní topologie): Na lib. $X \neq \emptyset$ lze zavést *diskrétní topologii* $\tau_d := 2^X$. Topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou na ρ_d na X (Cvičení 2.7).

Příklad 2.8 (Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$): Topologii na $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, indukovanou euklidovskou metrikou $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, budeme stručně nazývat *obvyklou topologií* na $\mathbb{R}^n$.

Definice 2.9: Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Libovolnou množinu $A \in \tau$, která obsahuje x , nazveme (*otevřeným*) *okolím* x a budeme ji značit H_x .

Věta 2.10: Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Potom $A \in \tau$, právě tehdy když

$$(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je triviální, neboť za H_x lze vzít samotnou množinu A .

Dokážeme implikaci $(\Leftarrow)$. Z předpokladu $(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A)$ plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Inkluze $A \subset \bigcup_{x \in A} H_x$ je zřejmě pravdivá. Naopak, je-li $y \in \bigcup_{x \in A} H_x$, existuje $x \in A$ tak, že $y \in H_x \subset A$. Platí tedy i opačná inkluze $A \supset \bigcup_{x \in A} H_x$. K dokončení důkazu stačí uvážit, že podle definice okolí je $H_x \in \tau$ pro každé $x \in X$. Vlastnost 3. z definice topologie potom implikuje

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x \in \tau.$$

□

Uzavřenou množinu definujeme jako doplněk do otevřené množiny.

Definice 2.11 (Uzavřená množina, kotopologie): Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $A \subset X$ nazveme *uzavřenou*, právě když $X \setminus A \in \tau$. Systém všech uzavřených množin nazýváme *kotopologie* a značíme $c\tau$.

Příklad 2.9: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom, je-li $a \leq b$, je uzavřený interval

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$$

uzavřenou množinou.

Věta 2.12: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. $\emptyset, X \in c\tau$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in c\tau \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in c\tau)$,
3. $(\forall I \neq \emptyset)(\forall \alpha \in I, A_\alpha \in c\tau \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in c\tau)$,

Důkaz. Připomeňme *de Morganovy zákony*, které dávají do souvislosti průnik, sjednocení a doplněk množin $A, B \subset X$:

$$\begin{aligned} (X \setminus A) \cup (X \setminus B) &= X \setminus (A \cap B), \\ (X \setminus A) \cap (X \setminus B) &= X \setminus (A \cup B). \end{aligned}$$

Důkaz tvrzení potom přímo plyne z vlastností topologie a vztahů:

1.

$$X = X \setminus \emptyset \quad \text{a} \quad \emptyset = X \setminus X,$$

2.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i) \right),$$

3.

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) \right).$$

□

Poznámka: 1. Místo z množin otevřených bychom mohli vyjít z množin uzavřených, axiomatizovat vlastnosti 1.-3. z Věty 2.12 a definovat kotopologii místo topologie. Budovali bychom tím ale v podstatě tutéž teorii.

2. Nekonečný průnik otevřených množin obecně není otevřená množina. Podobně nekonečné sjednocení množin uzavřených nemusí být uzavřená množina (najděte příklady). V topologii se množiny, které jsou *spočetným* průnikem otevřených, resp. *spočetným* sjednocením uzavřených množin nazývají G_δ , resp. F_σ množiny. Toto zvláštní značení odkazuje na francouzské a německé výrazy:

$$\begin{aligned} F_\sigma : \quad F &= \text{„Fermé“} = \text{uzavřený}, & \sigma &= \text{„somme“} = \text{suma/sjednocení}, \\ G_\delta : \quad G &= \text{„Gebiet“} \approx \text{okolí (otev.)}, & \delta &= \text{„durchschnitt“} = \text{průnik}. \end{aligned}$$

Jednou z obvyklých a užitečných metod, jak zadat topologii na množině, je pomocí báze.

Definice 2.13 (Báze): Systém množin $\beta \subset \tau$ nazýváme *bází* topologického prostoru (X, τ) (též *bází* topologie τ), právě když každá množina $A \in \tau$ je sjednocením nějakých množin z β .

Poznámka: Přijímáme konvenci, že prázdné sjednocení množin je $\emptyset$. Proto i $\emptyset$ je sjednocením (nula) množin z β a to i v případě, že $\emptyset \notin \beta$.

Samozřejmě každý topologický prostor má bázi, neboť lze triviálně položit $\beta := \tau$. Protože $\tau = \{\cup \gamma \mid \gamma \subset \beta\}$, je topologie určena svojí bází jednoznačně. Naopak jeden topologický prostor může mít více bází.

Příklad 2.10: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ . Množina otevřených intervalů $\{(a, b) \mid a < b\}$ je báze τ . Jiný příklad (spočetné) báze τ je množina otevřených intervalů s racionálními krajními body $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$.

Věta 2.14: Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $\beta \subset 2^X$ je báze (X, τ) , právě když $\beta \subset \tau$ a $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$.

Důkaz. Nechť β je báze τ , $x \in X$ a H_x okolí x . Protože $H_x \in \tau$, musí být H_x sjednocením množin z β , tedy

$$H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

kde $B_\alpha \in \beta$ pro všechna $\alpha \in I$ a $I \neq \emptyset$ je indexová množina. Protože

$$x \in H_x = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $x \in B_{\alpha_0}$. Položíme-li $B := B_{\alpha_0}$, máme $B \in \beta$ a $x \in B \subset H_x$.

Naopak předpokládejme, že je dán systém $\beta \subset \tau$ splňující $(\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$. Ukážeme, že β je báze τ . Nechť $A \in \tau$. Potom k lib. $x \in A$ existuje $H_x \subset A$. Odtud plyne

$$A = \bigcup_{x \in A} H_x.$$

Z předpokladu dále víme, že ke každému H_x existuje $B = B_x \in \beta$ tak, že $x \in B_x \subset H_x$. Potom platí

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x,$$

neboli A je sjednocením množin z β . □

Následující věta zcela odpovídá na otázku, jaké systémy podmnožin X mohou být bázi topologie.

Věta 2.15: Je-li β bázi topologického prostoru (X, τ) , potom platí:

1. $\cup \beta = X$,
2. $(\forall A, B \in \beta)(\forall x \in A \cap B)(\exists C \in \beta)(x \in C \subset A \cap B)$.

Naopak, je-li $\beta \subset 2^X$ s vlastnostmi 1. a 2., potom je $\tau_\beta = \{\cup \gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ topologie na X a β její báze.

Důkaz. Nechť β je báze topologie τ . Potom 1. platí, neboť $X \in \tau$. K ověření 2. mějme $A, B \in \beta$ a $x \in A \cap B$. Protože $\beta \subset \tau$, je množina $A \cap B \in \tau$, a tedy okolím x . Potom z Věty 2.14 vyplývá, že existuje $C \in \beta$ taková, že $x \in C \subset A \cap B$.

Předpokládejme naopak, že systém $\beta \subset 2^X$ má vlastnosti 1. a 2. Ukážeme, že $\tau_\beta = \{\cup \gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ je topologie na X . Triviálně máme $\emptyset \in \tau_\beta$ a podle vlastnosti 1. také $X \in \tau_\beta$.

Ukážeme, že τ_β je uzavřený na lib. sjednocení. Dále budou řecká písmena α, α', μ označovat indexy z nějakých neprázdných indexových množin, které pro stručnost nebudeme explicitně vyznačovat. Mějme tedy $\{A_\alpha\}_\alpha \subset \tau_\beta$. Podle definice τ_β existují ke každému α množiny $B_\mu^{(\alpha)} \in \beta$ tak, že

$$A_\alpha = \bigcup_{\mu} B_\mu^{(\alpha)}.$$

Potom

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\mu} B_\mu^{(\alpha)},$$

neboli množina $\cup_\alpha A_\alpha$ je sjednocením množin z β , a proto $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau_\beta$.

Nakonec ověříme, že τ_β je uzavřený na konečná sjednocení. Stačí ukázat implikaci

$$A, B \in \tau_\beta \Rightarrow A \cap B \in \tau_\beta.$$

Nejprve si všimněme, že pokud $B_1, B_2 \in \beta$, potom $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$. Budťo totiž $B_1 \cap B_2 = \emptyset \in \tau_\beta$, nebo $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, a potom podle tvrzení 2. $(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists C_x \in \beta)(x \in C_x \subset B_1 \cap B_2)$, z čehož plyne

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} C_x.$$

Tedy $B_1 \cap B_2 \in \tau_\beta$.

Jsou-li $A, B \in \tau_\beta$, potom

$$A = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \quad \text{a} \quad B = \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'}$$

pro nějaké $\{B_{\alpha}\}_{\alpha}, \{B_{\alpha'}\}_{\alpha'} \subset \beta$. Proto lze průnik $A \cap B$ vyjádřit jako

$$A \cap B = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \cap \bigcup_{\alpha'} B_{\alpha'} = \bigcup_{\alpha, \alpha'} B_{\alpha} \cap B_{\alpha'}.$$

Podle pozorování výše je $B_{\alpha} \cap B_{\alpha'} \in \tau_\beta$ pro každé α a α' . Protože už víme, že systém τ_β je uzavřený na lib. sjednocení, dostáváme konečně $A \cap B \in \tau_\beta$. $\square$

Ještě jeden způsob, jak na množině zavést topologii, je velice obvyklý. Stačí předepsat dostatečně bohatý systém okolí každého bodu.

Definice 2.16 (Lokální báze): Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Systém okolí β_x bodu x nazveme *lokální bázi* v x prostoru (X, τ) , pokud platí $(\forall H_x)(\exists B \in \beta_x)(B \subset H_x)$.

Příklad 2.11: Uvažujme $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Potom systém

$$\beta_x = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$

je příklad lokální báze v $x \in \mathbb{R}$. Jiná lokální báze v x je např.

$$\tilde{\beta}_x = \{(x - 2\epsilon, x + 3\epsilon) \mid \epsilon > 0\}.$$

Mezi pojmy báze a lokální báze je úzká souvislost.

Věta 2.17: Nechť je pro každý bod x topologického prostoru (X, τ) dána lokální báze β_x . Potom jejich sjednocení $\bigcup_{x \in X} \beta_x$ je bázi (X, τ) . Naopak, je-li β báze (X, τ) a $x \in X$, potom $\beta_x := \{B \in \beta \mid x \in B\}$ je lokální bázi v x .

Důkaz. Vyplývá okamžitě z příslušných definic a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.8. $\square$

Je-li $X \neq \emptyset$ daná množina, můžeme zavést na X topologii tak, že ke každému bodu $x \in X$ definujeme neprázdný systém množin $\beta_x \subset 2^X$, kde každá množina z β_x obsahuje x a navíc má β_x vlastnost:

$$(\forall A, B \in \beta_x)(\exists C \in \beta_x)(C \subset A \cap B).$$

Potom je totiž zaručena vlastnost 2. z Věty 2.15 pro systém $\beta := \bigcup_{x \in X} \beta_x$ (vlastnost 1. platí také), a proto je β bází topologie $\tau_\beta = \{\bigcup \gamma \mid \gamma \subset \beta\}$ a β_x lokální bází v x topologického prostoru (X, τ_β) .

Tento způsob zavedení topologie na X předepsáním „dostatečně bohatých okolí“ všech bodů je velmi častý. Např. systém intervalů β_x z Příkladu 2.11 definuje obvyklou topologii na $\mathbb{R}$. Další příklady zavedení topologie pomocí lokálních bází najde čtenář ve Cvičeních 2.16 a 2.22.

Definice 2.18 (Vnitřek): Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Nejmenší otevřená podmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *vnitřek* A a značí A° , tzn.

$$A^\circ := \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B.$$

Bod $x \in A^\circ$ se nazývá *vnitřní bod* A .

Vlastnosti vnitřku množiny shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 2.19: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A^\circ \subset A$ a $A^\circ \in \tau$,
2. $x \in A^\circ \Leftrightarrow (\exists H_x)(H_x \subset A)$,
3. $A \in \tau \Leftrightarrow A = A^\circ$,
4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
5. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
6. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$,
7. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 6. neplatí, viz Cvičení 2.10.

Důkaz Věty 2.19. Ověřit vlastnosti 1.-7. je jednoduché cvičení. Ověříme jen tvrzení 2.-5., zbytek je obsahem Cvičení 2.9.

2. Je-li $x \in A^\circ$, potom můžeme položit $H_x := A^\circ$ a tvrzení platí podle 1. Naopak předpokládejme, že existuje $H_x \subset A$. Protože $H_x \in \tau$, je okolí H_x jednou z množin B z definice vnitřku:

$$x \in H_x \subset \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B = A^\circ.$$

3. Je-li $A \in \tau$, je A jednou z množin B z definice A° , a proto $A \subset A^\circ$. A protože také $A^\circ \subset A$, máme $A^\circ = A$. Naopak, pokud

$$A = A^\circ = \bigcup_{B \subset A, B \in \tau} B,$$

je $A \in \tau$ podle 3. axiomu z definice topologie.

4. Využijeme-li již dokázané tvrzení 3., platí $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, právě když $A^\circ \in \tau$, což platí podle 1.

5. Podle 2. je $x \in (A \cap B)^\circ$, právě když existuje H_x tak, že $H_x \subset A \cap B$. Neboli $H_x \subset A$ a současně $H_x \subset B$. To je opět podle 2. ekvivalentní tvrzení $x \in A^\circ$ a současně $x \in B^\circ$, neboli $x \in A^\circ \cap B^\circ$. $\square$

Definice 2.20 (Uzávěr): Buď (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$. Nejmenší uzavřená nadmnožina A (ve smyslu inkluze) se nazývá *uzávěr* A a značí $\overline{A}$, tzn.

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset C, C \in c\tau} C.$$

Příklad 2.12: V prostoru $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu $A = [0, 1) \times [0, 1)$. Potom $A^\circ = (0, 1) \times (0, 1)$ a $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Věta 2.21: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $A \subset \overline{A}$ a $\overline{A} \in c\tau$,
2. $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$,
3. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$,
4. $A \in c\tau \Leftrightarrow A = \overline{A}$,
5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
7. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
8. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Poznámka: Rovnost v tvrzení 7. neplatí, viz Cvičení 2.12.

Důkaz Věty 2.21. Ověříme jen tvrzení 2., 3. a 6., zbytek si čtenář dokáže sám jako Cvičení 2.11.

2. Aplikací de Morganových zákonů dostaneme

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{A \subset C, C \in c\tau} C = \bigcup_{A \subset C, C \in c\tau} X \setminus C.$$

Přejdeme-li k doplňkům, můžeme psát

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup_{X \setminus A \supset B, B \in \tau} B = (X \setminus A)^\circ,$$

z čehož dostáváme rovnost $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

3. S využitím již dokázaného tvrzení 2. a také negací tvrzení 2. z Věty 2.19 dostáváme řetězec ekvivalencí:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin (X \setminus A)^\circ \Leftrightarrow (\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset).$$

6. Můžeme použít již dokázanou identitu z bodu 2., de Morganovy zákony a tvrzení 5. z Věty 2.19. Tak dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= X \setminus (X \setminus (A \cup B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ = X \setminus ((X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ) \\ &= (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \cup (X \setminus (X \setminus B)^\circ) = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

□

Definice 2.22 (Hranice): Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Množinu $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ nazýváme *hranicí* množiny A .

Příklad 2.13: Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií a $A = [0, 1] \times (0, 1]$. Potom $\partial A = [0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times [0, 1]$ (hranice čtverce).

Další příklad ukazuje, že hranice A nemusí být zcela intuitivní (ostatně jako i jiné pojmy z topologie) a může být dokonce nadmnožinou A .

Příklad 2.14: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií a množinu racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Budeme potřebovat jednu vlastnost $\mathbb{Q}$, totiž že pro lib. $a < b$ obsahuje interval (a, b) nějaké racionální i iracionální číslo, kterou na tomto místě přijmeme jako známý fakt.

Nejprve si uvědomme, že $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Kdyby totiž existoval prvek $x \in \mathbb{Q}^\circ$, potom by muselo existovat $\epsilon > 0$, takové, že $B_x(\epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \mathbb{Q}$, což uvedené tvrzení vylučuje. Z uvedené vlastnosti $\mathbb{Q}$ také plyne, že v libovolném okolí jakéhokoliv reálného čísla, leží nějaké racionální číslo, tj. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists q \in \mathbb{Q})(q \in B_x(\epsilon))$. Proto je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, neboli hranicí racionálních čísel jsou čísla reálná.

Věta 2.23: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A, B \subset X$. Potom platí:

1. $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$,
2. $\partial A = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a odtud speciálně plyne, že $\partial A \in c\tau$,
3. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$,
4. $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$.

Poznámka: V tvrzeních 3. a 4. neplatí rovnost, viz Cvičení 2.14.

Důkaz Věty 2.23. Tvrzení 1. je triviální. Tvrzení 3. a 4. si dokáže čtenář jako Cvičení 2.14.

Tvrzení 2. plyne z definice hranice, tvrzení 2. Věty 2.21 a de Morganových zákonů, neboť máme

$$\begin{aligned} \partial A &= \overline{A} \setminus A^\circ = (X \setminus (X \setminus A)^\circ) \setminus A^\circ = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ) \\ &= (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}. \end{aligned}$$

□

Definice 2.24 (Hromadný bod, derivace, perfektní množina): Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme *hromadným bodem množiny* A , právě když $(\forall H_x)(A \cap (H_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset)$. Množinu hromadných bodů A nazýváme *derivace* A a značíme A' . Množinu A nazýváme *perfektní*, pokud $A = A'$.

Definice 2.25 (Izolovaný bod, izolátor, diskrétní množina): Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Bod $x \in A$ nazveme *izolovaným bodem množiny* A , právě když x není hromadný bod A , tzn. $(\exists H_x)(H_x \cap A = \{x\})$. Množinu izolovaných bodů A nazýváme *izolátor* A a značíme A^i . Množinu A nazýváme *diskrétní*, pokud $A = A^i$.

Poznámka: Všimněte si, že hromadný bod A nemusí v množině A ležet, ale izolovaný bod A je vždy prvek A .

Příklad 2.15: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií, $A = (0, 1) \cup \{2\}$, $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a $C = \mathbb{N}$. Potom $A' = [0, 1]$, $A^i = \{2\}$, $B' = \{0\}$, $B^i = B$, $C' = \emptyset$ a $C^i = \mathbb{N}$.

Věta 2.26: Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$,
2. $\overline{A} = A' \cup A^i$,
3. $A' \subset A \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Důkaz Věty 2.26. 1. Z definice hromadného bodu a tvrzení 3. Věty 2.21 plyne

$$x \in A' \Leftrightarrow (\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\forall H_x)(H_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset) \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}.$$

2. Z příslušných definic přímo plyne, že $A^i \subset A \subset \overline{A}$ a podle z již dokázaného tvrzení 1. máme také $A' \subset \overline{A}$. Odtud $A' \cup A^i \subset \overline{A}$.

Dokážeme opačnou inkluzi $\overline{A} \subset A' \cup A^i$. Nechť $x \in \overline{A}$, potom máme $(\forall H_x)(H_x \cap A \neq \emptyset)$. Pokud je $x \notin A$, potom pro lib. H_x je $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = H_x \cap A \neq \emptyset$, z čehož plyne $x \in A'$. Je-li naopak $x \in A$, potom musí být pravdivý jeden z výroků $(\forall H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset)$, nebo $(\exists H_x)((H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset)$, neboť jsou komplementární. První ovšem znamená, že $x \in A'$. Kdežto druhý spolu s předpokladem $x \in A$ implikuje $x \in A^i$.

3. Je-li $A' \subset A$, plyne z již dokázaného $\overline{A} = A' \cup A^i$ a inkluze $A^i \subset A$, že $\overline{A} \subset A$, což dokazuje implikaci $A' \subset A \Rightarrow A = \overline{A}$. Naopak, platí-li $A = \overline{A}$, je opačná implikace důsledkem inkluze $A' \subset \overline{A}$. $\square$

V následující definici si zavedeme terminologii, která zde pro nás sice nebude mít zásadní význam, ale často se s ní v matematice setkáte, a proto je dobré pojmům rozumět.

Definice 2.27 (Hustá množina, separabilita): Buď (X, τ) topologický prostor a $A, B \subset X$. Množinu $A \subset B$ nazveme *hustou v množině* B , pokud $\overline{A} \supset B$. Množina A se nazývá *hustá*, je-li hustá v X , tzn. $\overline{A} = X$. Prostor (X, τ) se nazývá *separabilní*, existuje-li v X hustá nejvýše spočetná množina.

Příklad 2.16: Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v topologickém prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ , neboť platí $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Protože je $\mathbb{Q}$ navíc spočetná, je $(\mathbb{R}, \tau)$ separabilní.

Některé vlastnosti, které se mohou jevit jako přirozené, jako je např. uzavřenost jednoprvkové množiny, uzavřenost množiny A' , nebo inkluze $(A')' \subset A'$ neplatí v obecném topologickém prostoru, viz Cvičení 2.15 a 2.17. Podobný problém se týká nejednoznačnosti limity posloupnosti v topologickém prostoru, který uvidíme později (Příklad 2.17). Z těchto důvodů dále rozlišujeme topologické prostory pomocí tzv. *axiomů oddělitelnosti*.

Definice 2.28 (Axiomy oddělitelnosti): Následující výroky nazýváme *axiom oddělitelnosti*:

$$T_0: (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y), \quad (\text{Kolmogorov})$$

$$T_1: (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y), \quad (\text{Fréchet})$$

$$T_2: (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset), \quad (\text{Hausdorff})$$

$$T_3: (\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x)(\exists U \supset A, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset), \quad (\text{regulární})$$

$$T_4: (\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, U \in \tau)(\exists V \supset B, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset). \quad (\text{normální})$$

Dále používáme následující názvosloví:

$V(X, \tau)$ platí axiom $T_0 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme T_0 -prostor, alternativně *Kolmogorův*.

$V(X, \tau)$ platí axiom $T_1 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme T_1 -prostor, alternativně *Fréchetův*.

$V(X, \tau)$ platí axiom $T_2 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme T_2 -prostor, alternativně *Hausdorffův*.

$V(X, \tau)$ platí axiom $T_3 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme *regulární*.

$V(X, \tau)$ platí axiom $T_4 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme *normální*.

$V(X, \tau)$ platí axiomy T_1 a $T_3 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme T_3 -prostor.

$V(X, \tau)$ platí axiomy T_1 a $T_4 \Leftrightarrow (X, \tau)$ nazýváme T_4 -prostor.

Poznámka: Tedy (X, τ) je T_i -prostor, platí-li v něm axiom T_i a navíc v případě, že $i \in \{3, 4\}$, ještě požadujeme platnost axiomu T_1 . Potom je každý T_i -prostor také T_{i-1} -prostor. Naopak pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ existují topologické prostory, v nichž platí axiom T_{i-1} , ale neplatí axiom T_i , viz Cvičení 2.18–2.22.

Věta 2.29: Topologický prostor (X, τ) je Fréchetův, právě když $(\forall x \in X)(\{x\} \in c\tau)$.

Důkaz. Je-li $|X| = 1$, pak je tvrzení triviální. Předpokládejme dále, že $|X| \geq 2$.

Implikace $(\Rightarrow)$: Buď $x \in X$. Ukážeme, že $X \setminus \{x\}$ je otevřená. Vezměme $y \in X \setminus \{x\}$. Protože $x \neq y$, plyne z axiomu T_1 , že $(\exists H_y)(x \notin H_y)$. Neboli $H_y \subset X \setminus \{x\}$. Z toho plyne $X \setminus \{x\} \in \tau$.

Implikace $(\Leftarrow)$: Nechť $x, y \in X, x \neq y$. Protože $y \in X \setminus \{x\}$ a $X \setminus \{x\}$ je podle předpokladu otevřená, existuje H_y takové, že $H_y \subset X \setminus \{x\}$, což znamená $x \notin H_y$. Podobný argument aplikovaný na $X \setminus \{y\}$ implikuje existenci H_x s vlastností $y \notin H_x$. $\square$

Věta 2.30: Nechť (X, τ) je Fréchetův topologický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $A' \in c\tau$,

2. $(A')' \subset A'$.

Poznámka: V 2. tvrzení neplatí rovnost, viz Cvičení 2.24. Předpoklad věty nelze zeslabit na Kolmogorův topologický prostor, viz Cvičení 2.16.

Důkaz Věty 2.30. Využijeme fakt, že ve Fréchetově prostoru je množina $H_x \setminus \{x\}$ otevřená pro lib. $x \in X$. To plyne z toho, že $H_x \setminus \{x\} = (X \setminus \{x\}) \cap H_x$ a $X \setminus \{x\}$ je otevřená podle Věty 2.29.

K důkazu tvrzení 1., ukážeme implikaci $x \notin A' \Rightarrow x \notin \overline{A'}$. Když $x \notin A'$, $\exists H_x$ takové, že $(H_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Mohou nastat dvě možnosti: buď $H_x \cap A = \emptyset$, nebo $H_x \cap A = \{x\}$. Je-li $H_x \cap A = \emptyset$, potom $x \notin \overline{A}$, a proto také $x \notin \overline{A'}$, neboť $\overline{A'} \subset \overline{A}$, což plyne z tvrzení 2. Věty 2.26.

Uvažujme dále variantu $H_x \cap A = \{x\}$. Pro spor předpokládejme, že $x \in \overline{A'}$. Potom $H_x \cap A' \neq \emptyset$. Protože podle předpokladu $x \notin A'$, je také $(H_x \setminus \{x\}) \cap A' \neq \emptyset$. Jinými slovy $\exists y \in A'$ a $y \in H_x \setminus \{x\}$. Protože $H_x \setminus \{x\} \in \tau$ (zde používáme pozorování udělané na začátku důkazu), je množina $H_x \setminus \{x\} =: H_y$ okolím y . Z toho, že $H_x \cap A = \{x\}$, ale vyplývá $H_y \cap A = \emptyset$, což znamená, že $y \notin A'$ a to je spor (s předchozím $y \in A'$).

K důkazu inkluze $(A')' \subset A'$ použijeme již dokázané $A' = \overline{A'}$ a tvrzení 2. Věty 2.26. Potom totiž

$$(A')' \subset (A')' \cup (A')^i = \overline{A'} = A'.$$

□

V topologickém prostoru můžeme také zavést pojem limita posloupnosti.

Definice 2.31 (Konvergence posloupnosti, limita): Buď (X, τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z X . Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje*, existuje-li $x \in X$ takové, že

$$(\forall H_x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in H_x).$$

Bod x nazýváme *limitou* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme $x_n \rightarrow x$.

Příklad 2.17: Uvažujme $X = [0, 1]$ s topologií

$$\tau_{fin} := \emptyset \cup \{[0, 1] \setminus F \mid F \subset [0, 1] \text{ konečná}\}$$

(doplňky do konečných množin). Je jednoduché ověřit, že (X, τ_{fin}) je topologický prostor. Vezměme libovolnou prostou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $[0, 1]$, tzn. $x_m \neq x_n$, pokud $m \neq n$. Potom každá neprázdná množina z τ_{fin} obsahuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek. Z toho plyne, že každý bod z $[0, 1]$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předchozí příklad ukazuje, že limita posloupnosti v topologickém prostoru nemusí být určena jednoznačně. V Hausdorffově topologickém prostoru už taková situace nastat nemůže.

Věta 2.32: V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Hausdorffova prostoru (X, τ) má dvě různé limity x' a x'' . Protože $x' \neq x''$, axiom T_2 implikuje existenci okolí $H_{x'}$ a $H_{x''}$ takových, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$.

Protože $x_n \rightarrow x'$ a také $x_n \rightarrow x''$, existují podle definice limity $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(\forall n \geq n_1)(x_n \in H_{x'}) \quad \text{a} \quad (\forall n \geq n_2)(x_n \in H_{x''}).$$

Odtud plyne, že pro každé $n \geq \max(n_1, n_2)$ je $x_n \in H_{x'} \cap H_{x''}$, což je ve sporu s tím, že $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$. $\square$

Příklad 2.18: Uvažujme množinu rozšířených reálných čísel $X = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s obvykle definovaným uspořádáním, kde speciálně platí $a < +\infty$ a $b > -\infty$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Na $\overline{\mathbb{R}}$ můžeme zavést topologii pomocí lokální báze v každém bodě:

$$U_x := \begin{cases} \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}, & \text{je-li } x \in \mathbb{R}, \\ \{(K, \infty] \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = +\infty, \\ \{[-\infty, K) \mid K \in \mathbb{R}\}, & \text{je-li } x = -\infty. \end{cases}$$

Potom topologická definice limity posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí, tzn.

$$x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|x_n - x| < \epsilon)$$

a

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow +\infty &\Leftrightarrow (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n > K), \\ x_n \rightarrow -\infty &\Leftrightarrow (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n < K). \end{aligned}$$

Připomeňme, že každý metrický prostor je i prostor topologický s topologií indukovanou metrikou. Všimněte si, že v metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definici limity posloupnosti vyjádřit:

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_n) < \epsilon) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0. \end{aligned}$$

V metrických prostorech lze topologické vlastnosti jako je vnitřek, uzávěr, hranice, derivace a izolátor množiny charakterizovat pomocí limity posloupnosti.

Věta 2.33: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$. Potom platí:

1. $x \in A^\circ \Leftrightarrow (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X) (x_n \rightarrow x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in A))$,
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \rightarrow x)$,
3. $x \in \partial A \Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A)(x_n \rightarrow x) \wedge (\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus A)(y_n \rightarrow x)$,
4. $x \in A' \Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{x\})(x_n \rightarrow x)$,
5. $x \in A^i \Leftrightarrow (\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A) (x_n \rightarrow x \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n = x))$.

Důkaz. Dokážeme pouze 1. ekvivalenci. Zbytek důkazu se provede podobně a je přenechán čtenáři jako Cvičení 2.25.

Nechť $x \in A^\circ$. Potom $\exists r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ a $x_n \rightarrow x$, potom z definice limity plyne $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in B_x(r) \subset A)$.

Naopak pokud $x \notin A^\circ$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Zvolme libovolně

$$x_n \in B_x\left(\frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom $x_n \rightarrow x$ a přitom $x_n \notin A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Další věta říká, že v každém metrickém prostoru platí axiom oddělitelnosti T_4 .

Věta 2.34: Topologický prostor, jehož topologie je indukovaná metrikou, je normální.

Důkaz. Nechť (X, τ) je topologický prostor s topologií indukovanou metrikou ρ . V důkazu ověříme platnost axiomu T_4 v (X, τ) . Nejprve ale dokážeme následující jednoduché pozorování.

Lemma 2.35: Buď (X, ρ) metrický prostor, $A = \overline{A} \neq \emptyset$ a $x \in X$. Potom

$$d(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A.$$

Zde $d(x, A) \equiv d(\{x\}, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$.

Důkaz Lemma 2.35. Implikace $(\Leftarrow)$ je triviální. Ukážeme opačnou implikaci $(\Rightarrow)$. Je-li $d(x, A) = 0$, potom z definice infima množiny musí existovat posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ prvků z A taková, že $y_n \rightarrow x$. Z toho plyne podle 2. tvrzení Věty 2.33, že $x \in \overline{A} = A$. $\square$

Mějme nyní $A, B \in c\tau$, $A \cap B \neq \emptyset$. Položme

$$\begin{aligned} \text{pro } x \in A : \quad r_x &:= \frac{1}{3}d(x, B) \quad \text{a} \quad U_x := B_x(r_x), \\ \text{pro } y \in B : \quad r_y &:= \frac{1}{3}d(y, A) \quad \text{a} \quad V_y := B_y(r_y). \end{aligned}$$

Podle dokázaného lemma je $(\forall x \in A)(r_x > 0)$, neboť $x \notin B$, jinak by $A \cap B \neq \emptyset$. Podobně $(\forall y \in B)(r_y > 0)$. Dále definujme množiny

$$U := \bigcup_{x \in A} U_x \quad \text{a} \quad V := \bigcup_{y \in B} V_y.$$

Množiny U a V jsou otevřené, protože jsou dány sjednocením otevřených množin. Dále také $A \subset U$ a $B \subset V$. K tomu, aby byla platnost axiomu T_4 ověřena, zbývá ukázat, že $U \cap V = \emptyset$.

Pro spor předpokládejme, že $U \cap V \neq \emptyset$. Potom by museli existovat $x \in A$ a $y \in B$ tak, že $U_x \cap V_y \neq \emptyset$. Vezměme $z \in U_x \cap V_y$. Potom z definice množin U_x a V_y plyne, že

$$\rho(x, z) < r_x \quad \text{a} \quad \rho(y, z) < r_y.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r_y \leq r_x$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$3r_x = d(x, B) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < r_x + r_y \leq 2r_x,$$

což implikuje logický spor $3 < 2$. $\square$

Nakonec si ještě vysvětlíme pojem topologický podprostor.

Definice 2.36: (Topologický podprostor) Buď (X, τ) topologický prostor a $Y \subset X$. Dvojici (Y, τ_Y) , kde

$$\tau_Y := \{A \cap Y \mid A \in \tau\},$$

nazýváme *topologický podprostor* prostoru (X, τ) .

Poznámka: Snadno se ověří, že topologický podprostor je topologický prostor (provedte).

Věta 2.37: Nechť (Y, τ_Y) je topologický podprostor prostoru (X, τ) . Potom platí:

1. $B \in \tau_Y \Leftrightarrow (\exists C \in \tau)(B = C \cap Y)$.
2. H_y^Y je okolí bodu $y \in Y$ v $(Y, \tau_Y) \Leftrightarrow (\exists H_y^X \text{ okolí } y \text{ v } (X, \tau))(H_y^Y = H_y^X \cap Y)$.

Důkaz. Proveďte jako Cvičení 2.27. □

Příklad 2.19: Uvažujme $X = \mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ a $Y = (0, 2]$. Všimněte si, že množina $(0, 1]$, která není ani otevřená, ani uzavřená v (X, τ) , je uzavřená v (Y, τ_Y) . Podobně je množina $(1, 2]$ otevřená v prostoru (Y, τ_Y) .

Ještě jednou zdůrazníme na následujícím příkladu, že pokud pracujeme s topologickými pojmy jako je uzávěr, vnitřek, hranice, atd., je třeba mít vždy na paměti, jakou topologii uvažujeme.

Příklad 2.20: Buď $X = \mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií τ a $Y = [0, 1] \times \{0\}$. Uvažujme množinu $A = (0, 1) \times \{0\}$. Potom v topologickém prostoru (X, τ) máme

$$A^\circ = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = [0, 1] \times \{0\},$$

kdežto v topologickém prostoru (Y, τ_Y) platí

$$A^\circ = (0, 1) \times \{0\}, \quad \overline{A} = [0, 1] \times \{0\}, \quad \partial A = \{(0, 0), (1, 0)\}.$$

2.3 Spojitost

Pojem *spojité zobrazení* hraje v matematické analýze důležitou roli a lze zavést už na velmi abstraktní úrovni pro zobrazení mezi dvěma topologickými prostory.

Definice 2.38 (Spojitost v bodě, spojitost): Buď $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ zobrazení mezi dvěma topologickými prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) . Řekneme, že zobrazení f je *spojité v bodě* $x \in X$, právě když

$$(\forall H_{f(x)})(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)}).$$

Dále zobrazení f nazveme *spojité*, je-li f spojitý v každém bodě $x \in X$.

Poznámka: Spojitost je topologická vlastnost. Tzn., že závisí na topologiích τ_X a τ_Y na X a Y . Zdůrazněme, že H_x z definice spojitosti je okolím x v topologii τ_X a $H_{f(x)}$ okolím $f(x)$ v topologii τ_Y . Ve značení tuto skutečnost ale nebudeme speciálně vyznačovat. Budeme také občas stručněji psát $f : X \rightarrow Y$ je spojitý, namísto přesného $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ je spojitý.

Na tomto místě je dobré si rozmyslet, že obvyklá „ ϵ - δ definice“ spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě x_0 :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

je speciální případ uvedené obecné (topologické) definice, kde $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií. Zde se rozumí, že je f definovaná na celém $\mathbb{R}$. Pokud je funkce f definovaná jen na nějaké podmnožině $D_f \subset \mathbb{R}$, chápeme D_f jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií a „ ϵ - δ definice“ má potom podobu

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta)(|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Příklad 2.21: Uvažujme obvyklé topologie a $f : [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{je-li } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{je-li } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Potom je f spojitá funkce.

Odtud dále, pokud nebude topologie na množinách $\mathbb{R}^n$ specifikována, budeme uvažovat topologii obvyklou.

Obecněji než v předchozí situaci s reálnou funkcí, avšak docela analogicky je definice spojitosti zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory v bodě $x_0 \in X$ ekvivalentní výroku

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon),$$

neboli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_{x_0}(\delta))(f(x) \in B_{f(x_0)}(\epsilon)).$$

Věta 2.39: Budte (X, τ_X) a (Y, τ_Y) topologické prostory a $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f je spojitý.
2. Vzor otevřené množiny je otevřená množina, tj.

$$(\forall A \in \tau_Y)(f^{-1}(A) \in \tau_X).$$

3. Vzor uzavřené množiny je uzavřená množina, tj.

$$(\forall B \in c\tau_Y)(f^{-1}(B) \in c\tau_X).$$

Důkaz. K důkazu ekvivalence 2. a 3. tvrzení si stačí uvědomit, že pro lib. $A \subset Y$ je $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(Y \setminus A) = X$ a že tento rozklad je disjunktní. Potom už stačí využít toho, že otevřené a uzavřené množiny jsou vzájemně komplementární. Dále ukážeme ekvivalenci 1. a 2. tvrzení.

Implikace 2. $\Rightarrow$ 1.: Pro lib. zvolené $x \in X$ stačí položit $A = H_{f(x)}$ a tvrzení 2. potom říká, že $f^{-1}(H_{f(x)})$ je otevřená. Navíc z definice vzoru je $x \in f^{-1}(H_{f(x)})$. Proto musí existovat H_x tak, že $H_x \subset f^{-1}(H_{f(x)})$, neboli $f(H_x) \subset H_{f(x)}$.

Implikace 1. $\Rightarrow$ 2.: Nechť $A \in \tau_Y$. Potom je buď $f^{-1}(A) = \emptyset$ a tvrzení platí triviálně, nebo $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Předpokládejme, že $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ a zvolme $x \in f^{-1}(A)$. Potom je $f(x) \in A \in \tau_Y$, a proto $(\exists H_{f(x)})(H_{f(x)} \subset A)$. Protože je navíc dle předpokladu f spojitá v x , musí

$$(\exists H_x)(f(H_x) \subset H_{f(x)} \subset A),$$

neboli

$$(\exists H_x)(H_x \subset f^{-1}(A)),$$

a proto je $f^{-1}(A) \in \tau_X$. □

Definice 2.40 (Homeomorfismus, homeomorfní prostory): Zobrazení $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ nazveme *homeomorfismus*, právě když je f bijekce a f i f^{-1} jsou spojité. Topologické prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) nazýváme *homeomorfní*, existuje-li $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ homeomorfismus.

Poznámka: „Být homeomorfní“ je relace ekvivalence na množině topologických prostorů.

Následující příklad ukazuje, že je-li $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ prosté a spojité, f^{-1} nemusí být nutně spojité, viz také Cvičení 2.30. Tzn., že požadavek, aby f^{-1} bylo spojité, není v definici homeomorfismu nadbytečný.

Příklad 2.22: Uvažujme ještě jednou zobrazení f z Příkladu 2.21, které je spojité a také prosté. Inverzní zobrazení snadno určíme:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{je-li } y \in [0, 1], \\ y + 1, & \text{je-li } y \in (1, 2]. \end{cases}$$

Zřejmě ale f^{-1} není spojité.

Homeomorfismus zachovává topologické vlastnosti, tzn. vlastnosti závislé jen na zvolené topologii jako je např. otevřenost množiny apod. Následující věta je okamžitý důsledek Věty 2.39 a příslušných definic.

Věta 2.41: Nechť $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ je homeomorfismus topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y) . Potom pro každé $A \subset X$ platí:

1. $A \in \tau_X \Leftrightarrow f(A) \in \tau_Y$,
2. $A \in c\tau_X \Leftrightarrow f(A) \in c\tau_Y$,
3. $f(A^\circ) = (f(A))^\circ$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ a $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

Jiné vlastnosti než topologické, jako je např. omezenost množiny, homeomorfismus nezachovává, viz Cvičení 2.32.

Definice 2.42 (Ekvivalence metrik, ekvivalence norem): Dvě metriky na množině $X \neq \emptyset$ nazveme (*topologicky*) *ekvivalentní*, pokud indukují tutéž topologii na X . Dále dvě normy na lineárním prostoru V nazveme *ekvivalentní*, pokud indukují ekvivalentní metriky na V .

Poznámka: Metriky ρ a σ na množině $X \neq \emptyset$ jsou ekvivalentní, právě když identické zobrazení $\text{id} : (X, \rho) \rightarrow (X, \sigma)$ je homeomorfismus.

Věta 2.43: Buď V lineární prostor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ normy na V . Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, právě když

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V)(c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \tilde{c}\|x\|_1).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Připomeňme, že v obecném normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí:

$$\overline{B_x(r)} = C_x(r) \equiv \{y \in V \mid \|x - y\| \leq r\}$$

pro lib. $x \in V$ a $r > 0$, viz Cvičení 2.6.

Předpokládejme, že jsou normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na V ekvivalentní. Indukují tedy tutéž topologii na V . Uvažujme jednotkovou kouli

$$B_0^{(1)}(1) := \{y \in V \mid \|y\|_1 < 1\}$$

v prostoru $(V, \|\cdot\|_1)$. Množina $B_0^{(1)}(1)$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_1)$, a proto je podle předpokladu také otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$. Potom existuje $r > 0$ takové, že

$$B_0^{(2)}(r) := \{y \in V \mid \|y\|_2 < r\} \subset B_0^{(1)}(1).$$

Přejdeme-li v poslední inkluzi k uzávěrům v topologii indukované jak $\|\cdot\|_1$, tak $\|\cdot\|_2$ (je stejná), potom dostáváme inkluzi

$$\{y \in V \mid \|y\|_2 \leq r\} \subset \{y \in V \mid \|y\|_1 \leq 1\},$$

neboli

$$(\forall y \in V)(\|y\|_2 \leq r \Rightarrow \|y\|_1 \leq 1).$$

Pro $x = 0$ tvrzení triviálně platí. Pro $x \neq 0$ položme

$$y := r \frac{x}{\|x\|_2}.$$

Potom je $\|y\|_2 = r$ a podle odvozené implikace

$$1 \geq \|y\|_1 = r \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2},$$

neboli

$$\|x\|_2 \leq r\|x\|_1,$$

což je jedna z nerovností (s $\tilde{c} := r$), kterou bylo třeba dokázat. Obdobný postup s prohozenou rolí norem $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dokazuje druhou nerovnost.

Implikace $(\Leftarrow)$: Dokážeme implikaci

$$A \subset V \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_2) \Rightarrow A \text{ je otevřená v } (V, \|\cdot\|_1).$$

Opačná implikace se potom opět dokáže analogicky. Získaná ekvivalence implikuje, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ indukují tutéž topologii na V a jsou proto ekvivalentní.

Pro $A = \emptyset$ implikace platí. Nechť $\emptyset \neq A \subset V$ je otevřená v $(V, \|\cdot\|_2)$ a $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že

$$B_x^{(2)}(r) := \{y \in V \mid \|x - y\|_2 < r\} \subset A.$$

Nyní si stačí všimnout, že

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) := \left\{y \in V \mid \|x - y\|_1 < \frac{r}{\tilde{c}}\right\} \subset B_x^{(2)}(r),$$

neboť pro $y \in B_x^{(1)}(r/\tilde{c})$ je podle předpokladu

$$\|x - y\|_2 \leq \tilde{c}\|x - y\|_1 < \tilde{c}\frac{r}{\tilde{c}} = r.$$

Celkem tedy máme

$$B_x^{(1)}\left(\frac{r}{\tilde{c}}\right) \subset B_x^{(2)}(r) \subset A,$$

a proto je množina A otevřená také v $(V, \|\cdot\|_1)$. □

Poznámka: Podobné tvrzení jako Věta 2.43 neplatí pro metriky. Vlastnost

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x, y \in X) (c\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \tilde{c}\rho(x, y))$$

se nazývá *silná ekvivalence* metrik ρ a σ na X . Silná ekvivalence metrik implikuje ekvivalenci metrik, ale ne naopak. Hluběji se zde touto problematikou nebudeme zabývat.

Připomeňme, že topologii na $\mathbb{R}^n$ určenou Euklidovskou 2-normou jsme označovali jako *obvyklou*. Následující příklad ukazuje, že všechny p -normy jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Všechny tedy indukují na $\mathbb{R}^n$ obvyklou topologii. Později dokonce ukážeme, že libovolné dvě normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru jsou ekvivalentní.

Příklad 2.23: Buď $p \geq 1$. Pro lib. $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\left(\max_{i \in \hat{n}} |x_i|\right)^p \leq \sum_{i=1}^p |x_i|^p \leq n \left(\max_{i \in \hat{n}} |x_i|\right)^p.$$

Z toho plyne, že pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \|x\|_\infty.$$

Tedy normy $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_\infty$ jsou na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní. Protože je ekvivalence norm skutečně relace ekvivalence, speciálně je tranzitivní, jsou $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_{p'}$ ekvivalentní na $\mathbb{R}^n$ pro libovolné $p, p' \in [1, \infty]$.

Na rozdíl od spojitosti zobrazení k definici *stejněměrné spojitosti* již potřebujeme metriku.

Definice 2.44 (Stejnoměrná spojitost): Buďte (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory. Zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ nazveme *stejněměrně spojitě* (na X), právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Samozřejmě zobrazení spojitě stejnoměrně je také spojitě. Spojitost je ale lokální vlastností zobrazení f , kdežto stejnoměrná spojitost je vlastnost globální. Množina, na které je zobrazení definováno/uvažováno hraje důležitou roli. Rozmyslete si rozdíl na následujících jednoduchých příkladech.

Příklad 2.24: Funkce $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ je spojitá, tj. spojitá v každém bodě intervalu $(0, 1)$, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.25: Funkce $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.26: Funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ je spojitá, ale není spojitá stejnoměrně.

Příklad 2.27: Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$ je spojitá stejnoměrně.

Další fundamentální pojem v analýze je *limita zobrazení*.

Definice 2.45 (Limita zobrazení vzhledem k množině, limita zobrazení): Nechť $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ je zobrazení mezi topologickými prostory, $\emptyset \neq A \subset X$ a x_0 hromadný bod A . Řekneme, že f má *limitu* $y \in Y$ pro $x \rightarrow x_0$ vzhledem k množině A , právě když

$$(\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in (H_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap A)(f(x) \in H_y).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y.$$

Je-li speciálně $A = X$, říkáme jen, že f má *limitu* $y \in Y$ pro $x \rightarrow x_0$ a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y.$$

Poznámka: Všimněte si, že limitu zobrazení definujeme pouze v *hromadném bodě* množiny A .

Opět je dobré si uvědomit, že speciálně pro funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je obecná definice limity ekvivalentní klasické ϵ - δ definici známé z prvního ročníku. Obecněji pro zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ mezi metrickými prostory má ϵ - δ definice limity

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

tvar

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Věta 2.46: Buď $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ a x_0 hromadný bod X . Potom je f spojitě v bodě x_0 , právě když

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Důkaz. Plyne okamžitě z příslušných definic. □

Limitu zobrazení a limitu posloupnosti dává v metrických prostorech do souvislosti Heineho věta.

Věta 2.47 (Heine): Buďte (X, ρ) , (Y, σ) metrické prostory, $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A'$ a $y \in Y$. Potom

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y,$$

právě když

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\})(x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y).$$

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$: Předpokládejme, že

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y$$

a uvažujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{x_0\}$ takovou, že $x_n \rightarrow x_0$. Zvolme $\epsilon > 0$. Z předpokladu plyne, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{x_0\}, \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon).$$

Protože $x_n \rightarrow x_0$, musí

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x_n, x_0) < \delta),$$

a proto je také

$$(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon).$$

Celkem tedy dostáváme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sigma(f(x_n), y) < \epsilon),$$

což znamená, že $f(x_n) \rightarrow y$.

Implikace $(\Leftarrow)$: Předpokládejme naopak, že *neplatí*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y.$$

Potom

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A \setminus \{x_0\})(\rho(x, x_0) < \delta \wedge \sigma(f(x), y) \geq \epsilon).$$

Volíme-li postupně v posledním výroku $\delta := 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, zkonstruujeme tak posloupnost bodů $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ s vlastnostmi

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sigma(f(x_n), y) \geq \epsilon$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. První vlastnost znamená, že $x_n \rightarrow x_0$ a druhá implikuje, že není pravda, že $f(x_n) \rightarrow y$. $\square$

2.4 Kompaktnost

Definice 2.48 (Otevřené pokrytí, podpokrytí): Buď (X, τ) topologický prostor. Systém otevřených množin $\mathcal{U} \subset \tau$ nazveme *otevřené pokrytí* X , právě když

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

Systém $\mathcal{U}' \subset \tau$ nazveme *podpokrytí* $\mathcal{U}$, právě když $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'$ je otevřené pokrytí X .

Příklad 2.28: Systém $\mathcal{U} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Systém $\{(-2n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je podpokrytí $\mathcal{U}$, kdežto systém $\{(-n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ není podpokrytí $\mathcal{U}$.

Definice 2.49 (Kompaktní prostor, kompaktní množina): Topologický prostor (X, τ) nazveme *kompaktní*, pokud každé otevřené pokrytí X , má konečné podpokrytí, tzn.

$$(\forall \mathcal{U} \text{ otevřené pokrytí } X)(\exists n \in \mathbb{N}, \exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}) \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \supset X \right).$$

Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *kompaktní*, je-li (A, τ_A) kompaktní jakožto topologický podprostor (X, τ) . Prázdnou množinu také řadíme mezi kompaktní množiny.

Příklad 2.29: Z definice ihned plyne, že každá konečná množina je kompaktní. Další příklad kompaktní množiny je uzavřený interval $[a, b]$ v $\mathbb{R}$ (s obvyklou topologií). Obecněji uzavřený n -interval $\times_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in \hat{n})(a_i \leq x_i \leq b_i)\}$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$. Důkaz tohoto tvrzení není triviální a dokážeme si ho až později.

Příklad 2.30: Prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní, neboť např. z otevřeného pokrytí $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nelze vybrat konečné podpokrytí $\mathbb{R}$. Podobně interval $(0, 1]$ není kompaktní množina, protože z otevřeného pokrytí $\{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $(0, 1]$ nelze vybrat konečné podpokrytí.

Nejprve si dokážeme několik obecných vlastností kompaktní množin. Začneme s tím, že uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.

Věta 2.50: Buď (X, τ) kompaktní topologický prostor a $A \subset X$ uzavřená. Potom A je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí A . Potom $\mathcal{U} \cup (X \setminus A)$ je otevřené pokrytí kompaktního prostoru X , a proto z něj lze vybrat konečné podpokrytí X . Tzn., že $\exists \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ konečné takové, že $\mathcal{U}' \cup (X \setminus A)$ je otevřené pokrytí X . Tedy $\mathcal{U}'$ je konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ množiny A . $\square$

Věta 2.51: Nechť (X, τ) je Hausdorffův prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom je A uzavřená.

Poznámka: Předpoklad, že (X, τ) je Hausdorffův, je podstatný. Příklad ilustrující neplatnost věty v T_1 -prostorech ukazuje Cvičení 2.34.

Důkaz Věty 2.51. Nechť A je kompaktní. Ukážeme, že $X \setminus A$ je otevřená. Pro $A = X$ je tvrzení triviální.

Nechť $A \neq X$ a $x \in X \setminus A$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\forall y \in A)(\exists H_x^{(y)}, H_y)(H_x^{(y)} \cap H_y = \emptyset),$$

kde $H_x^{(y)}$ označuje okolí x , které ovšem závisí na $y \in A$. Systém $\{H_y \mid y \in A\}$ je otevřené pokrytí A , neboť

$$A \subset \bigcup_{y \in A} H_y.$$

Jelikož je A kompaktní, existuje $n \in \mathbb{N}$ a body $y_1, \dots, y_n \in A$ tak, že $\{H_{y_1}, \dots, H_{y_n}\}$ je otevřené pokrytí A . Navíc máme

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x^{(y_i)} \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Označme

$$H_x := \bigcap_{i=1}^n H_x^{(y_i)}.$$

Potom H_x je okolí x takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(H_x \cap H_{y_i} = \emptyset).$$

Navíc

$$H_x \cap A \subset H_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^n H_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (H_x \cap H_{y_i}) = \emptyset,$$

neboli $H_x \subset X \setminus A$. □

Následuje ekvivalentní charakteristika kompaktnosti.

Věta 2.52: Topologický prostor (X, τ) je kompaktní, právě když každý systém *uzavřených* množin z X , jehož libovolný podsystém má neprázdný průnik, má neprázdný průnik, tzn.

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\mathcal{T}) \left((\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné}) \left(\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset \right).$$

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci pro větu obměněnou: (X, τ) je kompaktní, právě když

$$(\forall \mathcal{T} \subset c\mathcal{T}) \left(\bigcap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow (\exists \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ konečné}) \left(\bigcap \mathcal{F} = \emptyset \right) \right).$$

Označme si množiny systému $\mathcal{T} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina a $B_\alpha := X \setminus A_\alpha$. Podle de Morganových zákonů je

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \emptyset \Leftrightarrow X \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Je-li X kompaktní, potom $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i},$$

což je ekvivalentní

$$\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Opačnou implikaci dokážeme obdobně. □

Důsledek 2.53 (Cantor): Buď (X, τ) kompaktní topologický prostor, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost uzavřených neprázdných množin z X taková, že $A_{n+1} \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Důkaz. Buď $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$ konečná. Protože $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subset A_n)$ je

$$\bigcap_{n \in \mathcal{F}} A_n = A_{\max \mathcal{F}} \neq \emptyset$$

podle předpokladu. Aplikace Věty 2.52 nyní implikuje tvrzení. □

Naším dalším cílem je tzv. sekvenční kompaktnost. Důležitou roli budou hrát posloupnosti, které obsahují konvergentní podposloupnost. My se ale nejprve na chvíli zastavíme u obecnějšího pojmu *hromadná hodnota posloupnosti*.

Definice 2.54: (Hromadná hodnota posloupnosti) Buď (X, τ) topologický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X . Bod $x \in X$ nazveme *hromadná hodnota posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, právě když každé okolí x obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka: Pozor na rozdíl mezi pojmy hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hromadný bod množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$. Např. posloupnost s členy $x_n = (-1)^n$ má v $\mathbb{R}$ dvě hromadné hodnoty ± 1 , kdežto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} = \{-1, 1\}$ je množina dvou izolovaných bodů.

Věta 2.55: V kompaktním prostoru (X, τ) má každá posloupnost hromadnou hodnotu.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X . Definujme

$$B_n := \bigcup_{k \geq n} \{x_k\}$$

a $A_n := \overline{B_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $B_n \neq \emptyset$ a $B_n \subset B_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto také $A_n \neq \emptyset$ a $A_n \subset A_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Důsledku 2.53 je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Ukážeme, že libovolný bod

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

je hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Buď H_x libovolné okolí x . Protože

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x \in A_n)$$

je z definice uzávěru

$$(\forall n \in \mathbb{N})(H_x \cap B_n \neq \emptyset).$$

Z posledního plyne, že H_x musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jinak by muselo existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\forall n \geq n_0)(H_x \cap B_n = \emptyset)$. $\square$

Věta 2.56: V kompaktním Hausdorffově prostoru je posloupnost konvergentní, právě když má právě jednu hromadnou hodnotu.

Poznámka: Předpoklad kompaktnosti X je podstatný pro platnost implikace:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ má právě jednu hromadnou hodnotu} \quad \Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje,}$$

jak ukazuje jednoduchý příklad posloupnosti

$$x_n := \begin{cases} 1/n, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ n, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií.

Důkaz Věty 2.56. Pokud $x_n \rightarrow x$, plyne okamžitě z definice limity, že x je hromadná hodnota $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí proto ukázat, že x je jedinou hromadnou hodnotou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uvažujme libovolný $y \in X$, $y \neq x$. Potom axiom T_2 implikuje

$$(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset).$$

Protože H_x obsahuje všechny členy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ až na konečně mnoho výjimek, může H_y obsahovat pouze konečně mnoho členů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, a proto y není hromadná hodnota posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Předpokládejme naopak, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje. Z Věty 2.55 plyne, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Označme ji x . Protože x není limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje H_x tak, že doplněk $X \setminus H_x$ obsahuje ještě nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Množina $X \setminus H_x$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru X , a proto je podle Věty 2.50 také kompaktní. A tedy podle Věty 2.55 musí mít posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hromadnou hodnotu v množině $X \setminus H_x$. Celkem tedy má posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ alespoň dvě hromadné hodnoty. $\square$

Zamysleme se nyní krátce nad rozdílem pojmů:

1. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu.
2. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech nejsou výroky 1. a 2. ekvivalentní. Platí pouze implikace $2. \Rightarrow 1.$ (dokažte). Neplatnost opačné implikace ukazuje Cvičení 2.35. Nicméně v metrických prostorech už tvrzení 1. a 2. ekvivalentní jsou.

Věta 2.57: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ) . Potom $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu, právě když $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Vzhledem k diskuzi výše stačí ukázat jednu implikaci. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnou hodnotu $x \in X$. Jelikož pro každé $\epsilon > 0$ obsahuje okolí $B_x(\epsilon)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lze konvergentní podposloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konstruovat induktivně. V prvním kroku vybereme libovolně $x_{k_1} \in B_x(1)$ a v n -tém $x_{k_n} \in B_x(1/n)$ pro nějaké $k_n > k_{n-1}$. Takto můžeme postupovat pro každé $n \geq 2$ a vybereme tak podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy splňují

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n} \right).$$

Odtud plyne $x_{k_n} \rightarrow x$. □

Definice 2.58 (Sekvenčně kompaktní prostor): Topologický prostor (X, τ) nazveme *sekvenčně kompaktní*, pokud každá posloupnost v X má konvergentní podposloupnost.

V obecných topologických prostorech není kompaktní prostor sekvenčně kompaktní a neplatí ani opačná implikace. Ukázat příklady topologických prostorů, které jsou kompaktní, ale ne sekvenčně kompaktní a naopak, které jsou sekvenčně kompaktní, ale ne kompaktní, už vyžaduje hlubší znalosti z obecné topologie, které jsou nad rámec tohoto kurzu, a proto je neuvedeme. Čtenář je může najít např. v knize [14].

Naším cílem bude ukázat, že v *metrických prostorech* již kompaktnost a sekvenční kompaktnost znamená totéž. Tato věta má v matematické analýze hluboký význam.

Věta 2.59: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když je sekvenčně kompaktní.

Důkaz. Předpokládejme, že (X, ρ) je kompaktní. Podle Věty 2.55, má každá posloupnost v X hromadnou hodnotu, což v metrickém prostoru znamená, že každá posloupnost má konvergentní podposloupnost, viz Věta 2.57.

Půjde tedy zejména o to, dokázat opačnou implikaci. To provedeme prostřednictvím dvou pomocných tvrzení.

Lemma 2.60 (Lebesgue): Buď (X, ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí X . Potom existuje $\epsilon > 0$ takové, že každá ϵ -koule je obsažena alespoň v jedné z pokrývajících množin U_α , tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Důkaz Lemma 2.60. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in X)(\forall \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \not\subset U_\alpha).$$

Volíme-li $\epsilon = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro její členy platí

$$(\forall \alpha \in I)(\forall n \in \mathbb{N})(B_{x_n}(1/n) \not\subset U_\alpha). \quad (15)$$

Jelikož je (X, ρ) sekvenčně kompaktní, posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limitu označme x . Protože $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X , $(\exists \alpha_0 \in I)(x \in U_{\alpha_0})$. Množina U_{α_0} je otevřená, a proto

$$(\exists r > 0)(B_x(r) \subset U_{\alpha_0}).$$

Z toho, že $x_{k_n} \rightarrow x$, plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x, x_{k_n}) < r/2).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme také předpokládat, že n_0 je dost velké, aby platilo

$$(\forall n \geq n_0) \left(\frac{1}{n} < \frac{r}{2} \right).$$

Z posledních dvou vlastností plyne inkluze $B_{x_n}(1/k_n) \subset B_x(r/2)$ pro každé $n \geq n_0$, neboť je-li $y \in B_{x_n}(1/k_n)$, potom

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n} + \frac{r}{2} < r,$$

a proto $y \in B_x(r/2)$. Odtud vidíme, že

$$(\forall n \geq n_0) (B_{x_{k_n}}(1/k_n) \subset B_x(r/2) \subset U_{\alpha_0}).$$

Celkem jsme tedy našli $\alpha_0 \in I$ a index $m \in \mathbb{N}$, např. $m := k_{n_0}$, takové, že $B_{x_m}(1/m) \subset U_{\alpha_0}$, což je spor s (15). $\square$

Lemma 2.61 (Borel): Buď (X, ρ) sekvenčně kompaktní metrický prostor. Potom je X tzv. *totálně omezený*, tj.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \dots, x_n) \left(X \subset \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}(\epsilon) \right).$$

Důkaz Lemma 2.61. Buď $\epsilon > 0$. Zvolme libovolně $x_1 \in X$. Je-li $X \setminus B_{x_1}(\epsilon) \neq \emptyset$, zvolíme opět libovolně $x_2 \in X \setminus B_{x_1}(\epsilon)$. Je-li $X \setminus (B_{x_2}(\epsilon) \cup B_{x_1}(\epsilon)) \neq \emptyset$, zvolíme $x_3 \in X \setminus (B_{x_1}(\epsilon) \cup B_{x_2}(\epsilon))$, atd. Tato procedura musí po konečně mnoha krocích skončit, tj.

$$(\exists n \in \mathbb{N}) \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}(\epsilon) = \emptyset \right),$$

z čehož vyplývá tvrzení lemma. Kdyby totiž procedura neskončila po konečně mnoha krocích, zkonstruovali bychom tak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejíž dva libovolné členy s různým indexem jsou od sebe vzdáleny alespoň o ϵ , tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)(\rho(x_m, x_n) \geq \epsilon).$$

Taková posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost, což by bylo ve sporu se sekvenční kompaktností X . $\square$

Nyní můžeme dokázat implikaci:

$$(X, \rho) \text{ sekvenčně kompaktní} \Rightarrow (X, \rho) \text{ kompaktní.}$$

Uvažujme otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sekvenčně kompaktního prostoru (X, ρ) . Podle Lemma 2.60

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)(B_x(\epsilon) \subset U_\alpha).$$

Navíc podle Lemma 2.61

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists x_1, \dots, x_n) \left(X \subset \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}(\epsilon) \right).$$

Označíme-li tedy $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ ty indexy, pro které platí, že

$$(\forall i \in \hat{n})(B_{x_i}(\epsilon) \subset U_{\alpha_i}),$$

je systém $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ konečné podpokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru X . □

Všimněte si, že z Lemma 2.61 a právě dokázané Věty 2.59 vyplývá, že kompaktní podmnožina metrického prostoru musí být omezená (dokonce totálně omezená). Připomeneme-li ještě Větu 2.51 dostáváme následující tvrzení.

Věta 2.62: Buď (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$ kompaktní. Potom A je omezená a uzavřená.

Poznámka: Opačná implikace neplatí a to ani pokud omezenost nahradíme totální omezeností, viz Cvičení 2.38. Ukazuje se, že místo uzavřenosti, zde klíčovou úlohu hraje tzv. úplnost, o které bude řeč až v následující kapitole, viz Věta 2.81. Pokud se ovšem omezíme na konečnědimenzionální normované prostory jsou kompaktní množiny právě ty současně omezené a uzavřené, viz Věta 2.73.

V další části budeme studovat, jaké důsledky má kompaktnost pro spojitá zobrazení.

Věta 2.63: Buď $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ spojitě a (X, τ_X) kompaktní. Potom je $f(X)$ kompaktní.

Důkaz. Buď $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otevřené pokrytí $f(X)$. Podle Věty 2.39 jsou vzory $f^{-1}(U_\alpha)$ otevřené pro každé $\alpha \in I$. Dále z inkluze

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

plyne

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha).$$

Tedy $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí X . Protože je X kompaktní, existuje konečné podpokrytí, tzn. $\exists n \in \mathbb{N}$ a $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ tak, že

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i}),$$

neboli

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

To znamená, že $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ je konečné podpokrytí $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ prostoru $f(X)$. □

Jednoduché avšak velmi zásadní pozorování je následující věta. Připomeňme, že $\mathbb{R}$ uvažujeme s obvyklou topologií, není-li řečeno jinak.

Věta 2.64: Buď f spojitá reálná funkce na kompaktním prostoru (X, τ) , tedy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Potom f nabývá svého infima a suprema na X , tzn.

$$(\exists x_{\min}, x_{\max} \in X) \left(f(x_{\min}) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in X} f(x) \right).$$

Důkaz. Podle Věty 2.63 je $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompaktní. Z Věty 2.62 víme, že $f(X)$ je omezená a uzavřená. Nyní si stačí uvědomit, že pro libovolnou omezenou a uzavřenou množinu $A \subset \mathbb{R}$ plyne z definice infima a suprema, že $\inf A \in A$ a $\sup A \in A$. Pro $A = f(X)$ tak dostaneme tvrzení věty. □

Spojitosť a stejnoměrná spojitost jsou na kompaktních metrických prostorech totožné pojmy.

Věta 2.65 (Cantor): Buď $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitě zobrazení mezi metrickými prostory a (X, ρ) kompaktní. Potom f je spojitě stejnoměrně.

Důkaz. Je třeba dokázat, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

Důkaz provedeme sporem. Tedy předpokládejme

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta)(\sigma(f(x), f(y)) \geq \epsilon).$$

Položíme-li $\delta = 1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$, dostaneme tak posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon \right)$$

Jelikož je X kompaktní, Věta 2.59 implikuje, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limitu si označme x . Vlastnost $(\forall n \in \mathbb{N})(\rho(x_n, y_n) < 1/n)$ implikuje, že také $y_{k_n} \rightarrow x$. Ze spojitosti f potom dostaneme, že $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$ a $f(y_{k_n}) \rightarrow f(x)$, což je ve sporu s vlastností

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \epsilon).$$

□

Cílem poslední části výkladu věnovanému kompaktnosti bude ukázat, že na *konečnědimenzionálním* normovaném prostoru je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená. Důležitou ingrediencí pro odvození této věty je kompaktnost uzavřeného n -intervalu $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Jako první krok si dokážeme, že uzavřený interval $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. Tato věta se někdy též označuje jako Heineova–Borelova, my si ale toto označení necháme pro větu mnohem obecnější.

Lemma 2.66: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $[a, b]$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $[a, b]$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ má konečné podpokrytí.

Definujme množiny

$$S := \{x \in [a, b] \mid \text{interval } [a, x] \text{ je pokryt konečně mnoha množinami z } \mathcal{U}\}.$$

Jistě $a \in S$, neboť množinu $\{a\}$ je pokryta jedinou množinou z $\mathcal{U}$, a tedy $S \neq \emptyset$. Označme $s := \sup S$. Zřejmě $a \leq s \leq b$. Ukážeme, že $s \in S$ a $s = b$, z čehož už bude plynout existence konečného podpokrytí $\mathcal{U}$ intervalu $[a, b]$.

Bod s musí být pokryt nějakou množinou $V \in \mathcal{U}$. Protože je V otevřená, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset V$. Bod $s - \epsilon$ není horní závora S , a proto musí existovat $y \in (s - \epsilon, s]$ takové, že $y \in S$. Tzn., že interval $[a, y]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Označme si je $U_1, \dots, U_n$.

Uvažujme libovolné $z \in [a, b]$ takové, že $y \leq z < s + \epsilon$. Potom

$$[a, z] \subset [a, y] \cup (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \cup V.$$

Tzn., že $[a, z]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$, neboli $z \in S$. Z toho speciálně vyplývá, že $s \in S$ a také, že $s = b$, jinak by s nebyla horní závora S . $\square$

Abychom zobecnili předchozí větu do prostoru $\mathbb{R}^n$, musíme nejprve zavést tzv. *produktovou topologii* na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů. Tuto topologii lze zavést i na kartézském součinu nekonečně mnoha topologických prostorů. V našem výkladu to ale nebudeme potřebovat.

Definice 2.67 (Produktová topologie): Buďte $n \in \mathbb{N}$ a $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ topologické prostory. *Produktová topologie* $\tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_n$ na kartézském součinu množin $X_1 \times \dots \times X_n$ je topologie určená bází

$$\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \dots, A_n \in \tau_n\}.$$

Poznámka: Korektnost definice produktové topologie, tedy že systém $\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_1 \in \tau_1, \dots, A_n \in \tau_n\}$ skutečně určuje topologii na $X_1 \times \dots \times X_n$ plyne z Věty 2.15 (ověřte).

Není-li řečeno jinak uvažujeme na kartézském součinu konečně mnoha topologických prostorů topologii produktovou. Prostor $\mathbb{R}^n$ lze chápat jako kartézský součin n kopií $\mathbb{R}$. Obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ indukovaná euklidovskou metrikou a produktová topologie určená obvyklou topologií na $\mathbb{R}$ jsou totožné, viz Cvičení 2.42. Následující tvrzení je speciální případ tzv. *Tychonovovy věty*, která platí i pro nekonečný kartézský součin topologických prostorů.

Věta 2.68: Kartézský součin konečně mnoha kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.

Důkaz. Důkaz stačí provést pro dva kompaktní prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) . Tvrzení pro libovolný konečný počet prostorů pak dokážeme snadno indukcí (rozmyslete).

Nejprve si dokážeme jedno pomocné tvrzení, tzv. *tubulární lemma*.

Lemma 2.69: Budte (X, τ_X) , (Y, τ_Y) topologické prostory, $K \subset Y$ kompaktní a $U \subset X \times Y$ otevřená. Potom je množina

$$V := \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\}$$

otevřená v X .

Důkaz Lemma 2.69. Nechť $x \in V$. Protože je U otevřená, máme

$$(\forall y \in K)(\exists A_y \in \tau_X, B_y \in \tau_Y)((x, y) \in A_y \times B_y \subset U).$$

Systém $\{B_y \mid y \in K\}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K , a proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists y_1, \dots, y_n \in K)(K \subset B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}).$$

Označme

$$H_x := A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$$

Zřejmě $x \in H_x \in \tau_X$. Dále je také

$$H_x \times K \subset \bigcup_{i=1}^n (H_x \times B_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_{y_i} \times B_{y_i}) \subset U,$$

a tedy $H_x \subset V$. Dokázali jsme, že libovolný bod z V leží ve V i s nějakým svým okolím, a proto je V otevřená. $\square$

Nyní se vrátíme k samotnému důkazu Věty 2.68. Předpokládejme, že (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou kompaktní topologické prostory a $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí $X \times Y$.

Bud' $x \in X$ fixní. Snadno se ověří, že zobrazení $f_x : Y \rightarrow X \times Y : y \mapsto (x, y)$ je spojitě, a proto je podle Věty 2.63 množina $f_x(Y) = \{x\} \times Y$ kompaktní. Proto

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists U_1, \dots, U_n)(\{x\} \times Y \subset U_1 \cup \dots \cup U_n).$$

Označme

$$V_x := \{x' \in X \mid \{x'\} \times Y \subset U_1 \cup \dots \cup U_n\}.$$

Potom $x \in V_x$ a podle Lemma 2.69 je V_x otevřená.

Systém $\{V_x \mid x \in X\}$ je tedy otevřené pokrytí X . Z kompaktnosti X plyne

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists x_1, \dots, x_m \in X)(X \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}).$$

Potom

$$X \times Y \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \times Y.$$

Z předchozího odstavce plyne, že každá z množin $V_{x_i} \times Y$, kde $i \in \hat{m}$, je pokryta konečně mnoha množinami z $\mathcal{U}$. Sjednocením všech těchto množin dostaneme konečné podpokrytí $\mathcal{U}$ prostoru $X \times Y$. $\square$

Kombinací Lemma 2.66 a Věty 2.68 dostaneme okamžitě následující důsledek.

Důsledek 2.70: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ takové, že $a_i < b_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Potom $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$ je kompaktní podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nyní si ukážeme důležitou větu, ze které plyne, že všechny normy na *konečnědimenzionálním* lineárním prostoru indukují tutéž topologii. Tento fakt vzápětí použijeme v důkazu Heineovy–Borelovy věty. Nezávisle na tom má tato věta zásadní význam v analýze funkcí více proměnných.

Věta 2.71: Libovolné dvě normy na lineární prostoru *konečné dimenze* jsou ekvivalentní.

Poznámka: Větu dokážeme pro lineární prostory nad $\mathbb{R}$. Je-li tělesem $\mathbb{C}$, postupuje se podobně. Detaily přenecháme čtenáři.

Důkaz Věty 2.71. Buď V_n lineární prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$. Ve V_n zvolme bázi $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a definujme normu

$$\|x\|_{\mathcal{X}, \infty} := \max_{i \in \hat{n}} |x_i^\#(x)|, \quad x \in V_n,$$

kde $x_i^\#(x)$ je i -tá souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ (ověřte, že jde skutečně o normu na V_n).

Uvažujme dále nějakou (libovolnou) normu $\|\cdot\|$ na V_n . Ukážeme, že

$$(\exists c, \tilde{c} > 0)(\forall x \in V_n) (c\|x\|_{\mathcal{X}, \infty} \leq \|x\| \leq \tilde{c}\|x\|_{\mathcal{X}, \infty}).$$

Tedy že normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_{\mathcal{X}, \infty}$ na V_n jsou ekvivalentní. Protože je relace ekvivalence norem tranzitivní, plyne odtud, že také libovolné dvě normy na V_n musí být ekvivalentní.

Jedna nerovnost plyne rovnou z obecných vlastností normy, neboť pro $x \in V_n$ máme

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i^\#(x) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^\#(x)| \|x_i\| \leq \max_{j \in \hat{n}} |x_j^\#(x)| \sum_{i=1}^n \|x_i\| = \tilde{c} \|x\|_{\mathcal{X}, \infty},$$

kde jsme označili

$$\tilde{c} := \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Tím je jedna nerovnost dokázána. Navíc z odhadů výše také plyne, že je identické zobrazení $\text{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X}, \infty}) \rightarrow (V_n, \|\cdot\|)$ spojitě.

K důkazu druhé nerovnosti budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.72: Množina

$$S := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} = 1\}$$

je kompaktní podmnožina $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$.

Důkaz Lemma 2.72. Nejprve uvažme zobrazení $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow V_n$ definované vztahem

$$\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

pro každé $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Protože

$$\|\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i \in \hat{n}} |\alpha_i| = \|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_{\infty},$$

je zobrazení Ψ , jakožto zobrazení z $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ do $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, spojitý.

Zřejmě

$$\|\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_{\mathcal{X},\infty} = \max_{i \in \hat{n}} |\alpha_i| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [-1, 1]^n,$$

z čehož plyne

$$\Psi([-1, 1]^n) = \overline{B} := \{x \in V_n \mid \|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq 1\}.$$

Podle Důsledku 2.70 je množina $[-1, 1]^n$ kompaktní v prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$, a proto je její spojitý obraz $\overline{B} = \Psi([-1, 1]^n)$ kompaktní v $(V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty})$, viz Věta 2.63.

Abychom ukázali také kompaktnost množiny S , stačí nyní dokázat, že S je uzavřená podmnožina $\overline{B}$ a aplikovat Větu 2.50. Zřejmě $S \subset \overline{B}$. Připomeneme-li si, že je norma spojitá; přesněji v tomto případě zobrazení $f : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definované vztahem

$$f(x) := \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}$$

je spojitý a navíc $S = f^{-1}(\{1\})$, vyplývá uzavřenost S z uzavřenosti množiny $\{1\}$ a Věty 2.39. $\square$

Připomeňme, že identita $\text{id} : (V_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty}) \rightarrow (V_n, \|\cdot\|)$ je spojitý zobrazení. Podle Věty 2.64 musí id nabývat svého minima na kompaktní množině S , tzn., že existuje $y_{\min} \in S$ takové, že

$$(\forall y \in S)(\|y\| \geq c),$$

kde jsme označili $c := \|y_{\min}\|$. Všimněte si, že $c > 0$, tedy $c \neq 0$, neboť $y_{\min} \neq 0$, protože $0 \notin S$.

Nyní je-li $0 \neq x \in V_n$, je vektor

$$y := \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \in S,$$

a proto

$$c \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X},\infty}} \right\|,$$

neboli

$$c\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq \|x\|.$$

$\square$

Nyní si konečně můžeme ukázat, že v konečnědimenzionálním normovaném prostoru lze implikaci ve Větě 2.62 obrátit.

Věta 2.73 (Heine–Borel): V normovaném prostoru *konečné dimenze* je množina kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro lineární prostor nad reálným tělesem. Buď tedy $(V_n, \|\cdot\|)$ normovaný prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V_n = n \in \mathbb{N}$ a $A \subset V_n$. Jelikož máme Větu 2.62, stačí dokázat implikaci:

$$A \text{ omezená a uzavřená} \quad \Rightarrow \quad A \text{ kompaktní.}$$

Ukážeme, že se stačí omezit na prostor $\mathbb{R}^n$. Buď $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ báze V_n a $\Phi_{\mathcal{X}} : V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ souřadnicový izomorfismus

$$\Phi_{\mathcal{X}}(x) := (x_1^{\#}(x), \dots, x_n^{\#}(x)), \quad x \in V_n.$$

Zobrazení $\Phi_{\mathcal{X}}$ je bijekce a navíc je spojitě i se svojí inverzí jako zobrazení mezi V_n a $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. To vyplývá z Věty 2.71 a vztahu

$$\|\Phi_{\mathcal{X}}(x)\|_{\infty} = \max_{i \in \hat{n}} |x_i^{\#}(x)| = \|x\|_{\mathcal{X}, \infty},$$

který platí pro každé $x \in V_n$, kde $\|\cdot\|_{\mathcal{X}, \infty}$ je norma na V_n (jako v důkazu Věty 2.71). Jinými slovy $\Phi_{\mathcal{X}}$ je homeomorfismus z V_n do $\mathbb{R}^n$ s libovolnými normami. Odtud plyne, že

$$A \text{ je kompaktní} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je kompaktní,}$$

viz Věta 2.63 a

$$A \text{ je uzavřená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je uzavřená,}$$

viz Věta 2.39. Platí také

$$A \text{ je omezená} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{X}}(A) \text{ je omezená}$$

(ověřte).

Stačí tedy uvažovat speciální případ $V_n = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená. Z omezenosti A vyplývá, že A musí být podmnožinou nějakého n -intervalu $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, který je kompaktní podle Důsledku 2.70. Protože je A navíc uzavřená, plyne z Věty 2.50, že A je kompaktní. $\square$

Následující tvrzení je přímým důsledkem předchozích vět. Pro jeho důležitost ho ovšem zformulujeme jako větu. Toto tvrzení jako fundamentální vlastnost $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bylo nezávisle na sobě objeveno B. Bolzanem a K. Weierstrassem.

Věta 2.74 (Bolzano–Weierstrass): Každá *omezená* posloupnost v normovaném prostoru *konečné dimenze* má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z nějakého konečnědimenzionálního normovaného prostoru. Potom je množina

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$$

omezená. Jelikož je A podmnožina normovaného prostoru, je i její uzávěr $\overline{A}$ omezený (ověřte). Podle Heinovy–Borelovy věty 2.73 je $\overline{A}$ kompaktní. Dále podle Věty 2.59 je $\overline{A}$ sekvenčně kompaktní, a proto posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy jsou z $\overline{A}$, má konvergentní podposloupnost. $\square$

Poznámka: Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze, viz Cvičení 2.43

2.5 Úplnost

Celá tato část se bude týkat pouze *metrických prostorů*.

Definice 2.75 (Cauchyovská posloupnost): Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (X, ρ) nazveme *cauchyovskou*, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_m, x_n) < \epsilon)$$

nebo ekvivalentně

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon).$$

Lemma 2.76: Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v metrickém prostoru (X, ρ) . Potom platí:

1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská.
2. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je i libovolná její podposloupnost cauchyovská.
3. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak je omezená.
4. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská a má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $x_{k_n} \rightarrow x$ pro nějaké $x \in X$, potom $x_n \rightarrow x$.

Důkaz. 1. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, potom existuje $x \in X$ tak, že $x_n \rightarrow x$. Z definice konvergence plyne, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left(\rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Zvolme tedy $\epsilon > 0$. Potom s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro libovolné $m, n \geq n_0$ odhad

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

2. Tvrzení plyne přímo z definice cauchyovské posloupnosti.

3. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Definice cauchyovské posloupnosti pro $\epsilon = 1$ implikuje existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že všechny členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, až na konečně mnoho výjimek, leží v kouli $B_{x_{n_0}}(1)$. Taková posloupnost je nutně omezená.

4. Předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská a $x_{k_n} \rightarrow x$. Připomeňme, že posloupnost indexů k_n u vybrané posloupnosti je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a proto $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Protože je $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská, plyne z definice, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) \left(\rho(x_n, x_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Dále z předpokladu $x_{k_n} \rightarrow x$ máme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2) \left(\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Nyní stačí ke zvolenému $\epsilon > 0$ položit $n_0 := \max(n_1, n_2)$ a z výroků výše dostaneme, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

neboli $x_n \rightarrow x$. □

Obrácená implikace z 1. tvrzení Lemma 2.76 obecně neplatí. Metrické prostory, kde tato implikace platí pro každou posloupnost, se nazývají *úplné*.

Definice 2.77 (Úplný prostor, úplná množina): Metrický prostor (X, ρ) nazveme *úplný*, právě když každá cauchyovská posloupnost z X je konvergentní (tzn., že má v X limitu). Podobně množinu $A \subset X$ nazveme *úplnou*, právě když každá cauchyovská posloupnost z A má v A limitu.

Definice 2.78 (Banachův prostor, Hilbertův prostor): Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův prostor*. Úplný pre-Hilbertův prostor se nazývá *Hilbertův prostor*.

Příklad 2.31: Normovaný prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný. Toto tvrzení není nic jiného než jedna implikace Bolzanovy–Cauchyovy podmínky konvergence reálné posloupnosti:

$$x_n \rightarrow x \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_m, x_n) < \epsilon),$$

kterou znáte z 1. ročníku. Nicméně my si na tomto místě můžeme tuto implikaci snadno odvodit z již dokázaných vět. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská posloupnost v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, je $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ omezená podle Lemma 2.76. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty 2.74 má $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní podposloupnost a opět podle Lemma 2.76 musí být i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní.

Příklad 2.32: Prostory $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, kde $\|\cdot\|$ je libovolná norma na $\mathbb{R}^n$, jsou úplné. Toto tvrzení lze dokázat s využitím úplnosti $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ a toho, že všechny normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní. Detailní odvození je přenecháno čtenáři jako Cvičení 2.44.

Další příklad ilustruje to, že úplnost je metrická vlastnost. Na $\mathbb{R}$ zvolíme jinou metriku než v Příkladu 2.31 a výsledný prostor již nebude úplný.

Příklad 2.33: Zobrazení $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované pro $x, y \in \mathbb{R}$ vztahem

$$\rho(x, y) := |\arctg x - \arctg y|$$

je metrika na $\mathbb{R}$ (ověřte). Ukážeme, že metrický prostor $(\mathbb{R}, \rho)$ není úplný.

Uvažujme posloupnost s členy $x_n := n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_{n+p}, x_n) = \arctg(n+p) - \arctg n \leq \frac{\pi}{2} - \arctg n.$$

Jelikož výraz napravo jde k nule pro $n \rightarrow \infty$, je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $(\mathbb{R}, \rho)$. Na druhou stranu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní v $(\mathbb{R}, \rho)$. Kdyby byla konvergentní, muselo by existovat $x \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

což znamená

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg n - \arctg x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x.$$

Rovnost $\arctg x = \pi/2$ ovšem neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.34: Prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ není úplný, neboť v něm existují cauchyovské posloupnosti, které nemají limitu v $\mathbb{Q}$. Stačí vzít jakoukoliv posloupnost racionálních čísel, která konverguje k číslu iracionálnímu jako je např.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 2.35: Prostor $(\mathbb{Q}, \rho_d)$, kde ρ_d je diskretní metrika, je úplný. Stačí si rozmyslet, že cauchyovské posloupnosti v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$ jsou právě ty posloupnosti, které jsou od jistého indexu konstantní. Takové posloupnosti jsou konvergentní v $(\mathbb{Q}, \rho_d)$.

Následující dvě věty ukazují, že je jistý vztah mezi uzavřeností a úplností množiny.

Věta 2.79: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$ úplná množina. Potom je A uzavřená.

Důkaz. Nechť $x \in \overline{A}$. Potom podle tvrzení 2. Věty 2.33 existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v A taková, že $x_n \rightarrow x$. Podle tvrzení 1. Lemma 2.76 je konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. A protože je A úplná, má $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu v A , tj. $x \in A$. Tedy $A = \overline{A}$. $\square$

Věta 2.80: Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $A \subset X$. Je-li A uzavřená, pak je A úplná.

Důkaz. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost z A . Úplnost (X, τ) implikuje, že je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tzn. $\exists x \in X$ a $x_n \rightarrow x$. Z uzavřenosti A plyne, že limita $x \in A$. Celkem tedy má libovolná cauchyovská posloupnost z A limitu v A , a proto je A úplná. $\square$

Dokážeme si ještě jednu větu o vztahu kompaktnosti a úplnosti metrického prostoru. Z toho, co už víme, snadno vyplývá že (X, ρ) kompaktní metrický prostor je úplný. Stačí si uvědomit, že ze sekvenční kompaktnosti (X, ρ) , viz Věta 2.59, plyne, že každá cauchyovská posloupnost v (X, ρ) má konvergentní podposloupnost a aplikovat tvrzení 4. Lemma 2.76. Naopak to samozřejmě neplatí, jak ilustruje např. prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, který je úplný, ale ne kompaktní. Ani dodatečný předpoklad omezenosti (X, ρ) by ještě nestačil. Klíčem k opačné implikaci je omezenost totální, viz Lemma 2.61.

Věta 2.81: Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, když je (X, ρ) úplný a totálně omezený.

Důkaz. Je-li (X, ρ) kompaktní, potom z diskuze výše už víme, že je úplný. Totální omezenost kompaktního prostoru (X, ρ) plyne přímo z Věty 2.59 a Lemma 2.61. Je třeba tedy dokázat implikaci opačnou.

Předpokládejme, že (X, ρ) je úplný a totálně omezený. V pomocném tvrzení níže ukážeme, že z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že každá posloupnost v (X, ρ) má cauchyovskou podposloupnost. Úplnost (X, ρ) implikuje, že tato cauchyovská podposloupnost je konvergentní. To znamená, že je prostor (X, ρ) sekvenčně kompaktní, a tedy i kompaktní, jak víme z Věty 2.59.

Zbývá nám tedy dokázat následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.82: V totálně omezeném metrickém prostoru (X, ρ) má každá posloupnost cauchyovskou podposloupnost.

Důkaz Lemma 2.82. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X . Z totální omezenosti (X, ρ) plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, lze X pokrýt konečně mnoha koulemi o poloměru 2^{-n} , jejichž středy jsou v množině, kterou označíme S_n . Tedy

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists S_n \subset X \text{ konečná}) \left(X = \bigcup_{y \in S_n} B_y(2^{-n}) \right)$$

Pro $n = 1$ musí existovat $y_1 \in S_1$ takové, že koule $B_{y_1}(2^{-1})$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme si jejich indexy

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_{y_1}(2^{-1})\}.$$

Podobně, je-li $n = 2$, existuje $y_2 \in S_2$ takové, že koule $B_{y_2}(2^{-2})$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n \in A_1}$ a označme

$$A_2 := \{n \in A_1 \mid x_n \in B_{y_2}(2^{-2})\}.$$

Všimněte si, že $A_2 \subset A_1$. Tímto způsobem najdeme $y_k \in S_k$ a nekonečné množiny

$$A_k := \{n \in A_{k-1} \mid x_n \in B_{y_k}(2^{-k})\}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ (zde je $A_0 := \mathbb{N}$). Platí $A_{k+1} \subset A_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Nyní zvolme ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $k_n \in A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Pro $n, p \in \mathbb{N}$ z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) \leq \rho(x_{k_n}, y_n) + \rho(y_n, x_{k_{n+p}})$$

Protože $k_n \in A_n$, je $\rho(x_{k_n}, y_n) < 2^{-n}$. Podobně z $k_{n+p} \in A_{n+p} \subset A_n$, plyne $\rho(y_n, x_{k_{n+p}}) < 2^{-n}$. Odtud dostáváme

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

z čehož už jednoduše plyne, že posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. $\square$

□

V poslední části kapitoly o úplnosti si dokážeme Banachovu větu o pevném bodě kontrahujícího zobrazení.

Definice 2.83 (Kontrahující zobrazení): Buď (X, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ nazýváme *kontrahující*, právě když

$$(\exists q \in [0, 1))(\forall x, y \in X) (\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)).$$

Poznámka: Všimněte si, že kontrahující zobrazení je spojitě.

Věta 2.84 (Banachova o pevném bodě): Nechť (X, ρ) je *úplný* metrický prostor a $f : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ kontrahující zobrazení. Potom má f právě jeden *pevný bod*, tzn.

$$(\exists_1 x \in X)(f(x) = x).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci pevného bodu f . Zvolme libovolně $x_0 \in X$ a definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentně podle předpisu

$$x_n := f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n)$$

dostaneme indukcí, že

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n \rho(x_0, x_1).$$

Potom s využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme pro $n, p \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{i=1}^p \rho(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{i=1}^p q^{n+i-1} \leq \rho(x_0, x_1) q^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\ &= \rho(x_0, x_1) \frac{q^n}{1-q}, \end{aligned}$$

kde jsme využily podstatný předpoklad $q \in [0, 1)$. Odtud k libovolnému $\epsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\rho(x_0, x_1) \frac{q^{n_0}}{1-q} < \epsilon.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$, a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Prostor (X, ρ) je úplný, a proto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Protože je f spojitě, neboť je kontrahující, máme také $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Nyní stačí provést limitní přechod v rovnici $x_n := f(x_{n-1})$ pro $n \rightarrow \infty$ a dostaneme rovnost $x = f(x)$. Bod x je tedy pevným bodem f .

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že existují $x, y \in X$ takové, že $x = f(x)$ a $y = f(y)$. Potom

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Je-li $x \neq y$, potom $\rho(x, y) \neq 0$ a poslední nerovnost implikuje $q \geq 1$, což je ve sporu s předpokladem. Proto musí být $x = y$. □

Banachova věta o pevném bodě má v matematice mnoho aplikací. Také idea důkazu je pro aplikace podstatná. Všimněte si, že z důkazu plyne, že „iniciační bod“ x_0 lze volit zcela libovolně a přesto se iterováním

$$f^{(n)}(x_0) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\text{krát}}(x_0)$$

limitně blížíme k pevnému bodu zobrazení f . Tato jednoduchá metoda se používá např. v iteračních metodách numerické analýzy nebo k důkazu existence a jednoznačnosti řešení různorodých úloh (parciálně diferenciální rovnice, integrální rovnice, nelineární problémy), kdykoliv můžeme studovaný problém formulovat jako rovnost $f(x) = x$ s kontrahujícím zobrazením f na úplném prostoru.

Ne vždy ale pracujeme s kontrahujícím zobrazením. Dnes existuje řada zobecnění či rozšíření Banachovy věty o pevném bodě a také další věty implikující existenci pevného bodu zobrazení. Spolu s Banachovou větou patří mezi nejznámější takové výsledky ještě *Brouwerova věta o pevném bodě*. Jelikož je tato věta jedním z nejdůležitějších výsledků analýzy a topologie 1. poloviny 20. století, větu si zde zformulujeme. Nicméně její důkaz je velice netriviální a zcela jistě nad rámec tohoto kurzu, a proto jej neuvádíme. Lze ho najít např. v [1].

Věta 2.85 (Brouwerova o pevném bodě): Buď $(V, \|\cdot\|)$ normovaný konečnědimenzionální prostor (nad $\mathbb{R}$) a $K \subset V$ kompaktní a konvexní množina. Potom každé *spojité* zobrazení $f : K \rightarrow K$ má pevný bod.

Poznámka: Připomeňme, že množina $K \subset V$ je konvexní, právě když

$$(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0, 1])(\lambda x + (1 - \lambda)y \in K).$$

Pevný bod zobrazení z Brouwerovy věty nemusí být jediný. Zobecnění Brouwerovy věty, kde je předpoklad konečné dimenze nahrazen úplností $(V, \|\cdot\|)$, je známé jako *Schauderova věta o pevném bodě*.

2.6 Souvislost

Nakonec se ještě jednou vrátíme k obecným topologickým prostorům a prostudujeme některé vlastnosti týkající se tzv. souvislosti prostorů.

Definice 2.86 (Obojetná množina, souvislý prostor): Buď (X, τ) topologický prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá *obojetná*, je-li současně otevřená i uzavřená. Prostor (X, τ) nazveme *souvislý*, právě když jediné obojetné podmnožiny X jsou $\emptyset$ a X .

Definice 2.87 (Souvislá množina): Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *souvislou*, právě když (A, τ_A) je souvislý jakožto topologický podprostor (X, τ) . Prázdná množina je souvislá.

Příklad 2.36: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií τ je souvislý, ale důkaz tohoto tvrzení uvedeme později, viz Lemma 2.91. Množina $A = [0, 1) \cup (2, 3]$ není souvislá, neboť množiny $[0, 1)$ a $(2, 3]$ jsou obojetné v topologii podprostoru (A, τ_A) .

Příklad 2.37: Je-li X množina obsahující alespoň 2 prvky a τ_d diskrétní topologie na X , potom (X, τ_d) není souvislý, neboť každá podmnožina X je obojetná.

Souvislost prostoru lze vyjádřit několika alternativními způsoby, viz také Cvičení 2.47.

Lemma 2.88: Buď (X, τ) topologický prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. (X, τ) není souvislý,
2. $(\exists A, B \in \tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = X)$,
3. $(\exists A, B \in c\tau)(A, B \neq \emptyset)(A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = X)$.

Důkaz. Dokážeme jen ekvivalenci 1. $\Leftrightarrow$ 2. Pro důkaz ekvivalence 2. $\Leftrightarrow$ 3. stačí použít to, že doplněk otevřené množiny je uzavřená množina a naopak.

Předpokládejme, že (X, τ) není souvislý. Potom existuje obojetná množina $A \subset X$ taková, že $A \neq \emptyset$, ani $A \neq X$. Položme $B := X \setminus A$. Potom $A \in \tau$ a $B \in \tau$, protože A je také uzavřená. Zřejmě také $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$, čímž dostáváme tvrzení 2.

Naopak předpokládáme-li platnost výroku 2., je množina $A \in \tau$ a také $A = X \setminus B \in c\tau$, protože $B \in \tau$. Tedy A je obojetná. Navíc $A \neq \emptyset$ a $A = X \setminus B \neq X$, protože $B \neq \emptyset$. Z toho plyne, že (X, τ) není souvislý. $\square$

Věta 2.89: Buď (X, τ) topologický prostor a $A_\alpha \subset X$ souvislé množiny pro každé $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$ je indexová množina libovolné mohutnosti. Je-li $(\forall \alpha, \alpha' \in I)(A_\alpha \cap A_{\alpha'} \neq \emptyset)$, potom

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ je souvislá.}$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že množina $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ není souvislá. Podle Lemma 2.88 existují neprázdné množiny B, C otevřené v topologii τ_A a takové, že

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = A.$$

Potom $A_\alpha = (A_\alpha \cap B) \cup (A_\alpha \cap C)$, kde $\alpha \in I$. Protože jsou B a C otevřené v topologii τ_A nadmnožiny A , jsou množiny $A_\alpha \cap B$ a $A_\alpha \cap C$ otevřené v topologii τ_{A_α} topologického podprostoru $(A_\alpha, \tau_{A_\alpha})$. Jelikož je A_α souvislá musí být alespoň jedna z disjunktních množin $A_\alpha \cap B$, nebo $A_\alpha \cap C$ prázdná, jinak bychom dostali spor s tvrzením 2. Lemma 2.88. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_\alpha \cap C = \emptyset$. Potom $A_\alpha \subset B$. Platí-li poslední inkluze pro jedno $\alpha \in I$, musí platit pro všechna $\alpha \in I$ jinak bychom dostali spor s předpokladem $(\forall \alpha, \alpha' \in I)(A_\alpha \cap A_{\alpha'} \neq \emptyset)$ (rozmyslete). Máme tedy

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset B.$$

Odtud ovšem plyne, že

$$C = A \setminus B = \emptyset,$$

což je spor. $\square$

Věta 2.90: Buď (X, τ) topologický prostor, $A \subset X$ a $A \subset B \subset \overline{A}$. Je-li A souvislá, potom je i B souvislá.

Důkaz. Větu stačí dokázat pro speciální případ $B = \overline{A}$. K tomu si stačí uvědomit, že B je uzávěr A v topologii (B, τ_B) , protože je $B = B \cap \overline{A}$. Proto uvažujeme-li namísto (X, τ) prostor (B, τ_B) a víme-li, že uzávěr souvislé množiny je souvislý, dokážeme souvislost množiny B .

Ve zbytku důkazu ukážeme, že $\overline{A}$ je souvislá za předpokladu, že A je souvislá. K tomu opět použijeme Lemma 2.88 tentokrát formulaci z tvrzení 3. Konkrétně dokážeme, že napíšeme-li

$$\overline{A} = B_1 \cup B_2,$$

kde B_1, B_2 jsou uzavřené v topologii $\tau_{\overline{A}}$ a $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, potom z předpokladu $B_1 \neq \emptyset$ vyplyne $B_2 = \emptyset$. Uvažujme tedy nějaký takový rozklad a předpokládejme, že $B_1 \neq \emptyset$.

Z předpokladu $B_1 \neq \emptyset$ plyne, že existuje nějaké $b \in B_1$. Protože $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, je $B_1 \subset X \setminus B_2$. Množina $X \setminus B_2$ je otevřená, a proto $\exists H_b$ takové, že $H_b \subset X \setminus B_2$, neboli $H_b \cap B_2 = \emptyset$.

Protože je také $b \in \overline{A}$, máme $H_b \cap A \neq \emptyset$. Vezměme nějaké $x \in H_b \cap A$. Protože $H_b \cap B_2 = \emptyset$, je $x \notin B_2$, a proto $x \in A \cap B_1$. To dokazuje, že $A \cap B_1 \neq \emptyset$.

Množinu A můžeme rozložit na $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. Množina $A \cap B_1$ je uzavřená v topologii τ_A , protože B_1 byla uzavřená v topologii $\tau_{\overline{A}}$ nadmnožiny $\overline{A} \supset A$. Podobně je také $A \cap B_2$ uzavřená v topologii τ_A . Jelikož je A souvislá a víme, že $A \cap B_1 \neq \emptyset$, musí být $A \cap B_2 = \emptyset$.

Uvážíme-li fakt $A \cap B_2 = \emptyset$ dohromady s inkluzí $A \subset B_1 \cup B_2$, vidíme, že $A \subset B_1$, a proto také $\overline{A} \subset \overline{B_1} = B_1$; zde užíváme toho, že uzávěr množiny v (X, τ) je totožný s uzávěrem v $(\overline{A}, \tau_{\overline{A}})$, protože $\overline{A}$ je uzavřená v (X, τ) . Nakonec tedy máme

$$B_2 = \overline{A} \cap B_2 \subset B_1 \cap B_2 = \emptyset,$$

což znamená, že $B_2 = \emptyset$, jak jsme chtěli dokázat. □

Už v kapitole o kompaktnosti jsme si mohli uvědomit, že k důkazu důležitých vět (Heine–Borel, atd.) bylo důležitou ingrediencí dokázat kompaktnost uzavřeného intervalu. I v této části bude podstatné nejprve ukázat, že interval je souvislou množinou v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Zanedlouho si ukážeme dokonce víc, viz Věta 2.94. Začneme tím, že si dokážeme souvislost $\mathbb{R}$.

Lemma 2.91: Prostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je souvislý.

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je obojetná. Ukážeme, že je-li $A \neq \emptyset$, potom musí být $A = \mathbb{R}$. Přesněji dokážeme, že vezmeme-li libovolné $c \in \mathbb{R}$, potom $c \in A$.

Buď tedy $A \neq \emptyset$ a zvolme $c \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že $c \notin A$. Protože $A \neq \emptyset$, existuje nějaké $a \in A$. Tedy $a \neq c$. Předpokládejme, že $a < c$. V případě $a > c$ by se postupovalo analogicky.

Definujme

$$S := \{x \in A \mid x < c\} \equiv A \cap (-\infty, c).$$

Množina $S \neq \emptyset$, protože $a \in S$. Dále označme

$$y := \sup S.$$

Zřejmě $y \leq c$.

Protože $c \notin A$, můžeme psát $S = A \cap (-\infty, c]$. Z toho plyne, že S je uzavřená, neboť A je uzavřená. A proto $y \in \overline{S} = S$, neboli $y < c$.

Protože je A také otevřená a $y \in S \subset A$, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset A$. Jak už víme, $y < c$, a proto můžeme předpokládat, že ϵ je tak malé, že $y + \epsilon < c$. Potom ale prvek $z := y + \epsilon/2$ je v množině S , protože

$$z \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset A \quad \text{a také} \quad z < c.$$

To je ale ve sporu s tím, že $y = \sup S$, neboť $y < z$.

□

Další věta ukazuje, že spojitý obraz souvislé množiny musí být souvislý.

Věta 2.92: Nechť $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ je spojitě zobrazení mezi topologickými prostory a (X, τ_X) je souvislý. Potom $f(X)$ je souvislá množina.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f(X)$ není souvislá. Podle Lemma 2.88 musí existovat $\emptyset \neq B, C \subset f(X)$ otevřené v $(f(X), \tau_{f(X)})$ takové, že

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{a} \quad B \cup C = f(X).$$

Ze spojitosti f plyne, že množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ jsou otevřené v (X, τ_X) , viz Věta 2.39. Navíc platí:

$$f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset \quad \text{a} \quad f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = X.$$

Nakonec musí být také obě množiny $f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(C)$ neprázdné, protože B, C jsou neprázdné podmnožiny $f(X)$. To je ovšem spor s předpokladem souvislosti (X, τ_X) podle Lemma 2.88. □

Důsledek 2.93: Jsou-li (X, τ_X) a (Y, τ_Y) homeomorfní topologické prostory, potom

$$(X, \tau_X) \text{ je souvislý} \Leftrightarrow (Y, \tau_Y) \text{ je souvislý}.$$

Nyní už můžeme ukázat, že intervaly jsou souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokonce jiné souvislé podmnožiny než intervaly v $\mathbb{R}$ neexistují. Ve speciálním případě prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií máme tedy jednoduchou charakterizaci souvislých množin. Taková situace je poměrně vzácná.

Věta 2.94: Množina $A \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když je A interval.

Poznámka: Poznamenejme, že intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme všechny množiny typu

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b],$$

kde $a \leq b$, a také všechny jejich (polo)nekonečné varianty. Speciálně také jednobodová množina je interval.

Důkaz Věty 2.94. 1) Předpokládejme nejprve, že $A \subset \mathbb{R}$ je interval. Ukážeme, že A je souvislá.

Je-li A jednobodová, nebo prázdná množina, je tvrzení triviální. Dále stačí uvažovat A otevřený interval, tzn. $A = (a, b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Souvislost všech ostatních typů potom dostaneme aplikací Věty 2.90.

Prostory (a, b) a $\mathbb{R}$ (s obvyklými topologiemi) jsou homeomorfní. Jeden příklad homeomorfismu $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, pokud jsou $a, b \in \mathbb{R}$, je funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\pi \frac{x - b}{b - a} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, pak lze volit homeomorfismus $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ např. $f(x) = \ln(x - a)$ a podobně pro případ $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$ (najděte příklad homeomorfismu). Potom Lemma 2.91 spolu s Důsledkem 2.93 implikují souvislost intervalu (a, b) .

2) Naopak předpokládejme, že $A \subset \mathbb{R}$ není interval. Potom existují $x, y \in A$, $x < y$ a bod $z \notin A$ tak, že $x < z < y$. Položme

$$B_1 := A \cap (-\infty, z) \quad \text{a} \quad B_2 := A \cap (z, +\infty).$$

Potom $B_1, B_2 \neq \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = A$ a obě množiny B_1 a B_2 jsou otevřené v podprostoru (A, τ_A) . To podle Lemma 2.88 znamená, že A není souvislá. $\square$

S předpokladem souvislosti můžeme ještě doplnit tvrzení Věty 2.64.

Věta 2.95: Reálná spojitá funkce na kompaktním souvislém topologickém prostoru nabývá svého minima, maxima i všech hodnot mezi nimi.

Důkaz. Je-li $f : (X, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá (topologie na $\mathbb{R}$ je opět obvyklá) a (X, τ) souvislý, potom podle Vět 2.92 a 2.94 je $f(X)$ interval. Navíc protože je (X, τ) kompaktní, musí být podle Vět 2.63 a 2.73 interval $f(X)$ omezený a uzavřený, z čehož ihned plyne tvrzení věty. $\square$

V dalším si ukážeme, že každý topologický prostor se rozkládá na sjednocení svých maximálních souvislých částí - tzv. *komponent souvislosti*.

Definice 2.96 (Komponenta souvislosti): Buď (X, τ) topologický prostor. Neprázdňá množina $S \subset X$ se nazývá *komponenta souvislosti* prostoru (X, τ) , právě když platí:

1. S je souvislá.
2. Je-li $A \subset X$ souvislá a $A \supset S$, potom $S = A$.

Příklad 2.38: Následující množiny chápeme jako topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Prostor $X = [0, 1) \cup (1, 2]$ má dvě komponenty souvislosti $[0, 1)$ a $(1, 2]$. Komponentami souvislosti prostoru $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 1]$ jsou množiny $[2n, 2n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.39: Komponentami souvislosti prostoru (X, τ_d) , kde τ_d je diskrétní topologie na množině $X \neq \emptyset$, jsou právě všechny jednobodové množiny.

Následující věta shrnuje vlastnosti komponent souvislosti.

Věta 2.97: Buď (X, τ) topologický prostor. Potom platí:

1. Každý bod $x \in X$ leží právě v jedné komponentě souvislosti (X, τ) .
2. Dvě různé komponenty souvislosti (X, τ) jsou disjunktní.

3. Komponenty souvislosti (X, τ) jsou uzavřené množiny.
4. Prostor (X, τ) je souvislý, právě když má jedinou komponentu souvislosti.
5. Je-li $\emptyset \neq A \subset X$ souvislá, potom existuje právě jedna komponenta souvislosti S taková, že $A \subset S$.

Důkaz. 1. Buď $x \in X$. Označme

$$\mathcal{S} := \{A \subset X \mid x \in A \wedge A \text{ je souvislá}\}.$$

Potom jistě $\mathcal{S} \neq \emptyset$, neboť $\{x\} \in \mathcal{S}$. Sjednocení $S := \cup \mathcal{S}$ je souvislá množina podle Věty 2.89. Navíc je jednoduché ověřit, že S je komponenta souvislosti obsahující bod x . Nechť také $T \subset X$ je komponenta souvislosti (X, τ) obsahující x . Potom $T \in \mathcal{S}$, a proto $T \subset S$. Z vlastnosti 2. z definice komponenty souvislosti T pak ale plyne, že $T = S$.

2. Je přímým důsledkem tvrzení 1.

3. Vyplyvá z Věty 2.90 a definice komponenty souvislosti.

4. Zřejmé.

5. Jelikož je $A \neq \emptyset$, můžeme zvolit $a \in A$. Podle 1. tvrzení má (X, τ) komponentu souvislosti $S \subset X$ obsahující a . Množina $A \cup S$ je souvislá podle Věty 2.89. Potom z definice komponenty souvislosti S plyne, že $A \cup S = S$, neboli $A \subset S$. To, že je množina S určena jednoznačně, plyne opět z tvrzení 1. $\square$

Předchozí věta má následující důsledek.

Důsledek 2.98: Každý topologický prostor lze napsat jako sjednocení svých komponent souvislosti, tj. sjednocení maximálních souvislých uzavřených množin, které jsou po dvou disjunktní.

Definice 2.99 (Oblast): Otevřená a souvislá podmnožina topologického prostoru se nazývá *oblast*.

Nakonec se ještě seznámíme s jednou silnější vlastností než je souvislost, a to tzv. *křivkovou souvislostí*.

Definice 2.100 (Křivka, stopa křivky): *Křivka* v topologickém prostoru (X, τ) je spojitě zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow X$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obor hodnot φ se nazývá *stopa křivky* a značí $[\varphi]$.

Poznámka: Všimněte si, že stopa křivky $[\varphi]$ je souvislá množina, neboť je to spojitý obraz souvislé množiny $[a, b]$, viz Věty 2.92 a 2.94.

Definice 2.101 (Křivkově souvislý prostor, křivkově souvislá množina): Topologický prostor (X, τ) nazýváme *křivkově souvislý* (nebo také *dráhově souvislý*), právě když každé dva body v X lze spojit křivkou, tzn.

$$(\forall x, y \in X)(\exists \varphi \text{ křivka v } (X, \tau))(x, y \in [\varphi]).$$

Analogicky množinu $\emptyset \neq A \subset X$ nazveme *křivkově souvislou*, právě když je (A, τ_A) křivkově souvislý topologický podprostor (X, τ) . Prázdná množina je křivkově souvislá.

Věta 2.102: Křivkově souvislý topologický prostor (X, τ) je souvislý.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že (X, τ) je křivkově souvislý, ale není souvislý. Potom podle Lemma 2.88 existují otevřené a neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = X$. Zvolme $a \in A$ a $b \in B$. Jelikož je (X, τ) křivkově souvislý, existuje křivka φ v (X, τ) spojující body a a b .

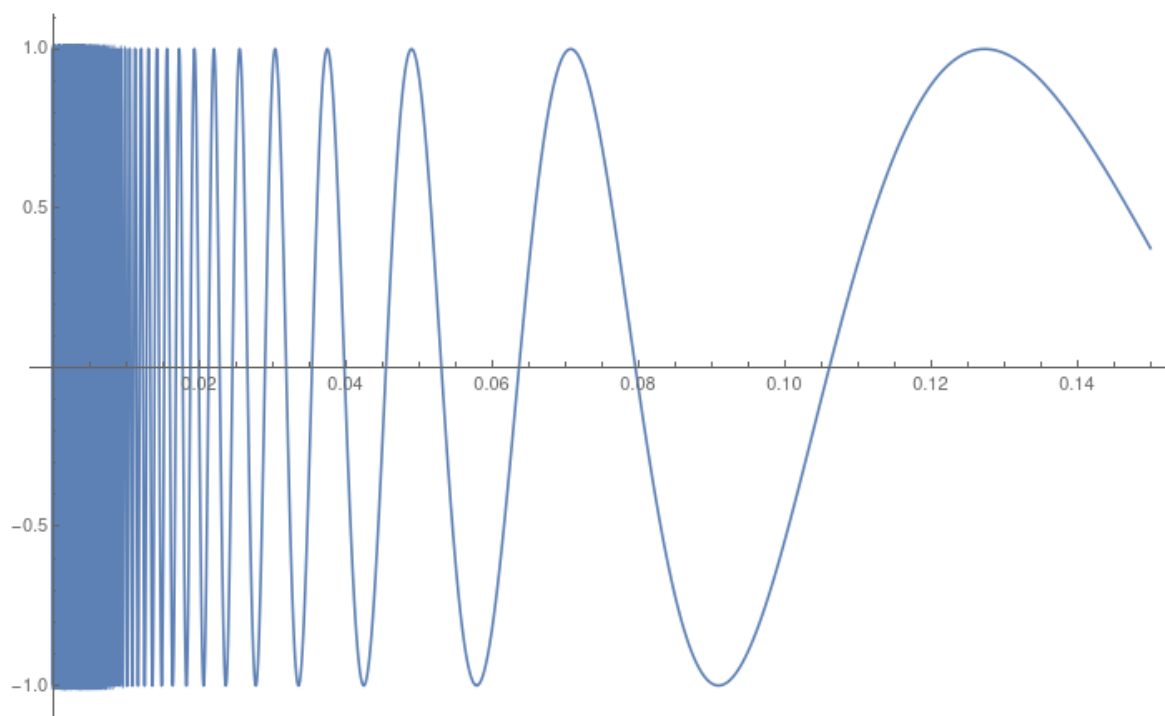
Stopu φ lze rozložit na $[\varphi] = (A \cap [\varphi]) \cup (B \cap [\varphi])$, kde množiny $A \cap [\varphi]$ a $B \cap [\varphi]$ jsou otevřené v $([\varphi], \tau_{[\varphi]})$, neprázdné, neboť $a \in A \cap [\varphi]$ a $b \in B \cap [\varphi]$, a také disjunktní. To je ovšem spor se souvislostí $[\varphi]$. $\square$

Intervaly jsou zřejmě křivkově souvislé množiny, a proto podle Věty 2.94 pojmy souvislá množina a křivkově souvislá množina znamenají totéž v prostoru $\mathbb{R}$. Obecně ale implikaci ve Větě 2.102 nelze obrátit, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.40 (Topologická sinusoida): V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií uvažujme množinu

$$S := (0, 0) \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1] \right\},$$

viz Obrázek 6.



Obrázek 6: Topologická sinusoida.

Množina S je souvislá. To je vidět např. z toho, že část

$$S_0 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1] \right\}$$

je spojitý obraz souvislého intervalu $(0, 1]$, a tedy souvislá a $S_0 \subset S \subset \bar{S}$, kde

$$\bar{S} = \{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1] \right\},$$

viz Věta 2.90.

Na druhou stranu S není křivkově souvislá, protože bod $(0, 0)$ nelze v S spojit křivkou s žádným z bodů z S_0 . Předpokládejme, že bod $(0, 0)$ je možné spojit s nějakým bodem $(a, \sin(1/a))$ v S , tzn., že existuje $\varphi : [0, 1] \rightarrow S$ je spojitě takové, že $\varphi(0) = (0, 0)$ a $\varphi(1) = (a, \sin(1/a))$. Potom i každý bod $(x, \sin(1/x))$, kde $0 < x < a$, musí ležet v $[\varphi]$, jinak by $[\varphi]$ nebyla souvislá.

Položme

$$K_n := [\varphi] \cap \left\{ (x, 1) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right\}$$

Protože $[\varphi]$ je kompaktní (je to spojitý obraz kompaktní množiny $[0, 1]$) a K_n jsou uzavřené neprázdné množiny takové, že $K_{n+1} \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, plyne z Cantorovy věty (Důsledek 2.53), že

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Z definice K_n plyne, že K nemůže obsahovat žádný bod z $\mathbb{R}^2$, který má kladnou první složku. Jediný bod v $[\varphi]$, který nemá pozitivní první složku je $(0, 0)$, a proto $K = \{(0, 0)\}$. Na druhou stranu z definice množin K_n plyne, že druhá složka musí být limitou konstantní posloupnosti $y_n = 1$ pro $n \rightarrow \infty$. A tedy druhá složka bodu $(0, 0)$ by měla být 1, což je spor.

Definice 2.103 (Lokálně křivkově souvislý prostor, lokálně křivkově souvislá množina): Topologický prostor (X, τ) nazveme *lokálně křivkově souvislý*, právě když

$$(\forall x \in X)(\exists H_x \text{ křivkově souvislé}).$$

Množina $\emptyset \neq A \subset X$ je *lokálně křivkově souvislá*, právě když je (A, τ_A) je lokálně křivkově souvislý topologický prostor. Prázdná množina je lokálně křivkově souvislá.

Zřejmě křivkově souvislý prostor je také lokálně křivkově souvislý. Naopak to ovšem neplatí. Lokálně křivkově souvislý prostor nemusí být totiž ani souvislý, uvažte např. množinu $A = (-1, 1) \setminus \{0\}$ v $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ani souvislost neimplikuje lokálně křivkovou souvislost, jak ukazuje příklad topologické sinusoidy, viz Příklad 2.40, kde bod $(0, 0)$ nemá žádné křivkově souvislé okolí. Platí ale následující tvrzení.

Věta 2.104: Je-li (X, τ) souvislý a lokálně křivkově souvislý topologický prostor, potom je (X, τ) křivkově souvislý.

Důkaz. Buď $p \in X$. Označme S_p množinu všech bodů z X , které lze spojit s p křivkou (tzv. komponenta křivkové souvislosti). Ukážeme, že S_p je obojetná. Potom, protože $S_p \neq \emptyset$, neboť $p \in S_p$, plyne ze souvislosti (X, τ) , že $S_p = X$. Tudíž každý bod z x lze spojit s p křivkou, a proto také každé dva body z X lze spojit křivkou tranzitivně přes p .

Zbývá tedy dokázat, že S_p je obojetná. Nejprve ukážeme, že S_p je otevřená. Buď $x \in S_p$. Potom existuje H_x křivkově souvislé okolí x , protože (X, τ) je lokálně křivkově souvislý. Vezměme libovolně $u \in H_x$. Potom u lze spojit s x křivkou. Také x lze spojit s p křivkou, což plyne z toho, že $x \in S_p$. Celkem tedy je možné u spojit s p křivkou opět tranzitivně přes x , a proto $u \in S_p$. Protože jsme u volili z H_x libovolně, je $H_x \subset S_p$.

Nakonec dokážeme, že S_p je také uzavřená. Buď $y \in \overline{S_p}$ a H_y křivkově souvislé okolí y . Protože $H_y \cap S_p \neq \emptyset$, existuje nějaké $v \in H_y \cap S_p$. Toto v lze spojit křivkou jak s y , tak s p , a proto lze spojit křivkou také y a p . Neboli $y \in S_p$, a protože bylo y voleno libovolně, je $\overline{S_p} \subset S_p$. Tedy $\overline{S_p} = S_p$. $\square$

Věta 2.104 má jeden speciální důsledek pro oblasti v metrických prostorech, který se nám bude později hodit.

Důsledek 2.105: Je-li (X, ρ) metrický prostor a $A \subset X$ oblast, potom je A křivkově souvislá. Speciálně oblast v $\mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá množina.

Důkaz. Stačí ukázat, že otevřená podmnožina metrického prostoru je lokálně křivkově souvislá. Tvrzení potom plyne z Věty 2.104.

Nechť je tedy A otevřená a neprázdná množina v X (jinak triviální). Buď $x \in A$. Potom existuje $r > 0$ tak, že $B_x(r) \subset A$. Protože je koule $B_x(r)$ konvexní, viz Cvičení 2.5, lze v ní každé dva body spojit speciální křivkou, totiž úsečkou. Z toho plyne, že A je lokálně křivkově souvislá. $\square$

Z toho, co už nyní víme, si můžeme dokázat speciální případ tvrzení, které představuje velmi silný topologický výsledek, viz Věta 2.107.

Věta 2.106: Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.

Důkaz. Předpokládejme naopak, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou homeomorfní a označme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismus. Z prostoru $\mathbb{R}$ vyjme nějaký pevně zvolený bod $a \in \mathbb{R}$. Prostor $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ není souvislý, protože to není interval, viz Věta 2.94. Na druhou stranu $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$ je souvislý, protože je křivkově souvislý (rozmyslete), viz Věta 2.102. Nakonec si stačí uvědomit, že zobrazení f zúžené na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ je homeomorfismem prostorů $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(a)\}$. To je ale spor s Větou 2.93. $\square$

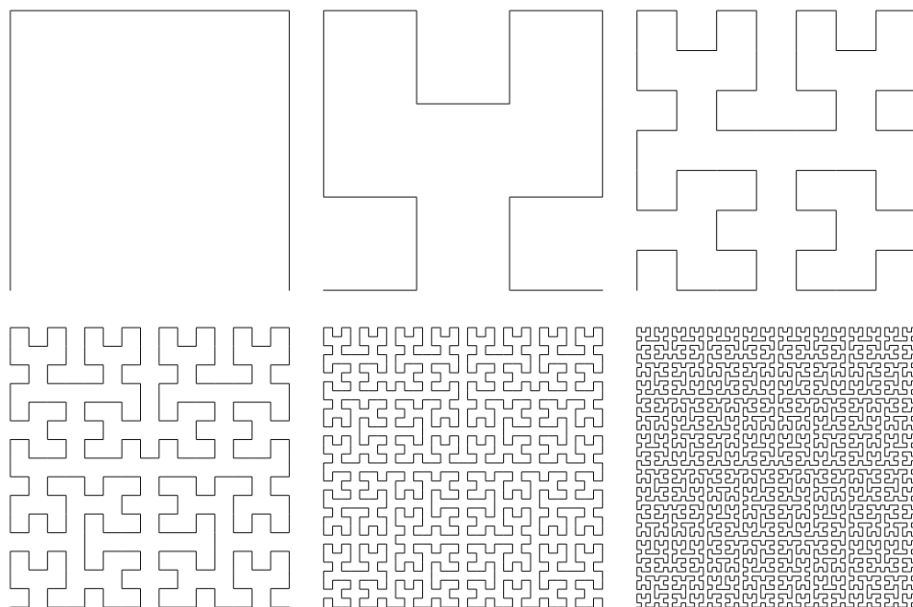
Ideu důkazu Věty 2.106 lze jednoduše rozšířit na prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 2$. Intuitivně lze očekávat, že ani $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nebudou homeomorfní, pokud $m \neq n$. To je skutečně pravda, ale důkaz tohoto tvrzení vyžaduje mnohem sofistikovanější metody, konkrétně tzv. Větu o invarianci domén v $\mathbb{R}^n$, kterou dokázal Brouwer v roce 1912 s využitím Věty 2.85. Důkaz může čtenář najít např. v [8].

Věta 2.107: Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \neq n$, potom prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nejsou homeomorfní.

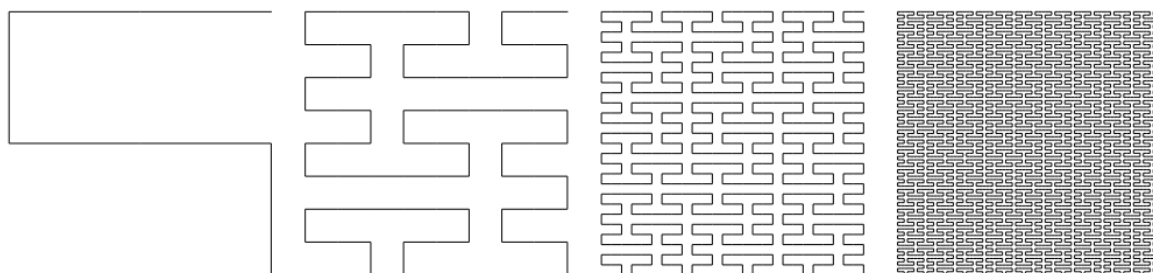
Podobně jako ve Větě 2.106 dokážeme, že $[0, 1]$ a $[0, 1] \times [0, 1]$ nejsou homeomorfní, viz Cvičení 2.49. Tzn., že neexistuje spojitá bijekce z $[0, 1]$ na $[0, 1] \times [0, 1]$, protože takové zobrazení by už musel být homeomorfismus, neboť $[0, 1]$ je kompaktní, viz Cvičení 2.39.

Jen pro zajímavost poznamenejme na závěr, že existují spojitá zobrazení $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, která jsou surjektivní; tedy křivky, které zcela vyplní čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$. Tyto křivky jsou

definovány jako limity určitých specifickým způsobem konstruovaných posloupností křivek a patří mezi ně např. Hilbertova nebo Peanova křivka, viz Obrázky 7 a 8. Z předchozího odstavce plyne, že tyto křivky nemohou být v žádném případě injektivní.



Obrázek 7: Prvních šest iterací konstrukce Hilbertovy křivky.



Obrázek 8: Prvních čtyři iterace konstrukce Peanovy křivky.

2.7 Cvičení

Cvičení 2.1: Dokažte, že v normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ platí nerovnost

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

pro všechny $x, y \in V$.

Cvičení 2.2: Ukažte detailně, že zobrazení $\|\cdot\|_p$ z Příkladu 2.1 splňují vlastnosti z definice normy. Trojúhelníkovou nerovnost ukažte jen pro speciální případy $p = 2$ a $p = \infty$.

Cvičení* 2.3: Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{C}^n$, je-li $p \in [1, \infty)$.
(Hint: 1. Využijte homogenity $\|\cdot\|_p$ a ukažte, že stačí dokázat nerovnost

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_p \leq 1, \quad \text{pro } \|x\|_p = 1, \|y\|_p = 1 \text{ a } \lambda \in [0, 1].$$

2. Dokažte nerovnost $|\lambda t + (1 - \lambda)s|^p \leq \lambda|t|^p + (1 - \lambda)|s|^p$ pro $t, s \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0, 1]$, která plyne z konvexnosti funkce $f(t) := |t|^p$, a aplikujte ji k důkazu nerovnosti z kroku 1.)

Cvičení 2.4: Ukažte, že pokud je $p \in (0, 1)$, zobrazení $\|\cdot\|_p$ nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Cvičení 2.5: Dokažte, že r -koule $B_x(r)$ se středem $x \in X$ v metrickém prostoru (X, ρ) je konvexní množina, tzn. pro $\forall u, v \in B_x(r)$ a $\forall \lambda \in [0, 1]$ je $\lambda u + (1 - \lambda)v \in B_x(r)$.

Cvičení 2.6: V metrickém prostoru (X, ρ) můžeme definovat uzavřenou kouli o poloměru $r > 0$ se středem $x \in X$ vztahem $C_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$. Ukažte, že rovnost $C_x(r) = \overline{B_x(r)}$ obecně neplatí v metrickém prostoru, ale platí v prostorech normovaných.
(Hint: Uvažujte diskrétní metriku.)

Cvičení 2.7: Ukažte, že diskrétní topologie τ_d je indukována diskrétní metrikou ρ_d .

Cvičení 2.8: Dokažte Větu 2.17.

Cvičení 2.9: Dokončete důkaz Věty 2.19.

Cvičení 2.10: Najděte příklad ilustrující, že v inkluze $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ může být striktní.

Cvičení 2.11: Dokončete důkaz Věty 2.21.

Cvičení 2.12: Najděte příklad ilustrující, že v inkluze $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ může být striktní.

Cvičení 2.13: Ukažte, že mezi množinami $\overline{A}^\circ$ a $(\overline{A})^\circ$ neplatí ani jedna inkluze.

Cvičení 2.14: Dokažte inkluze $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ a $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$ a najděte příklady ilustrující neplatnost opačných inkluzí.

Cvičení 2.15: Uvažujte dvouprvkovou množinu $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 a $A = \{a\}$. Určete A' . Všimněte si, že A' není uzavřená.

Cvičení 2.16: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ danou systémem lokálních bází $\beta_x = \{U_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0\}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde

$$U_\epsilon(x) := \{x\} \cup (-\epsilon, \epsilon).$$

Nejprve ověřte, že (X, τ) je T_0 -prostor. Poté pro $A = \{0\}$ ukažte, že $A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a že tato množina není uzavřená v (X, τ) .

Cvičení 2.17: Ukažte, že v obecném topologickém prostoru neplatí inkluze $(A')' \subset A'$.

(Hint: Uvažujte tříprvkovou množinu $X = \{a, b, c\}$ s triviální topologií τ_0 .)

Cvičení 2.18: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s triviální topologií τ_0 není T_0 -prostor.

Cvičení 2.19: Ukažte, že $X = \{a, b\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ je T_0 -prostor, ale není T_1 -prostor.

Cvičení 2.20: Ukažte, že $X = \mathbb{R}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R} \setminus F \mid F \subset \mathbb{R} \text{ konečná}\}$ je T_1 -prostor, ale není T_2 -prostor.

Cvičení* 2.21: Uvažujte topologii τ na $X = \mathbb{R}$ určenou bází

$$\beta = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = (a, b) \text{ nebo } U = (a, b) \setminus K, a < b\}.$$

kde $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ukažte, že (X, τ) je T_2 -prostor. Dále ukažte, že K je uzavřená množina v (X, τ) a že pro bod $x = 0$ a množinu K neplatí axiom oddělitelnosti T_3 . Tzn., že (X, τ) není T_3 -prostor.

Cvičení 2.22** (Moorova polorovina s tečnými kruhy): Uvažujte polorovinu $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ s topologií τ určenou lokálními bázemi v každém bodě $(x, y) \in X$ následovně:

- Pro $(x, y) \in X$ s $y > 0$ je $U_\epsilon(x, y) := B_{(x, y)}(\epsilon)$, $0 < \epsilon < y$.
- Pro $(x, 0) \in X$ je $U_\epsilon(x) := \{(x, 0)\} \cup B_{(x, \epsilon)}(\epsilon)$, $\epsilon > 0$.

Ukažte, že (X, τ) je T_3 -prostor, ale není T_4 -prostor.

Cvičení 2.23: Na množině $X = \mathbb{N}$ uvažujte topologii $\tau = \emptyset \cup \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $\{n\}$ uzavřená a určete $\overline{\{n\}}$. Je (X, τ) T_0 -prostor, resp. T_1 -prostor?

Cvičení 2.24: Uvažujte $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií. Spočítejte A' a $(A')'$ pro množinu

$$A := \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cvičení 2.25: Dokončete důkaz Věty 2.33.

Cvičení 2.26: Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A, B \subset X$ uzavřené a disjunktní množiny. Je pravda, že $d(A, B) > 0$?

Hint: Uvažujte např. $X = \mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou ρ_2 a množiny

$$A = \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}.$$

Cvičení 2.27: Dokažte Větu 2.37.

Cvičení 2.28: Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor. Dokažte, že zobrazení $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) := \|x\|$ je spojitě.

Cvičení 2.29: Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Dokažte, že zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem $f(x) := d(x, A) \equiv \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$ je spojitě.

Cvičení 2.30: Uvažujme identické zobrazení $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, tj. $f(x) = x$, kde d označuje diskrétní metriku. Rozhodněte o spojitosti f a f^{-1} .

Cvičení 2.31: Uvažujte intervaly $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$ jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Pro každou dvojici intervalů rozhodněte, zda jsou homeomorfní.

(Hint: Pro dvojici $[0, 1)$ a $(0, 1]$ zkoumejte zobrazení $f(x) = 1 - x$.)

Cvičení 2.32: Ukažte, že $\mathbb{R}$ a interval (a, b) vybavené obvyklou topologií, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jsou homeomorfní topologické prostory.

Cvičení 2.33: Ukažte, že otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$ a otevřený čtverec $(0, 1) \times (0, 1)$ jsou homeomorfní (jakožto topologické podprostory $\mathbb{R}^2$ s obvyklou topologií).

Cvičení 2.34: Uvažujte $X = \mathbb{Z}$ s topologií $\tau_{fin} = \{\mathbb{Z} \setminus F \mid F \subset \mathbb{Z} \text{ konečná}\}$. Ukažte, že libovolná množina Z $(\mathbb{Z}, \tau_{fin})$ je kompaktní, kdežto uzavřené množiny jsou jen podmnožiny konečné.

Cvičení 2.35: Uvažujte množinu $X = \{0\} \cup \mathbb{N}^2$ s topologií τ určenou lokální bází následovně. Pro $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ je $\beta_{(m,n)} := \{(m, n)\}$, neboli všechny body $\mathbb{N}^2$ jsou izolované. Systém β_0 okolí 0 tvoří množiny

$$\{0\} \cup \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N} \setminus F, F \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, n \geq N_m, N_m \in \mathbb{N}\}.$$

Vhodným očíslováním prvků $\mathbb{N}^2$ definujte posloupnost v (X, τ) , jejíž jedinou hromadnou hodnotou je 0, ale která nemá žádnou konvergentní podposloupnost.

Cvičení 2.36: Přímou z definice kompaktnosti dokažte, že kompaktní metrický prostor je nutně omezený.

Cvičení 2.37: Najděte příklad metrického prostoru, který je omezený, ale není totálně omezený.

(Hint: Uvažujte nekonečnou množinu s diskrétní metrikou.)

Cvičení* 2.38: Uvažujte $X = \mathbb{Q}$ jako topologický podprostor $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií. Ukažte, že množina $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je uzavřená a totálně omezená, avšak není kompaktní v X .

Cvičení 2.39: Buď $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ spojitý, (X, τ_X) kompaktní a (Y, τ_Y) Hausdorffův. Dokažte, že

1. je-li $A \subset X$ uzavřená, potom je $f(A)$ uzavřená,
2. je-li f bijekce, je f homeomorfismus.

Cvičení 2.40: Ověřte vlastnosti kartézského součinu množin:

1. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$,
2. $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Na konkrétním příkladu ukažte, že v druhém tvrzení neplatí rovnost.

Cvičení 2.41: Nechť β_X a β_Y jsou báze topologických prostorů (X, τ_X) a (Y, τ_Y) . Dokažte, že

$$\beta_X \times \beta_Y = \{U \times V \mid U \in \beta_X, V \in \beta_Y\}$$

je báze $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$

Cvičení 2.42: Ukažte, že produktová topologie na $\mathbb{R}^n$ (chápáno jako kartézský součin prostorů $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií) a obvyklá topologie na $\mathbb{R}^n$ jsou totožné.

Cvičení 2.43: Ukažte, že Bolzanova–Weierstrassova věta neplatí v metrických prostorech ani v normovaných prostorech nekonečné dimenze.

(Hint: a) Uvažujte např. $\mathbb{R}$ s diskrétní metrikou a posloupnost $\{n\}_{n=1}^\infty$. b) Uvažujte lineární prostor omezených posloupností s normou $\|x\| := \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ a v něm posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, kde $(e_n)_i := \delta_{i,n}$ (Kroneckerovo delta).)

Cvičení 2.44: Dokažte úplnost normovaných prostorů $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, kde $\|\cdot\|$ je (obecná) norma na $\mathbb{R}^n$.

Cvičení 2.45: Dokažte, že normovaný prostor nad $\mathbb{R}$ resp. nad $\mathbb{C}$ konečné dimenze je úplný.

(Hint: Na prostoru V_n dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ s normou $\|\cdot\|$ zvolte nějaký souřadnicový izomorfismus $\Phi : V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a na $\mathbb{R}^n$ definujte normu vztahem $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} := \|\Phi^{-1}(\cdot)\|$. Potom stačí ukázat, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská ve $(V_n, \|\cdot\|)$, právě když je $\{\Phi(x_n)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$ a použít výsledek Cvičení 2.44.)

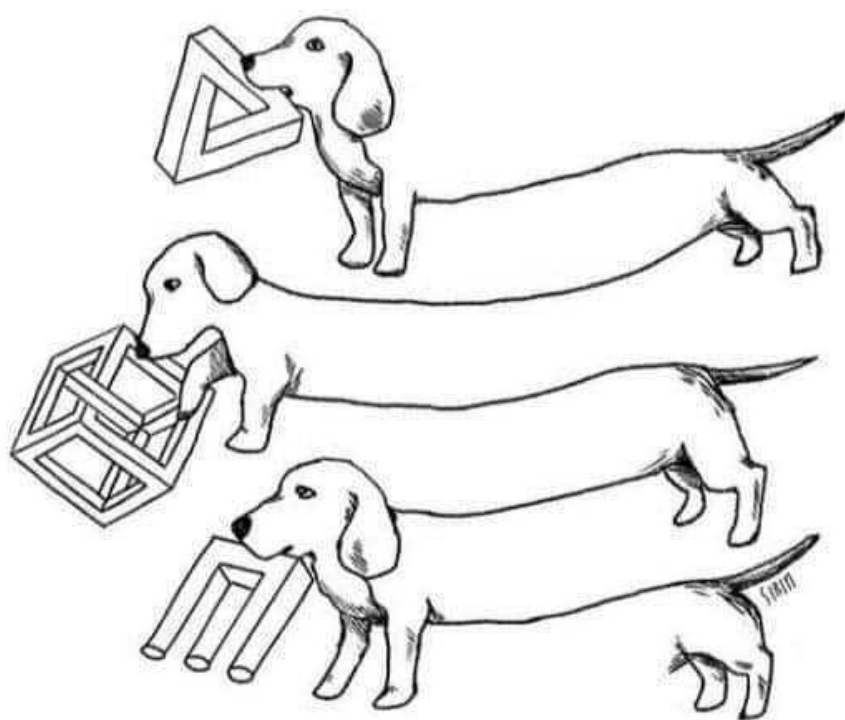
Cvičení 2.46: Ukažte na příkladě, že ani předpoklad kompaktnosti, ani předpoklad konvexnosti, nelze z Brouwerovy věty o pevném bodě vynechat.

Cvičení 2.47: Dokažte, že (X, τ) není souvislý, právě když existují neprázdné množiny $A, B \subset X$ takové, že

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \text{a} \quad A \cup B = X.$$

Cvičení 2.48: Předpokládejme, že v prostoru (X, τ) je dána množina $A \subset X$ a křivka φ , které spojuje vnitřní a vnější bod A , tzn. $A^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$ a $(X \setminus A)^\circ \cap [\varphi] \neq \emptyset$. Dokažte, že φ protíná hranici A , tj. $\partial A \cap [\varphi] \neq \emptyset$.

Cvičení 2.49: Dokažte, že interval $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ nejsou homeomorfní.



Obrázek 9: Zdroj: @IndieTheIntrovert

3 Funkce více proměnných

Naším základním cílem bude zobecnit diferenciální počet funkcí jedné proměnné na funkce *více* proměnných. Budeme uvažovat pouze zobrazení mezi prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, tj. reálné vektorové funkce konečně mnoha reálných proměnných, ačkoliv některé definice a věty je možné vyslovit i pro zobrazení mezi obecnějšími prostory bez větších změn. Odtud dále se budeme také držet konvence, že elementy prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou **sloupcové vektory**.

3.1 Derivace funkce více proměnných

Připomeňme si definici derivace funkce jedné proměnné. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je *diferencovatelná* v bodě $a \in \Omega$, existuje-li konečná limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a).$$

Číslo $f'(a)$ se nazývá *derivace* f v bodě a a geometricky je směrnicí tečny ke grafu f v bodě $(a, f(a))$. Je jasné, že tuto definici nelze použít pro funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, neboť elementy prostorů $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ mezi sebou nelze dělit.

Definici derivace lze ale ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0$$

za předpokladu, že číslo $f'(a)$ existuje. Předpis $Tx := f'(a)x$, kde $x \in \mathbb{R}$, definuje lineární zobrazení $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funkce f je diferencovatelná v bodě a , pokud lze hodnoty funkce v okolí bodu a „dobře aproximovat“ hodnotami afinní funkce $x \mapsto f(a) + T(x - a)$. Totiž tak, že zbytek $R_a(x) := f(x) - f(a) - T(x - a)$ klesá k nule rychleji než $|x - a|$ pro $x \rightarrow a$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_a(x)}{|x - a|} = 0.$$

Tyto úvahy jsou motivací pro následující definici. Připomeňme, že množinu lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definice 3.1 (Diferencovatelná funkce, derivace): Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $a \in \Omega$. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* a , pokud existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tak, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Lineární zobrazení T nazýváme *derivací* f v bodě a a značíme $Df(a)$. Je-li f diferencovatelná v každém bodě množiny Ω , říkáme, že f je *diferencovatelná na* Ω .

Poznámka: 1. V Definici 3.1 je $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ nějaká pevně zvolená norma na $\mathbb{R}^n$ a podobně $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$. Nicméně z Věty 2.71 víme, že všechny normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní, z čehož jednoduše vyplývá, že ani diferencovatelnost ani derivace na volbě normy na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^m$ nezávisí! Proto dále nebudeme normy indexovat a normou $\|\cdot\|$ budeme rozumět euklidovskou normu na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^m$, nebude-li řečeno jinak.

2. Derivace $Df(a)$ se někdy nazývá *úplná* nebo *totální derivace* f v bodě a . Definici 3.1 lze vyslovit i pro zobrazení mezi obecnými normovanými prostory. V takovém případě se $Df(a)$ nazývá *Fréchetova derivace*.

3. Limitu z Definice 3.1 lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

4. Ještě jedna ekvivalentní formulace diferencovatelnosti je užitečná (dokažte jako Cvičení 3.1). Funkce f je diferencovatelná v a , právě když existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, okolí H_a bodu a a funkce $\epsilon_a : H_a \rightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že

$$(\forall x \in H_a) (f(x) = f(a) + T(x-a) + \epsilon_a(x)\|x-a\|),$$

kde $\epsilon_a(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$.

Zdůrazněme, že derivace $Df(a)$ funkce více proměnných již není číslo, nýbrž lineární zobrazení! V dalším textu budeme pořád uvažovat funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definované na nějaké neprázdné otevřené množině Ω , a proto **budeme mlčky otevřenost a neprázdnost Ω předpokládat**, aniž bychom to explicitně psali. Podobně m, n budou vždy indexy z množiny $\mathbb{N}$.

Je dobré si uvědomit, že pokud derivace funkce v bodě existuje, je určená jednoznačně.

Lemma 3.2: Derivace diferencovatelné funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \Omega$ je určena jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě zobrazení $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jsou derivace f v bodě a . Potom existují funkce $\epsilon_a^{(T)}$ a $\epsilon_a^{(S)}$ definované na okolí počátku H_0 tak, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_a^{(T)}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_a^{(S)}(h) = 0$$

a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Th + \epsilon_a^{(T)}(h)\|h\|, \\ f(a+h) &= f(a) + Sh + \epsilon_a^{(S)}(h)\|h\| \end{aligned}$$

pro všechna $h \in H_0$. Odečtením rovnic dostaneme pro lineární zobrazení $L := T - S$ vztah

$$Lh = (\epsilon_a^{(S)}(h) - \epsilon_a^{(T)}(h)) \|h\|$$

pro všechna $h \in H_0$. Odtud plyne, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Lh}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} (\epsilon_a^{(T)}(h) - \epsilon_a^{(S)}(h)) = 0.$$

Zvolíme-li libovolné $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, potom pro $t > 0$ dostatečně malé můžeme položit $h := tx$ a dostaneme

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Lh}{\|h\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(tx)}{\|tx\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tLx}{t\|x\|} = \frac{Lx}{\|x\|}.$$

Tedy $Lx = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, což znamená, že $L = 0$. Neboli $T = S$. $\square$

Stejně jako v případě funkcí jedné proměnné diferencovatelnost implikuje spojitost. Než si toto jednoduché, ale důležité tvrzení dokážeme, musíme si nejprve vyjasnit pojem norma lineárního zobrazení a omezenost lineárního zobrazení.

Definice 3.3 (Norma lineárního zobrazení, omezené lineární zobrazení): Buďte $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Číslo $\|T\| \in [0, \infty]$ definované vztahem

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y$$

nazýváme *normou lineárního zobrazení* T . Je-li $\|T\| < \infty$, nazýváme T *omezené lineární zobrazení*.

Norma lineárního zobrazení tedy nemusí být konečná, viz Cvičení 3.4. Nicméně množina lineárních zobrazení s konečnou normou je lineární prostor a norma lineárního zobrazení je skutečně normou na tomto prostoru, viz Cvičení 3.2. Norma lineárního zobrazení závisí také na normách $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$ na prostorech X a Y , ačkoliv to ve značení nezdůrazňujeme.

Lemma 3.4: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:

1. $(\forall x \in X)(\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X)$. (V případě, že je $x = 0$ a $\|T\| = \infty$, klademe $\infty \cdot 0 := 0$.)
2. T je omezené $\Leftrightarrow T$ je spojitý $\Leftrightarrow T$ je spojitý v 0.
3. Je-li $\dim X < \infty$, potom je T omezený.

Důkaz. 1. Pro $x = 0$ platí nerovnost triviálně. Jinak pro libovolné $x \in X$, $x \neq 0$, máme

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq \|x\|_X \sup_{\|u\|_X=1} \|Tu\|_Y = \|x\|_X \|T\|.$$

2. Dokážeme řetězec implikací pro $0 \neq T \in \mathcal{L}(X, Y)$ Pro $T = 0$ je tvrzení triviální.

Nechť T je omezené. Buď $x_0 \in X$. Potom pro každé $x \in X$ je

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq \|T\|\|x - x_0\|_X.$$

Jelikož je $\|T\| < \infty$, lze k libovolnému $\epsilon > 0$ zvolit číslo $0 < \delta < \epsilon/\|T\|$. S touto volbou pak pro všechna $x \in X$ taková, že $\|x - x_0\|_X < \delta$, platí $\|Tx - Tx_0\|_Y < \epsilon$. Neboli T je spojitý v x_0 . Protože x_0 bylo libovolné, je T spojitý.

Zřejmé, je-li T spojitý, je speciálně spojitý i v bodě $x = 0$.

Předpokládejme nakonec, že T je spojitý v 0. Položíme-li v definici spojitosti $\epsilon = 1$, dostaneme, že

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \|x\|_X < \delta)(\|Tx\|_Y < 1).$$

Potom pro libovolné $u \in X$ s $\|u\|_X = 1$ můžeme odhadovat

$$\|Tu\|_Y = \frac{2}{\delta} \left\| T \left(\frac{\delta}{2} u \right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta},$$

neboť $\|\delta u/2\|_X = \delta/2 < \delta$. Z toho plyne, že $\|T\| \leq 2/\delta$, a tudíž je T omezený.

3. Je-li $\dim X = 0$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že $\dim X = n \in \mathbb{N}$ a zvolme v X bázi $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$. Potom zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{X},\infty} : X \rightarrow [0, \infty)$ definované vztahem

$$\|x\|_{\mathcal{X},\infty} := \max_{i \in \tilde{n}} |x_i^\#(x)|$$

je norma v X . Protože je $\dim X < \infty$, jsou všechny normy na X ekvivalentní (Věta 2.71), a tudíž

$$(\exists K > 0)(\forall x \in X)(\|x\|_{\mathcal{X},\infty} \leq K\|x\|_X).$$

Odtud dále dostaneme pro $x \in X$ odhad

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^n x_i^\#(x) x_i \right) \right\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^n x_i^\#(x) T x_i \right\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |x_i^\#(x)| \|T x_i\|_Y \\ &\leq \|x\|_{\mathcal{X},\infty} \sum_{i=1}^n \|T x_i\|_Y \leq K \|x\|_X \sum_{i=1}^n \|T x_i\|_Y = C \|x\|_X, \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$C := K \sum_{i=1}^n \|T x_i\|_Y.$$

Z nerovnosti $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$, která platí pro všechna $x \in X$, plyne, že $\|T\| \leq C$, a tudíž je T omezený. $\square$

Věta 3.5: Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$, potom je f spojitá v bodě a .

Důkaz. Protože je $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v a , platí pro všechna x z nějakého okolí H_a rovnost

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + e_a(x)\|x - a\|,$$

kde $e_a(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$. Pošleme-li v poslední rovnosti $x \rightarrow a$, jde třetí člen napravo k nule. Totéž platí i o druhém členu, neboť z tvrzení 3. a 1. Lemma 3.4 plyne, že

$$\|Df(a)(x - a)\| \leq \underbrace{\|Df(a)\|}_{< \infty} \|x - a\|$$

pro všechna $x \in H_a$. Celkem tedy je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, neboli f je spojitý v a . $\square$

Další dvě tvrzení se týkají pravidel pro derivování funkcí. Důkaz prvního tvrzení je jednoduchou modifikací důkazu analogické věty pro funkce jedné proměnné. Jediný podstatný rozdíl je v tom, že místo absolutních hodnot píšeme příslušné normy. Důkaz je proto přenechán čtenáři jako cvičení.

Věta 3.6: Nechť $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou diferencovatelné v bodě $a \in \Omega$. Potom platí:

1. Pro $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f + cg$ diferencovatelná v a a platí

$$D(f + cg)(a) = Df(a) + cDg(a).$$

2. Je-li $m = 1$, je součin fg diferencovatelná funkce v a a platí

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

3. Je-li $m = 1$ a $g(a) \neq 0$, je podíl f/g diferencovatelná funkce v a a platí

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}.$$

Důkaz. Provedte jako Cvičení 3.5. □

Tvrzení následující věty o derivaci složené funkce se někdy nazývá *řetězové pravidlo* (chain rule), viz také Důsledek 3.16.

Věta 3.7 (Derivace složené funkce): Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená taková, že $f(\Omega) \subset U$. Je-li f diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$ a g diferencovatelná v $f(a)$, potom je složená funkce $g \circ f$ diferencovatelná v a a platí

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) Df(a).$$

Důkaz. Označme $b := f(a)$. Z předpokladu diferencovatelnosti funkcí f a g plyne, že

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\|$$

pro x z nějakého okolí H_a bodu a a podobně

$$g(y) = g(b) + Dg(b)(y - b) + \epsilon_2(y)\|y - b\|$$

pro y z nějakého okolí H_b bodu b , kde $\epsilon_1(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$ a $\epsilon_2(y) \rightarrow 0$ pro $y \rightarrow b$. Jelikož je f spojitá v bodě a , viz Věta 3.5, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(H_a) \subset H_b$. Položíme-li nyní $y = f(x)$ a využijeme-li obou předchozích rovnic, dostaneme

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\|) \\ &\quad + \epsilon_2(f(x))\|Df(a)(x - a) + \epsilon_1(x)\|x - a\| \\ &= g(f(a)) + Dg(f(a))Df(a)(x - a) + \|x - a\|Dg(f(a))\epsilon_1(x) \\ &\quad + \epsilon_2(f(x))\left\|Df(a)\frac{x - a}{\|x - a\|} + \epsilon_1(x)\right\|\|x - a\| \end{aligned}$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$. Neboli

$$g(f(x)) = g(f(a)) + Dg(f(a))Df(a)(x - a) + \epsilon(x)\|x - a\|,$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$, kde jsem označili

$$\epsilon(x) := Dg(f(a))\epsilon_1(x) + \epsilon_2(f(x)) \left\| Df(a) \frac{x - a}{\|x - a\|} + \epsilon_1(x) \right\|.$$

Důkaz tvrzení bude kompletní, ukážeme-li, že $\epsilon(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$. K tomu stačí využít omezenosti derivací jakožto lineárních zobrazení, viz Lemma 3.4, a trojúhelníkové nerovnosti, odkud plyne, že

$$\|\epsilon(x)\| \leq \|Dg(f(a))\| \|\epsilon_1(x)\| + \|\epsilon_2(f(x))\| (\|Df(a)\| + \|\epsilon_1(x)\|)$$

pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$. Jelikož $\|\epsilon_1(x)\| \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$ a vzhledem ke spojitosti f v a také $\|\epsilon_2(f(x))\| \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$, vidíme, že skutečně

$$\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

□

3.2 Parciální a směrové derivace

Nyní se budeme chvíli zabývat pouze **skalárními** funkcemi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaných na otevřené množině Ω a diferencovatelných v bodě $a \in \Omega$. V tomto případě je $Df(a)$ lineární funkcionál na $\mathbb{R}^n$, tj. $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Z Rieszovy věty vyplývá, že existuje vektor $w \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$w^T x = Df(a)x,$$

neboť $w^T x = (w, x)$, kde $(\cdot, \cdot)$ značí euklidovský skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

Definice 3.8 (Gradient): Řádkový vektor w^T z předchozího odstavce nazýváme *gradient* funkce f v bodě a a značíme $\nabla f(a)$.

Tedy pro funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$ můžeme psát:

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \epsilon_a(x)\|x - a\|$$

pro x z nějakého okolí H_a , kde $\epsilon_a(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$. Naším cílem bude najít vhodné explicitní vyjádření pro gradient f .

Definice 3.9 (Směr, směrová derivace): Libovolný nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *směr* v $\mathbb{R}^n$. Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} =: D_v f(a),$$

nazýváme ji (*směrová*) *derivace* f *ve směru* v *a v bodě* a .

Všimněte si, že funkce $g(t) := f(a + tv)$, která je zúžením funkce f na přímku $t \rightarrow a + tv$ procházející bodem a se směrnici v , splňuje

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} =: D_v f(a).$$

Proto směrová derivace $D_v f(a)$ udává „míru změny“ f ve směru v na okolí bodu a .

Věta 3.10: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Potom pro každý směr $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existuje směrová derivace $D_v f(a)$ a platí:

$$D_v f(a) = \nabla f(a)v.$$

Důkaz. Z diferencovatelnosti f v bodě a máme

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \epsilon_a(x)\|x - a\|$$

pro $x \in H_a$, kde H_a je okolí a a $\epsilon_a(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$. Položíme-li $x = a + tv$ pro $t \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, aby $a + tv \in H_a$, dostaneme z poslední rovnosti

$$f(a + tv) = f(a) + t\nabla f(a)v + \epsilon_a(a + tv)|t|\|v\|,$$

neboli

$$\left| \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} - \nabla f(a)v \right| = \epsilon_a(a + tv)\|v\|.$$

Jelikož výraz napravo jde k nule pro $t \rightarrow 0$, máme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v,$$

což implikuje tvrzení věty. □

Důsledek 3.11: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že $u + cv \neq 0$. Potom

$$D_{u+cv} f(a) = D_u f(a) + cD_v f(a).$$

Ještě jeden důsledek Věty 3.10 stojí za pozornost, neboť ukazuje jeden **geometrický význam gradientu**. Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$|D_v f(a)| = |\nabla f(a)v| \leq \|\nabla f(a)\|\|v\|$$

a rovnost nastává, pokud je v skalárním násobkem $\nabla f(a)$. Odtud a z Věty 3.10 vidíme, že mezi všemi vektory v se zafixovanou normou rovnou $\|\nabla f(a)\|$ je hodnota směrové derivace $D_v f(a)$ maximální pro $v = \nabla f(a)$ a minimální pro $v = -\nabla f(a)$, pokud $\nabla f(a) \neq 0$. To lze slovy interpretovat tak, že gradient $\nabla f(a)$ udává směr, v němž funkční hodnoty f nejvíce rostou („kudy je to po grafu funkce f nejvíce do kopce, vyrazíme-li z bodu a “). Podobně vektor $-\nabla f(a)$ udává směr, v němž funkční hodnoty f nejvíce klesají.

Vezmeme-li v definici směrové derivace za směr speciálně vektory standardní báze $e_i, i \in \hat{n}$, prostoru $\mathbb{R}^n$ dostaneme se k tzv. *derivaci parciální*.

Definice 3.12 (Parciální derivace): Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i -tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$, nazýváme ji *parciální derivace f podle i -té proměnné v bodě a* .

Poznámka: Všimněte si, že definice parciální derivace f podle i -té proměnné v bodě a splývá s obvyklou derivací funkce $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_n)$, tj. funkce, kterou získáme z f zafixováním všech proměnných kromě i -té na okolí a , neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_i(a_i + t) - g_i(a)}{t} = g'_i(a_i).$$

Je zřejmé, že parciální derivace je speciálním případem derivace směrové, neboť $\partial_{x_i} f(a) = D_{e_i} f(a)$. Položíme-li $v = e_i$ ve Větě 3.10, zjistíme, že $\partial_{x_i} f(a)$ je i -tou souřadnicí gradientu $\nabla f(a)$. Dostáváme tak důležité pozorování, že pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$ platí:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Navíc, protože $Df(a)x = \nabla f(a)x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, je vektor $\nabla f(a)$ současně maticí zobrazení $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vzhledem ke standardním bázím. Připomeňme, že mezi lineárním zobrazením $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a jeho maticí vzhledem k bázím $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ prostorů $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ platí vztah

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{j,i} = y_j^{\#}(Ax_i)$$

pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$. Vyjádření matice derivace $Df(a)$ vzhledem ke standardním bázím pomocí derivací parciálních není speciální vlastností skalárních funkcí, ale platí obecně i pro funkce vektorové.

Věta 3.13: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Označme komponenty $f = (f_1, \dots, f_m)$. Potom pro každé $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ existuje $\partial_{x_i} f_j$ v bodě a a platí:

$$\varepsilon_n(Df(a))\varepsilon_m = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \partial_{x_2} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \partial_{x_1} f_2(a) & \partial_{x_2} f_2(a) & \dots & \partial_{x_n} f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \partial_{x_2} f_m(a) & \dots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Je obvyklé ztotožnit lineární zobrazení z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a jejich matice z $\mathbb{R}^{m,n}$ vzhledem ke standardním bázím. I my **odtud dále ztotožníme** $Df(a)$ a $\varepsilon_n(Df(a))\varepsilon_m$ a budeme jednoduše psát $Df(a)$ v obou případech. To, zda $Df(a)$ představuje lineární zobrazení, či jeho matici vzhledem ke standardním bázím, bude vždy jasné z kontextu.

Důkaz Věty 3.13. Nejprve si uvědomíme, že konvergence v obvyklé topologii $\mathbb{R}^n$ je ekvivalentní konvergenci v jednotlivých složkách, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad (\forall j \in \hat{n}) \left(\lim_{x \rightarrow a} \phi_j(x) = c_j \right)$$

kde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^m$. Skutečně vzhledem k ekvivalenci norem na $\mathbb{R}^m$, viz Věta 2.43, je $\phi(x) \rightarrow c$ pro $x \rightarrow a$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow a} \|\phi(x) - c\|_\infty = \lim_{x \rightarrow a} \max_{j \in \hat{m}} |\phi_j(x) - c_j| = 0,$$

z čehož tvrzení už přímo vyplývá. Tento fakt budeme často používat.

Vraťme se k důkazu věty. Předpoklad diferencovatelnosti f v bodě a lze psát jako limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Odtud ve složkách pro libovolné $j \in \hat{m}$ dostaneme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_j(a+h) - f_j(a) - (Df(a)h)_j|}{\|h\|} = 0.$$

Položíme-li $h = te_i$, kde $i \in \hat{n}$ a $t \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, vyplývá z předchozí rovnosti, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f_j(a+te_i) - f_j(a) - t(Df(a)e_i)_j|}{|t|\|e_i\|} = 0.$$

Neboli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f_j(a+te_i) - f_j(a)}{t} - (Df(a))_{j,i} \right| = 0,$$

kde $(Df(a))_{j,i} = (Df(a)e_i)_j$ značí (j, i) -tý element matice $\mathcal{E}_n(Df(a))^{\mathcal{E}_m}$. Zjistili jsme tedy, že $\partial_{x_i} f_j(a)$ existuje a platí pro ni rovnost

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = (Df(a))_{j,i}.$$

□

Definice 3.14 (Jacobiho matice zobrazení, jakobián): Matici

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \partial_{x_2} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \partial_{x_1} f_2(a) & \partial_{x_2} f_2(a) & \dots & \partial_{x_n} f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \partial_{x_2} f_m(a) & \dots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix}$$

nazýváme *Jacobiho maticí zobrazení* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě a za předpokladu, že parciální derivace $\partial_{x_i} f_j(a)$ existují pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$. Pokud je $m = n$, nazýváme determinant Jacobiho matice f *jakobián* f .

Tedy maticí derivace diferencovatelného zobrazení $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \Omega$ (vzhledem ke standardním bázím) je jeho Jacobiho matice

$$Df(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Jacobiho matice f je ovšem definovaná, existují-li všechny parciální derivace f , které tvoří elementy této matice. Nabízí se tedy otázka, zda existence všech parciálních derivací $\partial_{x_i} f_j(a)$ pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ implikuje diferencovatelnost f v bodě a . Následující příklad ukazuje, že tomu tak není. Zesílíme-li ovšem předpoklad tak, že budeme požadovat existenci všech parciálních derivací f na nějakém okolí a a jejich spojitost v a , bude již diferencovatelnost f v bodě a zaručena, viz Věta 3.15.

Příklad 3.1: Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Podobně vyjde $\partial_y f(0, 0) = 0$. Avšak funkce f není v bodě $(0, 0)$ spojitá (ověřte), a proto podle Věty 3.5 nemůže být f ani diferencovatelná v $(0, 0)$. Tento fakt je důsledkem toho, že parciální derivace funkce závisí jen na chování funkce ve směrech kartézských os (tj. vektorů standardní báze) v okolí a , kdežto derivace f zohledňuje chování f na celém okolí a .

Věta 3.15: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $a \in \Omega$. Existují-li parciální derivace $\partial_{x_i} f_j$ na okolí a a jsou spojitě v a pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$, potom je f diferencovatelné v a .

Důkaz. Má-li derivace f v bodě a existovat, musí být dána Jacobi maticí f v a . Chceme dokázat, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

kde jsme označili

$$T := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

K tomu stačí ukázat konvergenci v jednotlivých složkách

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f_j(x) - f_j(a) - (T(x - a))_j|}{\|x - a\|} = 0.$$

pro všechna $j \in \hat{m}$ (viz začátek důkazu Věty 3.13). Odtud plyne, že větu stačí dokázat pro speciální případ $m = 1$, tj. pro skalární funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bez újmy na obecnosti. Chceme tedy ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)|}{\|x - a\|} = 0.$$

Nechť B_a označuje nějakou kouli se středem v a poloměrem dostatečně malým, aby na ní existovali všechny parciální derivace $\partial_{x_i} f$, $i \in \hat{n}$. Nejprve si pro $x \in B_a$ zapíšeme rozdíl $f(x) - f(a)$ následujícím způsobem:

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(v_i) - f(v_{i-1})), \quad (16)$$

kde $v_0 = a$, $v_i = (x_1, \dots, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ pro $i = \widehat{n-1}$ a $v_n = x$. Funkce

$$g_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

zobrazuje uzavřený interval s koncovými body a_i a x_i do $\mathbb{R}$, je na něm spojitá a diferencovatelná na jeho vnitřku, neboť

$$g'_i(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

a parciální derivace vpravo existují podle předpokladů. Zde je třeba si uvědomit, že

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in B_a$$

pro každé t z uzavřeného intervalu s koncovými body a_i a x_i a $i \in \hat{n}$ (ověřte). Můžeme proto na g_i aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku. Přihlédneme-li ještě k tomu, že $g_i(x_i) = f(v_i)$ a $g_i(a_i) = f(v_{i-1})$, dostaneme

$$f(v_i) - f(v_{i-1}) = (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad (17)$$

kde ξ_i leží uvnitř intervalu s koncovými body a_i a x_i .

Označme $u_i := (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Potom využijeme-li rovnic (16), (17) a nerovnosti $|x_i - a_i| \leq \|x - a\|$, která platí pro euklidovskou normu, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(a)(x_i - a_i)|}{\|x - a\|} &= \frac{|\sum_{i=1}^n [\partial_{x_i} f(u_i) - \partial_{x_i} f(a)](x_i - a_i)|}{\|x - a\|} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|. \end{aligned}$$

Poslední výraz jde k 0, pokud $x \rightarrow a$, neboť $u_i \rightarrow a$ pro $x \rightarrow a$ a funkce $\partial_{x_i} f$ jsou spojitě v a pro všechna $i \in \hat{n}$ podle předpokladu. Odtud plyne rovnost

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)|}{\|x - a\|} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Následující příklad ukazuje, že kritérium diferencovatelnosti z Věty 3.15 je pouze postačující podmínka.

Příklad 3.2: Vyšetříme diferencovatelnost funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

V bodech $(x, y) \neq (0, 0)$ spočítáme parciální derivace f přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Jelikož jsou obě funkce $\partial_x f$ a $\partial_y f$ spojité na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, je podle Věty 3.15 funkce f diferencovatelná na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Pro bod $(x, y) = (0, 0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t} = 0$$

a podobně je také $\partial_y f(0, 0) = 0$. Nicméně zúžíme-li $\partial_x f$ na osu x , dostaneme pro $x \neq 0$ z předchozího výpočtu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}.$$

Tato funkce nemá limitu pro $x \rightarrow 0$, a proto parciální derivace $\partial_x f$ není v bodě $(0, 0)$ spojitá. Stejný závěr dostaneme i pro $\partial_y f$. Ukážeme nicméně, že f je diferencovatelná i v bodě $(0, 0)$, ačkoliv v tomto případě nemůžeme použít Větu 3.15. K tomu stačí ukázat, že funkce

$$\epsilon(x, y) := \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)x - \partial_y f(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

jde k 0 pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. To je ovšem pravda, neboť pro $(x, y) \neq (0, 0)$ platí odhad

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Příklad 3.3: Vyšetříme diferencovatelnost funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

V bodech množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ je f diferencovatelná, neboť podobně jako v předchozím příkladě obě parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

existují a jsou spojité na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Snadno také spočítáme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Můžeme se analogickým způsobem jako v předchozí úloze také přesvědčit, že ani nyní nejsou funkce $\partial_x f$ a $\partial_y f$ spojité v bodě $(0, 0)$. Z toho nemůžeme udělat žádný závěr o diferencovatelnosti f v počátku a musíme opět analyzovat funkci

$$\epsilon(x, y) := \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)x - \partial_y f(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

kde $(x, y) \neq (0, 0)$. Funkce f je diferencovatelná v počátku, právě když $\epsilon(x, y) \rightarrow 0$ pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. To ale neplatí, neboť

$$\epsilon(x, x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \neq 0,$$

a proto f není diferencovatelná v bodě $(0, 0)$. Všimněte si ale, že f je spojitá v bodě $(0, 0)$. To vyplývá z definice spojitosti a odhadu

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Věta 3.13 umožňuje vyjádřit řetězové pravidlo z Věty 3.7 pomocí parciálních derivací, neboť za předpokladů Věty 3.7 dostaneme přechodem k maticím vztah

$$D(g \circ f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} g_1(f(a)) & \dots & \partial_{y_m} g_1(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} g_p(f(a)) & \dots & \partial_{y_m} g_p(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(a) & \dots & \partial_{x_n} f_m(a) \end{pmatrix},$$

který lze ekvivalentně také napsat ve tvaru

$$\frac{\partial ((g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_p)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(a) = \frac{\partial (g_1, \dots, g_p)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(f(a)) \cdot \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Srovnáme-li (k, i) -té elementy matic na obou stranách, dostaneme následující důsledek.

Důsledek 3.16 (Řetězové pravidlo): Za předpokladů Věty 3.7 platí:

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

pro každé $i \in \hat{n}$ a $k \in \hat{p}$.

Dva speciální případy se objevují častěji. První je případ skalární funkce $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tj. $p = 1$. Potom

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad i \in \hat{n}.$$

V druhém ještě speciálnějším případě skládáme skalární funkci $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s vektorovou funkcí jedné proměnné $\phi : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. V takovém případě je $f \circ \phi$ skalární funkce jedné reálné proměnné, pro jejíž derivaci dostáváme

$$(f \circ \phi)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t)) \phi'_i(t) = \nabla f(\phi(t)) \phi'(t),$$

kde jsme pro tentokrát použili značení $\phi'(t) \equiv D\phi(t) = (\phi'_1(t), \dots, \phi'_m(t))^T$.

Vektorová funkce ϕ , je-li spojitá, je křivkou v $\mathbb{R}^m$. Je-li navíc diferencovatelná v nějakém bodě t , představuje vektor $\phi'(t)$ *tečný vektor* ke křivce ϕ v bodě t . Fyzikální interpretace stopy křivky ϕ může být trajektorie, po které se pohybuje částice. Vektor $\phi'(t)$ je potom vektor rychlosti částice v čase t (velocity) a euklidovská norma $\|\phi'(t)\|$ je rychlost částice v t (speed).

Dále se podíváme na vztah gradientu funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a tzv. *vrstevnic* funkce f , tj. množin $S_c := \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že f je diferencovatelná v $a \in \Omega$. Potom lze stručně říct, že gradient $\nabla f(a)$ je kolmý na vrstevnici $S_{f(a)}$. Přesný smysl předchozí věty je následující: *Je-li ϕ libovolná křivka s hodnotami v $S_{f(a)}$ definovaná na okolí 0, diferencovatelná v 0 a $\phi(0) = a$, potom je $\nabla f(a)$ kolmý na tečný vektor $\phi'(0)$.* Skutečně podle řetězového pravidla je

$$\nabla f(a) \phi'(0) = (f \circ \phi)'(0) = 0.$$

Nulovost derivace $f \circ \phi$ plyne z toho, že $f \circ \phi$ je konstantní funkce, neboť podle předpokladu $f(\phi(t)) = f(a)$ pro všechna t z okolí 0. Je-li $\nabla f(a) \neq 0$, představuje množina tečných vektorů v a ke křivkám z vrstevnice $S_{f(a)}$ nadrovinu v $\mathbb{R}^n$ s normálovým vektorem $\nabla f(a)$. Tato nadrovina je určena rovnicí

$$\nabla f(a)(x - a) = 0.$$

Tyto úvahy nás motivují k následující definici.

Definice 3.17 (Tečná nadrovina k vrstevnici, tečný prostor): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v $a \in \Omega$. Pokud $\nabla f(a) \neq 0$, nazýváme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(a)(x - a) = 0\}$$

tečnou nadrovinou k vrstevnici $S_{f(a)}$ v bodě a . Zaměření tečné nadroviny, tj. ortogonální doplněk k $\nabla f(a)$ nazýváme *tečný prostor k $S_{f(a)}$ v bodě a* a značíme $T_a(S_{f(a)})$.

Příklad 3.4 (Tečná nadrovina ke grafu funkce): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v $a \in \Omega$. Její graf $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega\}$ můžeme chápat také jako vrstevnici $S := \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid F(x, y) = 0\}$ funkce $F(x, y) := f(x) - y$. Buď $a \in \Omega$. Protože

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), -1 \right)$$

lze rovnicí tečné nadroviny k S v $(a, f(a))$

$$\nabla F(a, f(a)) [(x, y) - (a, f(a))] = 0$$

vyjádřit jako rovnici

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a),$$

kterou nazýváme rovnice *tečné nadroviny ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$* . Rozepíšeme-li ještě poslední rovnici, dostaneme

$$y = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Ve speciálním případě funkce jedné proměnné ($n = 1$), je rovnice tečné nadroviny ke grafu f v bodě $(x_0, f(x_0))$ známá rovnice tečné přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

V případě funkce dvou proměnných ($n = 2$) má rovnice tečné (nad)roviny ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tvar

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Všimněte si dimenzionální rozdílu u pojmů tečná nadrovina k vrstevnici funkce v bodě a tečná nadrovina ke grafu funkce v bodě. Tečná nadrovina k vrstevnici funkce f v bodě a je lineární varieta v $\mathbb{R}^n$ dimenze $n - 1$, pokud $\nabla f(a) \neq 0$, kdežto tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$ je lineární varieta v $\mathbb{R}^{n+1}$ dimenze n .

Příklad 3.5: Uvažujme funkci

$$f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{a_i}{\|a\|}, \quad \forall i \in \hat{n}.$$

Odtud máme

$$\nabla f(a)(x - a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = \frac{a^T x}{\|a\|} - \|a\|.$$

Tudíž tečná nadrovina k vrstevnici $S_{f(a)}$ v a je dána rovnicí

$$a^T x = \|a\|^2$$

a tečná nadrovina ke grafu f v $(a, f(a))$ je dána rovnicí

$$y = \frac{a^T x}{\|a\|}.$$

V bodě $a = 0$ není f diferencovatelná, neboť neexistují ani parciální derivace f v 0 , což vyplývá z toho, že neexistuje limita funkce

$$\frac{f(0 + te_i) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t}$$

pro $t \rightarrow 0$.

3.3 Věta o přírůstku

Už jsme několikrát použili Lagrangeovu větu o přírůstku pro funkci jedné proměnné. Nyní si větu zobecníme na funkce více proměnných.

Věta 3.18 (O přírůstku): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a konvexní množině Ω . Jsou-li $a, b \in \Omega$, potom existuje c na úsečce spojující body a a b tak, že

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b - a).$$

Důkaz. Označme $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ křivku, jejíž stopou je úsečka spojující a a b , tj.

$$\phi(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

Potom funkce jedné proměnné $g(t) := f(\phi(t))$ je spojitá na $[0, 1]$ a diferencovatelná na $(0, 1)$ podle Věty 3.7. Můžeme na ni proto aplikovat Lagrangeovu větu o přírůstku, podle které existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0).$$

Tuto rovnost lze přepsat s použitím řetězového pravidla do tvaru

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\phi(t_0))(b - a).$$

Nyní stačí označit $c := \phi(t_0)$ a dostáváme tvrzení věty. □

Důsledek 3.19: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω . Nechť dále $K \subset \Omega$ je konvexní množina a $(\exists M > 0)(\forall x \in K)(\|\nabla f(x)\| \leq M)$. Potom

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in K$.

Důkaz. Stačí použít Větu 3.18 a Cauchy–Schwarzovu nerovnost. □

Na tomto místě je dobré upozornit, že Větu o přírůstku nelze zobecnit na vektorové funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $m \geq 2$. To znamená, že pro vektorovou funkci f diferencovatelnou na konvexní množině Ω **neplatí**

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

pro nějaká $a, b, c \in \Omega$, jak by člověk mohl čekat v analogii s Lagrangeovou větou o přírůstku funkce jedné proměnné. Tento fakt ilustruje následující příklad.

Příklad 3.6: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Zkoumejme, zda pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ platí

$$f(1) - f(0) = Df(c)(1 - 0),$$

což je ekvivalentní rovnosti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 3c^2 \end{pmatrix}.$$

Žádné $c \in \mathbb{R}$ ovšem nevyhovuje současně rovnicím $2c = 1$ a $3c^2 = 1$.

Vektorová analogie Důsledku 3.19 už ale platí.

Věta 3.20: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná na Ω . Nechť dále $K \subset \Omega$ je konvexní množina a

$$(\exists M > 0)(\forall x \in K)(\|Df(x)\| \leq M).$$

Potom

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in K$.

Důkaz. Buďte $x, y \in K$ a označme $h := y - x$. Dále pro $j \in \hat{m}$ definujme funkci $g_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$g_j(t) := f_j(x + th).$$

Všimněte si, že $x + th$ pro $t \in [0, 1]$ jsou body úsečky spojující x a y , a proto $x + th \in K$ pro všechna $t \in [0, 1]$ z konvexnosti K . Dále z diferencovatelnosti f plyne, že jsou funkce g_j spojité na $[0, 1]$ a diferencovatelné na $(0, 1)$ pro všechna $j \in \hat{m}$. Potom s využitím Základní věty integrálního počtu a řetězového pravidla dostaneme

$$f_j(x + h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g'_j(t) dt = \int_0^1 \nabla f(x + th) h dt, \quad \forall j \in \hat{m},$$

což můžeme zapsat vektorově ve tvaru

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 Df(x + th) h dt, \quad (18)$$

kde Df chápeme jako Jacobiho matici zobrazení f a integrál s vektorovým argumentem aplikujeme po jednotlivých složkách.

Lemma 3.21: Je-li $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitá na intervalu $[a, b]$, potom platí

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Důkaz Lemma 3.21. Označme

$$u := \int_a^b g(t) dt.$$

Potom z Cauchy–Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$\|u\|^2 = u^T u = u^T \int_a^b g(t) dt = \int_a^b u^T g(t) dt \leq \int_a^b \|u\| \|g(t)\| dt = \|u\| \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

Nyní stačí na obou stranách zkrátit $\|u\|$, pokud $u \neq 0$, a dostáváme kýženou nerovnost. Je-li $u = 0$, platí lemma triviálně. $\square$

Aplikujeme-li nyní Lemma 3.21 v rovnici (18) a použijeme také nerovnost z 1. trzení Lemma 3.4, dostaneme

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|Df(x+th)h\| dt \leq \int_0^1 \|Df(x+th)\| \|h\| dt \leq M\|h\|,$$

neboli

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

□

Dalším důsledkem Věty o přírůstku je, že za jistých předpokladů funkce s nulovou derivací jsou funkce konstantní.

Důsledek 3.22: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a konvexní množině Ω . Je-li $\nabla f = 0$ na Ω , potom je f konstantní na Ω .

Důkaz. Zvolme libovolně $a, b \in \Omega$. Z Věty 3.18 a nulovosti gradientu f na Ω plyne, že $f(a) - f(b) = 0$. Tzn., že $f(a) = f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$, neboli f je konstantní. □

Poslední důsledek lze zobecnit. Jednak funkce f nemusí být pouze skalární. Za druhé množina Ω nemusí být konvexní, stačí aby byla souvislá. Předpoklad souvislosti Ω je už docela přirozený, jak ukazuje následující jednoduchý příklad.

Příklad 3.7: Buď $\Omega = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0, \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

Potom $(\forall x \in \Omega)(f'(x) = 0)$, ale f není konstantní na Ω .

Věta 3.23: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná na oblasti Ω . Pokud $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(Df(x) = 0)$, potom je f konstantní na Ω .

Důkaz. Nejprve větu dokážeme pro případ skalární funkce $m = 1$. Zvolme libovolně $a, b \in \Omega$. Z Důsledku 2.105 víme, že oblast Ω je křivkově souvislá. Nechť tedy $\phi : [0, 1] \rightarrow \Omega$ je křivka, $\phi(0) = a$ a $\phi(1) = b$. Stopa $[\phi] \equiv \phi([0, 1])$ je kompaktní, protože je to spojitý obraz kompaktní množiny, viz Věta 2.63. Existuje proto konečný systém koulí $B_1, \dots, B_k$, které pokrývají $[\phi]$. Navíc tyto koule můžeme očíslovat tak, že $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ pro všechna $i \in \widehat{k-1}$, jinak bychom dostali spor se souvislostí stopy $[\phi]$. Podle Důsledku 3.22 je funkce konstantní na každé množině B_i (pro skalární funkci je $Df(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$), neboť koule je konvexní množina, viz Cvičení 2.5. Tedy

$$(\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})(\forall i \in \widehat{k})(\forall x \in B_i)(f(x) = c_i).$$

Z neprázdnoti průniků $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ ovšem plyne, že $c_i = c_{i+1}$ pro všechna $i \in \widehat{k-1}$, neboli $c_1 = \dots = c_k$. Z toho plyne, že f je konstantní na $[\phi]$. Speciálně $f(a) = f(b)$, a protože jsme a a b volili libovolně z Ω , je f konstantní na Ω .

V případě vektorové funkce f , kdy $m \in \mathbb{N}$, si stačí uvědomit, že z předpokladu $Df(x) = 0$ plyne $\nabla f_j(x) = 0, \forall j \in \hat{m}$, neboť tyto gradienty jsou řádky matice $Df(x)$. Z předchozí části potom plyne, že komponenty f_j jsou konstantní na Ω pro všechna $j \in \hat{m}$, a tudíž i vektorová funkce $f = (f_1, \dots, f_m)$ je konstantní na Ω . $\square$

3.4 Derivace vyšších řádů

Nejprve se zaměříme na derivace parciální. Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má parciální derivaci $\partial_{x_i} f$ na okolí bodu $a \in \Omega$ pro nějaké $i \in \hat{n}$. Potom můžeme opět aplikovat definici parciální derivace např. podle j -té proměnné tentokrát na funkci $\partial_{x_i} f$ a dostaneme *parciální derivaci f vyššího (druhého) řádu*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_j, x_i}^2 f(a) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_{x_i} f(a + te_j) - \partial_{x_i} f(a)}{t}$$

za předpokladu, že limita vpravo existuje. Je-li $i = j$, používáme stručnější značení

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a).$$

Opakováním téhož postupu definujeme parciální derivace třetího a vyšších řádů, např.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) (a)$$

nebo

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i^2}(a) := \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) (a)$$

a analogicky pro další případy. Všimněte si, že použité značení ukazuje v jakém pořadí funkci parciálně derivujeme. Obecně totiž na tomto pořadí záleží.

Příklad 3.8: Spočítáme *smíšené* druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

v bodě $(0, 0)$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y(x^2 + y^2) - 2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2+y^2)-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Odtud dále dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 1$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = 0.$$

Pozorujeme tedy, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ ověříme přímým výpočtem, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Všimněte si, že tato funkce není spojitá v bodě $(0, 0)$.

Pokud jsou ale smíšené derivace spojitě, na pořadí parciálního derivování už nezáleží. Toto tvrzení lze vyslovit i za mírně slabších předpokladů.

Věta 3.24: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ a $i, j \in \hat{n}$. Pokud $\partial_{x_i} f$ a $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ existují na okolí a a $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ je spojitá v a , potom existuje také $\partial_{x_j, x_i}^2 f(a)$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Jelikož se ve větě objevují jen proměnné x_i a x_j , stačí tvrzení dokázat pro funkci dvou proměnných. Předpokládejme tedy, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existují $\partial_y f$ a $\partial_{y, x}^2 f$ na okolí bodu $(a, b) \in \Omega$ a $\partial_{y, x}^2 f$ je spojitá v bodě (a, b) .

Pro $s \in \mathbb{R}$ dostatečně malé, máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a + s, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_t(s) - g_t(0)}{t},$$

kde jsme označili

$$g_t(\xi) := f(a + \xi, b + t) - f(a + \xi, b).$$

Podle Lagrangeovy věty o přírůstku je

$$\frac{g_t(s) - g_t(0)}{s} = g'_t(\tilde{s}) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \tilde{s}, b + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \tilde{s}, b),$$

kde $\tilde{s}$ leží mezi 0 a s . Odtud pak dostaneme

$$\frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + s, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + \tilde{s}, b + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \tilde{s}, b) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \tilde{s}, b).$$

Pošleme-li v poslední rovnosti $s \rightarrow 0$, potom také $\tilde{s} \rightarrow 0$ a vzhledem ke spojitosti funkce napravo v bodě (a, b) , dostaneme

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + s, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b),$$

z čehož plyne tvrzení věty. □

Definice 3.25 (Třídy C^k , hladká funkce): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde Ω je otevřená, a $k \in \mathbb{N}$. Pokud všechny parciální derivace f řádu k , tj. funkce

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

kde $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}_0$, $j_1 + \dots + j_n = k$, existují a jsou spojitě na Ω , nazýváme f funkcí třídy C^k na Ω a píšeme $f \in C^k(\Omega)$. Pokud $f \in C^k(\Omega)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, nazýváme f hladkou funkcí na Ω a píšeme $f \in C^\infty(\Omega)$. Množinu spojitých funkcí na Ω značíme $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$.

Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorová funkce $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ a $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, řekneme, že f je třídy C^k na Ω a opět píšeme $f \in C^k(\Omega)$, právě když $f_j \in C^k(\Omega)$ pro všechna $j \in \hat{m}$.

Z Věty 3.15 plyne, že funkce $f \in C^1(\Omega)$ je diferencovatelná na Ω a Věta 3.5 implikuje inkluzi

$$C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega).$$

Odtud také dostáváme řetězec inkluzí

$$C^\infty(\Omega) \subset \dots \subset C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega).$$

Dále z Věty 3.24 vyplývá, že při výpočtu libovolné parciální derivace k -tého řádu funkce $f \in C^k(\Omega)$ nezáleží na pořadí jednotlivých parciálních derivací.

Zamysleme se dále nad tím, jak definovat (totální) derivace vyšších řádů. Předpokládejme, že je dána funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, která je diferencovatelná na okolí H_a bodu $a \in \Omega$. Její derivace Df je tedy zobrazení z $\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, přesněji $Df : H_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Použijeme-li zobecnění Definice 3.1 na zobrazení mezi obecnými normovanými prostory, dospějeme k následující definici: Řekneme, že funkce f je *dvakrát diferencovatelná v bodě a* , právě když existuje lineární zobrazení $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ takové, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - T(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Druhu derivaci f v bodě a značíme $D^2 f(a) := T$.

Analogicky bychom zavedli i derivace vyšších řádů a dostali tak zobrazení:

$$\begin{aligned} D^3 f(a) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))), \\ D^4 f(a) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))), \\ D^5 f(a) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))))), \text{ atd.} \end{aligned}$$

Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je izomorfní s prostorem matic $\mathbb{R}^{m,n}$, a proto bylo možné první derivaci $Df(a)$ reprezentovat (Jacobiho) maticí a používat maticový počet pro práci s první derivací. U vyšších derivací roli matic přebírají tzv. *tenzory*, jež lze chápat jako vícerozměrné analogie matic. Např. druhá derivace $D^2f(a)$ je element prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, který je izomorfní prostoru $\mathbb{R}^{m,n,n}$ objektů (tenzorů) indexovaných třemi indexy. Existuje partie lineární algebry věnovaná tenzorovému počtu, která se ale v základním kurzu nepřednáší.

My se zde práci s tenzory vyhneme, protože v dalším výkladu vystačíme s druhou derivací skalární funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. V tomto případě ztotožňujeme první derivaci Df diferencovatelné funkce f s gradientem ∇f a můžeme proto Df reprezentovat jako zobrazení

$$Df : H_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}.$$

Zde výjimečně interpretujeme gradient jako sloupcový vektor, abychom se drželi konvence, že elementy $\mathbb{R}^n$ jsou sloupcové vektory. Toto zobrazení Df můžeme znovu derivovat podle Definice 3.1 a dostáváme se tak k následující definici.

Definice 3.26 (Druhá derivace skalární funkce): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na okolí $a \in \Omega$. Řekneme, že f je *dvakrát diferencovatelná v bodě a* , právě když existuje $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tak, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - B(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Zobrazení B nazýváme *druhá derivace f v bodě a* a značíme $D^2f(a)$.

Podobně jako tomu bylo u první derivace můžeme elementy matice zobrazení $Df(a)$ vyjádřit pomocí parciálních derivací f tentokrát druhého řádu.

Věta 3.27: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná funkce v bodě $a \in \Omega$. Potom parciální derivace druhého řádu $\partial_{x_i, x_j}^2 f(a)$ existují pro všechna $i, j \in \hat{n}$ a platí

$$\varepsilon_n(D^2f(a)) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1, x_1}^2 f(a) & \partial_{x_2, x_1}^2 f(a) & \dots & \partial_{x_n, x_1}^2 f(a) \\ \partial_{x_1, x_2}^2 f(a) & \partial_{x_2, x_2}^2 f(a) & \dots & \partial_{x_n, x_2}^2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1, x_n}^2 f(a) & \partial_{x_2, x_n}^2 f(a) & \dots & \partial_{x_n, x_n}^2 f(a) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Vyplývá přímo z Věty 3.13. □

Definice 3.28 (Hessova matice): Má-li funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ všechny parciální derivace druhého řádu v bodě $a \in \Omega$, nazýváme matici $\nabla^2 f(a) \in \mathbb{R}^{n,n}$ s elementy

$$(\nabla^2 f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad i, j \in \hat{n},$$

Hessova matice funkce f v bodě a .

Poznámka (Hessián): Matice $\nabla^2 f(a)$ se také často v literatuře nazývá *Hessián* f v bodě a , ačkoliv by logika tohoto názvosloví spíše naznačovala, že Hessián je determinant Hessovy matice podobně jako tomu je u Jacobiho matice zobrazení a Jacobiánu.

Podle Věty 3.27 je Hessova matice maticí druhé derivace (vzhledem ke standardním bázím) dvakrát diferencovatelného zobrazení. Jak jsme viděli v Příkladu 3.8, Hessova matice nemusí být symetrická. Avšak z Věty 3.24 dostáváme speciálně následující důsledek.

Důsledek 3.29: Je-li $f \in C^2(\Omega)$, potom je matice $\nabla^2 f(x)$ symetrická pro všechna $x \in \Omega$.

3.5 Taylorova věta

Zobecnit Taylorovu větu na funkce více proměnných lze jednoduše na základě Taylorovy věty pro funkce jedné proměnné. Pro pochopení postupu si nejprve spočítáme první dva členy Taylorova rozvoje a zbytek (v Lagrangeově tvaru).

Uvažujme funkci $f \in C^3(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina (např. koule). Zvolme body $a, x \in \Omega$ a necht $\phi : [0, 1] \rightarrow \Omega$ je úsečka spojující a a x , tj. $\phi(t) = a + t(x - a)$. Podle Taylorovy věty (s Lagrangeovým tvarem zbytku) aplikované na funkci jedné proměnné $g(t) := f(\phi(t)) = f(a + t(x - a))$ dostaneme rozvoj

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(\xi), \quad (19)$$

kde $\xi \in (0, 1)$. Zřejmě $g(1) = f(x)$ a $g(0) = f(a)$. Pomocí řetězového pravidla dále spočítáme, že

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a))(x_i - a_i)$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + t(x - a))(x_j - a_j)(x_i - a_i)$$

a

$$g'''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + t(x - a))(x_k - a_k)(x_j - a_j)(x_i - a_i)$$

Dosazením spočítaných výrazů do (19) dostáváme výsledek

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)(x_j - a_j)(x_i - a_i) + R_3(x; a),$$

kde

$$R_3(x; a) := \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + \xi(x - a))(x_k - a_k)(x_j - a_j)(x_i - a_i).$$

Všimněte si, že bod $a + \xi(x - a)$ je bod uvnitř úsečky spojující body a a x . Dále také platí, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_3(x; a)}{\|x - a\|^2} = 0,$$

neboť

$$|R_3(x; a)| \leq \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + \xi(x - a)) \right| |x_k - a_k| |x_j - a_j| |x_i - a_i| \leq \frac{Cn^3}{3!} \|x - a\|^3$$

kde

$$C := \max_{i,j,k \in \hat{n}} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a + t(x - a)) \right|$$

je konečné, protože funkce $\partial_{x_k, x_j, x_i}^3 f$ jsou podle předpokladu spojité na kompaktní množině $[\phi]$.

Analogickým způsobem dokážeme následující obecný tvar Taylorovy věty.

Věta 3.30 (Taylor): Buď $f \in C^{s+1}(\Omega)$, kde $s \in \mathbb{N}_0$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvexní otevřená množina. Potom pro $a, x \in \Omega$ platí:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k}) + R_{s+1}(x; a),$$

kde

$$R_{s+1}(x; a) := \frac{1}{(s+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{s+1}=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s+1}}}(c) (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{s+1}} - a_{i_{s+1}})$$

a bod c leží uvnitř úsečky spojující body a a x . Navíc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{s+1}(x; a)}{\|x - a\|^s} = 0.$$

Definice 3.31 (Taylorův polynom, zbytek): V Taylorově Větě 3.30 se objevující polynom více proměnných

$$P_s(x; a) := f(a) + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k})$$

se nazývá *s-tý Taylorův polynom funkce f se středem v bodě a* . Dále $R_{s+1}(x; a)$ nazýváme *zbytkem po s-tém Taylorově polynomu funkce f se středem v a* .

Pro $f \in C^\infty(\Omega)$ je dle Taylorovy věty

$$f(x) = P_s(x; a) + R_{s+1}(x; a)$$

pro každé $s \in \mathbb{N}_0$. Nicméně z hladkosti f ještě **neplyne**, že

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R_{s+1}(x; a) = 0,$$

jak jsme viděli už v Příkladu 1.18. Podobně jako ve Větě 1.33 zajistí limitu $R_{s+1}(x; a) \rightarrow 0$ pro $s \rightarrow \infty$ určitá kontrola všech parciálních derivací f .

Důsledek 3.32: Nechť $f \in C^\infty(\Omega)$ a $a \in \Omega$. Pokud

$$(\exists C > 0)(\exists s_0 \in \mathbb{N})(\forall s \geq s_0)(\forall i_1, \dots, i_s \in \hat{n}) \left(\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(x) \right| \leq C^{s+1} s! \right),$$

potom existuje $r > 0$ tak, že

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R_s(x; a) = 0$$

pro všechna $x \in B_a(r)$.

Důkaz. Předpoklady věty umožňují odhadnout zbytek R_s následovně:

$$|R_s(x; a)| \leq \frac{1}{s!} \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right| |x_{i_1} - a_{i_1}| \dots |x_{i_s} - a_{i_s}| \leq C (nC \|x - a\|)^s$$

Tudíž, zvolíme-li $r < 1/(nC)$, potom pro $x \in B_a(r)$ je $\|x - a\| < 1/(nC)$, a proto pravá strana horního odhadu zbytku $R_s(x; a)$ jde k nule pro $s \rightarrow \infty$. $\square$

Lineární a kvadratický člen v Taylorově polynomu lze vyjádřit elegantně pomocí gradientu a Hessovy matice f , neboť

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = \nabla f(a)(x - a)$$

a

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_j - a_j)(x_i - a_i) = (x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a).$$

Taylorova věta pro funkci $f \in C^3(\Omega)$ nám tedy dává vzorec

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a) + R_3(x; a).$$

Všimněte si, že první dva členy rozvoje určují tečnou nadrovinu ke grafu funkce f v bodě a :

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a),$$

což představuje nejlepší lineární aproximaci hodnot funkce f v okolí bodu a . Přidáme-li i kvadratický člen, je

$$y = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a)$$

nejlepší kvadratickou aproximací hodnot funkce f v okolí bodu a a odpovídající plochu bychom mohli nazývat tečnou kvadratickou plochou ke grafu funkce f v bodě a (pokud $\nabla^2 f(a) \neq 0$).

Příklad 3.9: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(xy).$$

Snadným výpočet parciálních derivací f v bodě $(0, 0)$ dostaneme

$$\nabla f(0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0)$$

a

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

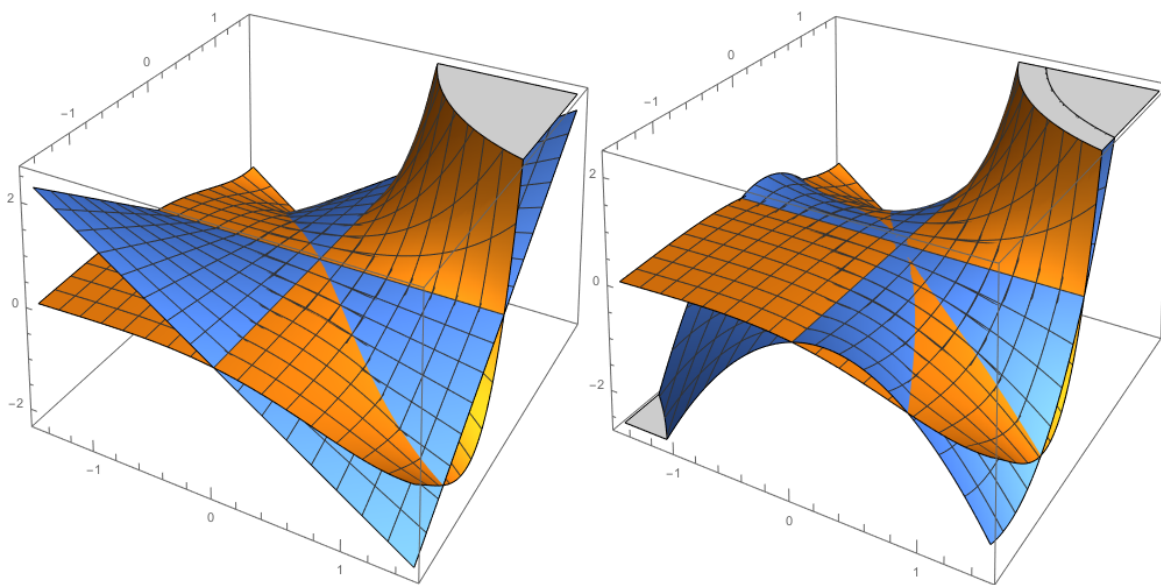
A proto je druhý Taylorův polynom f v bodě $(0, 0)$ funkce

$$P_2(x, y; 0, 0) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \nabla^2 f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy.$$

Třetí Taylorův polynom také snadno spočítáme a vyjde nám

$$P_3(x, y; 0, 0) = xy + x^2y + xy^2.$$

Jak aproximují funkce P_2 a P_3 funkční hodnoty f na okolí počátku ilustruje Obrázek 10.



Obrázek 10: Graf funkce f (oranžová) a Taylorových polynomů P_2 (modrá vlevo) a P_3 (modrá vpravo) z Příkladu 3.9.

3.6 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Známý postup hledání lokálních extrémů funkce jedné proměnné využívající diferenciálního počtu nyní zobecníme na funkce více proměnných.

Definice 3.33 ((Ostré) lokální minimum/maximum, lokální extrém): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \Omega$. Řekneme, že funkce f má v bodě a :

1. *lokální maximum* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$,
2. *ostré lokální maximum* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. *lokální minimum* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$,
4. *ostré lokální minimum* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$.

Bod a se nazývá *lokální extrém* funkce f , právě když je a lokální minimum nebo lokální maximum f .

Analogicky jako pro funkce jedné proměnné platí následující nutná podmínka extrému.

Věta 3.34 (Nutná podmínka extrému): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \Omega$ je extrém funkce f . Potom existuje-li $\partial_{x_i} f(a)$ pro $i \in \hat{n}$, je $\partial_{x_i} f(a) = 0$. Speciálně, je-li f diferencovatelná v bodě a , potom $\nabla f(a) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro $i \in \hat{n}$ parciální derivace $\partial_{x_i} f(a)$ existuje. Potom funkce

$$g_i(t) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

je funkce jedné proměnné, která má v bodě $t = a_i$ extrém a je v tomto bodě také diferencovatelná. Odtud a z nutné podmínky extrému funkce jedné proměnné, dostaneme

$$0 = g'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

□

Definice 3.35 (Kritický bod): Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Pokud $\nabla f(a) = 0$, nazýváme bod a *kritický bod* (nebo také *stacionární bod*) funkce f .

Podle Věty 3.34 jsou extrémy diferencovatelné funkce f jejími kritickými body. Samozřejmě kritický bod f ještě nemusí být extrém f . V případě dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné je kritický bod a ostré lokální minimum resp. maximum f , pokud $f''(a) > 0$ resp. $f''(a) < 0$. Pro funkce více proměnných funguje obdobná postačující podmínka, jen roli známénka hraje definitnost Hessovy matice f .

Připomeňme si definici definitnosti matice z lineární algebry.

Definice 3.36 (PD, PSD, ND, NSD, IND): Symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme:

1. *pozitivně definitní (PD)* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(x^T A x > 0)$,

2. *pozitivně semidefinitní (PSD)* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x^T A x \geq 0)$ a A není PD,
3. *negativně definitní (ND)* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})(x^T A x < 0)$,
4. *negativně semidefinitní (NSD)* $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x^T A x \leq 0)$ a A není ND,
5. *indefinitní (IND)* $\Leftrightarrow (\exists x, y \in \mathbb{R}^n)(x^T A x > 0 \wedge y^T A y < 0)$.

Poznámka: V anglické literatuře se definice PSD/NSD většinou uvádí bez dodatku „ A není PD/ND“, tzn., že PD matice tvoří podmnožinu PSD matic podobně jako čísla kladná jsou také nezáporná. My se zde ovšem přidržíme uvedené exkluzivní definice používané na FJFI.

Čtenář by měl být obeznámen z kurzu lineární algebry s tím, jak určit definitnost symetrické matice tzv. metodou „doplňování na čtverce“ kvadratické formy $q_A(x) := x^T A x$. Připomeňme si ještě užitečné Sylvestrovo kritérium striktní definitnosti matice.

Věta 3.37 (Sylvestrovo kritérium): Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ a $A = A^T$. Pro $k \in \hat{n}$ označme $\Delta_k := \det A[k]$ (*hlavní minory* A), kde $A[k] \in \mathbb{R}^{k,k}$ je $k \times k$ podmatice matice A , tj. $(A[k])_{i,j} = A_{i,j}$, $\forall i, j \in \hat{k}$. Potom platí:

1. A je PD $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n})(\Delta_k > 0)$,
2. A je ND $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n})((-1)^k \Delta_k > 0)$.

Pro důkaz postačující podmínky pro extrém funkce více proměnných budeme ještě potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 3.38: Nechť $A : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n,n}$ je zobrazení s hodnotami v prostoru symetrických matic $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n,n}$, které je spojitě v bodě $a \in \Omega$.

1. Je-li $A(a)$ PD resp. ND, potom existuje H_a tak, že pro všechna $x \in H_a$ je $A(x)$ PD resp. ND.
2. Je-li $A(a)$ IND, potom existuje H_a a vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že pro všechna $x \in H_a$ je $u^T A(x) u > 0$ a $v^T A(x) v < 0$.

Důkaz. 1. Nechť $A(a)$ je PD. Všechny hlavní minory $\Delta_k := \det A[k] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce v bodě a , neboť determinant je spojitou funkcí maticových elementů $A_{i,j}$. A maticové elementy $A_{i,j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou také spojitě funkce v bodě a , jak plyne z předpokladu spojitosti maticové funkce A v bodě a . Tedy hlavní minory Δ_k jsou složením spojitých funkcí, a tudíž spojitě v a pro každé $k \in \hat{n}$.

Podle Sylvestrova kritéria je $\Delta_k(a) > 0$ pro všechna $k \in \hat{n}$. Díky spojitosti funkce Δ_k v bodě a najdeme okolí $H_a^{(k)}$ tak, že $\Delta_k(x) > 0$ pro všechna $x \in H_a^{(k)}$. Položíme-li

$$H_a := \bigcap_{k=1}^n H_a^{(k)},$$

potom $(\forall x \in H_a)(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k(x) > 0)$, a proto jsou matice $A(x)$ PD pro všechna $x \in H_a$ podle Sylvestrova kritéria.

Pro ND variantu tvrzení stačí využít již dokázanou PD variantu a to, že matice A je PD, právě když $-A$ je ND.

2. Nakonec předpokládejme, že $A(a)$ je IND. Potom existují vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ takové, že $u^T A(a)u > 0$ a $v^T A(a)v < 0$. Jelikož jsou funkce $x \mapsto u^T A(x)u$ a $x \mapsto v^T A(x)v$ spojité v bodě a (rozmyslete), musí existovat okolí $H_a^{(u)}$ a $H_a^{(v)}$ bodu a tak, že

$$(\forall x \in H_a^{(u)})(u^T A(x)u > 0) \quad \text{a} \quad (\forall x \in H_a^{(v)})(v^T A(x)v < 0).$$

Tudíž pro důkaz tvrzení stačí položit $H_a := H_a^{(u)} \cap H_a^{(v)}$. □

Věta 3.39 (Postačující podmínka pro extrém): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$ a bod $a \in \Omega$ je kritický bod f . Potom platí:

1. Je-li $\nabla^2 f(a)$ PD, potom má f v bodě a ostré lokální minimum.
2. Je-li $\nabla^2 f(a)$ ND, potom má f v bodě a ostré lokální maximum.
3. Je-li $\nabla^2 f(a)$ IND, potom a není extrém f a nazývá se *sedlový bod* f .

Důkaz. Podle předpokladu jsou $\partial_{x_i, x_j} f$ spojité funkce na Ω , je i Hessova matice $\nabla^2 f$ spojitě zobrazení na Ω s hodnotami v symetrických maticích, viz Důsledek 3.29. Zde požíváme argument analogický tomu z důkazu Věty 3.13.

1. Předpokládejme nejprve, že $\nabla^2 f(a)$ je PD. Podle Lemma 3.38 existuje $\delta > 0$ tak, že $\nabla^2 f(x)$ je PD pro všechna $x \in B_a(\delta)$. Vezměme $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$ libovolné ale pevné. Podle Taylorovy věty 3.30 máme

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(c)(x - a),$$

kde c leží na úsečce spojující a a x , a tudíž je $c \in B_a(\delta)$. Tedy matice $\nabla^2 f(c)$ je PD. Přihlédneme-li ještě k tomu, že podle předpokladu je a kritický bod f , tzn., že $\nabla f(a) = 0$, dostáváme

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(c)(x - a) > 0,$$

neboť $x \neq a$ a $\nabla^2 f(c)$ je PD. Odtud plyne, že $f(x) > f(a)$ pro každé $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$, a tedy f má v bodě a ostré lokální minimum.

2. Je-li $\nabla^2 f(a)$ ND, je postup zcela analogický jako v bodě 1. Jediný rozdíl je, že kvadratická forma $(x - a)^T \nabla^2 f(c)(x - a)$ z pravé strany poslední rovnice je tentokrát záporná, neboť $\nabla^2 f(c)$ je ND. Odtud vyvodíme, že $f(x) < f(a)$ pro každé $x \in B_a(\delta) \setminus \{a\}$, a proto f má v bodě a ostré lokální maximum.

3. Je-li $\nabla^2 f(a)$ IND, potom opět podle Lemma 3.38 existuje $\delta > 0$ a vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že

$$u^T \nabla^2 f(x)u > 0 \quad \text{a} \quad v^T \nabla^2 f(x)v < 0$$

pro všechna $x \in B_a(\delta)$. Dále z Taylorovy věty a předpokladu $\nabla f(a) = 0$ plyne pro každé $x \in B_a(\delta)$ rovnost

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(c_x)(x - a),$$

kde $c_x \in B_a(\delta)$; zde pro jistotu zdůrazňujeme indexem závislost c_x na x . Položme $x := a + tu$, kde $t \in \mathbb{R}$. Je-li $|t| < \epsilon := \delta/\|u\|$ (uvědomte si, že $u \neq 0$), potom $x = a + tu \in B_a(\delta)$, a proto máme

$$f(a + tu) - f(a) = \frac{1}{2}(tu)^T \nabla^2 f(c_t)(tu) = \frac{t^2}{2} u^T \nabla^2 f(c_t) u > 0$$

pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$, neboť $c_t \in B_a(\delta)$. Dokázali jsme tedy, že existuje $\epsilon > 0$ tak, že

$$f(a + tu) > f(a)$$

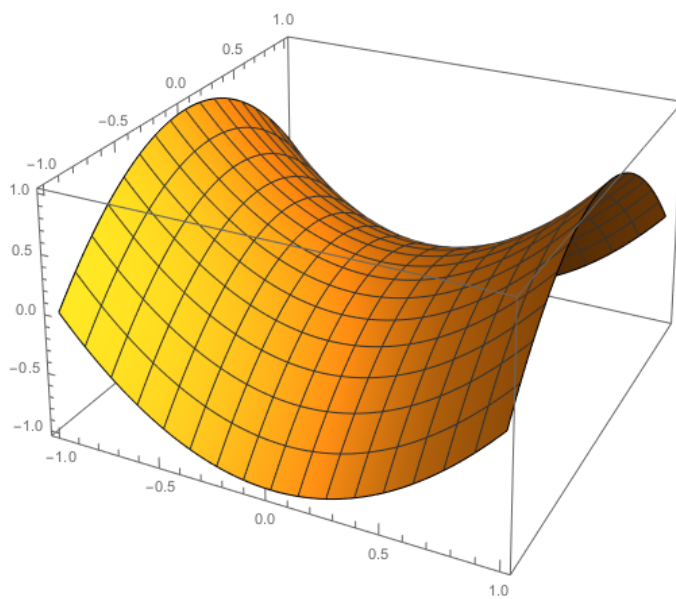
pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$. Analogicky bychom ukázali, že

$$f(a + tv) < f(a)$$

pro všechna $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$. Tudíž a není extrém f . □

Poznámka: Za silnějšího předpokladu $f \in C^3(\Omega)$, je možné důkaz Věty 3.39 zjednodušit, viz např. [7, Věta 9.23].

Poznámka: Důkaz Věty 3.39 ukazuje, že pokud je $\nabla^2 f(a)$ IND, potom existují dva směry $u, v \in \mathbb{R}^n$ tak, že funkce f zúžená na přímku $t \mapsto a + tu$ má v bodě a ostré lokální minimum, kdežto funkce f zúžená na přímku $t \mapsto a + tv$ má v bodě a ostré lokální maximum. Geometricky tato situace odpovídá představě *sedla* v bodě a , viz Obrázek 11.



Obrázek 11: Sedlový bod (funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ na okolí bodu $(0, 0)$).

Všimněte si, že kritérium, které poskytuje Věta 3.39, není vyčerpávající. V případě, že $\nabla f^2(a)$ je PSD nebo NSD, nemůžeme udělat žádný závěr, neboť kritický bod a může i nemusí být extrém f , viz následující příklady. V tomto případě je matice $\nabla f^2(a)$ singulární a kritický bod a se nazývá *degenerovaný*.

Příklad 3.10: Funkce $f(x, y) = x^4 + y^4$ má v bodě $(0, 0)$ ostré dokonce globální minimum, ale Hessova matice v kritickém bodě $(0, 0)$ funkce f je nulová, tzn. PSD (i NSD).

Příklad 3.11: Funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

nemá v bodě $(0, 0)$ extrém, neboť hodnoty $f(0, t) = t^3$ jsou kladné pro $t > 0$ a záporné pro $t < 0$. Nicméně bod $(0, 0)$ je kritický bod f a Hessova matice f v počátku je

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a tudíž PSD.

Platí ale následující opačná implikace.

Věta 3.40: Nechť $f \in C^2(\Omega)$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum resp. lokální maximum, potom je $\nabla^2 f(a)$ PSD, nebo PD resp. NSD, nebo ND.

Důkaz. Nechť má f v bodě a minimum. Potom $\nabla f(a) = 0$ podle Věty 3.34. Nechť $r > 0$ je takové, že $B_a(r) \subset \Omega$ a $f(a) \leq f(x)$ pro všechna $x \in B_a(r)$. Zvolme pevně $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$. Potom pro všechna $t \in \mathbb{R}$ taková, že $0 < |t| < r/\|h\|$, je $a + th \in B_a(r)$ a podle Taylorovy Věty 3.30 platí

$$0 \leq \frac{f(a + th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{t} \nabla f(a)h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(c_t) h = \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(c_t) h. \quad (20)$$

Vektor c_t leží na úsečce mezi a a $a + th$, a proto $c_t \rightarrow a$ pro $t \rightarrow 0$. Navíc zobrazení $\nabla^2 f$ je spojitě v a , jak plyne z předpokladu $f \in C^2(\Omega)$. Proto limitním přechodem $t \rightarrow 0$ v nerovnosti (20) dostaneme

$$h^T \nabla^2 f(a) h \geq 0.$$

Tato nerovnost platí pro libovolné $h \in \mathbb{R}^n$, z čehož plyne, že matice $\nabla^2 f(a)$ je PSD, nebo PD.

Má-li f v bodě a maximum, stačí aplikovat právě dokázané tvrzení na funkci $-f$. $\square$

Tedy v případech, kdy je a degenerovaný kritický bod f , tj. $\nabla^2 f(a)$ je PSD nebo NSD, nemáme postačující podmínku pro extrém. I v těchto případech se někdy dá rozhodnout na základě vyšších derivací, pokud existují. Situace je podobná jako v případě funkce jedné proměnné (uvažte např. $f(x) = x^4$), ale značně komplikovanější. Pojem definitnosti je třeba rozšířit z matic na tenzory, což není problém, ale ukázat, že daný tenzor je pozitivně definitní může být kombinatoricky komplikovaná úloha. V případě funkcí dvou proměnných ještě existují poměrně rozumné metody, viz např. [9, Sekce 3.7.2]. My se zde případy degenerovaných kritických bodů zabývat nebudeme.

Metody diferenciálního počtu umožňují nalézt pouze lokální extrémy, ačkoliv v praxi bychom často rádi uměli najít *globální* extrémy nějaké funkce. Někdy lze z lokálních odpovědí udělat odpovědi globální např. za předpokladu konvexnosti funkce f , což je ale poměrně silný předpoklad, viz Cvičení 3.11. Pokud nás otázka globálních extrémů zajímá pro spojitě funkce omezené na kompaktní množinu, víme že tyto extrémy musí existovat z Věty 2.64. Jednou možností, jak

je hledat, je vyšetřit funkci na vnitřku kompaktní množiny a zvlášť na její hranici Lagrangeovou metodou pro vázané extrémy, viz dále. Potom stačí srovnat hodnoty funkce v nalezených extrémech. Obecně ale žádný univerzální postup pro důkaz existence a lokalizaci globálních extrémů neexistuje a jednotlivé optimalizační problémy musíme řešit případ od případu.

Jednoduchou ale užitečnou aplikací vyložené metody hledání extrémů, která se objevuje v numerické matematice či statistice, ukazuje následující příklad.

Příklad 3.12 (Metoda nejmenších čtverců): Předpokládejme, že máme k dispozici sadu dat $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2$ a chceme nalézt lineární kombinaci daných funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$, tj. funkci

$$f = \sum_{i=1}^m c_i f_i,$$

tak, aby funkční hodnoty funkce f v bodech x_i „co nejlépe“ odpovídaly hodnotám y_i pro každé $i \in \hat{n}$. Cílem je tedy určit neznámé koeficienty lineární kombinace $c_1, c_2, \dots, c_m$. Budeme předpokládat, že $m \leq n$ což není na závadu, neboť typicky je množství dat n mnohem větší než počet funkcí m . Dále budeme předpokládat, že soubor funkcí $f_1, \dots, f_m$ je lineárně nezávislý, což je také přirozený předpoklad, který nepředstavuje žádné omezení.

Funkce f_i mohou být např. monomy $f_i(x) = x^i$. V takovém případě prokládáme data polynomiální křivkou.

Metoda nejmenších čtverců spočívá v myšlence minimalizovat tzv. střední kvadratickou odchylku celkové chyby, tzn., že hledáme koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_m$ tak, aby hodnota

$$F(c) := \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (Ac)_i)^2 = \|y - Ac\|^2$$

byla co nejmenší. Zde jsme označili $c := (c_1, \dots, c_m)^T$ a

$$A := \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Aplikujme analytický postup pro hledání extrémů funkcí více proměnných na funkci $F = F(c)$. Nejprve spočítáme gradient funkce F . Pro $j \in \hat{m}$ máme

$$\frac{\partial F}{\partial c_j}(c) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (Ac)_i) A_{i,j} = -2(A^T y)_j + 2(A^T Ac)_j.$$

A tedy $\nabla F(c) = 0$, právě když

$$A^T y - A^T Ac = 0. \quad (21)$$

Z lineární nezávislosti souboru funkcí $f_1, \dots, f_m$ plyne, že matice A má plnou hodnost, tzn. $h(A) = m$, neboť $m \leq n$. V takovém případě je matice $A^T A$ regulární, viz Cvičení 3.13. Rovnice (21) má proto jediné řešení

$$c = (A^T A)^{-1} A^T y.$$

Dále ověříme, že F má v nalezeném vektoru c ostré lokální minimum. Parciální derivace F druhého řádu jsou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c_i \partial c_j}(c) = 2(A^T A)_{j,i} \quad \forall i, j \in \hat{m},$$

a tedy

$$\nabla^2 F(c) = 2A^T A.$$

Matice $A^T A$ je pozitivně definitní, neboť pro $x \in \mathbb{R}^m$ je

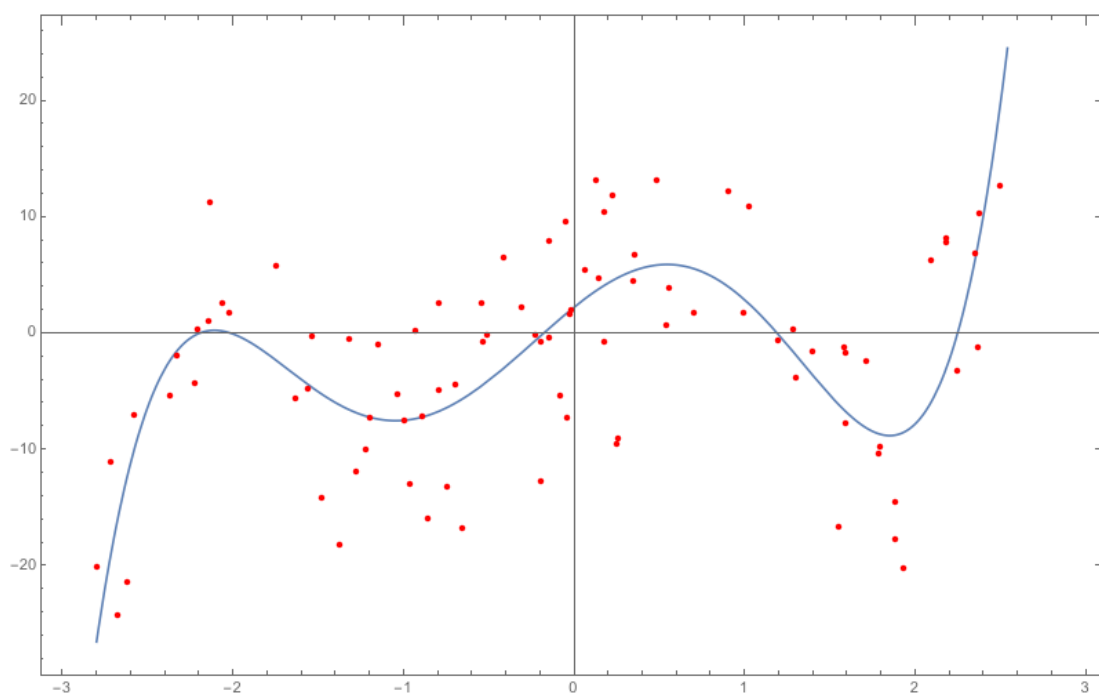
$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

a rovnost nastává pouze pro $x = 0$, protože je $A^T A$ regulární.

Nakonec ověříme, že je funkce F ryze konvexní na $\mathbb{R}^m$. Potom bude vektor c jediným globálním minimem F podle tvrzení ze Cvičení 3.11 a 3.12. Uvažujme tedy nějaká $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^m$, $c_1 \neq c_2$ a $t \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} F(tc_1 + (1-t)c_2) &= \|y - A(tc_1 + (1-t)c_2)\|^2 = \|t(y - Ac_1) + (1-t)(y - Ac_2)\|^2 \\ &\leq (t\|y - Ac_1\| + (1-t)\|y - Ac_2\|)^2 < tF(c_1) + (1-t)F(c_2), \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost vyplývá z ryzí konvexnosti kvadratické funkce $x \mapsto x^2$.



Obrázek 12: Ilustrace metody nejmenších čtverců. Data proložená polynomiální křivkou stupně 5.

3.7 Věta o inverzní funkci

Naším dalším cílem je dokázat tzv. Větu o inverzní funkci a s její pomocí také tzv. Větu o implicitní funkci. Obě věty mají mnoho aplikací.

Připomeňme, že derivaci $Df(a)$ chápeme podle potřeby buď jako lineární zobrazení, nebo jako jeho matici vzhledem ke standardním bázím a ve značení to nijak nerozlišujeme. Ztotožňujeme tak derivaci $Df(a)$ a Jacobiho matici

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a)$$

pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$. Použití symbolu $Df(a)$ ve smyslu Jacobiho matice f v bodě a je výhodné z důvodu úspory místa, a proto ho budeme nadále preferovat.

Představme si, že chceme řešit rovnici tvaru $f(x) = y$, kde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je daná vektorová funkce. Rozepíšeme-li rovnici po komponentách, hledáme řešení obecného systému

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

To znamená, že chceme vědět, zda lze vyjádřit neznámé $x_1, \dots, x_n$ jako funkce $y_1, \dots, y_n$. Takový systém téměř nikdy nelze řešit explicitně i v případě, že řešení existuje. Důležitou odpověď na otázku existence řešení nám dává právě Věta o inverzní funkci. Nicméně má pouze **lokální** charakter. Přesněji věta říká, že je-li $a \in \Omega$ a $f \in C^1(\Omega)$, vyplývá z podmínky $\det Df(a) \neq 0$, že f je prostá na nějakém okolí bodu a , a tudíž invertibilní.

I v případě, že je $\det Df(x) \neq 0$ ve všech bodech $x \in \Omega$, neplyne z toho, že je f prostá na množině Ω , viz Příklad 3.13. Zde je situace odlišná od speciálního případu funkce jedné proměnné, kde platí, že spojitě diferencovatelná funkce f na intervalu (a, b) s nenulovou derivací na (a, b) je (globálně) prostá na (a, b) . Rozhodnout o (globální) prostotě funkce více proměnných je obecně obtížný problém.

Pro potřeby důkazu Věty o inverzní funkci si nejprve dokážeme jedno pomocné tvrzení týkající se invertibility lineárních zobrazení. Toto tvrzení nachází aplikace i na mnoha jiných místech. Připomeňme, že na prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zavádíme normu podle Definice 3.3.

Lemma 3.41: Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a A je bijekce. Pokud platí nerovnost

$$\|B - A\| \|A^{-1}\| < 1,$$

potom je také B bijekce.

Důkaz. Operátor B lze zapsat ve tvaru

$$B = A + (B - A) = A(I - C),$$

kde $C := -A^{-1}(B - A)$. Odtud je jasné, že pokud je $I - C$ bijekce, musí být i B bijekcí. Důležité je, že

$$\|C\| \leq \|A^{-1}\| \|B - A\| < 1,$$

kde jsme využili nerovnost z Lemma 3.4 a předpoklad dokazovaného tvrzení. Stačí tedy dokázat implikaci

$$\|C\| < 1 \quad \Rightarrow \quad I - C \text{ je bijekce,}$$

což provedeme v další části důkazu.

Důkaz provedeme tak, že inverzi k $I - C$ přímo zkonstruujeme. Definujme operátor $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, kde

$$X_n := \sum_{k=0}^n C^k = I + C + \cdots + C^n.$$

Nejprve ověříme, že limita v definici X existuje. Protože má prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ konečnou dimenzi (rovnou n^2), je $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ s normou $\|\cdot\|$ úplný prostor, viz Cvičení 2.45. Stačí proto ukázat, že je posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. Jelikož číselná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|C\|^k$$

konverguje, neboť podle předpokladu je $\|C\| < 1$, dostaneme z Bolzanovy–Cauchyho podmínky pro číselné řady

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \|C\|^k < \epsilon \right).$$

Potom pro $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ máme

$$\|X_{n+p} - X_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} C^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|C^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|C\|^k < \epsilon,$$

kde jsme použili nerovnost $\|C^k\| \leq \|C\|^k$, která plyne z 1. tvrzení Lemma 3.4. Tedy $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Nakonec ověříme, že $(I - C)X = I$, z čehož už vyplývá, že $I - C$ je bijekce (a navíc $(I - C)^{-1} = X$) díky konečnosti dimenze $\mathbb{R}^n$. Protože jsou I i C omezené operátory, neboť $\dim \mathbb{R}^n = n < \infty$, jsou podle Lemma 3.4 I i C spojitě. Odtud poté máme

$$\begin{aligned} (I - C)X &= (I - C) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - C) \sum_{k=0}^n C^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n C^k - \sum_{k=0}^n C^{k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - C^{n+1}) = I, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $C^n \rightarrow 0$, což plyne opět z nerovnosti $\|C^n\| \leq \|C\|^n$ a předpokladu $\|C\| < 1$. $\square$

Nyní již můžeme dokázat Větu o inverzní funkci.

Věta 3.42 (O inverzní funkci): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je třídy C^1 na Ω a $a \in \Omega$. Pokud $\det Df(a) \neq 0$, potom platí:

1. Existuje okolí H_a bodu a tak, že f je prosté na H_a .
2. Množina $f(H_a)$ je otevřená.
3. Inverzní zobrazení f^{-1} je třídy C^1 na $f(H_a)$, $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in H_a$ a platí:

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

pro všechna $x \in H_a$.

Důkaz. 1. Označme $A := Df(a)$. Podle předpokladu je matice A regulární, a tudíž invertibilní. Dále z předpokladu $f \in C^1(\Omega)$ plyne, že je Df spojitě zobrazení na Ω . Proto existuje $r > 0$ takové, že koule $B_a(r) \subset \Omega$ (z otevřenosti Ω) a pro všechny $x \in B_a(r)$ je

$$\|Df(x) - A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$

Ukážeme, že f je prosté na $B_a(r)$, tedy v tvrzení 1. můžeme vzít $H_a := B_a(r)$.

Pro $y \in \mathbb{R}^n$ si definujeme pomocnou funkci $\phi_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\phi_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x)).$$

Všimněte si, že

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ je pevný bod } \phi_y, \text{ tj. } \phi_y(x) = x.$$

Pro derivaci ϕ_y máme

$$D\phi_y(x) = I - A^{-1}Df(x) = A^{-1}(A - Df(x))$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud pro libovolné $x \in B_a(r)$ dostaneme

$$\|D\phi_y(x)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - Df(x)\| < \|A^{-1}\| \frac{1}{2\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2},$$

kde jsme využili nerovnost z Lemma 3.4. Potom z Věty 3.20 vyplývá nerovnost

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \tag{22}$$

pro všechna $x_1, x_2 \in B_a(r)$, neboť koule $B_a(r)$ je konvexní množina.

Z nerovnosti (22) plyne, že zobrazení ϕ_y má nejvýše jeden pevný bod v množině $B_a(r)$. Jinak by z předpokladu existence dvou různých bodů $x_1, x_2 \in B_a(r)$ takových, že $\phi_y(x_1) = x_1$ a $\phi_y(x_2) = x_2$, nerovnost (22) implikovala logický spor $1 \leq 1/2$. Jinými slovy k libovolnému

$y \in \mathbb{R}^n$ existuje nejvýše jedno $x \in B_a(r)$ takové, že $f(x) = y$, což znamená, že f je na $B_a(r)$ prosté.

2. Dokážeme, že $f(H_a)$ je otevřená. Nechť $y_0 \in f(H_a)$. Potom existuje $x_0 \in H_a$ tak, že $f(x_0) = y_0$. Jelikož je H_a otevřená, existuje $\epsilon > 0$ tak, že $\overline{B_{x_0}(\epsilon)} \subset H_a$. Ukážeme, že

$$y \in B_{y_0} \left(\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|} \right) \Rightarrow y \in f(H_a),$$

z čehož plyne otevřenost množiny $f(H_a)$.

Zvolme tedy $y \in B_{y_0}(\epsilon/(2\|A^{-1}\|))$ libovolné ale pevné. Potom

$$\|\phi_y(x_0) - x_0\| = \|A^{-1}(y - y_0)\| \leq \|A^{-1}\| \|y - y_0\| < \|A^{-1}\| \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Odtud s využitím nerovnosti (22) dostaneme pro každé $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ odhad

$$\|\phi_y(x) - x_0\| \leq \|\phi_y(x) - \phi_y(x_0)\| + \|\phi_y(x_0) - x_0\| < \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Tedy $\phi_y(x) \in B_{x_0}(\epsilon)$ pro $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$. Z toho vidíme, že $\phi_y : \overline{B_{x_0}(\epsilon)} \rightarrow \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ je zobrazení mezi úplnými prostory $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$, neboť množina $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ je uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathbb{R}^n$, viz Věta 2.80. Podle nerovnosti (22) je navíc ϕ_y kontrahující zobrazení na $\overline{B_{x_0}(\epsilon)}$. Potom podle Banachovy věty o pevném bodě (Věta 2.84) existuje $x \in \overline{B_{x_0}(\epsilon)}$ takové, že $\phi_y(x) = x$, neboli $f(x) = y$. Odtud plyne, že

$$y \in f \left(\overline{B_{x_0}(\epsilon)} \right) \subset f(H_a),$$

což jsme chtěli dokázat.

3. Zvolme $y \in f(H_a)$ a $k \in \mathbb{R}^n$ tak, že $y + k \in f(H_a)$. Potom existují $x, x + h \in H_a$ tak, že

$$f(x) = y \quad \text{a} \quad f(x + h) = y + k.$$

Potom pro lib. $z \in \mathbb{R}^n$ je

$$\phi_z(x + h) - \phi_z(x) = h + A^{-1}(f(x) - f(x + h)) = h - A^{-1}k.$$

Odtud a z nerovnosti (22) dostaneme

$$\|h - A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Přihlédneme-li ještě k nerovnosti, viz Cvičení 2.1

$$\|h - A^{-1}k\| \geq \|h\| - \|A^{-1}k\|$$

vidíme, že

$$\|h\| \leq 2\|A^{-1}k\| \leq 2\|A^{-1}\|\|k\|. \quad (23)$$

Na začátku důkazu jsme okolí H_a zkonstruovali tak, aby platilo $\|A^{-1}\|\|Df(x) - A\| < 1/2$ pro všechna $x \in H_a$. Odtud a z Lemma 3.41 plyne, že je $Df(x)$ invertibilní pro všechna $x \in H_a$, neboli

$$(\forall x \in H_a)(\det Df(x) \neq 0).$$

Z toho dále vyvodíme, že je zobrazení $x \mapsto (Df(x))^{-1}$ spojitě na H_a . To je vidět např. ze známého vzorečku pro inverzní matici z lineární algebry

$$(Df(x))^{-1} = \frac{1}{\det Df(x)} (Df(x))^{\text{adj}},$$

neboť determinant $\det Df(x) \neq 0$ a je spojitou funkcí maticových elementů $Df(x)$, což jsou parciální derivace f , které jsou podle předpokladu $f \in C^1(\Omega)$ spojitě. Také elementy adjungované matice $(Df(x))^{\text{adj}}$ jsou spojitými funkcemi parciálních derivací f , neboť jsou opět definovány jako jisté determinanty.

Označíme-li si nyní inverzní funkci $g := f^{-1}$ na $f(H_a)$ (jejíž existence již byla dokázána), potom k důkazu 3. tvrzení nyní už stačí ukázat, že je g diferencovatelná na $f(H_a)$ a pro její derivaci platí

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

pro všechna $x \in H_a$. Potom bude $g \in C^1(f(H_a))$ a platí vzorec pro derivaci inverzní funkce.

Protože

$$g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1}k = h - (Df(x))^{-1}k = -(Df(x))^{-1}(f(x+h) - f(x) - Df(x)h),$$

dostaneme s využitím (23) nerovnost

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1}k\|}{\|k\|} \leq \frac{\|Df(x)\|}{2\|A^{-1}\|} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|}{\|h\|}$$

Z nerovnosti (23) plyne, že $h \rightarrow 0$, pokud $k \rightarrow 0$. Protože výraz napravo v poslední nerovnosti jde k nule pro $h \rightarrow 0$, neboť f je diferencovatelná v $x \in H_a$, dostáváme konečně, že

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|g(y+k) - g(y) - (Df(x))^{-1}k\|}{\|k\|} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Všimněte si, že předpoklad $f \in C^1(\Omega)$ byl plně využit až v důkazu 3. tvrzení Věty 3.42. Pro důkaz tvrzení 1. a 2. Věty 3.42 stačilo předpokládat, že f je diferencovatelná na Ω , Df spojitá v bodě a a $\det Df(a) \neq 0$. Spojitost derivace f v bodě a už ale vypustit nelze, viz Cvičení 3.16.

Poznámka: Pokud je funkce f ve Větě 3.42 o inverzní funkci třídy C^k na Ω , kde $k \geq 2$, potom je také f^{-1} třídy C^k na $f(H_a)$. To lze dokázat indukcí a derivováním vztahu pro Df^{-1} z 3. tvrzení Věty 3.42. Postup jenom naznačíme. Využijeme-li vyjádření inverzní matice pomocí

matice adjugované, můžeme vzorec pro parciální derivaci $\partial(f^{-1})_i/\partial y_j$ v bodě $y \in f(H_a)$ napsat ve tvaru

$$\frac{\partial(f^{-1})_i}{\partial y_j}(y) = (Df^{-1}(y))_{i,j} = (Df(f^{-1}(y)))_{i,j}^{-1} = \frac{(Df(f^{-1}(y)))_{i,j}^{adj}}{\det Df(f^{-1}(y))},$$

kde $i, j \in \hat{n}$. Z tohoto vyjádření je vidět, že jak čítec tak jmenovatel výrazu vpravo jsou polynomiální funkce parciálních derivací $\partial f_r/\partial x_s$, $r, s \in \hat{n}$, v bodech $f^{-1}(y)$, tj.

$$\frac{\partial(f^{-1})_i}{\partial y_j}(y) = \frac{P_{i,j} \left(\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right)_{r,s \in \hat{n}} \right)}{Q \left(\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s}(f^{-1}(y)) \right)_{r,s \in \hat{n}} \right)} \quad (24)$$

pro nějaké polynomy $P_{i,j}$ a Q v n^2 proměnných. Navíc nenulovost polynomu Q ve jmenovateli je zaručena Větou 3.42. Potom je-li např. $f \in C^2(\Omega)$, je také $f \in C^1(\Omega)$ a podle indukčního předpokladu je i $f^{-1} \in C^1(f(H_a))$. Potom bychom parciálním derivováním výrazu vpravo v rovnosti (24) podle y_k dostali napravo racionální funkci v proměnných $\partial^2 f_r/\partial x_p \partial x_s$ a $\partial f_l^{-1}/\partial y_k$, kde $p, r, s, l \in \hat{n}$, s nenulovým jmenovatelem. Z toho vyplývá, že existují druhé parciální derivace $\partial^2(f^{-1})_i/\partial y_k \partial y_j$ a jsou spojitě na $f(H_a)$.

Příklad 3.13: Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou vztahem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je f hladká na $\mathbb{R}^2$, a tudíž také $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dále

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^x \neq 0$$

pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podle Věty 3.42 existuje pro každý bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nějaké okolí (x, y) , na němž je funkce f prostá. Jinými slovy f je lokálně prostá na celém $\mathbb{R}^2$. Avšak f není prostá na $\mathbb{R}^2$, protože

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$$

pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Přímým důsledkem Věty 3.42 je tzv. věta o otevřeném zobrazení (Open mapping theorem). Zobrazení se nazývá *otevřené*, pokud zobrazuje otevřené množiny na otevřené množiny (pozor, neplést se spojitostí zobrazení, pro které jsou naopak **vzory** otevřených množin otevřené). V matematice existuje víc vět o otevřeném zobrazení. Zde uvedená se týká spojitě diferencovatelných funkcí. Další věta o otevřeném zobrazení platí např. pro holomorfní funkce.

Důsledek 3.43: (o otevřeném zobrazení) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ a $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. Potom je f otevřené, tj. pro každou otevřenou množinu $U \subset \Omega$ je $f(U)$ otevřená množina.

Důkaz. Buď $U \subset \Omega$ otevřená množina. Je-li $U = \emptyset$, pak $f(U) = \emptyset$. Nechť tedy $U \neq \emptyset$. Zvolme $b \in f(U)$. Potom existuje $a \in U$ tak, že $f(a) = b$. Podle předpokladů je $\det Df(a) \neq 0$ a jsou splněny předpoklady Věty 3.42. Potom existuje okolí H_a , o kterém můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $H_a \subset U$ (jinak vezmeme $H_a \cap U$). Podle Věty 3.42 je $f(H_a)$ otevřená množina, $b \in f(H_a)$ a $f(H_a) \subset f(U)$. Tzn., že bod b leží v množině $f(U)$ i se svým okolím $f(H_a)$, a tudíž je $f(U)$ otevřená. $\square$

Tvrzení Věty 3.42 nelze obrátit v následujícím smyslu: Z prostoty funkce $f \in C^1(\Omega)$ **neplyne**, že $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. To ilustruje už jednoduchý příklad funkce jedné proměnné $f(x) = x^3$, která je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, avšak $f'(0) = 0$. Přidáme-li ovšem předpoklad diferencovatelnosti inverze f^{-1} na Ω , potom již $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. V takovém případě můžeme totiž aplikovat Větu 3.7 při derivaci identity

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

ze které plyne, že

$$Df^{-1}(f(x)) Df(x) = I$$

a tudíž $\det Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \Omega$. Tím se dostáváme k pojmu *difeomorfismus*.

Definice 3.44 (Difeomorfismus): Buďte $U, V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ nazýváme *difeomorfismus*, právě když f je bijekce U na V , $f \in C^1(U)$ a $f^{-1} \in C^1(V)$.

Poznámka: Požadavek $f^{-1} \in C^1(V)$ v definici difeomorfismu není nadbytečný, jak opět ilustruje např. funkce $f(x) = x^3$, která je hladkou bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, ale inverzní funkce $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ není diferencovatelná v bodě $y = 0$.

Zdůrazněme ještě jednou, že funkce splňující předpoklady Věty o inverzní funkci ještě nemusí být difeomorfismus (je to pouze lokální difeomorfismus). Dále z Věty 3.5 plyne, že každý difeomorfismus je homeomorfismus.

Příklad 3.14: Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definována vztahem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte na jaké množině $U \subset \mathbb{R}^2$ je f lokálně prostá a spočítejte $Df^{-1}(f(x, y))$ pro $(x, y) \in U$.

Protože

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 - y^2),$$

je f lokálně invertibilní na množině $U = \{(x, y) \mid |x| \neq |y|\}$ podle Věty o inverzní funkci. Množina U rozděluje rovinu $\mathbb{R}^2$ na čtyři kvadranty. Můžete si rozmyslet, že f je prostá na každém z těchto kvadrantů a z rovnice $f(x, y) = (u, v)$ spočítat inverzní funkci. Např. pro (x, y) z kvadrantu $U_1 := \{(x, y) \mid |x| < y \wedge y > 0\}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^{-1}(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{u+v} - \sqrt{u-v} \\ \sqrt{u+v} + \sqrt{u-v} \end{pmatrix}$$

a $f(U_1) = \{(u, v) \mid |v| < u \wedge u > 0\}$ (ověřte). Derivaci f^{-1} můžeme buďto hledat přímo, známe-li funkci f^{-1} explicitně, nebo opět podle Věty o inverzní funkci. V druhém případě máme

$$Df^{-1}(f(x, y)) = (Df(x, y))^{-1} = \frac{1}{4(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

pro $(x, y) \in U$.

3.8 Věta o implicitní funkci

Problematicku implicitní funkce si nejprve vysvětlíme na jednoduchém příkladu s kružnicí. Zajímá nás, kdy a pokud vůbec rovnice

$$F(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (25)$$

definuje y jako funkci x . Samozřejmě víme, že řešení rovnice (25) existují, pokud $x \in [-1, 1]$, a jsou $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Z definice funkce musí být její hodnoty určeny jednoznačně, a proto bez dalšího omezení na y (např. $y > 0$), nezadává rovnice (25) funkci $y = y(x)$ jednoznačně.

Řekněme, že nás zajímá, zda rovnice (25) zadává řešení $y = y(x)$ alespoň *lokálně*. Tzn., že předpokládáme, že je dáno nějaké (a, b) tak, že $F(a, b) = 0$ (bod na kružnici) a zajímá nás, jestli existují nějaká okolí H_a a H_b a funkce $f : H_a \rightarrow H_b$ tak, že $y = f(x)$ vyhovuje rovnici $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$ a $f(a) = b$. Na příkladu kružnice odpověď najdeme snadno. Je-li $a \in (-1, 1)$ a $b > 0$, potom je $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, okolí H_a lze volit libovolně tak, aby $a \in H_a \subset (-1, 1)$ a $H_b := f(H_a)$. Podobně je-li $a \in (-1, 1)$ a $b < 0$, potom je $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ a volbu okolí lze provést stejně jako předtím. Na druhou stranu na okolí bodů $(a, b) = (\pm 1, 0)$ rovnice (25) jednoznačně funkci $y = f(x)$ *nezadává*. Tyto výjimečné body lze najít jako řešení rovnice

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 2b$$

spolu s $F(a, b) = 0$. Můžeme se tedy domnívat, že podmínka $\partial_y F(a, b) \neq 0$ garantuje existenci okolí H_a a H_b a funkce $f : H_a \rightarrow H_b$ tak, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$ a $f(a) = b$. Tato domněnka se ukáže jako pravdivá a takovouto funkci f nazýváme *implicitní funkcí* zadanou rovnicí $F(x, y)$. Navíc jakmile víme, že implicitní funkce existuje, můžeme z rovnice $F(x, f(x)) = 0$ spočítat derivaci f , i když neznáme f explicitně. V případě s kružnicí (25) dostaneme derivováním rovnosti $x^2 + y^2 - 1 = 0$, kde $y = y(x)$, vztah

$$2x + 2yy' = 0.$$

Neboli

$$y' = -\frac{x}{y},$$

což je stejný výsledek, jaký bychom dostali derivováním explicitní formule $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$:

$$y' = -\frac{x}{\pm\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

bez ohledu na to, jakou funkci $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ bereme.

Větu o implicitní funkci vyslovíme pro vektorovou funkci $F : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Věta nám potom říká, za jakých předpokladů systém m rovnic o $m+n$ neznámých

$$F(x, y) = 0$$

určuje lokálně řešení $y = y(x)$ na okolí nějakého bodu (a, b) , který vyhovuje rovnici $F(a, b) = 0$. Klíčovým předpokladem bude nenulovost Jacobiánu zobrazení F jako funkce y v bodě (a, b) . Pro zjednodušení zápisu použijeme stručnější značení

$$\frac{\partial F}{\partial y} := \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial x} := \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Věta 3.45 (O implicitní funkci): Nechť $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny a $F : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^1 na $\Omega_n \times \Omega_m$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m$, platí:

$$F(a, b) = 0$$

a

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Potom platí:

1. Existují okolí $H_a \subset \Omega_n$ a $H_b \subset \Omega_m$ bodů a a b a funkce $f : H_a \rightarrow H_b$ třídy C^1 na H_a tak, že

$$(\forall x \in H_a) (F(x, f(x)) = 0) \quad \text{a} \quad f(a) = b.$$

2. Dále $\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in H_a$ a pro derivaci f platí vzorec

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

pro všechna $x \in H_a$.

Důkaz. 1. K důkazu použijeme Větu 3.42 o inverzní funkci. Definujme $G : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ vztahem $G(x, y) := (x, F(x, y))$. Podle předpokladu je $F \in C^1(\Omega_n \times \Omega_m)$, a proto také $G \in C^1(\Omega_n \times \Omega_m)$. Jacobiho matice G má blokový tvar

$$DG = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix},$$

kde $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ je jednotková matice a $0 \in \mathbb{R}^{n,m}$ nulová matice. Odtud pro Jacobián G v bodě (a, b) dostaneme

$$\det DG(a, b) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Tudíž můžeme aplikovat Větu 3.42 o inverzní funkci na funkci G a bod (a, b) .

Podle Věty 3.42 existuje okolí $H_{(a,b)}$ bodu (a, b) , které můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat ve tvaru $H_{(a,b)} = H_a \times H_b$ (jinak vezmeme menší okolí H_a a H_b tak, aby $H_a \times H_b \subset H_{(a,b)}$), a okolí $V := G(H_a \times H_b)$ bodu $G(a, b) = (a, 0)$ tak, že G je prosté zobrazení $H_a \times H_b$ na otevřenou množinu V a $G^{-1} \in C^1(V)$. Jelikož zobrazení G je identické v první komponentě, je V tvaru $V = H_a \times F(H_a \times H_b)$ a také inverzní zobrazení G^{-1} bude v první komponentě fungovat jako identické zobrazení. Tedy G^{-1} je tvaru $G^{-1}(x, y) = (x, \Phi(x, y))$, kde $\Phi : V \rightarrow H_b$ je bijekce třídy C^1 na V . Pro libovolné $(x, y) \in V$ tedy máme

$$(x, y) = G \circ G^{-1}(x, y) = G(x, \Phi(x, y)) = (x, F(x, \Phi(x, y))).$$

a odtud speciálně $y = F(x, \Phi(x, y))$. Položíme-li $y = 0$ a definujeme $f(x) := \Phi(x, 0)$ dostáváme z poslední rovnosti, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in H_a$. Funkce $f \in C^1(H_a)$, protože $\Phi \in C^1(V)$. Navíc $(a, b) = G^{-1}(a, 0) = (a, \Phi(a, 0)) = (a, f(a))$, a tudíž $b = f(a)$.

V tvrzení 1. zbývá ověřit jednoznačnost. K libovolnému $x \in H_a$ jsme našli $y := f(x) \in H_b$ tak, že $F(x, y) = 0$. Předpokládejme, že k těmž $x \in H_a$ existuje nějaké další $\tilde{y} \in H_b$, $\tilde{y} \neq y$ tak, že $F(x, \tilde{y}) = 0$. Potom

$$G(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) = (x, F(x, \tilde{y})) = G(x, \tilde{y}),$$

což je spor s tím, že G je prostá na $H_a \times H_b$. Ke každému $x \in H_a$ tedy existuje jediné $y \in H_b$ tak, že $F(x, y) = 0$ a funkce f je tak určena jednoznačně.

2. Už víme, že $f \in C^1(H_a)$, a tudíž můžeme derivovat rovnost $F(x, f(x)) = 0$ na H_a , kterou můžeme přepsat do tvaru $F(g(x)) = 0$, kde $g(x) := (x, f(x))$. Aplikací řetězového pravidla, viz Věta 3.7, pak dostaneme

$$0 = D(F \circ g)(x) = DF(g(x))Dg(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) \right) \begin{pmatrix} I \\ Df(x) \end{pmatrix},$$

neboli

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(x))Df(x) \quad (26)$$

pro všechna $x \in H_a$. Protože je podle 3. tvrzení Věty 3.42 o inverzní funkci

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) = \det G(g(x)) \neq 0$$

pro všechna $x \in H_a$, je matice $\frac{\partial F}{\partial y}(g(x))$ regulární a z rovnice (26) tak plyne, že

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(g(x))$$

pro všechna $x \in H_a$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka: Ve smyslu poznámky za Větou 3.42 můžeme také předpoklad ve Větě 3.45 mírně zeslabit. Konkrétně platí věta: Necht' jsou $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ otevřené množiny, $F : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitě, existuje $\partial F / \partial y$ na $\Omega_n \times \Omega_m$ a je spojitě v bodě $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m$. Potom je-li

$$F(a, b) = 0 \quad \text{a} \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

existují okolí $H_a \subset \Omega_n$ a $H_b \subset \Omega_m$ bodů a a b a spojitá funkce $f : H_a \rightarrow H_b$ tak, že

$$(\forall x \in H_a) (F(x, f(x)) = 0) \quad \text{a} \quad f(a) = b.$$

Příklad 3.15: Jedno řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3, \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 &= 2, \end{aligned}$$

je $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Rozhodněte, zda na okolí bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ určují rovnice implicitní funkce $u = u(x, y, z)$ a $v = v(x, y, z)$ takové, že $u(1, 1, 1) = 1$ a $v(1, 1, 1) = 1$ a poté spočítejte $\partial_y u(1, 1, 1)$ a $\partial_y v(1, 1, 1)$.

Do Věty o implicitní funkci položíme $n = 3, m = 2$, funkci $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou vztahem

$$F(x, y, z, u, v) := \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{pmatrix}$$

a $a = (1, 1, 1)$ a $b = (1, 1)$. Zřejmě je F hladká. Dále

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3yzu^2 - 2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{pmatrix},$$

a proto

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Proto podle Věty o implicitní funkci existuje funkce $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ třídy C^1 definovaná na okolí bodu $(1, 1, 1)$ taková, že

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{a} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Abychom spočítali $\partial_y u(1, 1, 1)$ a $\partial_y v(1, 1, 1)$, můžeme parciálně derivovat podle y zadaný systém rovnic, kde u a v chápeme jako funkce x, y, z . Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2xy + xz\partial_y u + v^2 + 2yv\partial_y v &= 0, \\ 3yzu^2\partial_y u + zu^3 + 2x\partial_y v - 2uv^2\partial_y u - 2u^2v\partial_y v &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $(x, z, y, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$, máme systém

$$\begin{aligned} \partial_y u(1, 1, 1) + 2\partial_y v(1, 1, 1) &= -3, \\ \partial_y u(1, 1, 1) &= -1, \end{aligned}$$

jehož řešením je $\partial_y u(1, 1, 1) = -1$ a $\partial_y v(1, 1, 1) = -1$. Podobně bychom mohli spočítat další parciální derivace u a v v bodě $(1, 1, 1)$.

3.9 Vázané extrémů funkce více proměnných

V předchozí části jsme si ukázali metodu, jak hledat lokální extrémů funkce více proměnných. Nyní se budeme zabývat podobným problémem jen navíc zúžíme definiční obor účelové funkce přidáním tzv. *rovnostních vazeb*. Tzn., že budeme hledat lokální extrémů funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v množině tzv. *přípustných řešení*

$$M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\},$$

kde $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je daná vektorová funkce reprezentující *vazby*. V praktických problémech bývá počet proměnných n větší než počet vazeb m . Tato úloha je speciálním případem tzv. obecné optimalizační úlohy nelineárního programování, v níž navíc vystupují také nerovnostní vazby. Naším cílem bude dokázat si nutnou a postačující podmínku pro extrémů funkce s rovnostními vazbami podobné těm, které jsme si odvodili pro (volné) extrémů bez vazeb, viz Věty 3.34 a 3.39.

Definice 3.46 ((Ostré) lokální maximum/minimum vzhledem k množině): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in M \subset \Omega$. Řekneme, že funkce f má v bodě a :

1. *lokální maximum vzhledem k M* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) \leq f(a))$,
2. *ostré lokální maximum vzhledem k M* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in (H_a \cap M) \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. *lokální minimum vzhledem k M* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a \cap M)(f(x) \geq f(a))$,
4. *ostré lokální minimum vzhledem k M* $\Leftrightarrow (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in (H_a \cap M) \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$.

Bod a se nazývá *lokální extrém* funkce f vzhledem k M , právě když je a lokální minimum nebo lokální maximum f vzhledem k M .

Pro formulaci nutné a postačující podmínky vázaného extrému použijeme pomocnou funkci pojmenovanou po J.–L. Lagrangeovi.

Definice 3.47 (Lagrangeova funkce, Lagrangeovy multiplikátory): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Funkci $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$L(x; \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

nazýváme *Lagrangeova funkce* a parametry $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *Lagrangeovy multiplikátory*.

Uvažujme na chvíli, že je dána pouze jediná vazba, tj. $m = 1$ a skalární funkce $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 . Připomeňme, že potom tečný prostor k množině $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ je ortogonální doplněk gradientu $\nabla g(a)$, tj.

$$T_a(M) = (\nabla g(a))^\perp.$$

Je-li $m \geq 1$, potom je $M = \cap_{j=1}^m M_j$, kde

$$M_j := \{x \in \Omega \mid g_j(x) = 0\}.$$

Rozšíříme definici tečného prostoru k $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ pro případ kdy $m \geq 1$ následovně:

$$T_a(M) := \bigcap_{j=1}^m T_a(M_j).$$

Nejprve si dokážeme pomocné tvrzení o tečném prostoru $T_a(M)$.

Lemma 3.48: Buď $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ třídy C^1 na Ω , $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ a $a \in M$. Potom platí:

1. $T_a(M) = \ker Dg(a)$.
2. Je-li $h(Dg(a)) = m < n$, potom ke každému $v \in T_a(M)$ existuje okolí počátku $H_0 \subset \mathbb{R}$ a křivka $\phi : H_0 \rightarrow M$ třídy C^1 tak, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$.

Důkaz. 1. Stačí si uvědomit, že

$$x \in T_a(M) = \bigcap_{j=1}^m T_a(M_j) = \bigcap_{j=1}^m (\nabla g_j(a))^\perp,$$

právě když $\nabla g_j(a)x = 0$ pro všechna $j \in \hat{m}$. Jelikož gradienty $\nabla g_j(a)$, $j \in \hat{m}$, jsou řádky matice $Dg(a)$, je $x \in T_a(M)$, právě když $Dg(a)x = 0$, neboli $x \in \ker Dg(a)$.

2. Jelikož $h(Dg(a)) = m < n$, existuje m sloupců matice $Dg(a)$, které tvoří lineárně nezávislý soubor v $\mathbb{R}^n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je prvních m sloupců $Dg(a)$ lineárně nezávislých, jinak přejmenujeme proměnné $x_1, \dots, x_n$. Definujme zobrazení $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vztahem

$$F_j(x) := \begin{cases} g_j(x), & \text{pro } j \in \hat{m}, \\ x_j, & \text{pro } j \in \{m+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Všimněte si, že $x \in M$, právě když $F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0$.

Podle předpokladu je $g \in C^1(\Omega)$, a proto také $F \in C^1(\Omega)$. Matice derivace F má blokový tvar

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} & \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_{m+1}, \dots, x_n)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (27)$$

kde $0 \in \mathbb{R}^{n-m, m}$ je nulová matice a $I \in \mathbb{R}^{n-m, n-m}$ je jednotková matice. Tudíž matice $DF(a)$ je regulární, neboť

$$\det DF(a) = \det \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(a) \neq 0.$$

Proto podle Věty 3.42 o inverzní funkci existuje $H_a \subset \Omega$, na němž je zobrazení F prosté a

$$F(a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, a_{m+1}, \dots, a_n)^T,$$

protože $g(a) = 0$, což plyne z předpokladu $a \in M$.

Označíme-li $G := F^{-1}$, potom $G : F(H_a) =: H_{F(a)} \rightarrow H_a$ je bijekce. Zvolme $v \in T_a(M)$ a okolí $H_0 \subset \mathbb{R}$ tak, aby

$$(0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n)^T \in H_{F(a)}$$

pro všechna $t \in H_0$, což lze neboť $H_{F(a)}$ je otevřená množina a $F(a) = (0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_n)^T$. Definujme $\phi : H_0 \rightarrow H_a$ vztahem

$$\phi(t) := G(0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n).$$

Ve zbývajících částech důkazu ukážeme, že ϕ má všechny tři vlastnosti z tvrzení věty, tj. $\phi(H_0) \subset M$, $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$.

Z definice ϕ plyne, že $F_1(\phi(t)) = \dots = F_m(\phi(t)) = 0$ pro všechna $t \in H_0$. Tudíž $\phi(H_0) \subset M$. Dále

$$\phi(0) = G(0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_n) = G(F(a)) = a.$$

Nakonec dokážeme rovnost $DF(a)D\phi(0) = DF(a)v$, což implikuje $D\phi(0) = v$ díky regularitě $DF(a)$. Nejprve si všimneme, že pro $t \in H_0$ máme

$$(F \circ \phi)(t) = (0, \dots, 0, a_{m+1} + tv_{m+1}, \dots, a_n + tv_n)^T.$$

Odtud dostaneme

$$DF(a)D\phi(0) = D(F \circ \phi)(0) = (0, \dots, 0, v_{m+1}, \dots, v_n)^T = DF(a)v.$$

Poslední rovnost platí díky blokovému tvaru (27) matice $DF(a)$ a toho, že $Dg(a)v = 0$ podle již dokázaného bodu 1. $\square$

Poznámka: Je-li $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ třídy C^1 a $h(Dg(x)) = m < n$ pro všechna $x \in \Omega$, potom je množina $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ speciálním případem tzv. *diferencovatelné variety* dimenze $n - m$.

Nyní si již můžeme dokázat nutnou podmínku vázaného extrému.

Věta 3.49 (Nutná podmínka vázaného extrému): Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy C^1 na Ω a $m < n$. Předpokládejme dále, že má funkce f lokální extrém vzhledem k množině $M := \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ a že $h(Dg(a)) = m$. Potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\nabla_x L(a; \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

(Zde index x v ∇_x naznačuje, že se v gradientu ∇_x objevují pouze parciální derivace podle proměnných $x_1, \dots, x_n$, nikoliv podle $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.)

Důkaz. Ukážeme, že $\nabla f(a) \in (T_a(M))^\perp$. Zvolme nějaké $v \in T_a(M)$. Podle předpokladu je $h(Dg(a)) = m < n$, a tedy podle Lemma 3.48 existuje $H_0 \subset \mathbb{R}$ a zobrazení $\phi : H_0 \rightarrow M$ třídy C^1 tak, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$. Protože má f lokální extrém v bodě a vzhledem k M , má složená funkce $f \circ \phi : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lokální extrém v bodě 0. Tudíž podle nutné podmínky (volného) extrému je $(f \circ \phi)'(0) = 0$. S využitím Věty 3.7 o derivaci složené funkce tak dostaneme, že

$$0 = (f \circ \phi)'(0) = \nabla f(\phi(0)) D\phi(0) = \nabla f(a)v,$$

a tedy $\nabla f(a)$ je kolmé na v .

Použijeme-li jednu vlastnost ortogonálního doplňku, viz Cvičení 3.18, dostaneme

$$(T_a(M))^\perp = \left(\bigcap_{j=1}^m T_a(M_j) \right)^\perp = \sum_{j=1}^m (T_a(M_j))^\perp = \sum_{j=1}^m [\nabla g_j(a)]_\lambda.$$

A protože $\nabla f(a) \in (T_a(M))^\perp$, existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(a),$$

neboli

$$\nabla_x L(a; \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

□

Pokud dopředu víme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v množině přípustných řešení M lokální extrém, tj. např. tehdy, když je M kompaktní množina a f spojitá funkce (Věta 2.64), můžeme tyto lokální extrémy v M lokalizovat jen na základě nutné podmínky vázaného extrému. Podle Věty 3.49 najdeme tyto extrémy mezi řešeními rovnic

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \\ \nabla_x L(x; \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{28}$$

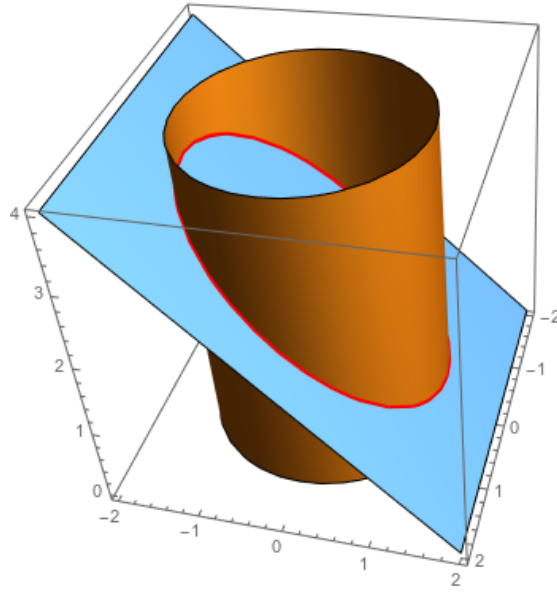
což je $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých $x_1, \dots, x_n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ za předpokladu, že $m < n$ a matice Dg má v nalezených řešení plnou hodnotu. Samozřejmě najít řešení rovnic (28) nemusí být jednoduché a většinou ani explicitně možné. Následující jednoduchý příklad ukazuje, kdy je tento postup možné aplikovat.

Příklad 3.16: Najdeme vázané extrém funkce $f(x, y, z) = xy - yz$ vzhledem k množině určené vazbami

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{a} \quad y + z = 2.$$

Použijeme-li naše značení je $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2 \quad \text{a} \quad g_2(x, y, z) := y + z - 2.$$



Obrázek 13: Ilustrace množiny M z Příkladu 3.16

Množina $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$, která představuje průnik válce a roviny, viz Obr. 13, je kompaktní, protože je uzavřená a omezená. Proto dopředu víme, že spojitá funkce f má v množině M dokonce globální minimum i maximum.

Všimněte si, že pro všechna $(x, y, z) \in M$ je

$$h(Dg(x, y, z)) = h\left(\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

neboť body $(0, 0, z) \notin M$ pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Hledané extrémy proto musí ležet mezi řešeními rovnic (28). Lagrangeova funkce je

$$\begin{aligned} L(x, y, z; \lambda, \mu) &:= f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) \\ &= xy + yz - \lambda(x^2 + y^2 - 2) - \mu(y + z - 2), \end{aligned}$$

a proto rovnice (28) mají tvar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ y + z &= 2, \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) &= y - 2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) &= x + z - 2y\lambda - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) &= y - \mu = 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice mají 4 řešení (detaily výpočtu jsou přenechány čtenáři):

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \mu_1) &= \left(-1, -1, 3, \frac{1}{2}, -1\right), \\(x_2, y_2, z_2, \lambda_2, \mu_2) &= \left(1, -1, 3, -\frac{1}{2}, -1\right), \\(x_3, y_3, z_3, \lambda_3, \mu_3) &= \left(-1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1\right), \\(x_4, y_4, z_4, \lambda_4, \mu_4) &= \left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1\right).\end{aligned}$$

Nakonec stačí vybrat největší a nejmenší ze čtyř funkčních hodnot

$$f(x_1, y_1, z_1) = -2, \quad f(x_2, y_2, z_2) = -4, \quad f(x_3, y_3, z_3) = 0, \quad f(x_4, y_4, z_4) = 2,$$

abychom uzavřeli, že f má minimum vzhledem k M v bodě (x_2, y_2, z_2) s hodnotou -4 a maximum vzhledem k M v bodě (x_4, y_4, z_4) s hodnotou 2 .

Pokud ovšem apriori nevíme, jestli vázaný extrém existuje, např. když M není kompaktní, potřebujeme nějakou postačující podmínku vázaného extrému. Jednu takovou podmínku si dokážeme. Budeme k tomu potřebovat mírně rozšířit pojem definitnost matice na *definitnost matice vzhledem k množině*.

Definice 3.50 (PD, ND, PSD, NSD, IND vzhledem k množině): Nechť $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$. Symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme:

1. *pozitivně definitní (PD) vzhledem k P* $\Leftrightarrow (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T A x > 0)$,
2. *pozitivně semidefinitní (PSD) vzhledem k P* $\Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T A x \geq 0)$
a A není PD vzhledem k P ,
3. *negativně definitní (ND) vzhledem k P* $\Leftrightarrow (\forall x \in P \setminus \{0\})(x^T A x < 0)$,
4. *negativně semidefinitní (NSD) vzhledem k P* $\Leftrightarrow (\forall x \in P)(x^T A x \leq 0)$
a A není ND vzhledem k P ,
5. *indefinitní (IND) vzhledem k P* $\Leftrightarrow (\exists x, y \in P)(x^T A x > 0 \wedge y^T A y < 0)$.

V následující větě používáme značení $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ pro Hessovu matici funkce L jakožto funkce proměnných $x_1, \dots, x_n$, tj.

$$\nabla_x^2 L(a; \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(a; \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(a; \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(a; \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(a; \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(a; \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(a; \lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(a; \lambda) \end{pmatrix}.$$

Věta 3.51 (Postačující podmínka pro vázaný extrém): Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Nechť dále existuje bod $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$. Potom platí:

1. Je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ PD vzhledem k $T_a(M)$, potom má f v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M .
2. Je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ ND vzhledem k $T_a(M)$, potom má f v bodě a ostré lokální maximum vzhledem k M .

Důkaz. Stačí dokázat 1. tvrzení, neboť f má v bodě a ostré lokální maximum vzhledem k M , právě když $-f$ má v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k M , $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je ND vzhledem k $T_a(M)$, právě když $\nabla_x^2 (-L)(a; \lambda)$ je PD vzhledem k $T_a(M)$ a funkce g a $-g$ určují stejnou množinu přípustných řešení M .

Důkaz tentokrát provedeme sporem. Je-li a izolovaným bodem M , plyne z definice, že f má v a ostré lokální minimum vzhledem k M . Proto budeme nadále předpokládat, že a je hromadný bod M , ve kterém f nemá ostré lokální minimum vzhledem k M . Potom existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ bodů z M taková, že $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \neq a)$, $x_n \rightarrow a$ a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (f(x_n) \leq f(a)). \quad (29)$$

Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty 2.74 existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ taková, že existuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k} - a}{\|x_{n_k} - a\|} =: \eta.$$

Všimněte si, že $\eta \neq 0$, neboť $\|\eta\| = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset B_a(r) \subset \Omega$ pro nějaké $r > 0$, protože je množina Ω otevřená.

Ukážeme, že $\eta \in T_a(M)$. Podle Věty 3.18 o přírůstku aplikované na funkce g_j existují body $\xi_k^{(g_j)}$ na spojnici bodů a a x_{n_k} tak, že

$$0 = g_j(x_{n_k}) - g(a) = \nabla g_j(\xi_k^{(g_j)})(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $j \in \hat{m}$ a $k \in \mathbb{N}$. Výraz nalevo je roven nule, protože $a \in M$ a také $x_{n_k} \in M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Vydělíme-li poslední rovnost $\|x_{n_k} - a\|$ a pošleme $k \rightarrow \infty$, dostaneme

$$0 = \nabla g_j(a)\eta$$

pro každé $j \in \hat{m}$. Neboli η je kolmé na $\nabla g_j(a)$ pro každé $j \in \hat{m}$, a tudíž

$$\eta \in \bigcap_{j=1}^m (\nabla g_j(a))^\perp = T_a(M).$$

Jelikož $L(y, \lambda) = f(y)$, kdykoliv je $y \in M$ a vzhledem k předpokladu $f, g \in C^2(\Omega)$ dostaneme aplikací Taylorovy věty 3.30 rovnost

$$f(x_{n_k}) - f(a) = L(x_{n_k}; \lambda) - L(a; \lambda) = \nabla_x L(a; \lambda)(x_{n_k} - a) + \frac{1}{2}(x_{n_k} - a)^T \nabla_x^2 L(\xi_k^{(L)}; \lambda)(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, kde $\xi_k^{(L)}$ je bod ležící na spojnici a a x_{n_k} . Využijeme-li ještě předpokladu $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$ a nerovnosti (29), vyvodíme, že

$$0 \geq \frac{1}{2}(x_{n_k} - a)^T \nabla_x^2 L(\xi_k^{(L)}; \lambda)(x_{n_k} - a)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Nyní opět stačí vydělit obě strany $\|x_{n_k} - a\|^2$ a poslat $k \rightarrow \infty$ a dostaneme nerovnost

$$0 \geq \eta^T \nabla_x^2 L(a; \lambda) \eta,$$

což je ovšem spor s tím, že $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je PD vzhledem k $T_a(M)$. $\square$

Postačující podmínka z Věty 3.51 nám dává návod, jak hledat lokální vázaný extrém dostatečně hladké funkce f za podmínky dané vazbami $g(x) = 0$. Nejprve najdeme všechna (x, λ) rovnic (28), což jsou „body podezřelé z extrému“. Poté testujeme zda kvadratická forma matice $\nabla_x^2 L(x, \lambda)$ v bodech podezřelých z extrému (x, λ) **zúžená na podprostor** $\ker Dg(x)$, viz Lemma 3.48, je PD, nebo ND. Ukažme si to na jednoduchém příkladě.

Příklad 3.17: Rozhodněte, jaký trojúhelník s daným obvodem $\ell > 0$ má největší obsah. Označme si délky stran trojúhelníka x, y, z . Obsah trojúhelníka S jako funkci délek jeho stran x, y, z lze vyjádřit tzv. *Herronovým vzorcem*:

$$S(x, y, z) = \sqrt{\frac{\ell}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \left(\frac{\ell}{2} - y \right) \left(\frac{\ell}{2} - z \right)}.$$

Chceme tedy najít taková $x, y, z > 0$, pro něž je $S(x, y, z)$ minimální za podmínky, že obvod trojúhelníku je fixní, tj.

$$x + y + z = \ell.$$

Výpočet si můžeme zjednodušit tak, že nebudeme minimalizovat funkci S , nýbrž funkci

$$f(x, y, z) := \frac{2}{\ell} S^2(x, y, z).$$

Tato transformace nás zbaví odmocniny a nepodstatného konstantního faktoru. Navíc protože $f = \phi \circ S$, kde $\phi(t) := 2t^2/\ell$ je rostoucí funkce na $[0, \infty)$, funkce f má extrémy ve stejných bodech jako S (existují-li), jak plyne přímo z definice. Dostáváme tedy optimalizační problém pro objektivní funkci

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \left(\frac{\ell}{2} - y \right) \left(\frac{\ell}{2} - z \right)$$

s množinou přípustných řešení

$$M = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid g(x, y, z) := x + y + z - \ell = 0\}.$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$L(x, y, z; \lambda) = \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \left(\frac{\ell}{2} - y \right) \left(\frac{\ell}{2} - z \right) - \lambda(x + y + z - \ell).$$

Vázané extrémny musí ležet mezi řešenými systému rovnic

$$\begin{aligned}\partial_x L(x, y, z; \lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2} - y\right)\left(\frac{\ell}{2} - z\right) - \lambda = 0, \\ \partial_y L(x, y, z; \lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{2} - z\right) - \lambda = 0, \\ \partial_z L(x, y, z; \lambda) &= -\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\left(\frac{\ell}{2} - y\right) - \lambda = 0, \\ x + y + z &= \ell.\end{aligned}$$

Tento systém má jediné řešení

$$(x, y, z, \lambda) = \left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, -\frac{\ell^2}{36}\right).$$

Hessova matice Lagrangeovy funkce v tomto bodě je tvaru

$$\nabla_{(x,y,z)}^2 L\left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, -\frac{\ell^2}{36}\right) = \frac{\ell}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že tato matice je IND. Nás ale zajímá definitnost této matice vzhledem k podprostoru

$$\begin{aligned}T_{(\ell/3, \ell/3, \ell/3)}(M) &= \left(\nabla g\left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}\right)\right)^\perp = ((1, 1, 1))^\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda \\ &= \left\{\begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Proto zkoumáme definitnost kvadratické formy

$$(s+t, -s, t) \nabla_{(x,y,z)}^2 L\left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, -\frac{\ell^2}{36}\right) \begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} = -\frac{\ell}{3} (s^2 + st + t^2)$$

v proměnných s a t . Doplněním formy na čtverce zjistíme, že

$$(s+t, -s, t) \nabla_{(x,y,z)}^2 L\left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{3}, -\frac{\ell^2}{36}\right) \begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} = -\frac{\ell}{3} \left(\left(s + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3t^2}{4}\right) < 0$$

pro všechna $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, a tudíž podle Věty 3.51 je bod $(\ell/3, \ell/3, \ell/3)$ ostré lokální maximum f vzhledem k M .

Otázka ze zadání úlohy se ovšem týká extrému globálního. Argument ukazující, že nalezené lokální maximum je též globálním maximem f vzhledem k M , lze postavit na tom, že $\overline{M}$ je kompaktní (rozmyslete). Uzavíráme tedy, že *mezi všemi trojúhelníky s fixním obvodem ℓ má největší obsah trojúhelník rovnostranný, a to $\ell^2/(12\sqrt{3})$.*

Nakonec si ještě dokážeme analogii nutné podmínky z Věty 3.40 pro případ vázaných extrémů.

Věta 3.52: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Předpokládejme dále, že $a \in M$ a $h(Dg(a)) = m < n$. Potom platí:

1. Je-li a lokální minimum f vzhledem k M , potom je $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ PD, nebo PSD vzhledem k $T_a(M)$.
2. Je-li a lokální maximum f vzhledem k M , potom je $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ ND, nebo NSD vzhledem k $T_a(M)$.

Zde λ jsou Lagrangeovy multiplikátory z Věty 3.49.

Důkaz. Dokážeme 1. tvrzení. Buď $v \in T_a(M)$. Potom podle Lemma 3.48 existuje $H_0 \subset \mathbb{R}$ a křivka $\phi : H_0 \rightarrow M$ taková, že $\phi(0) = a$ a $D\phi(0) = v$. Vzhledem k druhé poznámce za Větou 3.42 o inverzní funkci a zavedení křivky ϕ z důkazu Lemma 3.48 vyplývá z předpokladu $g \in C^2(\Omega)$, že také $\phi \in C^2(H_0)$.

Jelikož má f v bodě a lokální minimum, je bod 0 lokálním minimem funkce $f \circ \phi : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Potom podle Věty 3.40 je $(f \circ \phi)''(0) \geq 0$. Funkci $f \circ \phi$ můžeme derivovat jako složenou funkci a podle řetězového pravidla dostaneme

$$(f \circ \phi)'(t) = \nabla f(\phi(t)) D\phi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t)) \phi'_i(t)$$

pro všechna $t \in H_0$. Pro druhou derivaci máme

$$(f \circ \phi)''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\phi(t)) \phi'_i(t) \phi'_j(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t)) \phi''_i(t) \quad (30)$$

pro všechna $t \in H_0$. Využijeme-li toho, že $f(\phi(t)) = L(\phi(t); \lambda)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}^m$, neboť $\phi(t) \in M$ pro všechna $t \in H_0$, a dosadíme $t = 0$ do rovnice (30), dostaneme

$$0 \leq (f \circ \phi)''(0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(a; \lambda) v_i v_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(a; \lambda) \phi''_i(0). \quad (31)$$

Podle Věty 3.49 existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$, a proto je pro tato λ druhý člen v (31) nulový. Nakonec tedy zjišťujeme, že

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(a; \lambda) v_i v_j = v^T \nabla_x^2 L(a; \lambda) v,$$

z čehož vyplývá, že matice $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je PD, nebo PSD vzhledem k $T_a(M)$, neboť $v \in T_a(M)$ bylo voleno libovolně. $\square$

Věta 3.52 má následující okamžitý důsledek pro případ indefinitní Hessovy matice Lagrangeovy funkce vzhledem k tečnému prostoru. U vázaných extrémů termín sedlový bod nepoužíváme.

Důsledek 3.53: Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou třídy C^2 na Ω a $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Pokud existuje bod $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ takový, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$, matice $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ je IND vzhledem k $T_a(M)$ a platí $h(Dg(a)) = m < n$, potom a není extrém f vzhledem k M .

3.10 Cvičení

Cvičení 3.1: Dokažte, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v $a \in \Omega$, právě když existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, okolí H_a bodu a a funkce $\epsilon_a : H_a \rightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že

$$(\forall x \in H_a)(f(x) = f(a) + T(x - a) + \epsilon_a(x)\|x - a\|)$$

a $\epsilon_a(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a$.

Cvičení 3.2: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory. Ukažte, že množina

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \|T\| < \infty\}$$

je lineární prostor a zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow [0, \infty)$ je norma na $\mathcal{B}(X, Y)$.

Cvičení 3.3: Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dokažte rovnosti

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Cvičení 3.4: Uvažujme prostor reálných polynomů $\mathcal{P}$ s normou definovanou vztahem $\|p\| := \max_{0 \leq j \leq n} |\alpha_j|$ pro polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$. Dokažte, že lineární operátor $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, který zobrazí polynom na jeho derivaci, $Tp := p'$, není omezený, tj. $\|T\| = \infty$. (Hint: Uvažujte posloupnost monomů $p_n(x) = x^n$.)

Cvičení 3.5: Dokažte Větu 3.6.

Cvičení 3.6: Ukažte, že funkce $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ není diferencovatelná v počátku.

Cvičení 3.7: Ukažte, že funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je spojitá v $(0, 0)$, ale není diferencovatelná v $(0, 0)$.

Cvičení 3.8: Ukažte, že funkce

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}, & \text{je-li } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{je-li } (x, y, z) = (0, 0, 0), \end{cases}$$

je diferencovatelná v $(0, 0, 0)$, právě když $\alpha < 1$.

Cvičení 3.9: Dokažte, že pokud všechny první parciální derivace funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existují a jsou omezené na okolí bodu $a \in \Omega$, potom je f spojitá v a .

Cvičení 3.10: Dokažte Větu 3.23 jen s využitím souvislosti množiny Ω .

(Hint: Pro lib. $a \in \Omega$ ozn. $c := f(a)$. Ukažte, že množina $A = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$ je obojetná.)

Cvičení 3.11: Funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *konvexní* na Ω , právě když je Ω konvexní množina a platí

$$(\forall x, y \in \Omega, x \neq y)(\forall t \in (0, 1))(f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)).$$

Nahradíme-li nerovnost výše ostrou nerovností, nazývá se f *ryze konvexní* na Ω . Dokažte, že každé lokální minimum konvexní funkce f na Ω je globálním minimem f na Ω .

Cvičení 3.12: Dokažte, že má-li ryze konvexní funkce lokální minimum, je toto lokální minimum jejím jediným globálním minimem.

Cvičení 3.13: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m \leq n$ a $h(A) = m$. Dokažte, že matice $A^T A \in \mathbb{R}^{m,m}$ je regulární.

Cvičení 3.14 (Rolleova věta v $\mathbb{R}^n$): Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a omezená množina a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\overline{\Omega}$ a diferencovatelná na Ω . Dokažte, že je-li f konstantní na $\partial\Omega$, potom existuje $\xi \in \Omega$ tak, že $\nabla f(\xi) = 0$.

(Hint: Nutná podmínka extrému.)

Cvičení 3.15: Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná (na celém $\mathbb{R}^n$). Předpokládejme, že f má jediný kritický bod a a v tomto bodě má f lokální minimum.

1. Je-li $n = 1$, potom dokažte, že a je globální minimum f .
2. Je-li $n > 1$, potom ukažte, že předchozí tvrzení není pravdivé.

(Hint: 1. Využijte Rolleovu větu. 2. Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2(1 - x)^3$ a ukažte, že f má v bodě $(0, 0)$ lokální minimum, které ale není globální.)

Cvičení 3.16: Ukažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ a že f není prostá na žádném okolí bodu $x = 0$. Všimněte si, že f' není spojitá v počátku.

Cvičení 3.17: Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná v bodě a a prostá na okolí a . Dokažte, že pokud $\det Df(a) = 0$, potom f^{-1} není diferencovatelná v bodě $f(a)$.

Cvičení 3.18: Buď V lineární prostor konečné dimenze se skalárním součinem a E a F podprostory V . Dokažte rovnosti:

1. $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$,
2. $(E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp$.

Cvičení* 3.19: Pokuste se zobecnit Příklad 3.17 a dokázat, že mezi všemi jednoduchými (tj. bez samoprůseků) n -úhelníky s fixním obvodem má největší obsah pravidelný n -úhelník. V limitě $n \rightarrow \infty$ nám výsledek tohoto cvičení naznačí řešení tzv. *izoperimetrického problému*: Obsah vnitřku jednoduché uzavřené křivky s fixní délkou je maximální v případě kružnice.
(Hint: Označte si souřadnice vrcholů jednoduchého n -úhelníku

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) \equiv (x_0, y_0)$$

a hledejte maximum funkce pro plochu n -úhelníku

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

za podmínky konstantního obvodu

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \ell_i = \ell > 0.$$

Pro zjednodušení řešení je vhodná komplexní formulace získaných rovnic pomocí substituce $z_i := x_i - x_{i-1} + i(y_i - y_{i-1})$, $i \in \hat{n}$.)

Cvičení 3.20: Určete vzdálenost elipsy a přímky v $\mathbb{R}^2$ určené rovnicemi:

$$x^2 + 4y^2 = 1 \quad \text{a} \quad x + y = 4.$$

Cvičení 3.21: Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Dokažte, že

$$1. \quad \|a\|^{-2} = \min \{ \|x\|^2 \mid a^T x = 1 \},$$

$$2. \quad \|a\| = \max \{ a^T x \mid \|x\| = 1 \}.$$

Cvičení 3.22:

1. Ukažte, že maximální hodnota funkce $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^2$ na množině $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je n^{-n} .

2. Poté dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost:

$$\prod_{i=1}^n |x_i| \leq n^{-n/2} \|x\|^n.$$

3. Nakonec ověřte, že *geometrický průměr* n nezáporných čísel $a_1, \dots, a_n$ je menší nebo roven jejich *aritmetickému průměru*, tj.

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Cvičení 3.23: Nechť $p, q > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Ukažte, že pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

platí $\min \{ f(x, y) \mid x, y > 0 \wedge xy = 1 \} = 1$.

2. Odtud dále odvoďte nerovnost:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

pro libovolné $a, b \geq 0$.

3. Použijte předchozí bod k důkazu *Hölderovy nerovnosti*:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

pro libovolné $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$.

4. Nakonec z Hölderovy nerovnosti odvoďte *Minkowského nerovnost*:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

pro libovolné $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

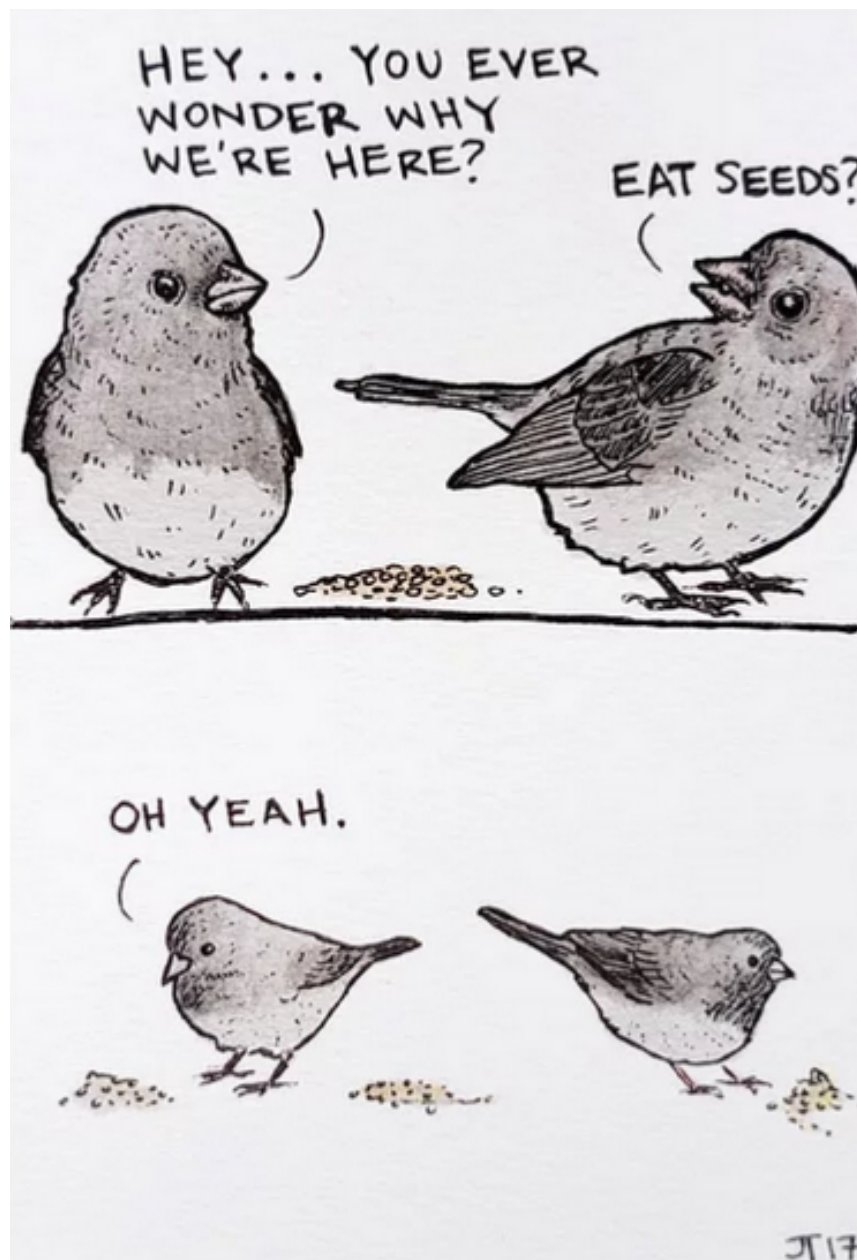
(Hint: Bod 3.: Položte $A := (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}$ a $B := (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}$ a aplikujte 2. bod s $a = a_i/A$ a $b = b_i/B$. Bod 4.: Využijte toho, že $|x + y|^p \leq |x + y||x + y|^{p/q} \leq |x||x + y|^{p/q} + |y||x + y|^{p/q}$.)

Cvičení* 3.24: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je PD matice a $a \in \mathbb{R}^n$. Najděte extrémy funkce

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - a^T x.$$

Cvičení* 3.25: Maximalizujte funkci $f(X) = (\det X)^2$ na množině matic $X \in \mathbb{R}^{n,n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ splňující podmínku $\text{Tr } X^T X = 1$.

Cvičení* 3.26: Maximalizujte funkci $f(X) = \text{Tr } X^T X$ na množině matic $X \in \mathbb{R}^{n,n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ splňující podmínku $\det X = 1$.



Obrázek 14: Zdroj: π17