TURISTICKÝ PRŮVODCE MATEMATICKOU ANALÝZOU 3

WIKI SKRIPTUM

Obsah

Date: 24. září 2021.

Značení

Značka	**Popis**
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{X}_0$	$\mathbb{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbb{X}$ je číselná množina
$\hat{n}$	$\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
$\operatorname{Dom} f$	definiční obor zobrazení f
$\operatorname{Ran} f$	obor hodnot zobrazení f
$\mathcal{P}(X) = 2^X$	potenční množina X (systém všech podmnožin X)
$\{x_n\}_1^\infty$	posloupnost indexovaná prvky $n \in \mathbb{N}$
$\lfloor k \rfloor$	dolní celá část čísla k
(c, d)	otevřený interval
$[c, d]$	uzavřený interval
$\sim$	ekvivalence matic, množin či funkcí
$x_n \to x$	bodová konvergence
$f : X \to Y$	zobrazení z prostoru X do Y
$\varphi : x \mapsto y$	zobrazení přiřazující bodu x bod y, tedy $\varphi(x) = y$
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
A°	vnitřek množiny A
$\dot{A}$	hranice množiny A
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
A^{i}	izolátor množiny A
A'	derivace množiny A
$\overline{A}^Y$	množina A uzavřená v množině Y
$A^{\circ Y}$	množina A otevřená v množině Y
$\langle \varphi \rangle = \operatorname{Ran} \varphi$	stopa dráhy φ
H_x, U_x, A_x	okolí bodu x
$\vec{V} = V^n$	lineární vektorový prostor dimenze n
$\underset{\leftarrow}{V} = V^\#$	lineární kovektorový prostor (algebraický duál)
$\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$	normovaný prostor spojitých lineárních zobrazení $\vec{X} \to \vec{Y}$
$\lvert b \rangle = \vec{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^r)^{\mathrm{T}}$	sloupcový vektor
$\langle a \rvert = \underset{\leftarrow}{a} = a^\# = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$	řádkový vektor (lineární funkcionál, kovektor)
$\underset{\leftarrow}{a}\vec{b} = \langle a \vert b \rangle$	akce kovektoru na vektor (funkcionál $\underset{\leftarrow}{a}$ v bodě $\vec{b}$)
$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$	skalární součin vektorů
$\lVert \vec{x} \rVert_p$	p–norma vektoru $\vec{x}$
$\mathcal{C}^p(M)$	třída všech funkcí na množině M spojitě diferencovatelných do řádu p
$\mathcal{R}^2(M)$	prostor všech kvadraticky integrabilních (v Riemannově smyslu) funkcí na množině M
$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$	operátor parciální derivace podle k–té složky
$\mathbb{J}_f(x_0)$	Jacobiho matice zobrazení f v bodě x_0 (první derivace)
$\mathbf{i}$	imaginární jednotka

Poznámka. (1) V textu budeme používat mezinárodní značení, které se od přednášky lehce liší.

(2) Braketovou notaci a tenzorové názvosloví zmiňujeme pouze pro fyzikální kontext.

(3) Zápisy $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ a $\langle a \vert b \rangle$ díky Rieszově větě (viz LAA2) znamenají totéž. Z fyzikálních důvodů je však užitečné mezi těmito zápisy rozlišovat, ač se v prvním ročníku preferuje braketový zápis a míní se jím skalární součin. Dále se můžete setkat se zastaralým zápisem $(\vec{a}, \vec{b})$.

1. Funkční posloupnosti

Definice 1.1. Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$. Nechť dále pro každé $z \in A$ číselná posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje. Potom funkci f definovanou na množině A předpisem $z \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ nazýváme **limitní funkcí posloupnosti** $\{f_n\}_1^\infty$ (též **bodovou limitou posloupnosti**).

Definice 1.2. Buď f funkce a $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na množině A. Řekneme, že posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ **konverguje k** $f(z)$ **stejnoměrně na množině** A, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Značíme $f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} f(z)$.

Poznámka. (1) Nezavádí se pojem nevlastní limity.
(2) Stejnoměrná konvergence nezáleží na bodu z, proto se místo $f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} f(z)$ píše jen $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$.
(3) Pojem stejnoměrné konvergence nelze vyslovit bez určení množiny, na níž konvergence platí. Zápis $f_n \rightrightarrows f$ tedy nemá smysl.
(4) Stejnoměrná konvergence je jakási konvergence v prostoru, jehož prvky jsou funkce. To je první krok k odpoutání se od pojmu funkční hodnota.

Věta 1.3 (supremové kriterium)**.** Posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ na množině A konverguje stejnoměrně ke své limitní funkci $f(z)$ právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0.$$

Důkaz. Přímo z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} f(z) &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall z \in A)(\forall n > n_0)(|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) \left(\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Poznámka. (1) Je-li funkce g spojitá na kompaktní množině A, dle 7.16 nabývá svého suprema, tedy $\sup_{z\in A} g(z) = \max_{z\in A} g(z)$ a hledané maximum najdeme vyšetřením funkce užitím diferenciálního počtu.
(2) Supremum může sloužit jako metrika na metrickém prostoru omezených komplexních funkcí definovaných na množině A. Stejnoměrná konvergence je pak ekvivalentní s konvergencí v tomto prostoru.

Věta 1.4 (Bolzano, Cauchy[1])**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A. Potom posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně na množině A (k nějaké limitní funkci) právě tehdy, když pro každé kladné číslo ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$, pro všechna přirozená p a pro všechna $z \in A$ platí:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

Důkaz. a) $(\Rightarrow)$ Nechť $f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} f(z)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí: $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud dostáváme pro všechna $n > n_0$, pro všechna $z \in A$ a pro všechna přirozená p:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \le |f_{n+p}(z) - f(z)| + |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

[1] 1848

b) ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ platí:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Pro libovolné pevné $z \in A$ odtud plyne, že posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje. Buď f limitní funkce posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$ na množině A. Přejdeme-li nyní v nerovnosti (1) k limitě pro $p \to \infty$, vidíme, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí:

$$|f(z) - f_n(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

Poznámka. (1) B-C kritérium charakterizuje stejnoměrnou konvergenci bez pojmu limitní funkce. Pojem stejnoměrné konvergence tudíž má význam i bez jejího určení a lze psát $f_n \overset{A}{\rightrightarrows}$.

(2) Ve skutečnosti je B-C kritériem limity pouze v prostorech, které jsou úplné — viz 9.2.

Definice 1.5. Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A. Řekneme, že posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje na množině A **lokálně stejnoměrně** (k $f(z)$), jestliže ke každému bodu $z \in A$ existuje okolí H_z bodu z takové, že posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně (k $f(z)$) na množině $A \cap \mathrm{H}_z$.

Poznámka. Na kompaktní množině jsou pojmy lokální stejnoměrná konvergence a stejnoměrná konvergence ekvivalentní.

Definice 1.6. $\{f_n\}_1^\infty$ se nazývá **stejně omezená** na množině A, existuje-li kladné číslo K takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ platí $|f_n(z)| < K$.

Věta 1.7 (o limitě)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$ a nechť

(I) $z_0 \in A'$;
(II) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists \lim_{z \to z_0, z \in A} f_n(z) = a_n \in \mathbb{C})$;
(III) $f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} f(z)$.

Potom platí:

(i) Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ konverguje, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$;
(ii) Existuje $\lim_{z \to z_0, z \in A} f(z)$;
(iii) Limity v bodech (i) a (ii) jsou si rovny.

To jest:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Důkaz. a) Z (III) a z věty 1.4 plyne, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ platí $|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Zvolme nyní pevně $n > n_0$ a $p \in \mathbb{N}$. Potom z (II) plyne existence okolí H_z bodu z_0 tak, že pro všechna $z \in A \cap \mathrm{H}_z \setminus \{z_0\}$ bude platit $|f_n(z) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ i $|f_{n+p} - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tudíž

$$|a_{n+p} - a_n| \le |f_{n+p}(z) - a_{n+p}| + |f_{n+p}(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

b) Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z (III) a již dokázaného tvrzení (i) plyne existence n_0 takového, že pro všechna $n > n_0$ platí: $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro všechna $z \in A$ a $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$. Zvolme pevně $n > n_0$. Potom z (II) existuje okolí H_{z_0} bodu z_0 takové, že pro všechna $z \in A \cap \mathrm{H}_{z_0} \setminus \{z_0\}$ je $|f_n(z) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ a tudíž

$$|f(z) - a| < |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dokázali jsme tak, že $\lim_{z \to z_0, z \in A} f(z) = a$, tj. tvrzení (ii) i (iii).

□

Věta 1.8 (o spojitosti)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$ a spojitých v bodě $z_0 \in A$ (vzhledem k A). Nechť dále posloupnost $\{f_n(z)\}_1^\infty$ stejnoměrně konverguje na množině A k $f(z)$. Potom funkce f je spojitá v bodě z_0 vzhledem k A.

Důkaz. V každém izolovaném bodě množiny A je funkce f spojitá (z definice spojitosti). Proto předpokládejme, že z_0 je hromadný bod množiny A. Potom jsou splněny všechny předpoklady věty 1.7 a tudíž platí:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f_n(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Ze spojitosti funkcí f_n v bodě z_0 vzhledem k množině A odtud plyne:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \lim_{n\to\infty} f_n(z), \text{ tj. } f(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f(z).$$

□

Věta 1.9 (o derivaci)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na omezeném a otevřeném intervalu $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ takových, že platí:

(I) Existuje $c \in \mathcal{J}$ tak, že posloupnost $\{f_n(c)\}_1^\infty$ konverguje;
(II) Posloupnost $\{f_n'(x)\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně na $\mathcal{J}$.

Potom platí:

(i) Posloupnost $\{f_n(x)\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně na $\mathcal{J}$;
(ii) Limitní funkce f posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$ je diferencovatelná na intervalu $\mathcal{J}$;
(iii) Derivace f' je limitní funkcí posloupnosti $\{f_n'\}_1^\infty$.

To jest:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Důkaz. a) Zvolme $\varepsilon > 0$. Z bodů (I) a (II) plyne existence n_0 takového, že pro všechna $n > n_0$ a pro všechna $p \in \mathbb{N}$ $|f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\left|f_{n+p}'(y) - f_n'(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2|\mathcal{J}|}$ pro všechna $y \in \mathcal{J}$.

Buď $n > n_0$ a $p \in \mathbb{N}$; potom pro všechna $x \in \mathcal{J}$ je

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\le |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(c) - f_n(c))| + |f_{n+p}(c) - f_n(c)| = \\ &= |(f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(c)| + |f_{n+p}(c) - f_n(c)| = \\ &= |x - c|\ |(f_{n+p} - f_n)'(\xi)| + |f_{n+p}(c) - f_n(c)| < |\mathcal{J}| \frac{\varepsilon}{2\,|\mathcal{J}|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

kde ξ je podle věty o přírůstku funkce aplikované na funkci $f_{n+p} - f_n$ vnitřní bod intervalu o krajních bodech x a c. Tím je dokázáno tvrzení (i).

b) Tvrzení (ii) a (iii) dokážeme pomocí věty 1.7. Zvolme $x_0 \in \mathcal{J}$ a položme $A = \mathcal{J} \setminus \{x_0\}$,

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ pro všechna } x \in A \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro všechna $x \in A$ a všechna $n, p \in \mathbb{N}$ existuje (podle věty o přírůstku funkce) v otevřeném intervalu o hraničních bodech x_0, x bod ξ tak, že platí

$$\begin{aligned}|g_{n+p}(x) - g_n(x)| &= \frac{1}{|x - x_0|}\, |(f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(x_0)| = \\ &= |(f_{n+p} - f_n)'(\xi)| = \left|f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)\right|.\end{aligned}$$

Protože posloupnost $\{f'(x)\}_1^\infty$ konverguje na intervalu $\mathcal{J}$ stejnoměrně, plyne odtud, že také posloupnost $\{g_n(x)\}_1^\infty$ stejnoměrně konverguje na množině A. Přitom platí:

(I) $x_0 \in A'$;
(II) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim_{x\to x_0, x\in A} g_n(x) = f_n'(x_0)$;
(III)

$$g_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Můžeme tedy užít věty 1.7. Podle ní existuje

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(tj. existuje derivace funkce f v bodě x_0) a platí

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

□

Poznámka. (1) Pokud v předpokladu (II) věty 1.9 požadujeme pouze lokální stejnoměrnou konvergenci, pak posloupnost $\{f_n(x)\}_1^\infty$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathcal{J}$ a platí záměna (zbylá dvě tvrzení (ii) a (iii)). Pro takto modifikovanou větu je zbytečné předpokládat omezenost intervalu $\mathcal{J}$.

(2) Na přenos spojitosti stačí pouze tzv. *kvazistejnoměrná* konvergence: konverguje-li posloupnost spojitých funkcí na množině A kvazistejnoměrně, je limitní funkce spojitá na A.

Věta 1.10 (o integraci)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí (riemannovsky) integrabilních na intervalu $[a,b]$. Nechť dále posloupnost $\{f_n(x)\}_1^\infty$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a,b]$ k $f(x)$. Potom limitní funkce f je na intervalu $[a,b]$ (riemannovsky) integrabilní a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Protože $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $x \in [a,b]$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2}$$

Zvolme pevně $n > n_0$. Potom z existence Riemannova integrálu funkce f_n na intervalu $[a,b]$ plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna δ-rozdělení σ intervalu $[a,b]$ je

$$\Omega(f_n,\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Přitom klademe $\Omega(f_n,\sigma) = S_n(\sigma) - s_n(\sigma)$, kde Ω je tzv. vážený součet oscilací, $S_n(\sigma)$ resp. $s_n(\sigma)$ je horní resp. dolní Darbouxův integrální součet funkce f_n na intervalu $[a,b]$ při rozdělení σ. Značme dále M_n^i resp. m_n^i supremum resp. infimum funkce f_n na i-tém částečném intervalu rozdělení σ. Analogické značení (ovšem bez indexu n) užijeme pro limitní funkci f.

Potom podle (2) je pro všechna x z i-tého částečného intervalu rozdělení σ splněna nerovnost :

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

a tudíž

$$m_n^i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le m^i \le M^i \le M_n^i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Po vynásobení poslední nerovnosti délkou i-tého částečného intervalu a sečtení přes všechny částečné intervaly rozdělení σ obdržíme:

$$s_n(\sigma) - \frac{\varepsilon}{4} \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le S_n(\sigma) + \frac{\varepsilon}{4}$$

a tedy

$$\underbrace{S(\sigma) - s(\sigma)}_{\Omega(f,\sigma)} \le \underbrace{S_n(\sigma) - s_n(\sigma)}_{\Omega(f_n,\sigma)} + \frac{\varepsilon}{2},$$

tj. k libovolnému $\varepsilon > 0$ proto existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna δ-rozdělení σ intervalu $[a,b]$ platí (dle (3)) $\Omega(\sigma,f) < \varepsilon$.

Funkce f je tedy (riemannovsky) integrabilní na intervalu $[a,b]$; přitom platí pro $n > n_0$:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \tag{4}$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

2. Funkční řady

Definice 2.1. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pak uspořádanou dvojici $(\{f_n\}_0^\infty, \{F_n\}_0^\infty)$ nazveme **funkční řadou** a značíme $\sum_0^\infty f_n$.

Pokud funkční posloupnost $\{F_n\}_0^\infty$ má na množině A limitní funkci F, nazveme ji **součtovou funkcí** řady $\sum_0^\infty f_n$ a píšeme $\sum_0^\infty f_n = F$.

Poznámka. (1) F_n — n-tý částečný součet; $\{F_n\}_0^\infty$ — posloupnost částečných součtů.
(2) Studovat řadu pro nás znamená studovat posloupnost jejích částečných součtů.
(3) S funkčními řadami jsme se již setkali — mocninné řady.

Definice 2.2. Řekneme, že řada $\sum_0^\infty f_n(z) = (\{f_n(z)\}_0^\infty, \{F_n(z)\}_0^\infty)$ stejnoměrně konverguje na množině A, jestliže na množině A stejnoměrně konverguje posloupnost $\{F_n(z)\}_0^\infty$.

Věta 2.3 (Bolzano, Cauchy)**.** Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A právě tehdy, jestliže pro všechna kladná čísla ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$, pro všechna přirozená čísla p a všechna $z \in A$ platí:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) = F_{n+p}(z) - F_n(z)$, stačí aplikovat větu 1.4 na posloupnost $\{F_n\}_0^\infty$. □

Poznámka. Odsud plyne nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady:

$$\sum_{n=0}^\infty f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} \implies f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} 0.$$

Věta 2.4 (Weierstrassovo kritérium)**.** Buďte $\{f_n\}_0^\infty$ a $\{g_n\}_0^\infty$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na množině A. Nechť dále pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí: $|f_n(z)| \le g_n(z)$. Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty g_n(z)$ stejnoměrně na množině A, konverguje stejnoměrně na množině A také řada $\sum_0^\infty f_n(z)$.

Důkaz. Plyne z nerovnosti

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$$

a z věty 2.3. □

Poznámka. Řadu obvykle majorizujeme (shora odhadujeme) konvergentní číselnou řadou, která je z definice též stejnoměrně konvergentní a splňuje předpoklady 2.4.

Věta 2.5. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A, $\{g_n\}_0^\infty$ monotonní posloupnost reálných funkcí definovaných na A. Označme $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Nechť dále je splněno některé z následujících kritérií:

(i) (Dirichlet) $\{F_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A a $g_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.
(ii) (Abel) $F_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows}$ a $\{g_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A.

Potom řada $\sum_{n=0}^\infty f_n(z) g_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A.

Důkaz. Důkaz je založen na Abelově parciální sumaci: Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (F_{n,k-n} - F_{n,k-1-n}) g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_{n,k-n}(g_k - g_{k+1}) + F_{n,p} g_{n+p}, \tag{5}$$

kde $F_{n,k} = \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j = F_{n+k} - F_n$ označuje úsek řady.

a) Nechť je splněna podmínka (i); potom existuje kladné číslo K tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in A$ je $|F_n(z)| < K$. Zvolme nyní $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že pro všechna $z \in A$ a všechna $n > n_0$ bude $|g_n(z)| < \frac{\varepsilon}{6K}$. Podle (5) potom pro všechna $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ platí:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)g_k(z)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_{n,k-n}(z)(g_k(z) - g_{k+1}(z)) + F_{n,p}(z)g_{n+p}(z)\right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |F_{n,k-n}(z)|\ |g_k(z) - g_{k+1}(z)| + |F_{n,p}(z)|\ |g_{n+p}(z)| \leq \\ &\leq 2K\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) = \\ &= 2K(|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) \leq \\ &\leq 2K(|g_{n+1}(z)| + |g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) < \varepsilon\end{aligned}$$

Rovnost mezi třetím a čtvrtým řádkem platí díky tomu, že posloupnost $\{g_n\}_1^\infty$ je monotonní, a proto mají všechny rozdíly $g_k(z) - g_{k+1}(z)$ stejné znaménko.

b) Je-li splněna podmínka (ii), pak existuje kladné číslo M tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in A$ je $|g_n(z)| < M$. Zvolme opět $\varepsilon > 0$. Nyní existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ bude $|F_{n,p}(z)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Potom ovšem podle (5) pro všechna $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)g_k(z)\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |F_{n,k-n}(z)|\ |g_k(z) - g_{k+1}(z)| + |F_{n,p}(z)|\ |g_{n+p}(z)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3M}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z) - g_{k+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{3M}(|g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) < \varepsilon\end{aligned}$$

Odtud potom jak v bodě a), tak v bodě b) dostáváme podle věty 2.3 stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ na množině A. □

Věta 2.6. (Abel) Buď $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R. Potom řada $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na každém kruhu $B(z_0, r)$, kde $r < R$.

Důkaz. Buď $r \in (0, R)$, potom pro všechna $z \in B(z_0, r)$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|\, r^n$. Odtud a z věty 2.4 vyplývá stejnoměrná konvergence řady $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ na množině $B(z_0, r)$. □

Poznámka. (1) Proto se jako stejnoměrně konvergentní majorizující řada do 2.4 často používá také mocninná řada.

(2) Alternativní znění: Mocninná řada konverguje na každé kompaktní množině, která je částí vnitřku oboru konvergence.

Věta 2.7. (1. věta Abelova) Nechť má reálná mocninná řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ kladný poloměr konvergence R. Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ v bodě x_0+R resp. x_0-R, pak konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0+R]$ resp. $[x_0-R, x_0]$.

Důkaz. Nechť např. řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě x_0+R. Potom

$$\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n = \sum_0^\infty a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n.$$

Protože pro všechna $x \in [x_0, x_0+R]$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je $\left|\frac{x-x_0}{R}\right| \leq 1$ a řada $\sum_0^\infty a_n R^n$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[x_0, x_0+R]$, je tvrzení věty důsledkem Abelova kritéria 2.5 (ii). □

Věta 2.8 (o limitě)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$ a nechť

(I) $z_0 \in A'$;
(II) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} f_n(z) = a_n$;
(III) Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A k $F(z)$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty a_n$ konverguje;
(ii) Existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z)$;
(iii) $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z) = \sum_0^\infty a_n$.

To jest:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f_n(z)$$

Důkaz. Položme $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $\lim_{z\to z_0, z\in A} F_n(z) = s_n$, $F_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} F(z)$ a tvrzení věty je důsledkem 1.7. □

Věta 2.9 (o spojitosti)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na množině A a spojitých v bodě $z_0 \in A$ (vzhledem k A). Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ stejnoměrně na množině A, je její součtová funkce spojitá v bodě z_0 vzhledem k množině A.

Důkaz. Plyne z věty 2.8 a důkazu věty 1.8 □

Věta 2.10 (2. věta Abelova)**.** Konverguje-li mocninná řada s reálnými koeficienty, s kladným poloměrem konvergence R a se středem v bodě x_0 v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, je její součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva, resp. v bodě $x_0 - R$ zprava.

Důkaz. Nechť např. mocninná řada konverguje v bodě x_0+R. Potom podle věty 2.7 konverguje tato řada stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0+R]$ a tudíž dle věty 2.9 musí být její součtová funkce spojitá na intervalu $[x_0, x_0+R]$ vzhledem k intervalu $[x_0, x_0+R]$. Speciálně musí být součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva. □

Věta 2.11 (o derivaci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na omezeném a otevřeném intervalu $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ takových, že platí:

(I) Existuje $c \in \mathcal{J}$ tak, že řada $\sum_0^\infty f_n(c)$ konverguje;
(II) Řada $\sum_0^\infty f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$;
(ii) Součtová funkce F řady $\sum_0^\infty f_n$ je diferencovatelná na intervalu $\mathcal{J}$;
(iii) Derivace F' je součtovou funkcí řady $\sum_0^\infty f_n'$.

To jest:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$$

Důkaz. Stačí užít větu 1.9 na posloupnost částečných součtů. □

Věta 2.12 (o integraci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, b]$ a F buď její součtová funkce. Potom i funkce F je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Plyne z věty 1.10. □

Věta 2.13. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a,b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a,b]$ a označme F její součtovou funkci. Potom pro každou funkci g, která má absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu $[a,b]$, platí:

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle věty 2.12 je funkce F riemannovsky integrabilní na intervalu $[a,b]$ a tudíž všechny zobecněné integrály $\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konvergují. Zbývá tedy dokázat výše uvedenou rovnost. Ze stejnoměrné konvergence řady $\sum_0^\infty f_n(x)$ na intervalu $[a,b]$ plyne, že ke zvolenému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ a pro všechna $x \in [a,b]$ je

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x},$$

kde $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Potom pro $n > n_0$ platí:

$$\left|\sum_{k=0}^n \int\limits_a^b f_k(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b F_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |F_n(x) - F(x)|\ |g(x)|\ \mathrm{d}x < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon\,|g(x)|\ \mathrm{d}x}{1 + \int_a^b |g(x)|\ \mathrm{d}x} < \varepsilon$$

□

Poznámka. (1) Právě dokázaná věta je na přednášce zahrnuta v rámci důkazu 3.2. Podobných případů, kde se pořadí vět liší od přednášky, může být vzhledem k faktu, že Vrána přednáší zpaměti, více.

(2) Ve skutečnosti nezáleží na tom, zdali máme funkci integrabilní na (a,b) či $[a,b]$, neboť integrál na krajních hodnotách nezáleží. Ve všech definicích týkajících se integrability mohou být namísto uzavřených intervalů otevřené a naopak, to platí i pro následující kapitolu. Na přednášce se značí $/a,b/$.

3. Trigonometrické řady

Definice 3.1. Buďte $\{a_n\}_0^\infty$ a $\{b_n\}_1^\infty$ dvě posloupnosti reálných čísel. Potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazýváme **trigonometrickou řadou**.

Poznámka. (1) Díky Moivreově větě je trigonometrická řada vlastně *komplexní* mocninnou řadou. Komplexním mocninným řadám se věnuje poslední kapitola v MAA4.

(2) Existuje-li $a \in \mathbb{R}$ tak, že trigonometrická řada konverguje na $[a, a+2\pi)$ resp. $(a, a+2\pi]$, pak řada konverguje na celém $\mathbb{R}$ a její součtová funkce je periodická s periodou 2π.

(3) Díky této periodicitě se můžeme omezit na zkoumání intervalu délky 2π. Obvykle volíme symetrický interval $[-\pi, \pi]$ (na něm je integrál z liché funkce nulový). Ve fyzice se však můžeme setkat s volbou intervalu $[0, 2\pi]$.

(4) Členy trigonometrické řady jsou funkce s periodou 2π. Lineární transformací však můžeme docílit libovolné periody. Např. řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{\pi n}{\lambda}x + b_n \sin \frac{\pi n}{\lambda}x\right),$$

kde $\lambda > 0$, má za členy funkce periodické s periodou 2λ. Při jejím studiu se tedy můžeme omezit pouze na interval $[-\lambda, \lambda]$. Takovou řadu budeme někdy stručně označovat jako trigonometrickou řadu s periodou 2λ.

Věta 3.2 (Eulerovy vzorce)**.** Nechť trigonometrická řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a buď F její součtová funkce. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[-\pi, \pi]$ a tudíž podle věty 2.12 je

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = a_0\pi.$$

Podobně pro $n \in \mathbb{N}$ podle věty 2.13 dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = a_n\pi.$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = b_n\pi,$$

neboť $\forall k \neq n$ platí tzv. relace ortogonality

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

a $\forall k, n \in \mathbb{N}_0$ platí tzv. normovací podmínky

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

□

Poznámka. (1) Analogicky potom ze stejnoměrné konvergence řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{\lambda} x + b_n \sin \frac{\pi n}{\lambda} x \right),$$

na $\mathbb{R}$ k součtové funkci F plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(x) \cos \frac{\pi n}{\lambda} x \, \mathrm{d}x \text{ a } b_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(x) \sin \frac{\pi n}{\lambda} x \, \mathrm{d}x.$$

(2) Vyjádření koeficientů trigonometrické řady pomocí své součtové funkce připomíná vyjádření koeficientů Taylorovy řady pomocí rozvíjené (součtové) funkce — zde však v koeficientech vystupují integrály, nikoli derivace. Do trigonometrické řady lze však rozvinout daleko více funkcí než do mocninné řady.

Definice 3.3. Nechť funkce f má absolutně konvergentní zobecněný integrál (v Riemannově smyslu) na intervalu (a, b), kde $b - a = 2\pi$. Položme

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Potom trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazýváme **Fourierovou řadou funkce f na intervalu** (a, b) a čísla a_n, b_n nazýváme **Fourierovými koeficienty**.

Poznámka. (1) Obecně — pro případ pouze omezeného intervalu (a, b) — klademe

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n}{\lambda} x \, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n}{\lambda} x \, \mathrm{d}x,$$

kde $2\lambda = b - a$. Fourierovou řadou funkce f na intervalu (a, b) potom rozumíme trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{\lambda} x + b_n \sin \frac{\pi n}{\lambda} x \right).$$

(2) Má-li periodická funkce s periodou ω absolutně konvergentní zobecněný integrál na některém z intervalů délky ω, má absolutně konvergentní integrál na každém omezeném intervalu.

(3) Buď g periodická funkce s periodou ω a nechť existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že integrál $\int_a^{a+\omega} g(x) \, \mathrm{d}x$ absolutně konverguje. Potom pro libovolné $b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_b^{b+\omega} g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\omega} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

(4) Z předchozích poznámek plyne, že Eulerovy vzorce v definici 3.3 lze pro funkci s periodou 2π psát také ve tvaru

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(5) Existence členu $\frac{a_0}{2}$ má své hluboké opodstatnění. Fourierova řada totiž připomíná vyjádření funkce jakožto lineární kombinaci bázových funkcí.Prostor funkcí je však nekonečné dimenze a pro tyto prostory nejsou zavedeny pojmy báze ani lineární kombinace.

(6) Z LAA2: Je-li $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ ON báze prostoru V, pak $\forall \vec{y} \in V$ platí rozvoj

$$\vec{y} = \sum_{n=1}^{n} \langle \vec{e}_i, \vec{y} \rangle \, \vec{e}_i,$$

kde čísla $\langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle$ nazýváme Fourierovými koeficienty vektoru $\vec{x}$ vzhledem k ON bázi $\{\vec{e}_i\}_1^n$.

(7) Zaveďme skalární součin dvou spojitých funkcí f, g jako $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$. [2] Definujeme pojem ortonormální báze (který je nedělitelný a odlišný od pojmu algebraické báze z LNA). Ve funkcionální analýze se ukazuje, že ortonormální bázi prostoru funkcí je spočetná množina

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

Z důkazu věty 3.2 (poslední dva řádky důkazu) plyne, že tyto funkce jsou

- vzájemně kolmé (relace ortogonality — $\langle \sin(kx), \cos(nx) \rangle = 0$),
- normované na jedničku (normovací podmínka — $\|\sin(nx)\|^2 = \|\cos(nx)\|^2 = \pi$).

Vzhledem k tomu, že můžeme bázové funkce (mimo první člen) rozdělit na sudé a liché, vznikají nám i dvě sady Fourierových koeficientů:

$$\tilde{a}_n = \left\langle f(x), \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}x, \quad \tilde{b}_n = \left\langle f(x), \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}x$$

Porovnáním s definicí Eulerových vzorců 3.3 vidíme, že se $\tilde{a}_n$ a $\tilde{b}_n$ liší od a_n a b_n o násobek $1/\sqrt{\pi}$. To je však normovací konstanta pro funkce $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$. Norma těchto funkcí je tedy zahrnuta již v členech a_n a b_n, resp. $\tilde{a}_n = a_n \|\cos(nx)\|$ a $\tilde{b}_n = b_n \|\sin(nx)\|$.

Příklad.

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1$$

Poznámka. (8) V předchozí poznámce jsme však nevyšetřili první člen, tedy Fourierův koeficient a_0. Z příkladu výše vidíme, že funkce $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ je již normovaná. Pak platí

$$\tilde{a}_0 = \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x$$

První člen Fourierovy řady je tedy

$$\tilde{a}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{\cos(0x)}_{=1} \, \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}.$$

Poslední rovnost plyne z vyjádření a_n pro $n = 0$. Tímto je uzavřena otázka, proč nelze první člen Fourierovy řady zahrnout do sumy. Z výše uvedeného je též zřejmé, že není možné zaměnit role členů a_n a b_n, neboť by mj. neseděla definice prvního členu (tj. $n = 0$).

(9) Na uzavření analogie mezi mocninnými a Fourierovými řadami poznamenejme, že prvky ortonormální báze 3.3.7 jsou vlastně reálné a imaginární složky prvků komplexní ortonormální báze tvaru $\{(2\pi)^{-1/2} e^{\mathbf{i}nx}\}_0^\infty$. Proto se lze setkat s definicí Fourierovy řady obsahující $e^{\mathbf{i}nx}$ namísto $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$.

(10) V kvantové mechanice se vzorci 3.3 říká relace úplnosti. Souvisí to s výše uvedeným rozvojem funkcí do báze (tedy do nekonečné řady). Viz 9.2.

[2] Tento vzorec pro skalární součin je však čistě formální záležitost (vzniklá zespojitěním skalárního součinu posloupností) a je třeba jej korektně zavést později.

Věta 3.4 (Dirichletův integrální vzorec)**.** Buď f funkce periodická s periodou 2π mající absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu délky 2π. Potom pro n-tý částečný součet její Fourierovy řady platí:

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Buď $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom podle poznámek 3.3 je:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})(x-t)\right)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Přitom jsme použili vyjádření

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\cos\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right] - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

platné $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2\pi m$, kde $m \in \mathbb{Z}$. □

Poznámka. (1) Díky aditivitě integrálu lze nalézt ještě následující integrální vyjádření n-tého součtu Fourierovy řady:

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t) + f(x-t))\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

(2) Zvolme $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(f(x) = 1)$, pak jsou $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(a_0 = 2,\ a_k = b_k = 0)$. Dosazením do předchozí poznámky získáme vyjádření jedničky pomocí integrálu z periodických funkcí:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\left[\sin(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Věta 3.5 (Dirichlet)**.** Buď f periodická funkce s periodou 2π mající absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu délky 2π. Potom její Fourierova řada (s periodou 2π) konverguje v bodě x právě tehdy, existuje-li číslo s tak, že platí:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right)\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Důkaz. Z poznámek 3.4.1, 3.4.2 a z linearity integrálu plyne $\forall x, s \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$F_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right)\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Odtud již plyne tvrzení věty. □

Poznámka. (1) Z důkazu věty 3.5 vyplývá, že číslo s je právě součtem Fourierovy řady funkce f v bodě x.

(2) Tvrzení věty 3.5 můžeme rozšířit ještě o jednu ekvivalenci: Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, existuje-li funkce s, jejíž definiční obor je interval $[a,b]$, taková, že platí:

$$\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s(x) \right) \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0.$$

Funkce s je potom součtovou funkcí Fourierovy řady funkce f na intervalu $[a,b]$.

(3) Vyšetřování konvergence Fourierovy řady jsme pomocí věty 3.5 převedli na studium limity (Dirichletova) integrálu. Než k němu přikročíme, dokážeme jednu velmi užitečnou nerovnost.

Věta 3.6 (Besselova nerovnost)**.** Buď f funkce zobecněně integrabilní na intervalu $(-\pi,\pi)$, jejíž zobecněný integrál $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Potom koeficienty její Fourierovy řady vyhovují nerovnosti

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Díky kovergenci $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2$ platí, že $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f$ konverguje absolutně (Hölderova nerovnost - viz FA1).

Má tedy smysl mluvit o Fourierově řadě. Označíme-li opět F_n n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $(-\pi,\pi)$, platí:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-F_n(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F_n^2(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left(\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)\right) +$$
$$+ \frac{a_0^2}{2}\pi + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)\pi.$$

Tato nerovnost platí $\forall n \in \mathbb{N}$. Odečtením závorky v posledním kroku na levou stranu a vydělením π získáme tvrzení věty. □

Poznámka. (1) Předchozí věta představuje zobecnění Pythagorovy věty a z jejího tvrzení, resp. důkazu vyplývá několik důležitých poznatků, které uvádíme v následujících poznámkách a větách.

(2) (kritérium konvergence)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \quad\Longrightarrow\quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) < +\infty.$$

(3) Z nutné podmínky konvergence řady na levé straně Besselovy nerovnosti dostáváme, že pro každou $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$, kde $b-a=2\pi$, platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

(4) Dle poznámky 3.3.7 známe tvar skalárního součinu funkcí, tedy $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \langle f,f\rangle$. Pokud by skalární součin indukoval normu, pravá strana až na prefaktor π^{-1} odpovídá pravé straně Besselovy nerovnosti z LAA2. Existenci normy je třeba vyšetřit.

(5) Mějme množinu všech funkcí f, pro něž zobecněné integrály $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ a tedy i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují, a označme ji $\mathcal{R}^2(a,b)$. Tato množina tvoří lineární prostor. Je tento prostor normovaný? Z předchozí poznámky se vhodným kandidátem na normu zdá být zobrazení

$$f \mapsto \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Splňuje-li naše zobrazení všechny axiomy normy 4.2, jedná se skutečně o normu.

Třetí axiom normy však není splněn, neboť rovnost $\|f\| = 0$ platí i pro nějakou nenulovou funkci f. Zobrazení je tedy pozitivně semidefinitní (nikoli pozitivně definitní) a nazveme jej **seminormou**.

(6) Konvergenci posloupnosti funkcí definovaných na intervalu (a,b) můžeme brát jako konvergenci v prostoru $\mathcal{R}^2(a,b)$ s výše definovanou seminormou. Nazývá se **konvergence podle normy**, někdy též konvergence dle středu. Limitu v normovaném prostoru pak značíme l.i.m. z latinského *limes in medio*.

(7) Jsou-li $f_n \in \mathcal{R}^2(a,b)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$, říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ **konverguje dle normy** k funkci f na intervalu (a,b) právě tehdy, když $\|f_n - f\| \to 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Řada $\sum_0^\infty f_n$ konverguje na intervalu (a,b) podle normy k funkci F, jestliže posloupnost částečných součtů této řady konverguje na intervalu (a,b) podle normy k funkci F.

(8) V důkazu věty jsme tedy operovali s výrazem $\|f - F_n\|^2$. Proto jsme si mohli dovolit odhadnout integrál zdola nulou, neboť naše seminorma je pozitivně semidefinitní.

(9) Číslo $\|f - g\|$ má význam **střední kvadratické odchylky** funkcí f a g na intervalu, na němž je definovaný skalární součin, v našem případě $(-\pi,\pi)$.

(10) Pro studium bodové konvergence nám však teorie užívající seminormy příliš nepomůže, neboť bodová konvergence a konvergence podle normy spolu nijak nesouvisí. Pochopíme to z následujících dvou poznámek.

(11) Položme $f_n(x) = n^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} e^{-nx}$, $f(x) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$. Potom $f_n(x) \to f(x)$ pro všechna $x \in [0,1]$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (f_n(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x = +\infty$. Posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ tedy nekonverguje podle normy na intervalu $[0,1]$ ke své limitní funkci f. Snadno se přesvědčíme, že nekonverguje podle normy vůbec.

(12) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $p_n = n - 2^{[\log_2 n]}$. Buď nyní $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$ takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \left[\frac{p_n}{n-p_n}, \frac{p_n+1}{n-p_n}\right] \\ 0 & \text{pro } x \in [0,1] \smallsetminus \left[\frac{p_n}{n-p_n}, \frac{p_n+1}{n-p_n}\right] \end{cases}$$

Potom posloupnost $\{f_n(x)\}_1^\infty$ nemá limitu pro žádné $x \in [0,1]$, i když posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje podle normy na intervalu $[0,1]$ k nulové funkci.

Snadnou úpravou definice funkcí f_n dosáhneme toho, že sestrojíme dokonce posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[0,1]$, která nebude mít limitu v žádném bodé intervalu $[0,1]$, ale která bude konvergovat podle normy na intervalu $[0,1]$ ke spojité (nulové) funkci.

Definice 3.7. (trigonometrický polynom) Buďte $\{c_k\}_0^n$, $\{d_k\}_1^n$ dvě posloupnosti reálných čísel, $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$T_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Potom funkci T_n nazýváme **trigonometrický polynom stupně nejvýše n-tého** resp. **trigonometrický polynom stupně n-tého**, je-li alespoň jedno z čísel c_n, d_n nenulové.

Poznámka. Zopakujme si nyní důkaz věty 3.6 s tím, že nahradíme součet F_n trigonometrickým polynomem T_n. Obdržíme:

$$\|f - T_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left(\frac{c_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k a_k + d_k b_k)\right)\pi + \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2)\right)\pi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{2}(a_0 - c_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - d_k)^2\right]\pi -$$

$$- \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)\pi \geq \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_n(x))^2\,\mathrm{d}x = \|f - F_n\|^2 \geq 0,$$

přičemž rovnost nastane pro $(\forall k \in \hat{n}_0)(a_k = c_k)$ a $(\forall k \in \hat{n})(b_k = d_k)$. Tedy

$$\|f - T_n\|^2 \geq \|f - F_n\|^2 \geq 0.$$

Nejlepší možná aproximace funkce f pomocí trigonometrického polynomu T_n je právě n-tý částečný součet její Fourierovy řady.

Věta 3.8 (o jednoznačnosti)**.** Nechť $f \in \mathcal{R}^2(a,b)$. Pak jediná trigonometrická řada, která může na intervalu $(-\pi,\pi)$ konvergovat podle normy k funkci f je právě Fourierova řada funkce f.

Důkaz. Označme

$$F_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

a nechť posloupnost $\{F_n\}_1^\infty$ konverguje podle normy na intervalu $(-\pi,\pi)$ k funkci f. Potom platí:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_n(x))\sin mx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\sin mx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_n(x))\sin mx\,\mathrm{d}x + d_m$$

pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Nyní stačí užít Besselovy nerovnosti

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_n(x))\sin mx\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\pi\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_n(x))^2\,\mathrm{d}x}$$

a provést limitní přechod pro $n \to \infty$. □

Věta 3.9 (Parsevalova rovnost)**.** Buď $f \in \mathcal{R}^2(-\pi,\pi)$. Potom Fourierova řada funkce f konverguje na intervalu $(-\pi,\pi)$ podle normy k funkci f právě tehdy, platí-li

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Rovnost v Besselově nerovnosti nastane právě tehdy, když $\|f - F_n\|^2 \longrightarrow 0$. □

Poznámka. Stejnoměrná konvergence je zřejmě postačující pro konvergenci podle normy. Odtud plyne, že tvrzení věty 3.2 (která jsou nyní také důsledkem věty 3.8) lze rozšířit o Parsevalovu rovnost z předchozí věty.

Věta 3.10 (Riemann)**.** Nechť existují $a, b \in \mathbb{R}^*$ tak, že zobecněný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. a) Nechť je nejdříve funkce f na *uzavřeném* intervalu $[a, b]$ riemannovsky integrabilní. Buď

$$m = \left\lfloor \frac{b-a}{2\pi} \right\rfloor \quad \text{a} \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pro } x \in (b, a + 2(m+1)\pi] \end{cases}$$

Funkce f^* je riemannovsky integrabilní na intervalu $[a, a + 2(m+1)\pi]$ a platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a+2(m+1)\pi} f^*(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m+1} \int\limits_{a+2(k-1)\pi}^{a+2k\pi} f^*(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již stačí provést limitní přechod pro $n \to \infty$ a užít poznámky 3.6.3.

b) Nechť $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje jako nevlastní Riemannův integrál a nechť např. b je jediný kritický bod tohoto integrálu. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože podle bodu a) je

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$\int\limits_a^c f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud již dostáváme, že pro všechna $n > n_0$ je:

$$\int\limits_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \le \left| \int\limits_a^c f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int\limits_c^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Analogicky dokážeme, že také

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Poznámka. (1) Důsledkem této věty je tvrzení: Je-li f integrabilní funkce na intervalu, její Fourierovy koeficienty jdou k nule pro rostoucí n a tím se součet Fourierovy řady blíží nule. Analogické tvrzení (Riemannovo-Lebesgueovo lemma) platí i pro případ, kdy máme místo řady integrál a používá se v teorii Fourierovy transformace a zobecněných funkcí.

(2) Aplikujme nyní větu 3.10 na limitu ve větě 3.5. Předpokládejme v následujících poznámkách, že funkce f je periodická s periodou 2π a že má absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu délky 2π. Protože podle věty 3.10 pro libovolné $s \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \cos nt \, \mathrm{d}t = 0,$$

dostáváme:

(3) Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s právě tehdy, platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \sin nt \, \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Buď $c \in (0,\pi)$. Potom pro libovolné $s \in \mathbb{R}$ je podle věty 3.10

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \sin nt \, \mathrm{d}t = 0$$

a tudíž Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s právě tehdy, platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right) \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \sin nt \, \mathrm{d}t = 0.$$

(5) (Dini) Pro konvergenci Fourierovy řady funkce f v bodě x k číslu s stačí konvergence integrálu

$$\int_0^c \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2s|}{t} \, \mathrm{d}t$$

pro některé $c \in (0,\pi)$. Skutečně — z konvergence výše uvedeného integrálu plyne konvergence integrálu

$$\int_0^c \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2s|}{2} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t$$

a ostatní je již důsledek věty 3.10 a poznámky 3.10.3.

(6) (Lipschitz) Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x k číslu s, existují-li $L > 0, \alpha \in (0,1]$ a pravé okolí H_0 bodu 0 tak, že pro všechna $t \in \mathrm{H}_0$ platí:

$$|f(x+t)+f(x-t)-2s| \le Lt^\alpha.$$

Věta 3.11 (Riemannova o lokalizaci)**.** Konvergence Fourierovy řady funkce f i hodnota jejího součtu v bodě x závisí pouze na průběhu funkce f v bezprostředním okolí tohoto bodu.

Důkaz. Plyne z poznámky 3.10.4. □

Věta 3.12 (o bodové konvergenci)**.** Buď f periodická funkce s periodou 2π, která má absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu délky 2π. buď dále $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť platí jeden z následujících výroků:

(I) Funkce f má v bodě x_0 obě konečné jednostranné derivace.

(II) Funkce f je v prstencovém okolí bodu x_0 diferencovatelná a její derivace má v bodě x_0 obě konečné jednostranné limity.

Potom Fourierova řada (s periodou 2π) funkce f konverguje v bodě x_0 a její součet je:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{v případě (I)} \\ \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \right) & \text{v případě (II)} \end{cases}$$

Důkaz. a) Nechť platí (I). Položme $L = 2\max(\left|f'_+(x_0)\right|, \left|f'_-(x_0)\right|) + 1$.

Potom existuje pravé okolí H bodu 0 tak, že pro všechna $t \in$ H platí:

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}Lt \quad \wedge \quad |f(x_0-t) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}Lt,$$

a tedy

$$|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)| \leq Lt.$$

To je ovšem Lipschitzova podmínka pro konvergenci (poznámka 3.10.6) Fourierovy řady funkce f v bodě x_0 k součtu $f(x_0)$.

b) Nechť platí (II). Označme $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f'(x)$, $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f'(x)$ a položme $L = 2\max(|f'(x_0+)|, |f'(x_0-)|) + 1$.

Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (x_0, x_0+\delta)$ je $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}L$. Zvolíme-li nyní libovolně dva body $x_1, x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$, existuje podle věty o přírůstku funkce $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že platí:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}L\,|x_2 - x_1|\,.$$

Odtud dle Bolzanova-Cauchyova kritéria plyne existence vlastní limity funkce f v bodě x_0 zprava.

Položme opět $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ a definujme funkci g takto:

$$g(t) = \begin{cases} f(x_0+t) & \text{pro } t \in (0,\delta) \\ f(x_0+) & \text{pro } t = 0 \end{cases}$$

Funkce g je spojitá zprava v bodě 0, diferencovatelná na intervalu $(0,\delta)$ a platí

$$\lim_{t\to 0+} g'(t) = \lim_{t\to 0+} f'(x_0+t) = f'(x_0+).$$

Potom funkce g má v bodě 0 derivaci zprava a platí $g'_+(0) = f'(x_0+)$, tj.

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+)}{t} = f'(x_0+).$$

Podobně dokážeme, že

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f(x_0+t) - f(x_0-)}{t} = f'(x_0-).$$

Odtud již plyne, že existuje takové pravé okolí H bodu 0, že pro všechna $t \in$ H platí:

$$|f(x_0+t) - f(x_0+)| \leq \frac{1}{2}Lt,\ |f(x_0-t) - f(x_0-)| \leq \frac{1}{2}Lt$$

a tedy

$$|f(x_0+t) + f(x_0-t) - (f(x_0+) + f(x_0-))| \leq Lt.$$

Podle poznámky 3.10.6 odtud plyne, že Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x_0 k číslu

$$\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-)).$$

□

Poznámka. (1) Předpoklady (I) a (II) ve větě 3.12 jsou vzájemně nezávislé. Z (I) evidentně neplyne (II) a na druhé straně z platnosti (II) neplyne (právě když funkce f není spojitá v bodě x_0) platnost předpokladu (I). Pro funkci spojitě diferencovatelnou v bodě x_0 jsou ovšem oba předpoklady (I) a (II) ekvivalentní.

(2) Poznámkami 3.10.3–3.10.6 a větami 3.12 a 3.11 je v podstatě vyřešena otázka bodové konvergence Fourierovy řady funkce f.

(3) Poněkud omezující (i když pro rozvoj v trigonometrickou řadu zcela logickou) se již vzhledem k definici 3.3 zdá skutečnost, že všechna tato tvrzení byla vyslovena pro periodickou funkci. Abychom všechna tato tvrzení mohli užít i pro funkci definovanou na omezeném intervalu, pomůžeme si tzv. periodickým prodloužením.

Definice 3.13. Buďte $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Potom **periodickým prodloužením funkce** f na intervalu $[a, b)$ rozumíme funkci f^* definovanou na množině $\mathbb{R}$

$$f^*(x) = f\left(x - \left\lfloor \frac{x-a}{b-a} \right\rfloor (b-a)\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Příklad.

- Periodickým prodloužením funkce $x \mapsto \sin x$ na intervalu $[0, \pi)$ je $|\sin x|$.
- Periodickým prodloužením funkce $x \mapsto \sin x$ na intervalu délky 2π je funkce $\sin x$.
- Periodickým prodloužením funkce $x \mapsto x$ na intervalu $[0, 1)$ je funkce $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Poznámka.

(1) Buď nyní f funkce definovaná na intervalu $[a, b)$, $b - a = 2\pi$ a nechť zobecněný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje. Potom, užijeme-li větu 3.12 na periodické prodloužení f^* funkce f na intervalu $[a, b)$, dostáváme:

Buď $x_0 \in (a, b)$ a nechť je splněn alespoň jeden z předpokladů (I) a (II) věty 3.12. Potom platí:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-)),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_a^b f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_a^b f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a symboly $f(x_0+)$ resp. $f(x_0-)$ chápeme ve smyslu užitém v důkazu věty 3.12.

(2) Buďte a, b libovolná různá reálná čísla, x_0 vnitřní bod intervalu o krajních bodech a, b. Nechť dále zobecněný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje. Potom, je-li splněn alespoň jeden z předpokladů (I), (II) věty 3.12, platí:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{b-a} x_0 + b_n \sin \frac{2\pi n}{b-a} x_0\right) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-)),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int\limits_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n}{b-a} x \,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int\limits_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n}{b-a} x \,\mathrm{d}x,$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

(3) Nevyřešena v předchozích dvou poznámkách ještě zůstává otázka konvergence Fourierovy řady funkce f v krajních bodech intervalu (a, b). Předpokládáme opět, že zobecněný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje a nechť je splněn jeden z následujících předpokladů:

(I*) $f(a) = f(b)$ a existují jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$.

(II*) Funkce f je diferencovatelná v jistém pravém okolí bodu a a levém okolí bodu b, přičemž existují vlastní limity $\lim_{x \to a+} f'(x)$ a $\lim_{x \to b-} f'(x)$.

Aplikací věty 3.12 na periodické prodloužení funkce f na intervalu $[a, b)$ získáme:
Fourierova řada funkce f z poznámky 3.13.1 resp. 3.13.2 konverguje v bodě a (a tím i v bodě b) a její součet je $\frac{1}{2}(f(a+) + f(b-))$.

(4) Z našich úvah zatím vyplývá, že Fourierova řada funkce f konverguje v bodech spojitosti, má-li v nich funkce f obě jednostranné konečné derivace. Na druhé straně jsme také ukázali, že Fourierova řada funkce f konverguje i v bodech nespojitosti prvního druhu funkce f (je-li ovšem splněna podmínka (II)). Napadne nás možná, že by již spojitost funkce f mohla být pro konvergenci Fourierovy řady funkce f postačující. Že tomu tak není, dokázal již du Bois-Reymond. Relativně jednoduchý příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada v jednom bodě diverguje, pocházející od L. Fejéra, uvádí V. Jarník ve své knize Integrální počet II (kap. XIII, § 9). Dodnes však není vyřešena otázka, jestli existuje spojitá funkce, jejíž Fourierova řada by divergovala v každém bodě.

(5) Naopak — diferencovatelnost spojité funkce f není nutná k tomu, aby její Fourierova řada konvergovala. Např. trigonometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \cos(p^n \pi x)$, kde $q \in (0,1)$ a $p \in \mathbb{N}$ konverguje stejnoměrně na množině $\mathbb{R}$ a tedy podle věty 3.2 je Fourierovou řadou své spojité součtové funkce f. K. Weierstrass dokázal (a není to triviální), že pro $pq > 1 + \frac{3}{2}\pi$ nemá funkce f derivaci v žádném bodě množiny $\mathbb{R}$.

Definice 3.14. Řekneme, že funkce je **po částech spojitá** na uzavřeném a omezeném intervalu, má-li v tomto intervalu nejvýše konečně mnoho bodů nespojitosti a ani v jednom z nich nemá nespojitost druhého druhu.

Funkce je po částech spojitá na neomezeném intervalu, je-li po částech spojitá na každém jeho omezeném a uzavřeném podintervalu.

Věta 3.15 („pro život“)**.** Nechť funkce f je po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci na intervalu $[a,b]$. Potom Fourierova řada funkce f na intervalu (a,b) konverguje na celé množině $\mathbb{R}$ a označíme-li F její součtovou funkci, platí:

(i) Funkce F je periodická s periodou $b-a$.
(ii) $F(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ pro všechna $x \in (a,b)$.
(iii) $F(a) = F(b) = \frac{1}{2}(f(a+) + f(b-))$.

Důkaz. Plyne z předchozích poznámek, nebo přímo z věty 3.12, jestliže ji aplikujeme na periodické prodloužení funkce f. □

Poznámka. (1) Druhý bod (ii) věty 3.15 můžeme vyslovit také v následující podrobnější formě:
(ii) Pro všechna $x \in (a,b)$ platí:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{je-li funkce } f \text{ v bodě } x \text{ spojitá} \\ \lim\limits_{y \to x} f(y) & \text{má-li funkce } f \text{ v bodě } x \text{ odstranitelnou nespojitost} \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{má-li funkce } f \text{ v bodě } x \text{ nespojitost I. druhu} \end{cases}$$

(2) Nechť integrál $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje a buď

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourierova řada funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom platí: Je-li funkce f lichá, jsou

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \text{ pro } n \in \mathbb{N}_0;$$

je-li funkce f sudá, jsou

$$b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \text{ pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

(3) Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a položme $f(x) = \cos \alpha x$ pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$. Je-li $\alpha \in \mathbb{Z}$, je triviálně funkce f součtovou funkcí své Fourierovy řady na intervalu $[-\pi, \pi]$. Buď dále $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$; potom podle předchozí poznámky platí:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{2\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \sin \alpha\pi$$

a $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Z věty 3.15 potom plyne:

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$. Analogicky obdržíme

$$\sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin nx$$

pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$.

(4) Položme ve vyjádření pro $\cos \alpha x$ v předchozí poznámce $x = 0$ a $\alpha\pi = z$ resp. $x = \pi$ a $\alpha\pi = z$. Potom dostáváme:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - (\pi n)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right)$$

resp.

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (\pi n)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right)$$

pro všechna $z \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ (tj. všechna reálná z, která nejsou celým násobkem π). Našli jsme tak vlastně rozklad dvou neracionálních funkcí na parciální zlomky. Položíme-li v rozkladech $z = \frac{-\pi}{2} - y$, obdržíme také rozklad funkcí $\frac{1}{\cos z}$ a $\operatorname{tg} z$ na parciální zlomky.

(5) Buď $x \in (0, \pi)$. Potom podle předcházející poznámky pro všechna $y \in (0, x]$ je

$$\operatorname{cotg} y - \frac{1}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 - (n\pi)^2}.$$

Protože řada na pravé straně rovnosti podle Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně na $[0, x]$, platí podle věty 2.12

$$\int_0^x \left(\operatorname{cotg} y - \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2y \, \mathrm{d}y}{y^2 - (n\pi)^2},$$

tj.

$$\left[\ln \frac{\sin y}{y} \right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left| y^2 - (n\pi)^2 \right| \right]_0^x$$

a

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2} \right).$$

Ze spojitosti funkce ln (můžeme tedy „odlogaritmovat“) potom plyne

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2} \right).$$

Poslední rovnost platí evidentně na intervalu $[-\pi, \pi]$ a užijeme-li periodičnost obou stran, dokážeme její platnost na celé množině $\mathbb{R}$. Speciálně pro $z = \frac{\pi}{2}$ obdržíme vyjádření jedničky jako nekonečný součin (tzv. Wallisovu formuli)

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}.$$

Ze vztahu $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ ještě plyne, že

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right)$$

pro všechna $z \in \mathbb{R}$.

Věta 3.16 (Jordan)**.** Buď f funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $f(a) = f(b)$.
(ii) f je spojitá na intervalu $[a, b]$.
(iii) Funkce f má po částech spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$.

Potom Fourierova řada funkce f na intervalu $[a, b]$ konverguje stejnoměrně na množině $\mathbb{R}$.

Důkaz. Větu stačí zřejmě dokázat pro případ $b - a = 2\pi$.

Buďte $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$ všechny body nespojitosti derivace funkce f. Označíme-li $c_0 = a$, $c_n = b$, platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_a^b f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \left([f(x) \sin nx]_{c_{i-1}}^{c_i} - \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} (f(b) \sin nb - f(a) \sin na) - \frac{1}{n\pi} \int\limits_a^b f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} b'_n,$$

kde jsme písmenem b'_n označili příslušný Fourierův koeficient funkce f'. Analogicky dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \frac{1}{n} a'_n.$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}$ tedy platí:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} + |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Poslední krok platí z tzv. Youngovy nerovnosti:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Longrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$$

Z Besselovy nerovnosti (věta 3.6) vyplývá, že výraz na pravé straně nerovnosti je n-tý člen konvergentní číselné řady. Tvrzení věty nyní plyne z Weierstrassova kritéria. □

4. Metrika

Touto kapitolou dle Vrány začíná „látka z druhého ročníku“. Na úvod si připomeneme základní definici z lineární algebry. Z té se samozřejmě nezkouší, ale je vhodné ji porovnat s následujícími definicemi.

Definice 4.1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, buď definováno zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$ takové, že platí:

(I) pozitivní definitnost: $\forall \vec{x}\in V\ \ \langle\vec{x},\vec{x}\rangle \geq 0$, přičemž $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$,

(II) hermitovskost: $\forall \vec{x},\vec{y}\in V\ \ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}$,

(III) levá linearita: $\forall \vec{x},\vec{y}\in V, \forall\lambda\in\mathbb{C}\ \ \langle\lambda\vec{x}+\vec{y},\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$,

pak zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nazveme **skalární součin** a dvojici $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazveme **pre-Hilbertův prostor**.

Definice 4.2. Buď V vektorový prostor nad T, buď definováno zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí:

(I) pozitivní definitnost: $\forall \vec{x}\in V\ \ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$,

(II) pozitivní homogenita: $\forall \vec{x}\in V, \forall\lambda\in T\ \ \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\ \|\vec{x}\|$,

(III) trojúhelníková nerovnost: $\forall \vec{x},\vec{y}\in V\ \ \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$,

pak zobrazení $\|\cdot\|$ nazveme **normou** na prostoru V a dvojici $(V,\|\cdot\|)$ nazveme **normovaný lineární prostor**. Není-li splněn axiom (I), zobrazení nazýváme **seminormou**.

Poznámka. Příklady norem:

(1) Norma indukovaná skalárním součinem: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$.
(2) Norma indukovaná lineárním funkcionálem φ: $\|\vec{x}\| = |\varphi(\vec{x})|$
(3) Maximová norma: $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_i\{|x_i|\}$
(4) Supremová norma: $\|f\|_\infty = \sup\limits_x\{|f(x)|\}$
(5) p–norma: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\dim V} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\quad\forall p\geq 1$ — pro $p\in(0,1)$ není splněn axiom (III).
(6) Položíme-li v definici p–normy $p=1$, získáme součtovou normu. [3]
(7) Položíme-li v definici p–normy $p=2$, získáme eukleidovskou normu (normu indukovanou standardním skalárním součinem).

Pro p–normy dále platí

(i) $\lim_{p\to+\infty}\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$
(ii) $(\forall p<q)(\forall\vec{x}\in V)(\|\vec{x}\|_p \geq \|\vec{x}\|_q)$

Poznámka. Norma na prostoru funkcí indukovaná skalárním součinem z poznámky 3.3.7 nesplňuje axiom (I), je to tedy seminorma. Abychom získali normu, stačí pouze namísto Riemannova integrálu mínit integrál Lebesgueův. Korektní zavedení této normy na prostoru funkcí je náplní MAA4.

Definice 4.3. Buď X neprázdná množina, na níž je definováno zobrazení $\varrho : X\times X \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí:

(I) totožnost: $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y \quad \forall x,y\in X$,

(II) symetrie: $\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \quad \forall x,y\in X$,

(III) trojúhelníková nerovnost: $\varrho(x,z)\leq \varrho(x,y)+\varrho(y,z) \quad \forall x,y,z\in X$,

pak zobrazení ϱ nazveme **metrikou** na množině X a dvojici (X,ϱ) nazveme **metrický prostor**. Prvky nosné množiny se nazývají **body** a $\varrho(x,y)$ nazýváme **vzdálenost bodů** x,y.

[3] V anglické literatuře se nazývá též *taxicab* norma, resp. manhattanská norma. Jméno je odvozené z toho, jakou vzdálenost musí ujet taxikář v manhattanské obdélníkové síti ulic.

Poznámka. (1) Na množině X není definován součet prvků, stačí nám definovat jejich vzdálenost pomocí metriky.
(2) Na každé množině lze zavést metriku — přinejmenším tzv. diskrétní metrika, která poskytuje pouze rozlišovací schopnost:

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(3) Norma automaticky indukuje metriku $\varrho(x,y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Tímto způsobem získáme metriku maximovou, eukleidovskou, součtovou, atd.
(4) Metrický prostor už nemusí mít strukturu vektorového prostoru. Pro zdůraznění linearity užíváme pojmu *lineární* prostor namísto vektorového a zapisujeme $\vec{X}$ místo X. Navíc se tímto odliší lineární prostor od afinního 10.1.
(5) Každý pre-Hilbertův prostor je normovaný a každý normovaný prostor je metrický.

Definice 4.4. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Potom definujeme:
(i) $\forall A \subset X : \mathrm{diam}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} \varrho(x,y)$ — **průměr množiny**
(ii) $\forall A, B \subset X : \mathrm{dist}(A,B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} \varrho(x,y)$ — **vzdálenost množin**

Říkáme, že množina $A \subset X$ je omezená, právě když $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.

Poznámka. Jelikož $\sup \emptyset = -\infty$, definuje se někdy průměr prázdné množiny explicitně jako $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$. Zobrazení diam je tedy nezáporné na potenční množině $\mathcal{P}(X)$, tj. $\forall A \subset X \ 0 \leq \mathrm{diam}(A) \leq +\infty$. S definicí vzdálenosti množin podobný problém nemáme, neboť $\inf \emptyset = +\infty$.

Definice 4.5. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $A \subset X$. Vzdálenost bodu $x \in X$ od množiny A definujeme jako $\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(\{x\}, A)$.

Věta 4.6. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Pak platí:
(i) $\forall x, y \in X, \forall A \subset X \quad \mathrm{dist}(x,A) \leq \varrho(x,y) + \mathrm{dist}(y,A)$
(ii) $\forall x, y \in X, \forall A \subset X \quad |\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leq \varrho(x,y)$
(iii) $\forall x \in X, \forall A, B \subset X \quad \mathrm{dist}(x, A \cup B) = \min\{\mathrm{dist}(x,A), \mathrm{dist}(x,B)\}$
(iv) $\forall x \in X, \forall A \subset X \quad x \in A \Rightarrow \mathrm{dist}(x,A) = 0$

Důkaz. Plyne z vlastností infima a metriky ϱ. □

Poznámka. Zobrazení $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ obecně není metrikou potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Pokud totiž pro dvě různé množiny $A, B \subset X$ platí $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\mathrm{dist}(A,B) = 0$, ale množiny A, B nejsou identické. Obecně tedy metrika představuje vzdálenost, ale vzdálenost nemusí být metrikou.

Definice 4.7. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$. Potom
(I) **otevřenou koulí** rozumíme množinu $B(x,r) = \{y \in X \mid \varrho(y,x) < r\}$,
(II) **uzavřenou koulí** rozumíme množinu $S(x,r) = \{y \in X \mid \varrho(y,x) \leq r\}$.

Poznámka. (1) Prostor je omezený, právě když se vejde do koule, tj. $(\exists r, x)(X \subset B(x,r))$.
(2) Takto definovaná koule nemusí být kulatá, dokonce nemusí být ani konvexní. V případě metriky indukované normou konvexní bude.
(3) V diskrétní metrice: $B(x,1) = \{x\}$, ale $S(x,1) = X = B(x, r > 1)$. V jazyce 5.7 lze říci, že uzávěr otevřené koule je podmnožina uzavřené koule, tj. $\overline{B(x,r)} \subset S(x,r)$. (Rovnost platí v lineárním prstoru.)
(4) Diskrétní prostor $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ je omezený, ale prostor s absolutní hodnotou $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ není omezený.

Věta 4.8. Nechť $x, y \in X$, $x \neq y$. Pak existuje $r > 0$ tak, že platí: $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$.

Důkaz. Například $r = \frac{1}{2}\varrho(x,y)$. □

Definice 4.9. Říkáme, že množina $A \subset X$ je **otevřená**, právě když s libovolným bodem obsahuje i nějakou kouli se středem v tomto bodu, tj. $(\forall x \in A)(\exists B(x,r) \subset A)$.

Poznámka. Příklady otevřených množin:

(1) Každý prostor je otevřená množina, prázdná množina je také otevřená.
(2) Otevřená koule je otevřená množina.

Věta 4.10. (i) Buďte $A_1, \ldots, A_n$ otevřené množiny v X. Potom $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ je otevřená množina.

(ii) Jsou-li A_α otevřené množiny ($\alpha \in \mathcal{I}$ **libovolná** indexová množina), je $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ je otevřená množina.

Důkaz. (i) Pokud je průnik prázdný, je tvrzení triviální. Pro libovolný bod x neprázdného průniku pak platí: $(\forall i \in \hat{n})(\exists r_i > 0)(B(x, r_i) \subset A_i)$. Vzhledem k tomu, že množin je konečný počet, existuje $r = \min_{i \in \hat{n}} r_i$, tedy platí

$$B(x,r) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

což je tvrzení věty.

(ii) Libovolný bod x ze sjednocení leží alespoň v jedné množině A_α, tudíž podle předpokladu existuje koule

$$B(x,r) \subset A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha.$$

$\square$

5. Topologie

Definice 5.1 (Hausdorff, 1914)**.** Buď X libovolná neprázdná množina, $\mathcal{P}(X)$ její potenční množina a $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ taková, že platí:

(I) $\emptyset, X \in \tau$,

(II) Pro každé $A_\alpha \in \tau,\ \alpha \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ konečná) platí: $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha \in \tau$,

(III) Pro každé $A_\alpha \in \tau,\ \alpha \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ libovolná) platí: $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha \in \tau$.

Potom τ nazýváme **topologií** na X a dvojici (X, τ) nazveme **topologickým prostorem**. Prvky topologie nazveme **otevřenými množinami**.

Poznámka. (1) Pojem topologie zobecňuje vlastnosti metriky 4.10. Každá metrika indukuje topologii, jejíž prvky určíme podle 4.9. Topologie je však obecnější pojem nezávislý na metrice. Prvky topologie (tj. otevřené množiny) pak mohou být klidně i množiny, jež jsou v nějaké metrice uzavřené.

(2) Na každé neprázdné množině X lze zavézt triviální topologii $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ a diskrétní topologii $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. Diskrétní topologie je indukovaná diskrétní metrikou.

Definice 5.2. Řekneme, že množina A je **uzavřená** v X, právě když $X \setminus A \in \tau$ (její doplněk do X je otevřená).

Poznámka. Systém všech uzavřených množin nazýváme **kotopologie**, značíme $c\tau$.

Definice 5.3. Buď $x \in (X, \tau)$. Potom množinu H_x nazveme **okolím bodu** x, právě když $(\exists A \in \tau)(x \in A \subset \mathrm{H}_x)$.

Poznámka. (1) V metrickém prostoru definujeme ε-okolí $\mathrm{H}_x^\varepsilon = H_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon) = B_\varepsilon(x)$.

(2) Okolí množiny H_A definujeme jako $\mathrm{H}_A = \bigcup_{x\in A} \mathrm{H}_x$, neboli $(\exists B \in \tau)(A \subset B \subset \mathrm{H}_A)$.

Příklad. Nechť je na uzavřeném intervalu $X = [0, 1]$ zavedena topologie τ_{fin} taková, že do ní patří $\emptyset$, X a všechny doplňky konečných podmnožin X. Potom pro všechna $x \in X$ a libovolnou prostou posloupnost ($x_{n_1} \neq x_{n_2}$ pro $n_1 \neq n_2$) platí, že $x_n \to x$, protože každé okolí $U(x)$ obsahuje $\{x_n\}$ až na konečný počet členů. Všechny body $\{x_n\}$ splňují definici limity, tj. neplatí tvrzení o jednoznačnosti limity.

Z toho důvodu zavedeme **axiomy oddělitelnosti:**

T_0**:** $(\forall x \neq y)[(\exists \mathrm{H}_x)(y \notin \mathrm{H}_x) \vee (\exists \mathrm{H}_y)(x \notin \mathrm{H}_y)]$

T_1**:** $(\forall x \neq y)(\exists \mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y)(y \notin \mathrm{H}_x \wedge x \notin \mathrm{H}_y)$

T_2**:** $(\forall x \neq y)(\exists \mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y)(\mathrm{H}_x \cap \mathrm{H}_y = \emptyset)$

T_3**:** $(\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists \mathrm{H}_A, \mathrm{H}_x)(\mathrm{H}_A \cap \mathrm{H}_x = \emptyset)$

T_4**:** $(\forall A, B \in c\tau)(A \cap B = \emptyset)(\exists \mathrm{H}_A, \mathrm{H}_B)(\mathrm{H}_A \cap \mathrm{H}_B = \emptyset)$

Definice 5.4. Topologický prostor vyhovující:

- axiomu T_0 nazýváme **Kolmogorovův**,
- axiomu T_2 nazýváme **Hausdorffův**,
- axiomu T_3 nazýváme **regulární**,
- axiomu T_4 nazýváme **normální**.

Poznámka. (1) Od této chvíle budeme předpokládat prostor T_2.

(2) Na Hausdorffovu počest se okolí bodu x obvykle značí právě H_x.

(3) Metrický prostor splňuje T_4, tj. je normální.

Věta 5.5. Nechť (X, τ) je topologický prostor, $c\tau$ jeho kotopologie. Pak platí:

(i) $\emptyset, X \in c\tau$

(ii) $B_i \in c\tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in c\tau$

(iii) $B_\alpha \in c\tau,\ \alpha \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \in c\tau$

Důkaz. (i) $X \smallsetminus \emptyset = X \in \tau$, $X \smallsetminus X = \emptyset \in \tau$.

(ii) S využitím de Morganových zákonů dostáváme

$$X \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \smallsetminus B_i) \in \tau$$

(iii)

$$X \smallsetminus \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} (X \smallsetminus B_\alpha) \in \tau$$

□

Poznámka. De Morganovy zákony se dokáží aplikací vztahů

$$X \smallsetminus (A \cap B) = (X \smallsetminus A) \cup (X \smallsetminus B)$$
$$X \smallsetminus (A \cup B) = (X \smallsetminus A) \cap (X \smallsetminus B)$$

Pro všechny $A, B \subset X$ pak platí:

$$x \in X \smallsetminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in X \smallsetminus A \vee x \in X \smallsetminus B \Leftrightarrow x \in (X \smallsetminus A) \cup (X \smallsetminus B)$$

Druhý vztah se dokáže podobně.

Definice 5.6. Množinu $A \subset X$, pro kterou platí $A \in \tau \cap c\tau$, nazveme **obojetnou**.

Poznámka. V každém topologickém prostoru (X, τ) existují alespoň dvě obojetné množiny, a to prázdná množina $\emptyset$ a prostor X samotný.

Definice 5.7. Buď $A \subset X$. Potom **vnitřkem** množiny A° je sjednocení

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \tau}} B.$$

Body $x \in A^\circ$ nazýváme **vnitřními body** množiny A. **Vnějškem** množiny A nazýváme vnitřek doplňku (tj. $(X \smallsetminus A)^\circ$), prvky vnějšku nazýváme **vnějšími body** množiny A.

Poznámka. (1) Triviálně platí: $A^\circ \in \tau$, $A^\circ \subset A$, $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \mathrm{H}_x \subset A$.

(2) Vnitřek A je největší otevřená podmnožina A; $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ je otevřená $\Leftrightarrow A \in \tau$.

(3) Alternativní definice okolí: H_x nazveme okolím bodu $x \Leftrightarrow x \in \mathrm{H}_x^\circ$.

(4) Vnitřek množiny A tvoří všechny body množiny A, jimž je A okolím.

(5) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ (Důkaz: $x \in A^\circ \Rightarrow (\exists U \in \tau, x \in U \subset A^\circ), A \subset B \Rightarrow U \in B \Rightarrow x \in U \subset B^\circ$)

(6) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ (ne rovnost: $((0,1) \cup [1,2))^\circ \neq (0,1)^\circ \cup [1,2)^\circ$)

(7) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (Důkaz:$A \cap B$ je okolím $\Leftrightarrow$ je okolím A i B).

Definice 5.8. **Hranicí množiny** A nazýváme množinu $\dot{A} = X \smallsetminus (A^\circ \cup (X \smallsetminus A)^\circ)$, její prvky pak **hraniční body**.

Poznámka. (1) $\dot{A} \in c\tau$, tj. hranice je uzavřená. (Je doplňkem otevřených množin)

(2) $\dot{(A \cup B)} \subset \dot{A} \cup \dot{B}$. (ne rovnost: $\dot{((0,1) \cup [1,2))} = \emptyset \neq \dot{(0,1)} \cup \dot{[1,2)} = \{1\}$)

(3) $\dot{A} = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ (ekvivalentní definici)

(4) $x \in \dot{A} \Leftrightarrow (\forall \mathrm{H}_x)(\mathrm{H}_x \cap A \neq \emptyset \wedge \mathrm{H}_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$. (Plyne z předchozího bodu a definice uzávěru 5.9)

Definice 5.9. Uzávěrem $\overline{A}$ množiny A nazveme nejmenší uzavřenou nadmnožinu, tj.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \in c\tau}} C$$

Poznámka. (1) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$, $A^\circ \in \tau$, $\overline{A} \in c\tau$.

(2) Uzávěr a vnějšek libovolné množiny jsou disjunktním rozkladem množiny X:

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \in c\tau}} C = \bigcup_{\substack{X \setminus C \subset X \setminus A \\ X \setminus C \in \tau}} (X \setminus C) = (X \setminus A)^\circ,$$

tedy $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$, $\overline{A} = A^\circ \cup \dot{A} = A \cup \dot{A}$.

(3) Alternativní definice uzavřené množiny: $A \subset \overline{A} \subset A$, tedy $\overline{A} = A$.

(4) Alternativní definice otevřené množiny: $A^\circ = A$.

(5) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (ne rovnost: $\overline{((0,1) \cup (1,2))} = \emptyset \neq \overline{(}0,1) \cup \overline{(1,2)} = \{1\}$), $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(6) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(7) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall \mathrm{H}_x)(\mathrm{H}_x \cap A \neq \emptyset)$, to jest v metrickém prostoru $(\forall \varepsilon > 0)(B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$.

(8) $\overline{\dot{A}} = \dot{A}$, $\dot{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \setminus (\overline{A})^\circ \subset \overline{A} \setminus A^\circ = \dot{A}$ (protipříklad rovnosti: $\overline{\{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 < r\}}$ obsahuje počátek, tj. vnitřek uzávěru se nerovná vnitřku)

(9) $\dot{\dot{A}} = \overline{\dot{A}} \setminus (\dot{A})^\circ \subset \dot{A}$, $\dot{\dot{\dot{A}}} = \dot{\dot{A}} \setminus (\dot{\dot{A}})^\circ = \dot{\dot{A}}$.

Definice 5.10. Buď (X, τ) topologický prostor, $A \subset X$. Na A definujeme **relativní** (též **indukovanou**) topologii $\tau_A = (B \cap A | B \in \tau)$ a (A, τ_A) nazveme **topologickým podprostorem**, značíme $(A, \tau_A) \subset\subset (X, \tau)$.

Definice 5.11. Buď (X, τ) topologický prostor s topologickým podprostorem $(Y, \tau_Y) \subset\subset (X, \tau)$. Pak vnitřek množiny $A \subset Y$ v prostoru Y značíme $A^{\circ Y}$ a její uzávěr v prostoru Y značíme značíme $\overline{A}^Y$.

Definice 5.12. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $Y \subset X$, $\varrho_Y = \varrho|_{Y \times Y}$. Potom uspořádanou dvojici (Y, ϱ_Y) nazveme **metrickým podprostorem**, $Y \subset\subset X$.

Příklad. Pokud uvažujeme prostor $X = \mathbb{R}$ se standardní metrikou indukovanou absolutní hodnotou a metrický podprostor $Y = [a,b]$ („uzavřený“ interval), pak pro $c \in (a,b)$ je množina $A = (c,b]$ („polouzavřený“ interval) otevřená v Y ($(c,b] = [a,b] \cap (c,d)$, kde $d > b$, tj. průnik podprostoru a otevřené množiny z X).

Věta 5.13. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $Y \subset\subset X$ a $A \subset Y$. Potom $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$.

Důkaz.

$$\overline{A}^Y = \{y \in Y \mid \varrho(y, A) = 0\} = Y \cap \underbrace{\{x \in X \mid \varrho(x, A) = 0\}}_{\overline{A}} = Y \cap \overline{A}$$

$\square$

Věta 5.14. Buď (X,ϱ) metrický prostor, $Y \subset\subset X$ a $A \subset Y$. Potom platí:
$$A = \overline{A}^Y \Leftrightarrow (A = Y \cap B, B = \overline{B}^X)$$

Důkaz. a) $(\Rightarrow)$: $A = \overline{A}^Y \Rightarrow A = Y \cap \overline{A} = Y \cap B$.
b) $(\Leftarrow)$: $A = Y \cap B, B = \overline{B} \Rightarrow A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} = B \Rightarrow \overline{A}^Y = Y \cap \overline{A} \subset Y \cap B = A$. Opačná inkluze $(A \subset \overline{A}^Y)$ je triviální.

□

Poznámka. Buď (X,ϱ) metrický prostor, $Y \subset\subset X$.
(1) Analogicky předchozí větě platí: $A = A^{\circ Y} \Leftrightarrow (A = Y \cap B, B = B^{\circ X})$.
(2) Buď $A \subset Y$. Pak platí: $A = \overline{A}^X \Rightarrow A = \overline{A}^Y$ (důkaz: $A = Y \cap A = Y \cap \overline{A}^X = \overline{A}^Y$).
(3) Podobně jako v předchozím bodě: $A = A^{\circ X} \Rightarrow A = A^{\circ Y}$.
(4) $A = \overline{A}^Y \wedge Y = \overline{Y}^X \Rightarrow A = \overline{A}^X$ (důkaz: $A = \overline{A}^Y = \underbrace{Y \cap B}_{\text{uzavřené v } X}$).

Definice 5.15. **Izolovaným bodem** množiny A nazýváme bod $x \in A$, pro který existuje okolí H_x takové, že $\mathrm{H}_x \cap A = \{x\}$. Množinu všech izolovaných bodů množiny A nazýváme **izolátorem**, značíme A^{i}. Množinu $A = A^{\mathrm{i}}$ nazveme **diskrétní**.

Definice 5.16. Bod $x \in \overline{A}$ nazýváme **hromadným bodem** množiny A, právě když není jejím izolovaným bodem. Množinu všech hromadných bodů nazýváme **derivací** množiny A, značíme A'. Množinu $A = A'$ nazveme **perfektní**.

Poznámka. (1) x je hromadný bod množiny $A \Leftrightarrow (\forall H_x)(H_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset) \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{A \setminus \{x\}} \Leftrightarrow \varrho(x, A \setminus \{x\}) = 0$
(2) $A^{\mathrm{i}} = \overline{A}^{\mathrm{i}}$

Důkaz. Vezmeme–li A^{i} jako podprostor, budou všechny množiny $\{x\}$ otevřené $((\exists H_x = H_x^{\circ})(\{x\} = H_x \cap A))$, jejich libovolné sjednocení je tudíž otevřené a doplněk tohoto sjednocení je uzavřený. Z toho plyne, že libovolná podmnožina A^{i} je uzavřená. (Celá množina: sjednocení $\{x\}$ a jeho doplňku). □

(3) $A' = \overline{A} \setminus A^{\mathrm{i}}$.
(4) $\overline{A} = A^{\mathrm{i}} \cup A' = A \cup A'$.
(5) $A = \overline{A} \Leftrightarrow A' \subset A$.
(6) $A' = \overline{A'}$

Důkaz.
$\supset$: $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Leftrightarrow \forall \mathrm{H}_x : \mathrm{H}_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, tj. má jiný společný bod než je x, a tudíž dle definice $x \in A'$,
$\subset$: zřejmé. □

(7) $(A')' \subset \overline{A'} = A'$

Příklad. Množina, která se derivováním menší, je např. $A = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\}$:
pak $A' = A = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$
a následně $(A')' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

6. Spojitost

Definice 6.1. Buď $f : X \to Y$ zobrazení mezi dvěma topologickými prostory. Řekneme, že zobrazení f je **spojité v bodě** $x_0 \in X$, právě když vzor každého okolí bodu $f(x_0)$ $f^{-1}(\mathrm{H}_{f(x_0)})$ je okolí bodu x_0. Řekneme, že f je spojité, je-li spojité v každém bodě $x_0 \in X$.

Poznámka. Vzor topologie τ_Y při spojitém zobrazení tvoří topologii na prostoru X. Spojitost je topologická vlastnost (závislá na topologiích prostorů X a Y).

Věta 6.2. Buď f zobrazení topologického prostoru X do Y. Potom následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojité.
(ii) pro každou množinu $B = B^{\circ Y}$ je $f^{-1}(B)$ otevřená v X, tj, $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^{\circ X}$.
(iii) pro každou množinu $B = \overline{B}^Y$ je $f^{-1}(B)$ uzavřená v X, tj, $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}^X$.

Důkaz. a) (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Pro libovolnou množinu $B \subset Y$ platí $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. Ukažme nyní implikaci (ii) $\Rightarrow$ (iii), obrácená implikace se dokazuje analogicky. Nechť $B = \overline{B}^Y$. Potom $Y \setminus B = (Y \setminus B)^{\circ Y}$. Podle předpokladu je vzor této množiny otevřený v X, tj.

$$(f^{-1}(Y \setminus B))^{\circ X} = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) = (X \setminus f^{-1}(B))^{\circ X}$$

Odtud dostáváme $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}^X$.

b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Buď $B = B^{\circ Y}$, $x \in f^{-1}(B)$. Pak $f(x) \in B$ a ze spojitosti f vyplývá $f^{-1}(B) = \mathrm{H}_x$, tedy $f^{-1}(B)$ je okolím všech svých bodů, tedy je otevřená.

c) (ii) $\Rightarrow$ (i): Buď $\mathrm{H}_{f(x_0)}$ okolí bodu $f(x_0)$. Pak existuje $B = B^\circ$ tak, že platí $f(x_0) \subset B \subset \mathrm{H}_{f(x_0)}$, tedy $x_0 \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\mathrm{H}_{f(x_0)})$, tedy $f^{-1}(\mathrm{H}_{f(x_0)})$ je okolím x_0.

□

Definice 6.3. Buď f zobrazení topologického prostoru X do Y tak, že platí:

(I) f je bijekcí,
(II) f a f^{-1} jsou spojité.

Potom f nazýváme **homeomorfismem** X na Y.

Poznámka. Předpoklad spojitosti f^{-1} není nadbytečný — identita $(\mathbb{R}, \mathrm{d}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ je spojité zobrazení, zatímco inverzní ne.

Věta 6.4. Buď f bijekce X na Y. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) f je homeomorfismus.
(ii) Pro každé $A \subset X$ platí: $A = A^{\circ X} \Leftrightarrow f(A) = (f(A))^{\circ Y}$.
(iii) Pro každé $A \subset X$ platí: $A = \overline{A}^X \Leftrightarrow f(A) = \overline{f(A)}^Y$.
(iv) Pro každé $A \subset X$ platí: $f(A^{\circ X}) = (f(A))^{\circ Y}$.
(v) Pro každé $A \subset X$ platí: $f(\overline{A}^X) = \overline{f(A)}^Y$.

Důkaz. Zřejmé :-) □

Definice 6.5. Řekneme, že dvě metriky ϱ a σ na množině X jsou **ekvivalentní**, právě když indukují tutéž topologii. Jinými slovy: identita $(X, \varrho) \to (X, \sigma)$ je homeomorfismus.

Poznámka. $\tau = \tau'$ pokud $\forall A \in \tau$ existuje $A' \in \tau'$, že $A' \subset A$ a zároveň pokud $\forall B' \in \tau'$ existuje $B \in \tau$, že $B \subset B'$

Definice 6.6. Řekneme, že dvě normy jsou **ekvivalentní**, právě když indukují ekvivalentní metriky.

Věta 6.7 (ekvivalence norem)**.** Buď $\vec{X}$ lineární prostor. Potom dvě normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, právě když existují konstanty $k, K > 0$ tak, že platí:

$$k\,\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq K\,\|\vec{x}\|_1$$

Důkaz. a) ($\Rightarrow$): V *lineárním* prostoru platí, že uzávěr $\overline{B(x,r)}$ otevřené koule $B(x,r)$ je uzavřená koule $S(x,r)$.

Otevřená koule $B_2(0,1)$ v prostoru s normou $\|\ \|_2$ je otevřená množina. V prostoru s normou $\|\ \|_1$ proto existuje koule $B_1(0,r)$ tak že platí: $B_1(0,r) \subset B_2(0,1)$. Z vlastnosti uzávěru a výše uvedené poznámky pak platí, že $S_1(0,r) \subset S_2(0,1)$, tedy $\|\vec{x}\|_1 \leq r \Rightarrow \|\vec{x}\|_2 \leq 1$.

Pro libovolný vektor $\vec{y}$ pak platí:

$$\left\| r\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_1} \right\|_1 \leq r,$$

z čehož vyplývá:

$$\left\| r\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_1} \right\|_2 \leq 1 \Rightarrow \frac{r}{\|\vec{y}\|_1}\,\|\vec{y}\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|\vec{y}\|_2 \leq \frac{1}{r}\,\|\vec{y}\|_1\,,$$

kde $\frac{1}{r}$ je konstanta K z tvrzení věty. Druhá nerovnost se dokáže analogicky.

b) ($\Leftarrow$): Buď $A = A^\circ$ otevřená množina z $(\vec{X}, \|\ \|_1)$, $x \in A$. Pak existuje koule $B_1(x, r_1) \subset A$. Z předpokladu věty a z definice koule pak ale vyplývá, že koule $B_2(x, kr_1)$ z $(\vec{X}, \|\ \|_2)$ je podmnožinou koule B_1, tudíž $B_2 \subset A$. Tedy v $(\vec{X}, \|\ \|_2)$ pro každý bod $x \in A$ existuje koule $B_2(x, r_2) \subset A$, tedy A je v $(\vec{X}, \|\ \|_2)$ otevřená.

Opačná inkluze ($B_1(x,r_1) \subset B_2(x, Kr_2)$) se dokáže analogicky.

□

Definice 6.8 (limita)**.** Buď $\{x_n\}_1^\infty$ posloupnost bodů z topologického prostoru X. Říkáme, že posloupnost **konverguje** k bodu x (značíme $x_n \to x$), právě když leží v každém jeho okolí až na konečně mnoho bodů. Bod x se nazývá **limita**.

Poznámka. (1) Je-li f bijekce $\mathbb{N}\leftrightarrow\mathbb{N}$, pak $x_n \to x \Leftrightarrow x_{f(n)} \to x$ (přerovnání členů posloupnosti).
(2) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. (důsledek Hausdorffova axiomu: Kdyby byly 2 různé limity, pak by ve 2 disjunktních okolích museli být všechny členy posloupnosti od n_0 dál, což je spor s konvergencí.)

Definice 6.9. Řekneme, že topologický prostor (X, τ) je **metrizovatelný**, právě když na X existuje metrika ϱ taková, že indukuje τ.

Věta 6.10. Buď X metrizovatelný topologický prostor, $A \subset X$. Potom platí:

(i) $x \in \overline{A} \iff (\exists \{x_n\}_1^\infty \subset A)(x_n \to x)$.
(ii) $x \in \dot{A} \iff (\exists \{x_n\}_1^\infty \subset A)(x_n \to x) \wedge (\exists \{y_n\}_1^\infty \subset X \smallsetminus A)(y_n \to x)$.
(iii) $x \in A' \iff (\exists \{x_n\}_1^\infty \subset A \smallsetminus \{x\})(x_n \to x)$.
(iv) $x \in A^\circ \iff (\forall \{x_n\}_1^\infty)(x_n \to x \Rightarrow \{x_n\}_1^\infty \subset A$ až na konečný počet výjimek$)$.
(v) $x \in A^{\mathrm{i}} \iff (\forall \{x_n\}_1^\infty \subset A)(x_n \to x \Rightarrow x_n = x$ až na konečný počet výjimek$)$.

Důkaz. Zřejmé :-) □

Poznámka. V topologickém prostoru platí pouze implikace, pro první tři $\Leftarrow$ a pro ostatní $\Rightarrow$, protože tam nemůžeme zajistit konvergenci těch posloupností.

Věta 6.11 (Heine)**.** Buď X metrizovatelný topologický prostor, $f : X \to Y$ zobrazení, $A \subset X$. Potom $\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = a$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ takovou, že $\{x_n\}_1^\infty \subset A, x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Volíme pevné $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$(\forall x \in A)(x \neq x_0)((\varrho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\varrho(f(x), a) < \varepsilon)).$$

Dále $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0)$ naleznu x_n tak, že platí $x_n \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$. Pro $(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0)$ tudíž platí $(f(x_n) \in B(a, \varepsilon))$.

($\Leftarrow$): (sporem) Předpokládejme, že $\exists \varepsilon > 0$ tak, že

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in A)(x \neq x_0)((x \in B(x_0, \delta)) \wedge (f(x) \notin B(a, \varepsilon)))$$

Vezmeme si $n \in \mathbb{N}$ a položíme $\delta = \frac{1}{n}$. Podle předpokladu najdeme k tomuto δ prvek x_n tak, že $x_n \in (B(x_0, \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\}) \cap A$ a $(f(x_n) \notin B(a, \varepsilon))$. Pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $x_n \to x_0$ v A, ale není pravda, že $f(x_n) \to a$ v Y. $\square$

7. Kompaktní prostory

Definice 7.1. Buď X topologický prostor, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ systém množin $\{V\}_{V\in\mathcal{S}}$. Řekneme, že $\mathcal{S}$ **pokrývá** X, právě když $(\forall x \in X)(\exists V \in \mathcal{S})(x \in V)$.

Řekneme, že systém $\mathcal{S}_1$ je **podpokrytím systému** $\mathcal{S}$, právě když:

(I) $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$,
(II) $\mathcal{S}_1$ je pokrytím X.

Poznámka. Je-li $\mathcal{S} \subset \tau$, nazýváme pokrytí **otevřeným pokrytím**. Někdy zavádíme i uzavřené pokrytí $\mathcal{S} \subset c\tau \subset \mathcal{P}(x)$. Otevřené pokrytí se využije při integraci na varietách (MAA4).

Definice 7.2. Topologický prostor nazveme **kompaktním**, právě když každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Množinu $A \subset X$ nazveme kompaktní, právě když A jako topologický podprostor X je kompaktní.

Poznámka.
(1) Konečné sjednocení kompaktních množin je kompaktní. (Pokryjeme je sjednocením jejich konečných pokrytí.)
(2) Každá konečná množina je kompaktní. (Pokryjeme ji konečným počtem okolí bodů této množiny.)
(3) V metrickém prostoru je každá kompaktní množina omezená. ($\mathcal{S}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x,n)$ pokrývá celý prostor, tedy pro pokrytí kompaktní množiny stačí jedna koule.)
(4) $\mathbb{R}$ není kompakt ($\mathcal{S} = \{(-n,n) | n \in \mathbb{N}\}$ nemá konečné podpokrytí), ale $\mathbb{R}^*$ už kompakt je. (Pokryji ho okolími nekonečen a uzavřeným intervalem z $\mathbb{R}$, který je podle 7.4 kompaktní)
(5) Kompaktnost není metrický pojem (tj. nezávisí na metrice).

Věta 7.3. Prostor X je kompaktní, právě když každý systém uzavřených množin s prázdným průnikem obsahuje konečný podsystém s prázdným průnikem.

Důkaz. Množina A_α je uzavřená, právě když ji lze vyjádřit jako $A_\alpha = X \setminus B_\alpha$, kde B_α je otevřená množina. Dále platí, pomocí de Morganových zákonů:

$$\emptyset = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} (X \setminus B_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} B_\alpha \Leftrightarrow X \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} B_\alpha$$

a existuje konečné podpokrytí. □

Poznámka.
(1) Buď $A_n = \overline{A_n}$, $A_n \supset A_{n+1}$ klesající (ve smyslu inkluze) posloupnost uzavřených množin v kompaktním prostoru a nechť platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Pak nutně existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A_n = \emptyset$.
(2) *(o existenci)* Pro klesající posloupnost uzavřených neprázdných množin v kompaktním prostoru musí platit:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

(3) *(o jednoznačnosti)* Buď (X, ϱ) kompaktní metrický prostor, $A_n = \overline{A_n}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $d(A_n) \to 0$, $A_n \neq \emptyset$. Pak existuje právě jedno x takové, že platí

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Věta 7.4. Každý omezený uzavřený interval $\mathcal{I}$ v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní.

Poznámka. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ se myslí kartézský součin intervalů z $\mathbb{R}$.

Důkaz. Kontrola!!!!!(nejsem si jistý správností/pochopením tohoto důkazu) (Sporem)

$$(\exists V \in \mathcal{S})(\mathcal{I} \subset \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V)(V \in \tau)$$

tak, že neexistuje konečné podpokrytí $\mathcal{S}_1$. Nyní budu $\mathcal{I} = [a, b]$ opakovaně půlit, tj. tvořit posloupnost uzavřených intervalů $[a_n, b_n]_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$(b_n - a_n < \frac{a-b}{2^n}).$$

Vždy bude existovat část, která zůstává nepokrytá konečným podpokrytím. Z věty o půlení intervalu plyne, že existuje limitní bod, který si označíme x. x je hromadným bodem posloupností (a_n) a (b_n) a zároveň

$$(\exists V \in \mathcal{S})(x \in V).$$

Protože je toto V otevřené, musí pokrývat okolí x jímž, je jeden z intervalů $[a_n, b_n]$, což je spor s nepokrytím konečným podsystémem (interval $[a, b]$ pokryjeme konečným množstvím intervalů $[a_n, b_n]$). □

Věta 7.5. Buď A kompaktní podmnožina Hausdorffova topologického prostoru X. Potom A je uzavřená.

Důkaz. Buď $x \in X \setminus A$ bod z doplňku množiny A. Pak platí:

$$(\forall y \in A)(\exists \mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y)(\mathrm{H}_x \cap \mathrm{H}_y = \emptyset).$$

Dále platí:

$$A = \bigcup_{y \in A} (A \cap \mathrm{H}_y) \subset \bigcup_{y \in A} \mathrm{H}_y,$$

tedy systém okolí H_{y_α} pokrývá množinu A. Protože A je kompaktní, existuje její konečné podpokrytí, tedy

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap \mathrm{H}_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{y_i}.$$

Jelikož pro okolí bodů y a pro odpovídající okolí bodu x platí $\mathrm{H}_{x_i} \cap \mathrm{H}_{y_i} = \emptyset$, pro průnik všech okolí bodu x platí:

$$\mathrm{H}_x \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{x_i} \right) \cap A = \emptyset,$$

tedy existuje okolí bodu x disjunktní s množinou A, takže $x \in (X \setminus A)^\circ$. Bod $x \in X \setminus A$ jsme volili libovolně, proto je doplněk množiny A otevřený, tudíž A je uzavřená. □

Věta 7.6. V kompaktním prostoru jsou všechny uzavřené množiny kompaktní.

Důkaz. Pro libovolnou uzavřenou množinu M nalezneme její pokrytí $\{G_\alpha\}$ a doplníme ho otevřenou množinou $G := X \setminus M$ na pokrytí celého prostoru X. Nalezneme konečné podpokrytí X, označíme ho $\{G_i \mid i \in \hat{n}\}$. Toto pokrytí musí obsahovat G, proto mu dáme první index (kdyby ho neobsahovalo, tak ho tam přidám, stále to bude konečné podpokrytí). Potom $\{G_i \mid i \in \{2, \dots, n\}\}$ je konečným pokrytím M. □

Věta 7.7. Buď $\overrightarrow{X}$ lineární prostor konečné dimenze. Potom $A \subset \overrightarrow{X}$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$ je triviální. (Plyne z 3 a 7.5)
b) $\Leftarrow$: Buď A omezená a uzavřená.
1) $\overrightarrow{X} = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ (maximová norma, $\forall \vec{x} \in \overrightarrow{X}$ $\|x\| = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|$).
A je omezená, tudíž $A \subset B(0, R) \subset \overline{B}(0, R)$. $\overline{B}(0, R)$ je interval, který je v $\mathbb{R}^n$ kompaktní. A je uzavřená v kompaktním prostoru, tedy A je kompaktní.

2) $\overrightarrow{X} = V^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.
Každý vektor $\vec{x} \in V^n$ lze vyjádřit jako kombinaci bazických vektorů:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e_i}.$$

Buď $f : \vec{x} \mapsto (x^1, \dots, x^n)$. Zobrazení f je homeomorfismus $V^n \to \mathbb{R}^n$, tudíž $(V^n, \|\ \|_\infty)$ a $(R^n, \|\ \|_\infty)$ jsou homeomorfní. (V případě $\overrightarrow{X} = V^n$ nad komplexními čísly musíme vzít $V^n \to \mathbb{R}^{2n}$ tak, že bereme zvlášť reálnou a komplexní část x^i)

3) $\overrightarrow{X} = V^n$, $\|\cdot\|$ libovolná.
Pro libovolný vektor $\vec{x}$ platí:

$$\|\vec{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right| \|\vec{e_i}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{e_i}\| \|\vec{x}\|_\infty = K \|\vec{x}\|_\infty ,$$

což je jedna část nerovnosti z věty 6.7. Kromě toho z tohoto vztahu vyplývá spojitost identity $(\overrightarrow{X}, \|\cdot\|_\infty) \to (\overrightarrow{X}, \|\cdot\|)$.
Libovolná koule $\overline{B}(\vec{0}, R) \subset (\overrightarrow{X}, \|\cdot\|)$ je uzavřená, díky spojitosti je uzavřená i v $(\overrightarrow{X}, \|\cdot\|_\infty)$.
$A = \{\vec{x} \in \overrightarrow{X} \mid \|\vec{x}\|_\infty = 1\}$ je uzavřená a omezená v $(\overrightarrow{X}, \|\cdot\|_\infty)$.
Dále platí:

$$\bigcap_{R>0} \left(\overline{B}(\vec{0}, R) \cap A\right) = \emptyset,$$

neboť v průniku koulí leží pouze $\vec{0}$, ten ale neleží v A a platí tedy $(\exists \varrho > 0)(\overline{B}(\vec{0}, \varrho) \cap A = \emptyset)$.
Pak $(\forall \vec{x})(\|\vec{x}\| \leq \varrho \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty \neq 1)$.
Dokážeme, že v takovém případě $\|\vec{x}\|_\infty < 1$. Nechť platí, že $\|\vec{x_0}\| \leq \varrho \wedge \|\vec{x_0}\|_\infty > 1$. Pak

$$\left\| \frac{\vec{x_0}}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \right\| = \frac{1}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \|\vec{x_0}\| < \|\vec{x_0}\| \leq \varrho,$$

ale

$$\left\| \frac{\vec{x_0}}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \right\|_\infty = \frac{1}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \|\vec{x_0}\|_\infty = 1,$$

což je spor. Tedy $(\forall \vec{x})(\|\vec{x}\| \leq \varrho \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty < 1)$.
Pro všechny $\vec{x} \neq \vec{0}$ pak platí:

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \varrho \right\| = \varrho,$$

tedy

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \varrho \right\|_\infty < 1,$$

z čehož vyplývá

$$\|\vec{x}\|_\infty < \frac{1}{\varrho} \|\vec{x}\| .$$

Pro $\vec{x} = \vec{0}$ ve vztahu nastává rovnost. Dokázali jsme tedy druhou část nerovnosti.

□

Definice 7.8. Buď $\{x_n\}_1^\infty \subset X$. Pak a je **hromadnou hodnotou posloupnosti**, právě když v libovolném okolí H_a bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti.

Poznámka. (1) (*alternativní definice pro metrický prostor*) Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak a je hromadnou hodnotou posloupnosti $(x_n) \Leftrightarrow$ existuje vybraná posloupnost (x_{k_n}) tak, že $(x_{k_n}) \to a$. (Tuto posloupnost sestavujeme tak, že bereme $x_{k_n} \in B(a, \frac{1}{n})$, takže potřebujeme metriku a nelze to udělat v topologii)

(2) Jestliže $x_n \to a$, pak a je hromadnou hodnotou $\{x_n\}_1^\infty$.

Věta 7.9. V kompaktním prostoru má každá posloupnost alespoň jednu hromadnou hodnotu.

Důkaz. Nechť $A_n = \{x_k\}_{k \geq n}$. Pak $\overline{A_n} \neq \emptyset$, $\overline{A_n} \supset \overline{A_{n+1}}$, takže platí:

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \emptyset,$$

kde $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Dokážeme nyní, že a je hromadným bodem, tj. že v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti. (*Sporem*): předpokládejme opak, tedy $\exists \mathrm{H}_a$ tak, že $\{x_n\}_1^{\infty} \bigcap \mathrm{H}_a$ je konečná. Potom $\exists m$, tak, že pro $\forall n > m$ je $A_n \bigcap \mathrm{H}_a = \emptyset \wedge a \in \overline{A_n}$, což je spor (viz definice bodu v uzávěru). □

Věta 7.10. V kompaktním Hausdorffově prostoru posloupnost konverguje, právě když má právě jednu hromadnou hodnotu.

Důkaz. Implikace konverguje $\Rightarrow \exists_1$ je zřejmá. Opačnou implikaci dokážeme sporem. Nechť posloupnost nekonverguje, tj. existuje **otevřené** okolí hromadné hodnoty H_a takové, že v $X \setminus \mathrm{H}_a$ leží ještě nekonečně mnoho členů posloupnosti. Platí, že $X \setminus \mathrm{H}_a = \overline{X \setminus \mathrm{H}_a}$, tedy $X \setminus \mathrm{H}_a$ je kompaktní. Podle 7.9 tam ale posloupnost musí mít další hromadnou hodnotu, což je spor. □

Lemma 7.11 (Lebesgue)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor, kde každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu, $\mathcal{S} = \{V\}_{V \in \mathcal{S}}$ otevřené pokrytí tohoto prostoru. Potom existuje ε tak, že každá koule o poloměru ε leží alespoň v jedné z pokrývajících množin.

Důkaz. Pro spor předpokládejme existenci takového otevřeného pokrytí $\mathcal{S}$, že pro každé ε existuje koule o poloměru ε taková, jenž není podmnožinou žádné z pokrývajících množin z $\mathcal{S}$.

Vezměme tedy takové pokrytí $\mathcal{S} = \{V\}_{V \in \mathcal{S}}$ a uvažujme posloupnost $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty} = 1/n$. Pro ni existuje posloupnost koulí $\{B_n(x_n, \varepsilon_n)\}_1^{\infty}$, které nejsou podmnožinou žádné z pokrývajících množin $V \in \mathcal{S}$.

Dle předpokladu věty existuje pro posloupnost středů $\{x_n\}_1^{\infty}$ vybraná posloupnost $x_{k_n} \to a$. Nalezněme $V \in \mathcal{S}$ tak, aby $a \in V^{\circ}$; potom určitě $\exists B(a, r) \subset V$.

Z definice limity najděme n_1 tak, aby $(\forall n > n_1)(\varrho(x_{k_n}, a) < \frac{r}{2})$, a n_2 tak, aby $(\forall n > n_2)(\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2})$.

Po volbě $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $(\forall n > n_0)(\{B_{k_n}\}_1^{\infty} \subset V)$, což je spor s volbou posloupnosti $\{B_n\}_1^{\infty}$. □

Definice 7.12. **ε-sítí** v metrickém prostoru (X, ϱ) rozumíme množinu koulí o poloměru ε pokrývající X.

Poznámka. Definice ε-sítě není jednotná. Někdy se výše uvedený pojem nazývá ε-pokrytím a v definici ε-sítě se navíc požaduje minimální vzdálenost středů koulí o ε.

Lemma 7.13 (Borel)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor, v němž každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Potom pro každé ε existuje **konečná** ε-síť (se středy koulí vzdálenými od sebe minimálně o ε).

Poznámka. Podle Vrány není nutné, aby byly středy koulí vzdálené alespoň o ε. (Pouze to vyplyne z důkazu.)

Důkaz. Vezměme libovolné ε a dokažme, že pro něj existuje konečná ε-síť. Vezměme bod x_1, vytvořme kouli $B_1(x_1, \varepsilon)$. Leží v kouli celý prostor? Pokud ano máme konečnou ε-síť, pokud ne, vezměme bod x_2 z $X \setminus B_1$ a vyrobme další kouli se středem v tomto bodě $B_2(x_2, \varepsilon)$. Leží v těchto dvou koulích celý prostor? Pokud ano, máme konečnou ε-síť, pokud ne, pokračujeme dále s vytvářením koulí se středy v doplňcích. Prostor musí být pokryt konečným počtem koulí, protože pokud by nebyl, dostáváme posloupnost středů koulí $\{x_n\}_1^{\infty}$, které jsou vzdáleny alespoň o ε a nemá nemá tudíž hromadnou hodnotu, což je spor s předpokladem. □

Věta 7.14 (Weierstrass)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor. Potom X je kompaktní, právě když každá posloupnost má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$ je dokázaná (7.9).

b) ($\Leftarrow$): Buď A_α libovolné pokrytí prostoru X. Potom podle 7.11 existuje ε tak, že každá koule o poloměru ε leží v některé z pokrývajících množin. Podle 7.13 stačí k pokrytí X konečný počet těchto koulí. Hledaným konečným podpokrytím je množina nadmnožin koulí $B(x_i, \varepsilon)$.

□

7.1. **Kompaktnost a spojitost.**

Věta 7.15. Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory, $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Potom je-li X kompaktní, je i $f(X)$ kompaktní.

Důkaz. Buď $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí $f(X)$. Potom vzor $\mathcal{S}$ je otevřené pokrytí X, neboť otevřenost se přenáší z Y do X. X je kompaktní, takže $f^{-1}(\mathcal{S})$ má konečné podpokrytí. Konečným podpokrytím $f(X)$ je pak konečná množina obrazů množin pokrývajících X. □

Věta 7.16. Buď $f : A \to \mathbb{R}$ zobrazení spojité na kompaktní množině A. Potom f nabývá na A svého infima a suprema.

Důkaz. $f(A)$ je kompaktní, tudíž uzavřená, takže infimum a supremum v ní leží. (Uzavřená množina obsahuje všechny svoje hromadné body a supremum i infimum jimi jsou) □

Poznámka. Ale nikoliv všeho mezi nimi. K tomu je potřeba předpoklad souvislosti, který bude probrán v následující kapitole.

Definice 7.17. Buďte (X, ϱ), (Y, σ) metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je **stejnoměrně spojité**, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Poznámka. Uvědomme si, že na metrických prostorech je definice 6.1 ekvivalentní s naší „starou“ definicí spojitosti: zobrazení $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ je spojité, právě když

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Věta 7.18 (Cantor)**.** Zobrazení f spojité na kompaktní množině X je spojité stejnoměrně.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť platí

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \wedge \sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon).$$

Buď $\{x_n\}_1^\infty, \{y_n\}_1^\infty$ posloupnosti takové, že platí

$$\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Protože množina je kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost $x_{k_n} \to x$. Dále platí

$$\varrho(y_{k_n}, x) \leq \varrho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \varrho(x_{k_n}, x),$$

tedy i y_{k_n} konverguje k x.

Ze spojitosti f vyplývá existence $\delta > 0$ takového, že pro všechna x' taková, že $\varrho(x', x) < \delta$ je $\sigma(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože x_{k_n} a y_{k_n} konvergují, existuje m takové, že $\varrho(x_{k_m}, x) < \delta$ a $\varrho(y_{k_m}, x) < \delta$, takže

$$\sigma(f(x_{k_m}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } \sigma(f(y_{k_m}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

z čehož vyplývá

$$\sigma(f(x_{k_m}), f(y_{k_m})) \leq \sigma(f(x_{k_m}), f(x)) + \sigma(f(y_{k_m}), f(x)) < \varepsilon,$$

což je spor. □

8. Souvislé prostory

Definice 8.1. Topologický prostor (X, τ) nazveme **souvislý**, právě když jeho jediné obojetné podmnožiny jsou X a $\emptyset$.

Příklad. Příklad topologického prostoru, který není souvislý je množina X s více než dvěma prvky a s diskrétní topologií. Protože je každá podmnožina X obojetná.

Poznámka. (1) Prostor X je souvislý, právě když ho nelze zapsat jako sjednocení dvou otevřených neprázdných disjunktních podmnožin.

Důkaz. Pokud by X byl souvislý a přitom ho šlo zapsat jako $X = B_1 \cup B_2$, $\emptyset \neq B_\iota = B_\iota^\circ$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, pak by $X \setminus B_1 = B_2$ byla uzavřená a tedy i další obojetná množina, což je ve sporu se souvislostí X. □

(2) V předchozí ekvivalentní definici by B_ι mohly být uzavřené. Důkaz by byl téměř stejný.

Definice 8.2. Buď (X, τ) topologický prostor. Množinu $A \subset X$ nazveme souvislou, pokud je souvislá jako topologický podprostor.

Věta 8.3. Buď A_α systém souvislých množin takový, že každé dvě mají neprázdný průnik. Potom sjednocení $A = \bigcup A_\alpha$ je souvislá množina.

Důkaz. (*sporem*)Buď $A = B_1 \cup B_2$, $B_\iota = B_\iota^{\circ A}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Potom $A_\alpha = (B_1 \cap A_\alpha) \cup (B_2 \cap A_\alpha)$ a protože B_ι jsou v A otevřené, platí, že $(B_\iota \cap A_\alpha) = (B_\iota \cap A_\alpha)^{\circ A_\alpha}$.

Protože A_α jsou souvislé, A_α musí být buď podmnožinou B_1 nebo B_2. Všechny A_α pak musí ležet buď v B_1 nebo B_2, neboť každé dvě mají neprázdný průnik. Pak ale B_1 nebo B_2 je prázdná, což je spor. □

Věta 8.4. Nechť $A \subset X$, $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak je-li A souvislá, jsou i $\overline{A}$ a B souvislé.

Důkaz. a) (*sporem*) Buď $x \in A'$, $B = A \cup \{x\}$. Nechť $B = B_1 \cup B_2$, $B_\iota = B_\iota^{\circ B}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Potom $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. Platí, že $(B_\iota \cap A) = (B_\iota \cap A)^{\circ A}$, proto buď $A \subset B_1$ nebo $A \subset B_2 \Rightarrow$ buď $\overline{A}^B \subset \overline{B_1}^B$ nebo $\overline{A}^B \subset \overline{B_2}^B$, $\Rightarrow$ buď $B \subset \overline{B_1}^B$ nebo $B \subset \overline{B_2}^B$, což je spor.

b) $B = \bigcup_{x \in B}(A \cup \{x\})$, tedy B vzniklo sjednocením souvislých množin s neprázdným průnikem. □

Věta 8.5. Jedinými souvislými množinami v $\mathbb{R}$ jsou intervaly.

Důkaz. a) A není interval $\Rightarrow$ A není souvislá:

Nechť tedy A není interval, tj. platí, že

$$(\exists x_1, x_2 \in A)(\exists c \in \mathbb{R})(x_1 < c < x_2 \wedge c \notin A).$$

Buďte $B_1 = A \cap (-\infty, c)$, $B_2 = A \cap (c, +\infty)$, tedy $B_\iota = B_\iota^{\circ A}$. $A = B_1 \cup B_2$ a přitom B_1 a B_2 jsou otevřené, neprázdné a disjunktní, tudíž A není souvislá množina.

b) A je interval $\Rightarrow$ A je souvislá:

Nechť $A = /\alpha, \beta/$ je libovolný interval, $B = \overline{B}^A = B^{\circ A}$, $B \neq \emptyset$ neprázdná obojetná podmnožina A. Dokážeme, že $B = A$. Buď $c \in B$, $b = \sup\{x \in \mathbb{R} | \, [c, x] \subset B\}$.

Předpokládejme, že $b < \beta$. Z 2. vlastnosti supréma vyplývá, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in (b - \varepsilon, b])([c, x] \subset B),$$

tedy v libovolném okolí bodu b leží bod z B, z čehož vyplývá, že $b \in \overline{B}^A = B$.

Protože $b \in B$, z otevřenosti B vyplývá existence takového ε, že platí $[b - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset B$. Současně ale $[c, b] \subset B$, takže $[c, b + \varepsilon] \subset B$, což je spor s 1. vlastností supréma, tedy $b = \beta$.

Analogicky se dokáže tvrzení pro dolní hranici intervalu a z obou pak vyplývá, že nutně $A = B$. □

Věta 8.6. Spojitý obraz souvislé množiny je souvislý.

Důkaz. (*sporem*)Buď $f(X) = B_1 \cup B_2$, $B_\iota = B_\iota^{\circ f(X)}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Pak $X = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Množiny $f^{-1}(B_1)$ a $f^{-1}(B_2)$ jsou otevřené (to vyplývá ze spojitosti f) a disjunktní (to vyplývá z jednoznačnosti obrazu), tedy vzor není souvislý, což je spor. □

Věta 8.7. Spojitá reálná funkce nabývá na souvislé kompaktní množině infima, suprema a všeho mezi tím.

Důkaz. Ze spojitosti plyne, že obraz je interval (obsahuje tedy i hodnoty mezi libovolnými dvěma), a z kompaktnosti to, že je uzavřený (obsahuje tudíž supremum a infimum, protože to jsou z jejich 2. axiomu hromadné body). □

Definice 8.8. Definujme na $X \times X$ relaci svázanosti: $x \,\mathrm{sv}\, y$, právě když existuje souvislá množina $A \subset X$ taková, že $x \in A$ a $y \in A$. Všechny třídy podle ekvivalence $x \,\mathrm{sv}\, y$ nazveme **komponentami souvislosti**.

Poznámka. (1) Komponenta souvislosti bodu x je největší souvislá nadmnožina bodu x.
(2) Komponenta souvislosti bodu x je uzavřená množina v X. (Podle věty 8.4)

Definice 8.9. Řekneme, že prostor X je **lokálně souvislý**, právě když každé okolí má souvislé podokolí.

Poznámka. Otevřené množiny v lineárním prostoru jsou lokálně souvislé.

Důkaz. Každá otevřená koule je v lineárním prostoru konvexní, tj. každé 2 body z ní lze spojit úsečkou, je tedy lokálně lineárně souvislá. Z toho plyne lokální souvislost (viz 8) □

Definice 8.10. Dráhou v topologickém prostoru rozumíme každé spojité zobrazení kompaktního intervalu z $\mathbb{R}$ do (X, τ).

Množinu $\langle\varphi\rangle = \{\varphi(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$ nazýváme **stopa dráhy**, resp. **geometrický obraz dráhy**.

Jestliže $\langle\varphi\rangle \cap A \neq \emptyset$, říkáme, že dráha **protíná** A. Jestliže dráha protíná jednobodovou množinu $\{x\}$, říkáme, že dráha **prochází** bodem x.

Orientovaný součet dvou drah: Jestliže koncový bod jedné dráhy splývá s počátečním bodem druhé dráhy ($\varphi_1(\beta_1) = \varphi_2(\alpha_2)$), pak

$$(\varphi_1 \dot{+} \varphi_2)(t) = \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{pro } t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t + \alpha_2 - \beta_1) & \text{pro } t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

Poznámka. (1) Stopa dráhy je vždy souvislá.
(2) Dráha se též nazývá křivka. Tyto pojmy tedy splývají.
(3) V cizí literatuře se používá místo pojmu *stopa dráhy spíše geometrický obraz křivky.*

Definice 8.11. Opačně orientovanou drahou k dráze φ je dráha $\dot{-}\,\varphi(t) = \varphi(-t)$, kde $t \in [-\beta, -\alpha]$.

Poznámka. $\varphi_1 \dot{-} \varphi_2 = \varphi_1 \dot{+} (\dot{-}\,\varphi_2)$ za předpokladu, že dráhy mají stejný koncový bod.

Věta 8.12. Buď $A \subset X$ a φ dráha spojující nějaký vnitřní a vnější bod množiny A, tj. $\langle\varphi\rangle \cap A^\circ \neq \emptyset \wedge \langle\varphi\rangle \cap (X \setminus A)^\circ \neq \emptyset$. Potom $\langle\varphi\rangle \cap \dot{A} \neq \emptyset$.

Důkaz. *(sporem)* Buď B souvislá množina $(B \cap A^\circ \neq \emptyset \wedge B \cap (X \setminus A)^\circ \neq \emptyset)$ a předpokládejme, že $B \cap \dot{A} = \emptyset$. Pak ale $B = (B \cap A^\circ) \cup (B \cap (X \setminus A)^\circ)$, tedy B lze vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních otevřených množin, což je spor s tím, že B je souvislá. Tvrzení věty pak dostáváme, pokud položíme $B = \langle\varphi\rangle$, neboť stopa dráhy je souvislá množina (spojitý obraz intervalu v $\mathbb{R}$, tj. souvislé množiny, je souvislý). □

Definice 8.13. Množina X je lineárně souvislá, právě když libovolné dva body z X lze spojit dráhou.

Poznámka. (1) Lineárně souvislý prostor je souvislý, opačná implikace neplatí.

Důkaz. Libovolný bod $x \in X$ lze spojit s ostatními body X dráhou. Tyto dráhy mají neprázdný průnik a jejich sjednocením je prostor X. Tedy X lze vyjádřit jako sjednocení souvislých množin s neprázdným průnikem, takže X je souvislý. □

(2) Naopak to neplatí — např. množina

$$\{0\} \times [-1,1] \cup \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| \, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

je souvislá, ale není souvislá lineárně. Množiny $\{(x, \sin\frac{1}{x}) |\ x \in \mathbb{R}^-\}$ a $\{(x, \sin\frac{1}{x}) |\ x \in \mathbb{R}^+\}$ jsou souvislé (jsou to spojité obrazy intervalu), souvislé jsou tedy i jejich uzávěry $\{0\} \times [-1,1] \cup \{\dots\}$. Sjednocení uzávěrů je souvislé, ale body $(x, \sin\frac{1}{x})$ a $(y, \sin\frac{1}{y})$ pro $x \in \mathbb{R}^-$ a $y \in \mathbb{R}^+$ nelze spojit dráhou.

Definice 8.14. Prostor X je **lokálně lineárně souvislý**, právě když každé okolí na X má lineárně souvislé podokolí.

Věta 8.15. Buď X lokálně lineárně souvislý prostor. Potom

(I) Je-li X souvislý, pak je souvislý lineárně.
(II) Není-li X souvislý, pak všechny komponenty X jsou obojetné a lineárně souvislé.

Důkaz. (I) Zvolme bod $x \in X$ pevně, nechť $A_x = \{y \mid x\varphi y\}$ množina všech bodů y, které lze spojit drahou s x. Množina A_x je neprázdná (obsahuje přinejmenším bod x). Dokážeme, že A_x je obojetná:

a) Důkaz, že A_x je otevřená:
Buď $y \in A_x$. Pak existuje lineárně souvislé okolí H_y. Pro libovolné $z \in \mathrm{H}_y$ platí, že $z\psi y \wedge y\varphi x$, tedy $x(\varphi \dot{+} \psi)z$, tedy z lze spojit drahou s x a $z \in A_x$. Každý bod $y \in A_x$ leží v A_x i s okolím, tedy A_x je otevřená.

b) Důkaz, že A_x je uzavřená:
Buď $y \notin A_x$. Bod y má lineárně souvislé okolí H_y. Předpokládejme, že $\mathrm{H}_y \cap A_x \neq \emptyset$. Pak ale pro $z \in \mathrm{H}_y \cap A_x$ existují φ a ψ takové, že $x\varphi z \wedge z\psi y$, tedy $y \in A_x$, což je spor. Tedy $\mathrm{H}_y \cap A_x = \emptyset$ a A_x je uzavřená.

Prostor X je souvislý, tedy jedinými jeho obojetnými podmnožinami jsou X a $\emptyset$. Protože A_x je obojetná a neprázdná, je $A_x = X$, takže X je lineárně souvislý.

(II) a) Každá komponenta je souvislá, podle předchozích úvah je souvislá lineárně.
b) Pro každý bod $x \in A$ platí, že A je největší souvislá množina obsahující bod x, tedy A je uzavřená.
c) Každý bod $x \in A$ má lineárně souvislé okolí, které je podmnožinou A, takže A je otevřená. □

Definice 8.16. V topologickém prostoru se **oblastí** rozumí otevřená a souvislá množina.

Poznámka. V lineárním prostoru je každá oblast lokálně lineárně souvislá a každé dva body v ní lze spojit lomenou čarou tvořenou konečně mnoha úseky, tedy dráha spojitá po částech.

Definice 8.17. Omezená oblast $G \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá **jednoduše souvislá**, právě když G i $\mathbb{R}^2 \setminus G$ jsou souvislé množiny.

Poznámka. Jednoduše souvislá oblast je tedy množina „bez děr“.

9. Úplné prostory

Definice 9.1. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Posloupnost $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ se nazývá **cauchyovská**, právě když splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\varrho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)$$

Poznámka.

1. Každá cauchyovská posloupnost má nejvýše jednu hromadnou hodnotu a je omezená. Nemusí mít limitu ani hromadnou hodnotu — např. snadno nalezneme racionální posloupnost $\{r_n\}_1^\infty \in \mathbb{Q}$ a iracionální číslo $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $r_n \to s$.
2. Pokud je posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ cauchyovská a existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_1^\infty$ konvergující k x, tj. má hromadnou hodnotu, pak i $\{x_n\}_1^\infty$ konverguje k x. (Z cauhyovskosti musí být všechny členy od n_0 dál vzdáleny od sebe navzájem maximálně o epsilon, nemohou tedy být daleko od hromadné hodnoty).
3. Pokud $\{x_n\}_1^\infty$ konverguje, je cauchyovská. (Stačí vzít $\varrho(x_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$, kde L je limita.)

Definice 9.2. **Metrický** prostor se nazývá **úplný**, právě když každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Poznámka.

1. Úplný prostor je uzavřený vzhledem k operaci $x_n \to$. Jinými slovy, prováděním limity nevypadneme z prostoru.
2. $\mathbb{Q}$ není úplný, $\mathbb{R}$ je úplný. Tato poznámka nicméně platí pouze pro prostory s euklidovskou či jakoukoliv ekvivalentní metrikou. $\mathbb{Q}$ s diskrétní metrikou již úplným prostorem je, neboť v diskrétní metrice je posloupnost cauchyovská právě tehdy, je-li konstantní. Taková posloupnost pak bude mít jistě všechny prvky z prostoru a její limita v něm bude ležet také.
3. Úplnost je tedy výhradně metrický pojem.
4. Z Weierstrassovy věty bezprostředně vyplývá, že **každý kompaktní metrický prostor je úplný**.
5. Prostor, jehož uzavřené koule jsou kompaktní, je úplný. (Všechny členy $x_n, n > n_0$ jsou díky cauchyovskosti v $B(x_{n_0}, \varepsilon) \subset S(x_{n_0}, \varepsilon)$ a kompaktnost $S(x_{n_0}, \varepsilon)$ zajistí konvergenci)

Definice 9.3. Podmnožinu A metrického prostoru (X, ϱ) nazveme úplnou, pokud je úplná jako metrický podprostor.

Věta 9.4. Je-li A uzavřená podmnožina úplného prostoru X, pak A je úplná.

Důkaz. A je uzavřená podmnožina úplného prostoru. Vezměme si cauchyovskou posloupnost bodů z A. Protože X je úplný, má v něm limitu. Body x_n jsou ale všechny v A, a tedy limita leží v uzávěru A. A je však uzavřená, a proto v ní každá cauchyovská posloupnost konverguje. □

Věta 9.5. Je-li A úplná podmnožina X, pak A je uzavřená.

Důkaz. (sporem) Chceme dokázat, že $X \setminus A$ je otevřená. Vezměme bod $x \in X \setminus A$ a předpokládejme, že neexistuje jeho okolí, které v něm leží, tj. průnik okolí s A je pro každé okolí neprázdný. Vytvoříme tedy posloupnost neprázdných koulí se středem x a poloměrem $1/n$. V každé je bod z A, máme tedy posloupnost bodů $\{x_n\}_1^\infty \subset A$, která má limitu x mimo A. To je spor s tím, že A je úplná. □

Definice 9.6. Zobrazení $f : (X, \varrho) \mapsto (X, \varrho)$ se nazývá **kontrahující**, právě když

$$(\exists k \in (0,1))(\forall x, y \in X)(\varrho(f(x), f(y)) \leq k\varrho(x, y)).$$

Poznámka. Kontrahující zobrazení je stejnoměrně spojité.

Definice 9.7. Množinu $M \subset X$ nazýváme **hustou v** $N \subset X$, právě když $N \subset \overline{M}$. Dále množina M se nazývá **všude hustou** pokud $\overline{M} = X$. Prostor, který má všude hustou spočetnou podmnožinu nazýváme **separabilní**. Množinu B nazýváme **všude řídkou**, právě když $X \setminus \overline{B}$ je všude hustá.

Příklad. Je-li například $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$ a $N = (0,1)$, potom M je hustá v N, ale také M je všude hustá a spočetná a $\mathbb{R}$ je tedy separabilní.

Věta 9.8 (Banachova, o pevném bodě)**.** Každé kontrahující zobrazení f na úplném prostoru má právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno takové x, že platí $f(x) = x$. Navíc každá posloupnost $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ iterací zobrazení f konverguje k tomuto pevnému bodu.

Důkaz. Nechť $x_0 \in X$, $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Pak z předpokladu kontrahujícího zobrazení dostáváme, že

$$\varrho(x_{m+1}, x_m) = \varrho(f(x_m), f(x_{m-1})) \leq k\varrho(x_m, x_{m-1}) \leq k^m \varrho(x_1, x_0) = k^m \varrho(f(x_0), x_0)$$

což můžeme použít v cauchyovské podmínce

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=1}^{p} \varrho(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1} \varrho(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \varrho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Tedy posloupnost postupných aproximací je cauchyovská. Díky úplnému prostoru proto platí, že existuje $x \in X$ takové, že $x_n \to x$.

Důkaz existence pevného bodu: Platí, že $x_{n+1} = f(x_n)$. Přechodem k $n \to \infty$ a s využitím spojitosti f dostáváme $x = f(x)$.

Důkaz jednoznačnosti: $\varrho(f(x), f(x')) \leq k\varrho(x, x')$, tedy $\varrho(x, x') \leq k\varrho(x, x') < \varrho(x, x')$, což je spor. □

Poznámka. Uvedená metoda se používá při řešení úloh v numerické matematice. V praxi často nelze zajistit, aby zobrazení f bylo kontrahující, přesto ale posloupnost postupných aproximací konverguje. Může totiž platit, že až teprve zobrazení $f_i = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i\text{-krát}}$ kontrahuje.

Nechť dále x je pevný bod $f_i(x)$:

$$f_i(f(x)) = f_{i+1}(x) = f(f_i(x)) = f(x),$$

tedy $f(x)$ je pevným bodem f_i, z jednoznačnosti pevného bodu pak vyplývá, že $f(x) = x$, tedy x je pevným bodem f.

Sestrojme pak i posloupností:

1	2	3		i
x_0	$x_1 = f(x_0)$	$x_2 = f_2(x_0)$	$\cdots$	$x_{i-1} = f_{i-1}(x_0)$
$x_i = f_i(x_0)$	$x_{i+1} = f_{i+1}(x_0)$	$x_{i+2} = f_{i+2}(x_0)$	$\cdots$	$x_{2i-1} = f_{2i-1}(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Všechny posloupnosti jsou posloupnostmi aproximací i-té iterace pro různé počáteční body. Všechny konvergují k x a podle věty o pokrytí celá posloupnost postupných aproximací pro zobrazení f konverguje k x.

Poznámka. Důkaz předchozí věty je na zkoušce *bezvýhradně* vyžadován (i na E).

Definice 9.9. Lineární prostory klasifikujeme následovně:

- Normovaný lineární prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované normou, se nazývá **Banachův**.
- Pre-Hilbertův prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované skalárním součinem, se nazývá **Hilbertův**.

Poznámka. Hilbertův prostor je Banachův.

10. Afinní prostory

Definice 10.1. Buď $X \neq \emptyset$ množina, $\vec{X}$ lineární prostor nad T. Buď definováno zobrazení $X \times X \to \vec{X}$ takové, že platí:

(i) $(\forall x, y, z \in X)\left(\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx} = \vec{0}\right)$.

(ii) Jednoznačnost: $\forall x \in X$ je zobrazení $h : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ bijekce.

Potom uspořádanou dvojici $(X, \vec{X})$ nazveme **afinním prostorem nad** T. Jeho prvky se myslí prvky X, nazýváme je **body**.

$\vec{X}$ nazýváme **přidruženým lineárním prostorem** a jeho prvky se nazývají **volné vektory**.

Poznámka. (1) Ve fyzice se neužívá lineární prostor, nýbrž právě afinní (závisí na volbě počátku vztažné soustavy, viz TEF1).

(2) Formálně označíme $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x = \vec{h} \overset{\text{ozn.}}{=} \overrightarrow{y - x}$. Šipku nad rozdílem dvou bodů z afinního prostoru nebudeme psát v případě možné nepřehlednosti textu, je však třeba si ujasnit, kdy se jedná o rozdíl čísel a kdy o rozdíl bodů z afinního prostoru, tj. vektor.

(3) Při pevné volbě x pro každé y existuje právě jedno $\vec{h}$ takové, že $\overrightarrow{y - x} = \vec{h}$. Lze tedy zavést jednoznačně $y = x + \vec{h}$. Vektoru $\vec{h}$ pak říkáme **polohový vektor** resp. **pevný vektor**.

(4) Z vlastnosti (i) při volbě $y = z = x$ vyplývá:
$$\vec{0} = \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = 3\overrightarrow{xx} \Rightarrow \overrightarrow{x - x} = \vec{0}$$

(5) Při volbě $z = x$ dostáváme:
$$\vec{0} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} \Rightarrow \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx} \Rightarrow -\overrightarrow{(y - x)} = \overrightarrow{x - y}$$

(6) $y = x + \vec{h}$, právě když $x = y - \vec{h}$.

(7)
$$\underbrace{(x + \vec{h})}_{y} + \vec{k} = \underbrace{x + (\vec{h} + \vec{k})}_{z}$$
$$\begin{aligned} 0 &= (x + \vec{h}) - x + \overrightarrow{(z - y)} + x - (x + \vec{h} + \vec{k}) = \vec{h} + \overrightarrow{(z - y)} + (-(\vec{h} + \vec{k})) \\ &= \vec{h} + \overrightarrow{(z - y)} - \vec{h} - \vec{k} = \overrightarrow{(z - y)} - \vec{k}, \end{aligned}$$
tedy
$$\vec{k} = \overrightarrow{z - y},$$
takže rovnost platí.

(8) Příkladem afinního prostoru je lineární varieta W (Přidruženým vektorovým prostorem je její zaměření $\mathcal{Z}(W)$), resp. vektorový prostor (je jak nosnou množinou, tak přidruženým prostorem).

Definice 10.2. Řekneme, že afinní prostor X je normovaný, konečnědimenzionální, eukleidovský, unitární, Banachův, Hilbertův, právě když to platí o jeho přidruženém lineárním prostoru.

Definice 10.3. Zobrazení $a : X \to Y$ nazveme **afinním**, právě když existuje lineární zobrazení L z $\vec{X}$ do $\vec{Y}$ takové, že
$$(\forall x, y \in X)(a(x) - a(y) = L(\overrightarrow{x - y})).$$
L se nazývá **přidružené lineární zobrazení** zobrazení a.

Poznámka. (1) Afinní zobrazení mezi normovanými afinními prostory je spojité právě tehdy, když je L spojité, tj. $L \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$. (Věty 11.1 a 11.2 říkají, že to pro konečnou dimenzi platí vždy.) Zde je rozdíl oproti LA, kde se spojitost nezkoumala.

(2) Obraz afinního prostoru afinním zobrazením, tj. $a(X)$, je lineární varieta se zaměřením $L(\vec{X})$.

Definice 10.4. Buď $\varphi : T \to X$ zobrazení z tělesa do afinního prostoru, t_0 vnitřní bod definičního oboru φ. Existuje-li

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\varphi(t) - \varphi(t_0)) \in \overrightarrow{X},$$

nazveme ji **derivací zobrazení** φ **v bodě** t_0 a označíme ji $\varphi'(t_0)$, resp. $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t_0)$

Poznámka. Derivace zobrazení z T do prostoru X v bodě je tedy vektor z přidruženého lineárního prostoru $\vec{X}$ (neb $\frac{1}{t-t_0}$ je skalár a $(\varphi(t) - \varphi(t_0))$ je rozdíl dvou bodů, tj. vektor!)

Definice 10.5. Směrem v afinním prostoru nazýváme každý jednotkový volný vektor: $\vec{v} \in \overrightarrow{X}$, $\|\vec{v}\| = 1$.

Definice 10.6 (Gâteaux)**.** Buď $f : X \to Y$, $x_0 \in (\mathrm{Dom}\, f)^\circ$, $\vec{v}$ směr v X. Položme $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$. Existuje-li $\varphi'(0)$, tj.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)),$$

řekneme, že f **má derivaci v bodě** x_0 **ve směru** $\vec{v}$ Derivaci ve směru $\vec{v}$ v bodě x_0 značíme $f_{\vec{v}}(x_0)$.

Poznámka. I derivace ve směru je vektor z přidruženého lineárního prostoru $\vec{Y}$.

Příklad.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \vartheta \in (-\pi, \pi]$$

$$\varphi(t) = f((0, 0) + t(\cos\vartheta, \sin\vartheta)) = f(t\cos\vartheta, t\sin\vartheta) = \sin 2\vartheta = \text{konst. pro } t \neq 0$$

$$\varphi(0) = 1$$

f má derivaci ve směru $\vec{v}$, právě když $\sin 2\vartheta = 1$, tedy $\vartheta = \frac{1}{4}\pi \vee \vartheta = -\frac{3}{4}\pi$.

Definice 10.7. Buď E prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$. Pak $(n + 1)$-tici $(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ nazveme **souřadný systém** na E, právě když $\mathrm{O} \in E$ a soubor $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ je báze $\vec{E}$.

Definice 10.8. Buď $f : X \to Y$, $(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ normální souřadný systém $(\forall i \in \hat{n}\ \|\vec{e}_i\| = 1)$ na X. Potom existuje-li $f_{\vec{e_i}}(x_0)$, říkáme, že f má v bodě x_0 **parciální derivaci podle** i**-té proměnné** a značíme $f_i(x_0)$.

Poznámka. (1)

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x_0) = (f_{\vec{v}})_{\vec{w}}(x_0) = f_{\vec{v}\vec{w}}(x_0)$$

(2)

$$f_i(x_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$$

(3) Vránovo značení parciálních derivací $f_{\vec{v}}$ popř. f_i je přejato z matematické fyziky (viz TEF2) a je v souladu s tím, že derivace je kovariantní tenzor (indexy dole).

Příklad.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tato funkce není spojitá v $(0, 0)$ — např. při volbě $(x, y) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ dostaneme limitu $\frac{1}{2}$, zatímco při volbě $(x, y) = (0, \frac{1}{n})$ dostaneme 0. Všechny směrové derivace v $(0, 0)$ ale existují:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v}) = \frac{t\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + t^2\sin^4\vartheta} \text{ pro } t \neq 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \begin{cases} 0 & \vartheta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta 10.9 („nejblbější věta o přírůstku funkce“)**.** Buď X Eukleidův ($\dim X < \infty$) afinní prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ definované na kouli $B(x_0, r)$, buď $(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ ortonormální souřadný systém na X, a nechť f má na celé kouli $B(x_0, r)$ všechny parciální derivace 1. řádu. Pak $\forall x \in B(x_0, r)$ existuje $x_1, \ldots, x_n \in B(x_0, r)$ tak, že

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)(x^i - x_0^i).$$

kde

$$x_i = (x^1, \ldots, x^{i-1}, \xi^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$$

Důkaz. Nejdříve předpokládejme

$$\begin{aligned} y_i &= (x^1, ..., x^i, x_0^{i+1}, ..., x_0^n) \\ y_0 &= x_0 \\ y_n &= x \end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = f(y_n) - f(y_0) &= \sum_{i=1}^{n} (f(y_i) - f(y_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \ , x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)(x^i) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \ , x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)(x_0^i) \big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e_i} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, \ , x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)(\xi^i)(x^i - x_0^i). \end{aligned}$$

„Vynechaná“ proměnná je nezávislá proměnná, tj. f je funkcí vynechané proměnné. Můžeme použít Lagrangeovu větu, protože $\|y_i - x_0\| \leq \|x - x_0\|$ spolu s předpokladem existence parciálních derivací uvnitř $B(x_0, r)$ zajišťuje její předpoklady. (Využíváme toho, že v metrice indukované normou je koule konvexní.) □

Poznámka.

(1) Uvědomme si, že výraz $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)(x^i - x_0^i)$ představuje standardní skalární součin; proto je třeba předpokládat Eukleidovský prostor. Abychom mohli zavést derivaci na obecnějších prostorech, je třeba pracovat s obecným skalárním součinem. K tomu nám v příští kapitole pomůže Rieszova věta a abstraktnější zavedení derivace.

(2) Využíváme reálnost funkce, věta neplatí pro komplexní funkce.

11. Totální derivace

Věta 11.1. Je-li $f \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ a $\dim \vec{X} < \infty$, potom je f spojité.

Důkaz.

$$\|f\vec{x} - f\vec{y}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) f\vec{e_i} \right\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \sum_{i=1}^{n} \|f\vec{e_i}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| K.$$

Jako normu si zvolíme maximovou (spojitost je topologická vlastnost, můžeme tedy zvolit libovolnou z ekvivalentních norem). Z uvedeného vztahu již okamžitě vyplývá spojitost zobrazení f ($\delta = \varepsilon/K$). □

Poznámka. $\dim \vec{X} < \infty$ je podstatné, tj. pro nekonečnou dimenzi věta neplatí. Protipříklad: Nechť $\mathcal{P}_{[0,1]}$ je prostor reálných polynomů definovaných na $[0,1]$, na němž zavedeme normu:

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

Jako lineární zobrazení vezmeme derivaci (známou z MAA1, máme funkci jedné proměnné). Pro posloupnost definovanou jako $p_n(x) = x^n$ platí, že $\|p_n\| = 1$, ale $\|p_n'\| = n\,\|p_n\|$, takže derivace není omezená a tudíž nemůže být spojitá.

Věta 11.2. Buď $f \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(I) f je spojité, tj. $(\forall x \in \vec{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \vec{X})(\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow \|f\vec{x} - f\vec{y}\| < \varepsilon)$,

(II) f je spojité v $\vec{0}$, tj. $(\forall a \in \vec{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|\vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f\vec{a}\| < \varepsilon)$,

(III) f je omezené, tj. $(\exists k > 0)(\forall \vec{x} \in \vec{X})(\|f\vec{x}\| \leq k\,\|\vec{x}\|)$,

(IV) f je lipschitzovské, tj. $(\exists L > 0)(\|f\vec{x} - f\vec{y}\|_{\vec{Y}} \leq L\,\|\vec{x} - \vec{y}\|_{\vec{X}})$,

(V) f je stejnoměrně spojité, tj. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \vec{X})(\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow \|f\vec{x} - f\vec{y}\| < \varepsilon)$.

Důkaz. a) $1 \Rightarrow 2$: zřejmé.

b) $2 \Rightarrow 3$: Ze spojitosti f vyplývá, že $(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \vec{X})(\|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \|f\vec{x}\| \leq 1)$. Pro každý vektor $\vec{x} \in \vec{X}$ pak platí

$$\left\| f\left(\frac{\delta \vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \right\| \leq 1,$$

s využitím linearity pak dostáváme

$$\|f(\vec{x})\| \leq \frac{1}{\delta}\,\|\vec{x}\|\,.$$

c) $3 \Rightarrow 4$:

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|f(\vec{x} - \vec{y})\| \leq \frac{1}{\delta}\,\|\vec{x} - \vec{y}\|\,.$$

d) $4 \Rightarrow 5$: zřejmé.

e) $5 \Rightarrow 1$: zřejmé.

□

Poznámka. Pro lineární zobrazení se termín **omezené** používá pro vlastnost definovanou výrokem výše, který nemá s metrickou omezeností nic společného. Nenulové lineární zobrazení nemůže být omezené v metrickém smyslu!

Definice 11.3. Buď $f \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ omezené. Potom definujeme **normu zobrazení** f takto:

$$\|f\| = \inf\{k \in \mathbb{R} | (\forall \vec{x} \in X)(\|f\vec{x}\| \leq k\,\|\vec{x}\|)\} = \sup_{\vec{x} \in \vec{X} \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\|f\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|f\vec{x}\|\,.$$

Definice 11.4. Buďte $\vec{X}$, $\vec{Y}$ lineární normované prostory. Potom symbolem $\mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})$ budeme rozumět **normovaný** lineární prostor všech lineárních **spojitých** zobrazení $\vec{X} \to \vec{Y}$ s normou z předchozí definice.

Definice 11.5. Buď $f : X \to Y$ zobrazení afinního normovaného prostoru, $x_0 \in (\mathrm{Dom}\, f)^\circ$. Potom zobrazení f je **diferencovatelné** v x_0, existuje-li $L \in \mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})$ takové, že platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\|x-x_0\|}\left(f(x)-f(x_0)-L(\overrightarrow{x-x_0})\right)=\vec{0}.$$

Poznámka. (1) Zobrazení f je diferencovatelné v x_0, právě když existují $L \in \mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})$, okolí H_{x_0} a zobrazení $\omega : \mathrm{H}_{x_0} \to \vec{Y}$ takové, že pro každé $x \in \mathrm{H}_{x_0}$ platí:

$$f(x)=f(x_0)+L(\overrightarrow{x-x_0})+\omega(x)\,\|x-x_0\| \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0}\omega(x)=\vec{0}$$

(2) Derivace ve směru (tj. směrová derivace):

$$\begin{aligned} L\vec{h} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}L\left(t\vec{h}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f\left(x_0+t\vec{h}\right)-f(x_0)-\omega\left(x_0+t\vec{h}\right)\left\|t\vec{h}\right\|\right)\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+t\vec{h}\right)-f(x_0)}{t}. \end{aligned}$$

Z předchozího vztahu plyne jednoznačnost zobrazení L.

Definice 11.6 (Fréchet)**.** Je-li f diferencovatelné zobrazení v bodě x_0, potom zobrazení L z předchozí definice nazýváme **totální derivací f v bodě** x_0, značíme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

nebo s použitím lineárního diferenciálního operátoru D tak, že $Df(x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0)$.

Poznámka. (1) Přívlastek *totální* vynecháváme, nedojde-li k záměně s derivací parciální.

(2) Totální derivace je objekt matematicky odlišný od totálního diferenciálu (viz MAA4).

(3) Pro Hamiltonovu funkci $H(p_i,q^i,t)$ ve fyzice platí následující rovnost (viz TEF2):

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(p_i,q^i,t)\,\vec{e}=\frac{\partial H}{\partial t}(p_i,q^i,t),$$

kde $\vec{e}$ značí vektor mající každou složku rovnu jedné. V této podobě dává matematický význam (na obou stranách je číslo), fyzici však zmiňují tuto rovnost bez $\vec{e}$.

(4) Existence derivace funkce je *topologická* vlastnost — nezávisí na normě, nýbrž jen na topologii indukované normou. Bez normy však pojem derivace nelze zavést. (Dokáže se snadno pomocí věty o ekvivalenci norem)

(5) Pro prostory dimenze m a n lze L, tj. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ reprezentovat tzv. Jacobiho maticí $\mathbb{J}_f$:

$$\mathbb{J}_f(x_0)=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x)\end{pmatrix}\right|_{x=x_0}$$

Věta 11.7. Má-li zobrazení f derivaci v bodě x_0, je v bodě x_0 spojité.

Důkaz. Jestliže zobrazení f má derivaci, pak z definice derivace plyne, že pro x jdoucí k x_0 se $f(x)$ blíží k $f(x_0)$, tedy f je spojité v x_0. □

Věta 11.8. Má-li zobrazení f derivaci v bodě x_0, pak má v x_0 všechny derivace ve směru. Platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0) \overset{\text{ozn.}}{=} \partial_{\vec{v}} f(x_0) \overset{\text{ozn.}}{=} f_{\vec{v}}(x_0) = f'(x_0)\vec{v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \overset{\text{ozn.}}{=} \partial_i f(x_0) \overset{\text{ozn.}}{=} f_i(x_0) = f'(x_0)\vec{e_i}.$$

Důkaz. Nechť f je diferencovatelné v bodě x_0. Podle poznámky 11.5.2 platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)\vec{v}.$$

□

Poznámka. Z této věty plyne, že při zvolení $e_1 = 1$ je definice derivace 11.5 pro $X = T$, kde T je těleso, ekvivalentní s 10.4.

Věta 11.9. Buď f spojité afinní zobrazení $X \to Y$, $L \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ jeho přidružené lineární zobrazení. Pak $(\forall x_0 \in X)(f'(x_0) = L)$.

Důkaz. Buď $x_0 \in X$, $f(x) - f(x_0) = L(\overrightarrow{x - x_0})$. Pak

$$f(x) - f(x_0) - L(\overrightarrow{x - x_0}) = \vec{0}.$$

Ze spojitosti f a L pak vyplývá, že totéž platí i pro limitu uvedeného výrazu. Proto L je derivací f v bodě x_0. □

Věta 11.10. Buďte $f, g : X \to \mathbb{R}$ a nechť existují $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Potom platí:

(I) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
(II) $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$,
(III)
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0).$$

Důkaz. (I)

$$\begin{aligned}&|(f+g)(x) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0)| = \\ &= |f(x) - f(x_0) - f'(x - x_0) + g(x) - g(x_0) - g'(x - x_0)|\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}&|(fg)(x) - (fg)(x_0) - (f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0))(x - x_0)| = \\ &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) - \quad f(x_0)g'(x_0)(x - x_0) - g(x_0)f'(x_0)(x - x_0)| \le \\ &\le |g(x_0)(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0))| + \\ &\quad + |(f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0))| \le \\ &\le |g(x_0)(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0))| + \\ &\quad + |\, \|f'(x_0)\| \|x - x_0\| + |\omega(x)| \|x - x_0\| \,| \cdot |\, \|g'(x_0)\| \|x - x_0\| + |\omega(x)| \|x - x_0\| \,|\end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned}&\left| \left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{g}(x_0) + \frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)(x - x_0) \right| \le \\ &\le \frac{1}{g^2(x_0)g(x)} \left| g^2(x_0) - g(x)g(x_0) + g(x)g'(x_0)(x - x_0) \right| = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)g(x)} \left| -g(x)(g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)) + (g(x) - g(x_0))^2 \right| \le \\ &\le \frac{1}{g^2(x_0)g(x)} \left| |g(x)|\, |g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| + |g'(x_0)(x - x_0) + \omega(x) \|x - x_0\| \,|^2 \right| \le \\ &\le \frac{1}{g^2(x_0)g(x)} \left| |g(x)|\, |g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| + \|g'(x_0)\|^2 \|x - x_0\|^2 + |\omega(x)|^2 \|x - x_0\|^2 \right|\end{aligned}$$

Limita tohoto výrazu děleného $\|x - x_0\|$ jde k nule (první člen v abs. hodnotě je část výrazu z definice derivace, u druhého členu je to zřejmé).

□

Poznámka. Předchozí věta platí i pro zobrazení do lineárního normovaného prostoru. (Ten potřebujeme kvůli sčítání)

Poznámka (Rieszova věta o reprezentaci)*.* Přiřazení kovektoru k vektoru je vzájemně jednoznačné, tj. $(\forall \underleftarrow{f'(x_0)} \in \underset{\leftarrow}{X})(\exists_1 \vec{k} \in \overrightarrow{X})(\forall \vec{h} \in \overrightarrow{X})(\underleftarrow{f'(x_0)}\vec{h} = \left\langle \vec{k}, \vec{h} \right\rangle)$.

Definice 11.11. Buď X afinní *eukleidovský prostor*, funkce $f : X \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě x_0. Pak $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\overrightarrow{X}, \mathbb{R}) = \underset{\leftarrow}{X}$ a vektor $\vec{k}$ z Rieszovy věty nazýváme **gradientem** funkce f v bodě x_0, značíme $\operatorname{grad} f(x_0) = \vec{k}$.

Poznámka. (1) Gradient je **vektor**, avšak totální derivace je vektor k němu **duální** (kovektor)!
(2) Ve fyzice (pouze $\mathbb{R}^3$) používáme symbol nabla tj. $\operatorname{grad} U \equiv \nabla U$
(3) Vzorec na výpočet parciální derivace: $\underleftarrow{f'(x_0)}\vec{e_i} = \left\langle \vec{k}, \vec{e_i} \right\rangle = f_i(x_0)$, tj. parciální derivaci lze vypočítat jako skalární součin.
(4)
$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$$
$$f_{\vec{n}}(x_0) = \underleftarrow{f'(x_0)} \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|} = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|} \underleftarrow{f'(x_0)} \operatorname{grad} f(x_0) =$$
$$= \frac{\langle \operatorname{grad} f(x_0), \operatorname{grad} f(x_0) \rangle}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|} = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$$
Z předchozího a za použití Schwarzovy-Cauchyovy nerovnosti vyplývá:
$$|f_{\vec{v}}(x_0)| = |\underleftarrow{f'(x_0)}\vec{v}| = |\langle \operatorname{grad} f(x_0), \vec{v} \rangle| \leq \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot 1 = f_{\vec{n}}(x_0),$$
tj. ve směru gradientu má funkce největší spád. Gradient ovšem neleží intuitivně na tečně ke grafu, nýbrž na normále (viz MAA4).

Věta 11.12. Buď $f : X \to Y$ diferencovatelné v $x_0 + t\vec{h}$. Potom $\varphi : \tau \mapsto f(x_0 + \tau\vec{h})$ má v t derivaci $\varphi'(t) = \underleftarrow{f'(x_0 + t\vec{h})}\vec{h}$

Důkaz.
$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} \left(\frac{\varphi(t+\tau) - \varphi(t)}{\tau} \right) &= \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{f(x_0 + t\vec{h} + \tau\vec{h}) - f(x_0 + t\vec{h})}{\tau} \right) = \\
&= \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{f(x_0 + t\vec{h} + \tau\vec{h}) - f(x_0 + t\vec{h}) - f'(x_0 + t\vec{h})(\tau\vec{h})}{\tau} \right) + \\
&\quad + \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} f'(x_0 + t\vec{h})(\tau\vec{h}) = \\
&= f'(x_0 + t\vec{h})\vec{h}
\end{aligned}$$

□

Poznámka. Podobně se dá ukázat, že zobrazení $\varphi : \vec{k} \mapsto f(x_0 + t\vec{k})$ má v $\vec{h}$ derivaci $\varphi'(\vec{h}) = tf'(x_0 + t\vec{h})$.

Věta 11.13 (o přírůstku funkce)**.** Buď $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá na $[x_0, x]$ (úsečka mezi x a x_0) a diferencovatelná na (x_0, x). Potom existuje $y \in (x_0, x)$ takové, že $f(x) - f(x_0) = \underleftarrow{f'(y)}\overrightarrow{(x - x_0)}$.

Důkaz. Buď $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{h})$, $\vec{h} = x - x_0$. Pak $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce existuje $\xi \in (0,1)$ takové, že platí $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$. Potom

$$f(x) - f(x_0) = \underleftarrow{f'(x_0 + \xi\vec{h})}\vec{h} = \underleftarrow{f'(x_0 + \xi(x - x_0))}\overrightarrow{(x - x_0)} = \underleftarrow{f'(y)}\overrightarrow{(x - x_0)}.$$

□

Poznámka. Předpoklad zobrazení do $\mathbb{R}$ je zde nutný. Uvažujme komplexní funkci $f(t) = e^{\mathbf{i}t}$ na $[0, 2\pi]$ pak $0 = \varphi(2\pi) - \varphi(0) = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\xi} \cdot 2\pi$ což rozhodně neplatí pro žádné ξ.

Věta 11.14 (o přírůstku zobrazení)**.** Buď $f : X \to Y$ zobrazení mezi afinními prostory spojité na $[x_0, x]$ (úsečka mezi x a x_0) a diferencovatelné na (x_0, x). Nechť dále existuje nezáporné číslo c takové, že pro všechna $y \in (x_0, x)$ je $\|f'(y)\| \leq c$. Potom platí, že

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\,\|x - x_0\|$$

Věta 11.15. Buď $f : X \to Y$ ($\dim X < \infty$) zobrazení diferencovatelné na oblasti $A \subset X$ a nechť $f'(x) = \underleftarrow{0}$ (nulový kovektor) pro každé $x \in A$. Potom $f(x) = \text{konst.}$

Důkaz. Buď $x_0 \in A$, $B = \{x \in A \mid f(x) = f(x_0)\}$. $B \neq \emptyset$, neboť přinejmenším $x_0 \in B$. Dokážeme, že B je obojetná.

a) Důkaz, že B je otevřená: Buď $x \in B$, $B(x, r) \subset A$. Buď $y \in B(x, r)$. Pak podle věty 11.14, kde klademe $c = 0$, $\|f(y) - f(x)\| \leq c\|(y - x)\| = 0$, tedy $B(x, r) \subset B$. Když tedy víme, že $\|f(y) - f(x)\| = 0$, dostáváme $f(y) = f(x) = f(x_0)$.

b) Důkaz, že B je uzavřená: Vzor $f(x_0)$, tj. uzavřené množiny při spojitém zobrazení je uzavřená množina. B je tedy uzavřená.

B je obojetná a neprázdná v souvislém prostoru, je tedy $A = B$. □

Definice 11.16. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení f z prostoru E do $\mathbb{R}$ je homogenní stupně α se středem v bodě $x_0 \in E$, pokud je f definované na množině $E \setminus \{x_0\}$ a platí

$$(\forall t > 0)(f(x_0 + t(x - x_0)) = t^\alpha f(x)).$$

Věta 11.17 (Eulerova, o homogenní funkci)**.** Buď $x_0 \in E$, f zobrazení do $\mathbb{R}$, diferencovatelné na množině $E \setminus \{x_0\}$. Potom zobrazení f je homogenní stupně α se středem v x_0 právě tehdy, když pro všechna $x \in E \setminus \{x_0\}$ platí:

$$\underleftarrow{f'(x)}\overrightarrow{(x - x_0)} = \alpha f(x)$$

Důkaz. a) ($\Rightarrow$): Předpokládejme, že zobrazení f je diferencovatelné v bodě $x \neq x_0$ a homogenní stupně α se středem v bodě x_0. Definujme zobrazení $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(t) = f\left(x_0 + t\left(x - x_0\right)\right) \overbrace{=}^{\text{homogenita}} t^\alpha f(x).$$

Zřejmě $\varphi(1) = f(x)$. Dále, dle 11.12 je

$$(\varphi(t))' = f'\left(x_0 + t(x - x_0)\right)\left(x - x_0\right).$$

Stejně tak ale platí

$$(\varphi(t))' = \frac{d}{dt}\left(t^\alpha f(x)\right) = \alpha t^{\alpha - 1} f(x).$$

Z předchozích dvou vztahů dostáváme po dosazení $t = 1$ rovnost

$$\underleftarrow{f'(x)}\overrightarrow{(x - x_0)} = \alpha f(x).$$

b) ($\Leftarrow$): Zvolme pevně $x \neq x_0$ a předpokládejme, že zobrazení f je diferencovatelné na polopřímce $\{x_0 + t(x - x_0) \mid t > 0\}$. Nechť dále pro všechna $y \in \{x_0 + t(x - x_0) \mid t > 0\}$ platí

$$\underleftarrow{f'(y)}\overrightarrow{(y - x_0)} = \alpha f(y).$$

Definujme na intervalu $(0,+\infty)$ zobrazení

$$\psi(t)=\frac{1}{t^\alpha}f(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)}).$$

Pak dle 11.12 a dle silnější obdoby 11.10 (kdy v předpokladu věty jedno ze zobrazení nemusí být nutně do tělesa ale obecně do normovaného lineárního prostoru) má zobrazení ψ derivaci ψ' na intervalu $(0,+\infty)$ (povšimněme si, že tento interval je oblast v $\mathbb{R}$) a pro všechny $t\in(0,+\infty)$ platí

$$\begin{aligned}\psi'(t)&=-\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}f(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)})+\frac{1}{t^\alpha}f'(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)})\overrightarrow{(x-x_0)}=\\&=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(f'(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)})t\overrightarrow{(x-x_0)}-\alpha f(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)})\right)=0\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože $\overrightarrow{y-x_0}=t\overrightarrow{(x-x_0)}$. Dle 11.15 pak platí, že je ψ konstantní na intervalu $(0,+\infty)$ a platí

$$\frac{1}{t^\alpha}f(x_0+t\overrightarrow{(x-x_0)})=\psi(t)=\psi(1)=f(x).$$

□

Věta 11.18. Buď $f:X\to Y$, $\dim X<\infty$, $x_0\in(\mathrm{Dom}\, f)^\circ$ a nechť f má na H_{x_0} všechny parciální derivace 1. řádu spojité v x_0. Potom f je v x_0 diferencovatelné.

Důkaz. Větu dokážeme pro $Y=\mathbb{R}$. Buď $B(x_0,r)$. Pak podle 10.9 existují body $x_1,\dots,x_n$, $\|x_i-x_0\|\le\|x-x_0\|$, tak, že platí:

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)(x^i-x_0^i)=\sum_{i=1}^n f_i(x_0)(x^i-x_0^i)+\sum_{i=1}^n(f_i(x_i)-f_i(x_0))(x^i-x_0^i)$$

Potom

$$\lim_{x\to x_0}\omega(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^n(f_i(x_i)-f_i(x_0))\frac{x^i-x_0^i}{\|x-x_0\|}=0.$$

□

Poznámka. $\forall i\in\hat n$ jsou f_i spojité $\Rightarrow\exists f'\Rightarrow\forall i\in\hat n$ existují f_i

Věta 11.19. Spojitost parciálních derivací implikuje spojitou diferencovatelnost.

Důkaz.

$$\begin{aligned}\|(g'(x)-g'(x_0))\vec h\|&=\|(g'(x)-g'(x_0))\sum\left\langle\vec h,\vec e_i\right\rangle\vec e_i\|\le\|\vec h\|\cdot\sum\|(g'(x)-g'(x_0))\vec e_i\|=\\&=\|\vec h\|\cdot\sum\|g_i(x)-g_i(x_0)\|\end{aligned}$$

□

Definice 11.20 (třídy hladkosti)**.** Buď $A=A^\circ$, $A\subset\mathrm{Dom}\, f$. Řekneme, že f je **třídy**:

(I) $\mathcal{C}^0$ na A (značíme $f\in\mathcal{C}^0(A)$), je-li f spojitá na A;
(II) $\mathcal{C}^1$ na A (značíme $f\in\mathcal{C}^1(A)$), pokud v každém bodě $x_0\in A$ existuje $f'(x_0)$ a zobrazení $f':x_0\mapsto f'(x_0)$ je třídy $\mathcal{C}^0$, tj. f je **spojitě diferencovatelná** na A.

Pokud se explicitně neuvede množina A, na které daný výrok platí, míní se obvykle maximální možná, tj. $\mathrm{Dom}\, f$. V tomto případě klasifikace zahrnuje předpoklad $\mathrm{Dom}\, f=(\mathrm{Dom}\, f)^\circ$!

Poznámka. Z věty 11.19 plyne, že v prostoru konečné dimenze n je $f\in\mathcal{C}^1$, právě když $f_i\in\mathcal{C}^0$ pro každé $i\in\hat n$.

Věta 11.21 (derivace složeného zobrazení)**.** Buďte D, X, Y normované afinní prostory, $f:X\to Y$ diferencovatelné v x_0, $g:D\to\mathrm{Dom}\, f$ diferencovatelné v bodě t_0, $x_0=g(t_0)$. Potom složené zobrazení $F(t)=f(g(t))$ je diferencovatelné v bodě t_0 a platí $F'(t_0)=f'(x_0)g'(t_0)$.

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|t-t_0\|_D}\|F(t)-F(t_0)-f'(x_0)g'(t_0)(t-t_0)\|_Y = \\
&= \frac{1}{\|t-t_0\|_D}\|f(g(t))-f(g(t_0))-f'(x_0)(g(t)-g(t_0))+f'(x_0)(g(t)-g(t_0)-g'(t_0)(t-t_0))\|_Y = \\
&= \frac{1}{\|t-t_0\|_D}\|\omega(g(t))\|g(t)-g(t_0)\|_X + f'(x_0)(\mu(t)\|t-t_0\|_D)\|_Y = \\
&= \frac{1}{\|t-t_0\|_D}\Big\|\omega(g(t))\|g'(t_0)(t-t_0)+\mu(t)\|t-t_0\|_D\|_X + f'(x_0)(\mu(t)\|t-t_0\|_D)\Big\|_Y \le \\
&\le \frac{1}{\|t-t_0\|_D}\Big(\|\omega(g(t))\|_Y\Big(\|g'(t_0)\|_{\mathcal{L}(D,X)}\|t-t_0\|_D+\|\mu(t)\|_X\|t-t_0\|_D\Big)+ \\
&+\|f'(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|\mu(t)\|_X\|t-t_0\|_D\Big) \\
&= \|\omega(g(t))\|_Y\left(\|g'(t_0)\|_{\mathcal{L}(\vec{D},\vec{X})}+\|\mu(t)\|_X\right)+\|f'(x_0)\|_{\mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})}\|\mu(t)\|_X
\end{aligned}
$$

Dále stačí využít toho, že $\lim_{t\to t_0}\omega(g(t))=0$ a $\lim_{t\to t_0}\mu(t)=0$. Indexy u norem vyznačují prostor s příslušnou normou. □

Poznámka. (1) Derivovat složenou vektorovou funkci znamená násobit dvě tzv. Jacobiho matice.

$$F_k^i(t_0)=\frac{\partial F^i}{\partial t^k}(t_0)=\sum_{j=1}^n f_j^i(x_0)g_k^j(t_0)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\frac{\partial g^j}{\partial t^k}(t_0)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial t^r}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F^m}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial t^r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{x=x_0}\begin{pmatrix}\frac{\partial g^1}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial t^r}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g^n}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial g^n}{\partial t^r}\end{pmatrix}_{t=t_0}$$

(2) V případě, že $m=r=n$, jsou tyto Jacobiho matice regulární a můžeme pracovat s jejich determinanty, tzv. Jakobiány:

$$\det F'(t_0)=\det f'(x_0)\det g'(t_0)$$

Značíme buď $\mathcal{J}_F=\det F'$, $\mathcal{J}_F(t_0)=\mathcal{J}_f(x_0)\mathcal{J}_g(t_0)$, nebo „klasicky“:

$$\frac{\partial(F^1,\dots,F^n)}{\partial(t^1,\dots,t^n)}=\frac{\partial(f^1,\dots,f^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)}\cdot\frac{\partial(g^1,\dots,g^n)}{\partial(t^1,\dots,t^n)}$$

12. Derivace vyšších řádů

Definice 12.1. Buď $f : X \to Y$ diferencovatelné v každém bodě svého definičního oboru. Nechť zobrazení $f' : x \mapsto f'(x)$ je diferencovatelné v $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Potom řekneme, že zobrazení f je v x_0 dvakrát diferencovatelné (má v x_0 derivaci 2. řádu).

Poznámka. (1) Pro definici vyšší diferencovatelnosti je zapotřebí derivovat zobrazení z prostoru X do prostoru $\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$. Odtud vyplývá nutnost definovat derivaci zobrazení v obecnějších prostorech — při studiu pouze zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ by bylo obtížné definovat vyšší derivace.

(2) Dle definice je $(f')'(x_0) \in \mathcal{L}(\vec{X}, \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y}))$. Tento prostor je lineárně izometrický s prostorem všech bilineárních zobrazení $\vec{X} \times \vec{X} \to \vec{Y}$. Značíme $\mathcal{L}(\vec{X}, \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})) \cong \mathcal{L}_2(\vec{X}, \vec{X}; \vec{Y})$ (izometrie odpovídá homeomorfismu metrických prostorů, tj. dané prostory jsou z hlediska metrických vlastností nerozlišitelné).

Definice 12.2. Existuje-li $(f')'(x_0)$, potom 2. derivací zobrazení f v bodě x_0 rozumíme zobrazení $f''(x_0) \in \mathcal{L}_2(\vec{X}, \vec{X}; \vec{Y})$, tedy

$$f''(x_0)(\vec{h}, \vec{k}) = \left((f')'(x_0)\vec{h}\right)\vec{k} = \left((f')(x_0)\vec{k}\right)'(x_0)\vec{h}.$$

Věta 12.3. Nechť existuje $f''(x_0)$. Pak v x_0 existuje derivace 2. řádu v libovolných dvou směrech a platí

$$f_{\vec{v}\vec{w}}(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial w \partial v} f(x_0) = f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) = \left(f'(x_0)\vec{v}\right)'(x_0)\vec{w}$$

Věta 12.4. Druhá derivace je symetrické bilineární zobrazení.

$$f''(x_0)(\vec{h}, \vec{k}) = f''(x_0)(\vec{k}, \vec{h})$$

Důkaz provedeme pro $f : X \to \mathbb{R}$. Zvolíme libovolně nenulové volné vektory $\vec{h}, \vec{k}$. Uvažujme kouli $B(x_0, r)$, kde je derivace f' omezená (z definice druhé derivace musí ta první v té kouli existovat). Vezmeme-li $\delta(\|\vec{h}\| + \|\vec{k}\|) < r$, pak pro $|t| < \delta$ platí, že body $x_0, (x_0 + t\vec{h}), (x_0 + t\vec{k}), (x_0 + t(\vec{h} + \vec{k}))$ leží v kouli B. Pro $\vec{\xi}$, který leží na úsečce $\vec{\xi} \in \left[\vec{0}, \vec{h}\right]$ lze definovat

$$g(\vec{\xi}) = f(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k})) - f(x_0 + t\vec{\xi})$$

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x_0 + t(\vec{h} + \vec{k})) - f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0 + t\vec{k}) + f(x_0) = g(\vec{h}) - g(\vec{0}) = g'(\vec{\xi})\vec{h} = \\ &= t(f'(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k})) - f'(x_0 + t\vec{\xi}))\vec{h}. \end{aligned}$$

Protože

$$f'(x) = f'(x_0) + (f')'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)\left\|x - x_0\right\|,$$

platí

$$F(t) = t\left((f')'(x_0)t\vec{k} + \omega(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k}))\left\|t(\vec{\xi} + \vec{k})\right\| - \omega(x_0 + t\vec{\xi})\left\|t\vec{\xi}\right\|\right)\vec{h}.$$

(členy $f'(x_0)$ a $f'(t\vec{\xi})$ se odečtou)

$$\frac{F(t)}{t^2} = \left((f')'(x_0)\vec{k}\right)\vec{h} + \nu(t),$$

kde

$$\lim_{t \to 0} \nu(t) = 0.$$

Protože $F(t)$ je symetrické v $\vec{k}$ a $\vec{h}$, analogickými úpravami lze dospět ke vztahu

$$\frac{F(t)}{t^2} = \left((f')'(x_0)\vec{h}\right)\vec{k} + \eta(t),$$

takže 2. derivace je symetrická. □

Poznámka. (1) Buď $f : X \to \mathbb{R}$, $\dim X < \infty$. Potom druhá derivace $f''(x_0)$ je kvadratická forma a její matici nazýváme **Hessovou maticí** a její determinant **Hesiánem**. Pro $f''(x_0)$ platí polarizační identity a další vlastnosti kvadratických forem. Navíc $f''(x_0) \sim \mathbb{J}(\operatorname{grad} f(x_0))$ ($\sim$ značí ekvivalenci matic).

(2) Derivace m-tého řádu je symetrický tenzor m-tého řádu, tj.

$$f^{(m)}(x_0)\left(\vec{h_1}, \dots, \vec{h_m}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} f_{i_1\dots i_m}(x_0)\, h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m}.$$

Pokud je tedy zobrazení v daném bodě m-krát diferencovatelné, pak směrové derivace m-tého řádu nezávisí na pořadí derivování. Dle následující věty však diferencovatelnost v bodě není nutnou podmínkou pro záměnu směrových derivací.

Věta 12.5 (H. A. Schwarz)**.** Jestliže má zobrazení f v bodě x_0 spojitou derivaci $f_{\vec{v}\vec{w}}(x_0)$ a existuje $f_{\vec{w}\vec{v}}(x_0)$, pak jsou záměnné.

Věta 12.6. Buď $f : X \to Y$ zobrazení a nechť existuje $f^{(m)}(x_0)$. Potom existuje okolí H_{x_0} a zobrazení $\omega : \mathrm{H}_{x_0} \to \overrightarrow{Y}$ takové, že pro každé $x \in \mathrm{H}_{x_0}$ platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\vec{h}^i + \omega(x) \left\|\vec{h}\right\|^m,$$

kde $\vec{h} = x - x_0$ a $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0$ a

$$L(\underbrace{\vec{h}, \dots, \vec{h}}_{r\text{-krát}}) = L\vec{h}^r.$$

Důkaz. Větu dokážeme pro $Y \subset \mathbb{R}$. Důkaz lze provést indukcí. Pro $m = 1$ věta zřejmě platí díky poznámce 11.5.1. Předpokládejme tedy platnost věty pro $m \in \mathbb{N}$. Buď f zobrazení $(m+1)$-krát diferencovatelné v bodě x_0 a zaveďme pomocné zobrazení $g : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ definované předpisem

$$g(\vec{h}) = f(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\vec{h}^i.$$

Uvědomme si, že g je diferencovatelné na jistém okolí bodu $\vec{0}$ a že platí

$$g'(\vec{h}) = f'(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{(i-1)!} (f')^{(i-1)}(x_0)\vec{h}^{i-1} = f'(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} (f')^{(i)}(x_0)\vec{h}^i.$$

Podle indukčního předpokladu nyní existuje okolí H_{x_0} a zobrazení $\mu : X \to \overrightarrow{Y}$ takové, že pro všechna $\vec{h}$, pro která je $x_0 + \vec{h} \in \mathrm{H}_{x_0}$, platí

$$g'(\vec{h}) = \mu(x_0 + \vec{h}) \left\|\vec{h}\right\|^m,$$

$$\lim_{x\to x_0} \mu(x) = 0.$$

Pro $Y \subset \mathbb{R}$ podle věty 11.13 dostáváme

$$g(\vec{h}) = g(\vec{h}) - g(\vec{0}) = g'(\vec{\xi})\vec{h} = \mu(x_0 + \vec{\xi}) \left\|\vec{\xi}\right\|^m \vec{h},$$

$$\left\|g(\vec{h})\right\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\| \left\|\vec{\xi}\right\|^m \left\|\vec{h}\right\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\| \left\|\vec{h}\right\|^{m+1},$$

neboť $\left\|\vec{\xi}\right\| \le \left\|\vec{h}\right\|$. Pro všechna $x \in \mathrm{H}_{x_0}$ tedy platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i - \omega(x) \left\|x - x_0\right\|^{m+1},$$

kde $\|\omega(x)\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\|$ a tudíž $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = \vec{0}$. □

Věta 12.7 (Taylor)**.** Buď $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že $f \in \mathcal{C}^m[x_0, x]$ (na úsečce!) a $f \in \mathcal{C}^{m+1}(x_0, x)$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ takové, že platí:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}.$$

Důkaz. Definujme funkci

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Pak

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0), \quad \varphi'(0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$\varphi''(0) = f''(x_0)(x - x_0)^2, \quad \varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i.$$

$\varphi(t)$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lze tedy uplatnit klasickou verzi Taylorovy věty:

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0) + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}.$$

□

Definice 12.8 (třídy hladkosti)**.** Buď $A = A^\circ$, $A \subset \operatorname{Dom} f$. Řekneme, že f je **třídy**:

(I) $\mathcal{C}^k$ na A (značíme $f \in \mathcal{C}^k(A)$), pokud v každém bodě $x_0 \in A$ existují $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$ a pokud $f', f'', \dots, f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(A)$, tj. f je na A **spojitě diferencovatelná do řádu** k;

(II) $\mathcal{C}^\infty$, pokud f má na A spojité derivace všech řádů, tj. f je na A **hladká**;

(III) $\mathcal{C}^\omega$, pokud $f \in \mathcal{C}^\infty$ a její Taylorův rozvoj v libovolném bodě $x_0 \in A$ konverguje k f, tj. f je na A **analytická**.

Pokud se explicitně neuvede množina A, na které daný výrok platí, míní se obvykle maximální možná, tj. $\operatorname{Dom} f$. V tomto případě klasifikace zahrnuje předpoklad $\operatorname{Dom} f = (\operatorname{Dom} f)^\circ$!

Poznámka. Obecně platí

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{C}^2 \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty \supset \mathcal{C}^\omega.$$

Méně zřejmé je, že ani jedna inkluze není rovností.

Příklad. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadaná

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(\|x\|^2 - 1)} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

je hladká na celém $\operatorname{Dom} f$, tj. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Platí však $f^{(n)}(x) = 0$ — její Taylorův rozvoj v okolí nuly tedy odpovídá všude nulové funkci, tj. $f \notin \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^n)$. Tuto funkci doc. Krbálek nazývá **Cimrmanovou buřinkou**.

13. Lokální extrémy

Definice 13.1. Funkce f má v bodě a lokální maximum (minimum), právě když

$$(\exists \mathrm{H}_a)(\forall x \in \mathrm{H}_a)(f(x) \leq f(a)), \text{ resp.}$$
$$(\exists \mathrm{H}_a)(\forall x \in \mathrm{H}_a)(f(x) \geq f(a))$$

Poznámka. Extrém může mít pouze reálná funkce. Na komplexních číslech není zavedena relace uspořádání, nelze tedy porovnávat komplexní funkční hodnoty.

Definice 13.2. Funkce f má v bodě a ostré lokální maximum (minimum), právě když

$$(\exists \mathrm{H}_a)(\forall x \in \mathrm{H}_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a)), \text{ resp.}$$
$$(\exists \mathrm{H}_a)(\forall x \in \mathrm{H}_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$$

Definice 13.3. Buď $f'(x_0) = \underset{\leftarrow}{0}$. Potom x_0 nazýváme **stacionárním bodem** funkce f.

Věta 13.4. Má-li f v x_0 lokální extrém a je-li v x_0 diferencovatelná, pak je x_0 stacionárním bodem funkce f.

Definice 13.5. Řekneme, že $f''(x_0)$ je:

(I) **pozitivně definitní**, pokud $f''(x_0)\vec{h}^2 > 0$ pro každý $\vec{h} \in \vec{X} \setminus \{\vec{0}\}$;
(II) **pozitivně semidefinitní**, pokud $f''(x_0)\vec{h}^2 \geq 0$ pro každý $\vec{h} \in \vec{X}$ a existuje $\vec{h} \neq \vec{0}$ takové, že $f''(x_0)\vec{h}^2 = 0$;
(III) **negativně definitní**, pokud $f''(x_0)\vec{h}^2 < 0$ pro každý $\vec{h} \in \vec{X} \setminus \{\vec{0}\}$;
(IV) **negativně semidefinitní**, pokud $f''(x_0)\vec{h}^2 \leq 0$ pro každý $\vec{h} \in \vec{X}$ a existuje $\vec{h} \neq \vec{0}$ takové, že $f''(x_0)\vec{h}^2 = 0$;
(V) **indefinitní**, pokud existují $\vec{h}, \vec{k} \in \vec{X}$ takové, že $f''(x_0)\vec{h}^2 > 0$ a $f''(x_0)\vec{k}^2 < 0$.

Dále řekneme, že $f''(x_0)$ je **pozitivní**, pokud je pozitivně definitní nebo pozitivně semidefinitní. Analogicky $f''(x_0)$ nazveme **negativní**, pokud je negativně definitní nebo negativně semidefinitní.

Věta 13.6. Nechť existuje $f''(x_0)$ a $f'(x_0) = \underset{\leftarrow}{0}$.

(I) Je-li x_0 bodem lokálního minima f, potom je $f''(x_0)$ pozitivní.
(II) Je-li na prostoru konečné dimenze $f''(x_0)$ pozitivně definitní, má funkce f v x_0 ostré lokální minimum.
(III) Je-li x_0 bodem lokálního maxima f, potom je $f''(x_0)$ negativní.
(IV) Je-li na prostoru konečné dimenze $f''(x_0)$ negativně definitní, má funkce f v x_0 ostré lokální maximum.
(V) Je-li $f''(x_0)$ indefinitní, funkce f v x_0 nemá lokální extrém.

Důkaz.

$$f(x_0 + \vec{h}) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\vec{h}^2 + \omega(x_0 + \vec{h}) \left\|\vec{h}\right\|^2$$

$$\begin{aligned} f''(x_0)\vec{h}^2 &= \lim_{t\to 0} \frac{f''(x_0)(t\vec{h})^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0) - \omega(x_0 + t\vec{h}) \left\|t\vec{h}\right\|^2}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0)}{t^2} \end{aligned}$$

(I) Protože existuje H_{x_0} takové, že $f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0) \geq 0$, platí, že

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0)}{t^2} \geq 0$$

(II) Díky konečné dimenzi je uzavřená a omezená množina $M = \left\{\vec{h} : \left\|\vec{h}\right\| = 1\right\}$ kompaktní. Spojité zobrazení $f''(x_0)$ na ní tedy nabývá svého minima

$$(\forall \vec{h} \in M)(f''(x_0)\vec{h}^2 \geq f''(x_0)\vec{h}_0^2 = a \geq 0).$$

Pak na jistém okolí H_{x_0} platí

$$f(x_0+\vec{h})-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)\vec{h}^2+\omega(x_0+\vec{h})\left\|\vec{h}\right\|^2\geq\frac{1}{2}a\left\|\vec{h}\right\|^2+\omega(x_0+\vec{h})\left\|\vec{h}\right\|^2.$$

Vybereme podokolí, kde $\left|\omega(x_0+\vec{h})\right|<\frac{1}{4}a$, pak

$$f(x_0+\vec{h})-f(x_0)\geq\frac{1}{4}a\left\|\vec{h}\right\|^2>0,$$

tedy funkce má v x_0 ostré lokální minimum.

(III) Protože existuje H_{x_0} takové, že $f(x_0+t\vec{h})-f(x_0)\leq 0$, platí, že

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{h})-f(x_0)}{t^2}\leq 0$$

(IV) Podobně jako výše.

(V) Existují vektory $\vec{h_1}$ takový, že $f''(x)\vec{h_1}^2<0$ a $\vec{h_2}$ takový, že $f''(x)\vec{h_2}^2>0$. Pak ale z výše uvedeného plyne, že v libovolné blízkosti x_0 se nacházejí body, pro které platí jak $f(x)>f(x_0)$, tak $f(x)<f(x_0)$. Funkce tedy nemá v bodě x_0 lokální extrém.

□

Poznámka. Definice pozitivní definitnosti dle 13.5 je užitečná pouze na konečněrozměrných prostorech. V nekonečněrozměrném prostoru totiž může existovat cauchyovská posloupnost $\{\vec{h}_n\}_1^\infty$ taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ je $f''(x_0)h_n^2>0$, ale $\lim_{n\to\infty}f''(x_0)h_n^2=0$. Pokud daný prostor není úplný, pak posloupnost $\{\vec{h}_n\}_1^\infty$ v tomto prostoru nemusí konvergovat. Pro zobecnění věty 13.6 na prostory nekonečné dimenze je třeba místo pozitivní definitnosti dle 13.5 předpokládat vlastnost

$$(\exists\alpha>0)\left(\forall\vec{h}\in\vec{X}\right)\left(f''(x_0)\vec{h}^2\geq\alpha\left\|\vec{h}\right\|^2\right).$$

Na prostorech konečné dimenze je tato vlastnost ekvivalentní s pozitivní definitností 13.5, což lze vyčíst z důkazu věty 13.6. Za tohoto předpokladu již tvrzení věty 13.6 platí i na prostorech nekonečné dimenze.

Rejstřík