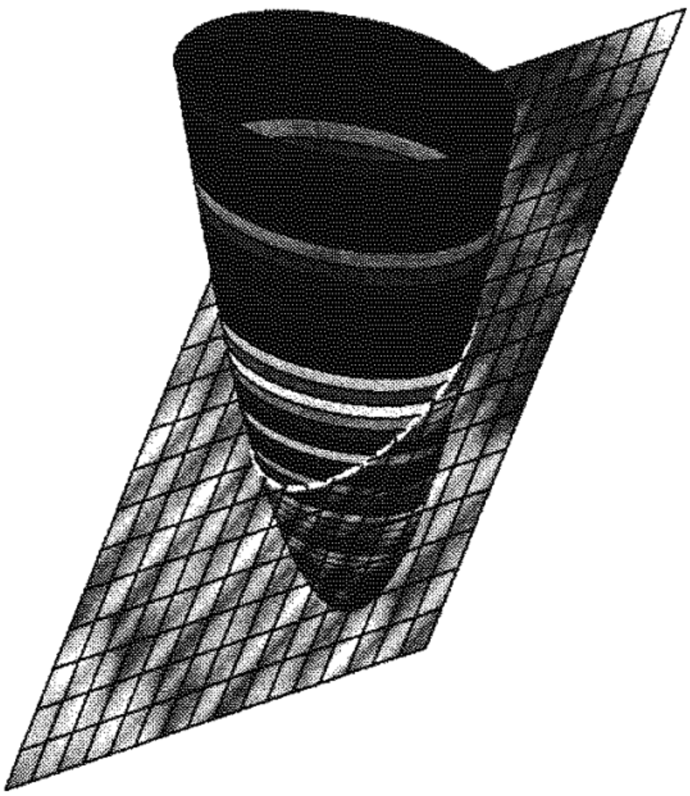
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

MATEMATICKÁ ANALÝZA III



Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

PŘEDMLUVA

Toto skriptum je určeno především posluchačům druhého ročníku Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze pro studium některých partií matematické analýzy. Na rozdíl od klasického přístupu, kdy jsou vydávány samostatně teoretické učebnice a na ně navazující cvičebnice či sbírky příkladů, je předkládané skriptum integrovaným učebním textem. Čtenář v něm tedy nalezne nejen ucelenou teorii s definicemi nových pojmů, větami a jejich důkazy, ale také řešené příklady s aplikací prostudované látky a úlohy k samostatnému procvičování.

Obsah skript je rozdělen do šesti studijních jednotek (kapitol), z nichž každá tvoří relativně samostatný tématický celek. V první kapitole je nejprve definována bodová konvergence posloupnosti funkcí a poté konvergence stejnoměrná. Vysloveno a dokázáno je dále supremální kritérium pro její vyšetření. Pojmu stejnoměrné konvergence je následně užito při vyslovení vět o záměnách limity a derivace, resp. limity a integrálu, resp. limity a limity v bodě pro obecnou funkční posloupnost. V kapitole druhé jsou pojmy bodové a stejnoměrné konvergence rozšířeny na řady funkcí. Formulována a dokázana jsou elementární kritéria pro vyšetřování jak bodové tak stejnoměrné konvergence funkčních řad. Diskutována je také otázka záměn sumy a derivace, resp. sumy a integrálu, resp. sumy a limity. Ve třetí kapitole je prezentována teorie Taylorových řad, tj. mocninných aproximací funkcí jedné proměnné. Sestaven je tzv. Taylorův vzorec, jenž vyúsťuje ve formulaci Taylorovy věty. Čtvrtá kapitola o obyčejných diferenciálních rovnicích definuje základní terminologii a klasifikaci diferenciálních rovnic a v jednotlivých oddílech se zabývá jejich řešením. Čtenáři se tak dostává návodů k řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu metodou integračního faktoru, k řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice, k metodě separace proměnných a k řešení homogenní či exaktní diferenciální rovnice (rovnice ve tvaru totálního diferenciálu). U rovnic vyšších řádů se čtenář kromě obecných poznatků o struktuře prostoru všech řešení rovnic bez pravé strany seznámí s problematikou snižování řádu diferenciálních rovnic, s metodou variace konstant či s řešením rovnice s konstantními koeficienty a Eulerovy diferenciální rovnice. V páté kapitole jsou definovány pojmy bilineární a kvadratické formy. U těchto forem je prostřednictvím vět vystopována celá řada univerzálních znaků a jejich existence je poté užita při studiu kvadratických ploch, speciálně při jejich úplné klasifikaci v prostorech $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$. Závěrečná studijní jednotka zavádí pojmy obecného skalární součinu, normy a metriky. Ty dále poslouží k obecné definici pojmu okolí a následně k typologii množin a jejich bodů. Čtenář se tu obeznámí s termíny otevřená, uzavřená, omezená, souvislá, kompaktní, konečná či spočetná množina v obecném metrickém prostoru. Diskutována je též abstraktní varianta konvergence spolu s pojmem cauchyovskosti. Vyvrcholením je definice Hilbertova prostoru, výchozího bodu dalších partií matematické analýzy. V poslední části skript jsou pak čtenářům nabídnuty výsledky cvičení ze všech šesti studijních jednotek.

Na závěr mi dovolte poděkovat studentům FJFI (druhý ročník 2004/2005 a druhý ročník 2005/2006) za opravy výsledků cvičení a cenné náměty pro toto přepracované vydání. Děkuji také kolegovi doc. Ondřejovi Navrátilovi, Ph.D. za korekturu textu prvního vydání.

autor

Obsah

Značení

Symbol	Význam
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\mathbf{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{R}^r$	množina uspořádaných $r-$tic reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbf{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolná číselná množina
$\mathbf{R}^\star$	$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbf{E}^r$	$r-$rozměrný euklidovský prostor
$\widehat{n}$	$\{m \in \mathbf{N} : m \leqslant n\}$
$\underline{\widehat{n}}$	$\{m \in \mathbf{N}_0 : m \leqslant n\}$
A, B, C	množiny
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	matice
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	vektorové prostory
$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$	operátory
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$	soustavy množin
$\mathscr{C}^n(M)$	třída všech funkcí, jež mají na množině M spojité derivace až do řádu n
$\mathscr{C}^\infty(M)$	třída všech funkcí, jež mají na množině M spojité derivace všech řádů
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x)$	$n-$tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$	první, druhá derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\varepsilon^n}$	$n-$tá derivace funkce $f(\varepsilon)$ podle proměnné ε
$\mathrm{d}^n f_a(h)$	$n-$tý totální diferenciál funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $a \in \mathbf{R}$
$\mathrm{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$	$n-$tý totální diferenciál funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$
$U(x), U_\varepsilon(x)$	okolí bodu x
$U^\star(x), U^\star_\varepsilon(x)$	redukované okolí bodu x
$\cup, \cap$	sjednocení a průnik množin
$\subset, \subsetneqq$	podmnožina a vlastní podmnožina množiny
$\mathrm{Dom}(f)$	definiční obor funkce $f(x)$
$\mathrm{Ran}(f)$	obor hodnot funkce $f(x)$
$f(A)$	obraz množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(A)$	vzor množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(a)$	vzor jednoprvkové množiny $\{a\}$ při zobrazení $f(x)$
$\approx$	přibližně
$\propto$	úměrně
$\sim$	ekvivalence množin či funkcí

Symbol	Význam
$A^\circ, \overline{A}$	vnitřek, resp. uzávěr množiny A
$\mathrm{bd}(A)$	hranice množiny A
$\mathrm{der}(A)$	derivace množiny A
$\vec{b}^\intercal = (b_1, b_2, \dots, b_r)$	řádkový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)^\intercal$	sloupcový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b}_k$	$k-$tý vektor posloupnosti $(\vec{b}_n)_{n=1}^{\infty}$
b_{k_ℓ}	$\ell-$tá složka vektoru $\vec{b}_k$
$\mathbb{A}_{ij}$	prvek matice $\mathbb{A}$ v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci
$\mathbb{A}_{\bullet j}$	$j-$tý sloupec matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}_{i\bullet}$	$i-$tý řádek matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\intercal$	matice transponovaná k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^*$	komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\sharp = (\mathbb{A}^*)^\intercal$	hermitovsky sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}\|\vec{b}$	matice $\mathbb{A}$ rozšířená o poslední sloupec tvořený sloupcovým vektorem $\vec{b}$
$\mathbb{I}$	jednotková (Croneckerova) matice
δ_{ij}	prvek Croneckerovy matice
$\det(\mathbb{A})$	determinant matice $\mathbb{A}$
$\mathrm{h}(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r)$	diagonální matice s prvky $x_1, x_2, \dots, x_r$ na hlavní diagonále
$\mathcal{E}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$	standardní báze v $\mathbf{R}^r$, tj. $e_{i_j} = \delta_{ij}$
a^*	komplexně sdružené číslo k číslu a
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část čísla x
$\lceil x \rceil$	horní celá část čísla x
$\mathcal{O}$	symbol vymezený pro obor konvergence
$\mathtt{R}$	symbol vymezený pro poloměr konvergence
$\mathtt{C}$	symbol vymezený pro libovolnou reálnou konstantu (zejména integrační)
$x \mapsto f(x, \beta)$	funkce proměnné x s parametrem β
$\mathrm{sgn}(x)$	funkce signum
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r]_\lambda$	lineární obal skupiny vektorů
$\deg(\wp)$	stupeň polynomu $\wp$
$q(\vec{x}) \rhd 0$	pozitivní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \unrhd 0$	pozitivní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \lhd 0$	negativní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \unlhd 0$	negativní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \lhd\rhd 0$	indefinitnost kvadratické formy

Kapitola 1

Posloupnosti funkcí

V první kapitole těchto skript vyložíme základní poznatky o posloupnostech, jejimiž členy jsou funkce jedné proměnné. Cílem kapitoly je nejprve vybudovat pojem stejnoměrné konvergence, tj. jakési nadstavby pojmu konvergence, zavedeného v teorii o číselných posloupnostech. Dále se pokusíme rozhodnout, zda-li se vlastnosti jednotlivých členů funkčních posloupností přenášejí na příslušnou limitní funkci. Zodpovíme tedy otázky, zda funkce, jež je limitou dané posloupnosti funkcí, které jsou spojité, resp. diferencovatelné, resp. integrovatelné, je také spojitá, resp. diferencovatelná, resp. integrovatelná.

1.1 Bodová konvergence posloupností funkcí

Nejprve zavedeme základní pojmy a shrneme elementární poznatky o tzv. bodové konvergenci, která odpovídá klasické konvergenci číselných posloupností.

1.1.1 Úmluva

V celé kapitole jsou symboly m, n, n_0 vyhrazeny pro přirozená čísla.

1.1.2 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{R}$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na M nazýváme *posloupností funkcí* na M. Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(x)$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(x), f_2(x), \dots \qquad \text{nebo} \qquad \big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Přirozené číslo n přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(x)$ $n-$tým členem posloupnosti (1.1).

1.1.3 Poznámka

Jenom pro přesnost budeme v této poznámce precizovat pojem "konvergentní posloupnost." Posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazýváme *konvergentní* právě tehdy, má-li reálnou limitu. Má-li však tato posloupnost limitu nevlastní (tedy ∞ nebo $-\infty$), nenazýváme ji konvergentní, ale řadíme ji mezi posloupnosti *divergentní*. Podobně je zaveden pojem konvergentní funkční posloupnosti v definici 1.1.4.

1.1.4 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje v bodě* $c \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(f_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí nerovnost

$$\big|f_n(c) - \gamma\big| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N.

1.1.5 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $c \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $\left(f_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(c)$ hodnotu limity posloupnosti $\left(f_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na množině N definována funkce $x \mapsto f(x)$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.1) a značíme

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Oborem konvergence $\mathcal{O}$ posloupnosti (1.1) nazýváme množinu všech bodů $c \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

1.1.6 Poznámka

Definičním oborem limitní funkce $f(x)$ je tedy obor konvergence $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}$.

1.1.7 Příklad

Uvažme funkční posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}.$$

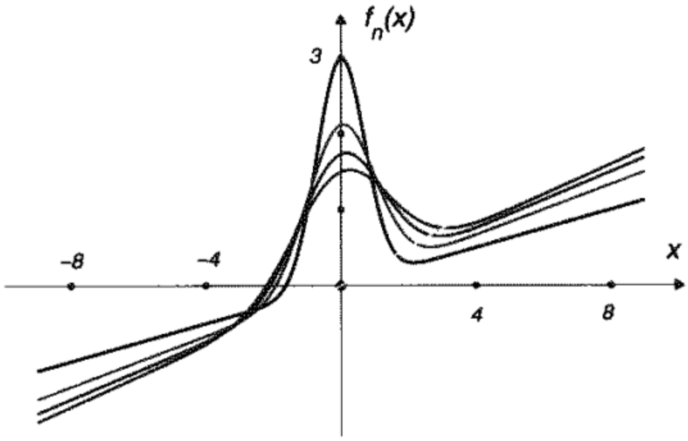
Definičním oborem všech funkcí $f_n(x)$ je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel. Na ní má tedy smysl hledat limitní funkci. Snadno lze určit, že limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{4(n+1)} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} = \frac{x}{4}$$

existuje pro každé $x \in \mathbf{R}$, a tedy že

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{4}$$

a $\mathcal{O} = \mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}$. Průběhy prvních několika členů vyšetřované funkční posloupnosti vykreslujeme na přiloženém obrázku. Žlutou barvou je vykreslena limitní funkce.



Obrázek 1.1
Graf funkční posloupnosti $\left(\frac{nx}{4(n+1)} + \frac{3}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$.

1.1.8 Věta – *Bolzano-Cauchyova podmínka*

Posloupnost funkcí (1.1) konverguje v bodě $c \in M$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzano-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|f_n(c) - f_m(c)\right| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- První implikace:
  - vyjděme z předpokladu, že $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = \gamma \in \mathbf{R}$

- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geqslant n_0$, platí

$$\left|f_n(c) - \gamma\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \left|f_m(c) - \gamma\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- a tedy

$$\left|f_n(c) - f_m(c)\right| \leqslant \left|f_n(c) - \gamma\right| + \left|f_m(c) - \gamma\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Druhá implikace:
  - nechť tedy číselná posloupnost $\left(f_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$ splňuje vztah (1.2)
  - pak pro $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $m, n \geqslant n_0$ platí nerovnost

$$\left|f_n(c) - f_m(c)\right| < 1$$

  - položíme-li $m = n_0$, je pro všechna $n \geqslant n_0$ splněna nerovnost

$$f_{n_0}(c) - 1 < f_n(c) < f_{n_0}(c) + 1$$

  - z toho ale vyplývá, že posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ je omezená
  - předpokládejme, že $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ diverguje (tedy, že nemá vlastní limitu)
  - za tohoto předpokladu tudíž platí

$$\liminf f_n(c) < \limsup f_n(c)$$

  - proto existují čísla α a β tak, že $\liminf f_n(c) < \alpha < \beta < \limsup f_n(c)$
  - z jednoduché úvahy lze vyvodit, že existuje nekonečně mnoho členů (označme je $f_\ell(c)$) číselné posloupnosti $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ a nekonečně mnoho členů $f_k(c)$ takových, že

$$f_\ell(c) > \beta, \qquad f_k(c) < \alpha \tag{1.3}$$

  - položme $\varepsilon := \beta - \alpha$
  - pro toto $\varepsilon > 0$ existuje podle předpokladu (1.2) hraniční index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro $\ell, k \geqslant n_0$ je

$$\left|f_\ell(c) - f_k(c)\right| < \varepsilon \tag{1.4}$$

  - jelikož jsou ale splněny nerovnosti (1.3), platí pro nekonečně mnoho indexů také nerovnost

$$\left|f_\ell(c) - f_k(c)\right| > \beta - \alpha = \varepsilon,$$

    což završuje spor
  - posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ tudíž konverguje

- tím je důkaz zkompletován

1.1.9 Poznámka

Obecně vzato, nemusí splnění Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ implikovat existenci limity $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Např. posloupnost

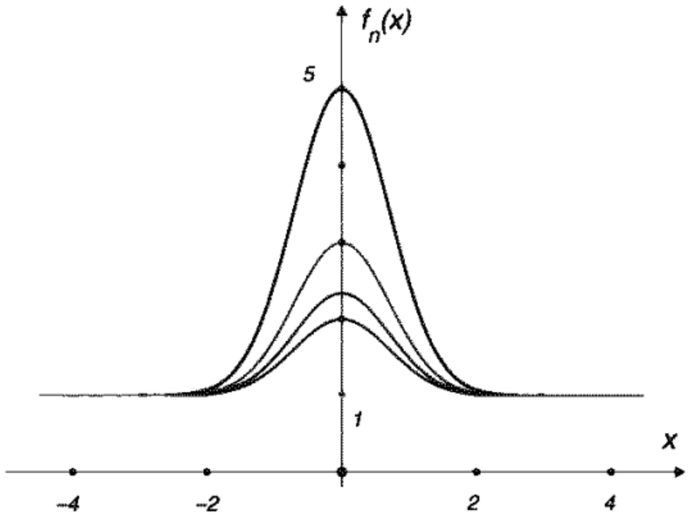
$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

citovanou podmínku splňuje (jedná se totiž o posloupnost konvergentní v $\mathbf{R}$), ale budeme-li hledat její limitu v množině $\mathbf{Q}$ racionálních čísel, nenalezneme ji. Posloupnost je tudíž divergentní v $\mathbf{Q}$, přestože Bolzano-Cauchyovu podmínku splňuje. Naše definice 1.1.2 posloupnosti funkcí je totiž vyslovena pro funkce definované na $\mathbf{R}$. Jelikož množina $\mathbf{R}$ je tzv. úplná, je v $\mathbf{R}$ každá posloupnost splňující Bolzano-Cauchyovu podmínku zároveň konvergentní. Pro preciznost doporučujeme čtenáři, aby tuto problematiku důkladně nastudoval v poslední kapitole těchto skript.

1.1.10 Příklad

První otázkou, jež si budeme klást, je, zda limitou posloupnosti funkcí spojitých na jisté množině $M \subset \mathbf{R}$ je opět funkce spojitá na M. Uvažme proto posloupnost funkcí

$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} := \left(1 + 4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$



Obrázek 1.2
Graf funkční posloupnosti $\left(1 + 4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

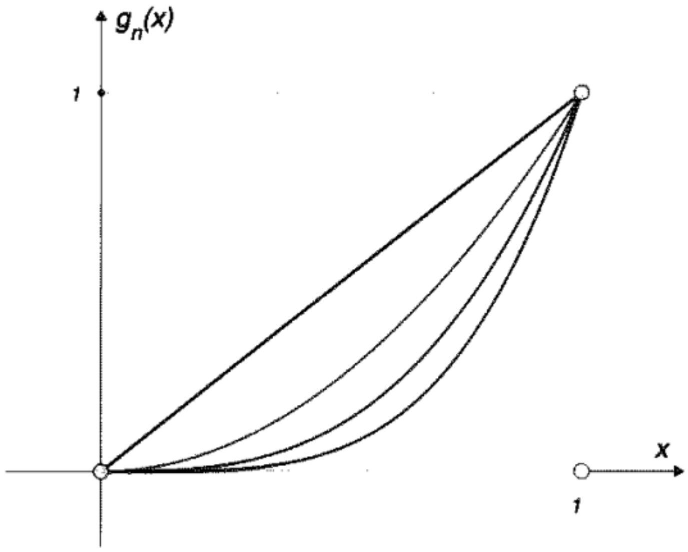
Ta zcela zjevně konverguje na celém $\mathbf{R}$ k funkci $f(x) = 1$, kde $\mathrm{Dom}(f) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$. Všechny funkce $f_n(x)$ jsou na $\mathbf{R}$ spojité a spojitá je také funkce $f(x)$.

1.1.11 Příklad

Uvažme ovšem druhý příklad. Tentokrát budeme studovat funkční posloupnost

$$\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} := \left(x^n\right)_{n=1}^{\infty},$$

kde x je vybíráno pouze z množiny $M = \langle 0, 1\rangle$.



Obrázek 1.3
Graf funkční posloupnosti $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost konverguje na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ k funkci

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Zatímco jsou všechny funkce $g_n(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$ spojité, limitní funkce $g(x)$ nikoliv. Z toho je patrno, že samotná bodová konvergence k "přenosu" spojitosti z jednotlivých členů posloupnosti na limitní funkci nestačí. Bude tedy nutné k pojmu bodové konvergence hledat silnější alternativu.

1.1.12 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že (1.1) je *rostoucí* na M, jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) < f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *klesající* na M, jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) > f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *nerostoucí* na M, jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna neostrá nerovnost $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. Řekneme, že (1.1) je *neklesající* na M, jestliže je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ splněna nerovnost $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Posloupnost, která je buď neklesající nebo nerostoucí nazýváme *monotónní* posloupností.

1.1.13 Věta

Nechť je dána neklesající posloupnost funkcí (1.1) definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}$. Je-li tato shora omezená, tj. existuje-li $K > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí $f_n(x) < K$, pak na množině M existuje limitní funkce $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a její hodnota v každém bodě $x \in M$ je rovna supremu $\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(x)$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(x).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- zvolme libovolně $c \in M$ a položme $s = \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(c)$
- zřejmě je pro všechna $n \in \mathbf{N}$ splněno $f_n(c) \leqslant s$
- pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje v posloupnosti $\big(f_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$ alespoň jeden člen větší než $s - \varepsilon$
- to značí, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $f_{n_0} > s - \varepsilon$
- pro libovolné $n \geqslant n_0$ je (díky faktu, že $\big(f_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající) splněno $f_n(c) \geqslant f_{n_0}(c)$
- nerovnost $s - \varepsilon < f_n(c) < s + \varepsilon$ je tedy splněna pro nekonečně mnoho indexů $n \geqslant n_0$
- odtud již plyne, že $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = s$, což bylo dokázat

1.2 Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Ve druhé části první kapitoly zavedeme pojem stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti. Jak ukážeme později, bude vlastnost stejnoměrné konvergence zásadní při "přenosu" spojitosti, diferencovatelnosti či integrovatelnosti ze členů posloupnosti na její limitní funkci.

1.2.1 Definice

Nechť (1.1) je posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že tato posloupnost *stejnoměrně konverguje na* M k funkci $f(x)$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí nerovnost

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

1.2.2 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme symbolem $f_n(x) \to f(x)$, stejnoměrnou pak $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall x \in M)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \wedge x \in M \Rightarrow \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Stejnoměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního" n_0, které plní svoji roli pro všechna $x \in M$.

1.2.3 Věta

Jestliže posloupnost funkcí (1.1) stejnoměrně konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ k funkci $f(x)$, potom tato posloupnost konverguje na M k funkci $f(x)$ také bodově.

<u>*Důkaz:*</u>

- je snadným důsledkem příslušných definic

1.2.4 Věta

Nechť (1.1) je konvergentní posloupností konstantních funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom tato posloupnost konverguje na M stejnoměrně.

<u>*Důkaz:*</u>

- je snadným důsledkem příslušných definic

1.2.5 Poznámka

Podle předešlé věty tedy pro číselné posloupnosti (které lze chápat jako funkční posloupnosti konstantních funkcí) pojmy bodové a stejnoměrné konvergence splývají.

1.2.6 Příklady

Vraťme se nyní k příkladům 1.1.10 a 1.1.11. Ukážeme, že posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ z příkladu 1.1.10 na rozdíl od $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ z příkladu 1.1.11 konverguje ke své limitní funkci stejnoměrně. K libovolnému $\varepsilon > 0$ v prvním případě stačí totiž zvolit $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $n_0 > 4/\varepsilon$. Tedy např.

$$n_0 := \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil .$$

Potom totiž pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $x \in \mathbf{R}$ platí:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|1 + 4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n} - 1\right| = \left|4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n}\right| \leqslant \frac{4}{n} \leqslant \frac{4}{n_0} < \varepsilon.$$

Naproti tomu posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na $\langle 0, 1\rangle$ ke své limitní funkci stejnoměrně. Kdyby tomu totiž tak bylo, pak by např. k číslu $\varepsilon = 1/2$ muselo existovat n_0 takové, že by pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $x \in \langle 0, 1)$ platilo

$$\left|x^n - g(x)\right| < \frac{1}{2}.$$

Speciálně pro každé $x \in \langle 0, 1)$ by tedy musela platit nerovnost

$$x < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

pro všechna $n \geqslant n_0$. Dosadíme-li do této nerovnosti $n = n_0$, dostáváme celkem: Kdyby posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergovala k funkci $g(x)$ stejnoměrně, muselo by existovat číslo n_0 takové, že

$$\forall x \in \langle 0, 1) : \qquad x < 2^{-\frac{1}{n_0}}.$$

To však možné není, neboť pro všechna přirozená n_0 je číslo $2^{-\frac{1}{n_0}}$ menší než jedna.

1.2.7 Věta

Nechť posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množině M. Nechť je zvolena množina $N \subset \mathbf{R}$ tak, že $\emptyset \neq N \subset M$. Pak posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně také na množině N.

<u>*Důkaz:*</u>

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 1.3)

1.2.8 Poznámka

Předešlá vlastnost bývá nazývána *dědičností* stejnoměrné konvergence. Implikuje kromě jiného fakt, že nekonverguje-li jistá posloupnost na vybrané podmnožině množiny M, pak nemůže stejnoměrně konvergovat ani na množině M.

1.2.9 Věta

Nechť posloupnost funkcí (1.1) konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množinách M a N. Pak konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně také na sjednocení $M \cup N$.

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 1.4)

1.2.10 Věta

Nechť posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na množině M. Nechť posloupnost funkcí $\big(g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $g(x)$ stejnoměrně na množině M. Pak posloupnost funkcí

$$\big(f_n(x) + g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

konverguje k funkci $f(x) + g(x)$ stejnoměrně na množině M.

Důkaz:

- vyjdeme z obou předpokladů
- platí tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \wedge x \in M \Rightarrow \big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists m_0 \in \mathbf{N}): \qquad m \in \mathbf{N} \wedge m \geqslant m_0 \wedge x \in M \Rightarrow \big|g_m(x) - g(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položme $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$
- a vezměme libovolné $\varepsilon > 0$
- pak pro všechna $\ell \in \mathbf{N}$ taková, že $\ell \geqslant \ell_0$, a všechna $x \in M$ platí

$$\Big|\big(f_\ell(x) + g_\ell(x)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)\Big| \leqslant \big|f_\ell(x) - f(x)\big| + \big|g_\ell(x) - g(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- to dokazuje jednak stejnoměrnou konvergenci a jednak fakt, že limitní funkcí součtové posloupnosti je skutečně součet limitních funkcí

1.2.11 Věta – *supremální kritérium*

Nechť $f(x)$ a $f_n(x)$ pro všechna n jsou funkce definované na množině M. Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} \big|f_n(x) - f(x)\big|$$

pro každé n. Pak posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(x)$ právě tehdy, když

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0.$$

Důkaz:

- pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \sigma_n$
- První implikace:
  - předpokládejme, že $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0$

- z definice limity číselné posloupnosti $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že

$$|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$$

  pro všechna $n \geqslant n_0$
- to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $x \in M$ platí také

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$$

- a tedy $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M

- Druhá implikace:
  - předpokládejme, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M
  - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$
  - pak existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $x \in M$ platí

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geqslant n_0$ platí

$$\sigma_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  - a tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

1.2.12 Příklad

Znovu se navraťme k příkladům 1.1.10 a 1.1.11. Pokusme se nyní užít předchozí věty k demonstraci faktu, že posloupnost funkcí

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty} := \left(1 + 4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

stejnoměrně konverguje na $\mathbf{R}$ k limitní funkci $f(x) = 1$. Jasné je, že

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|1 + 4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n} - 1\right| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|4\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{n}\right| = \frac{4}{n},$$

potažmo $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, a tedy $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

Naproti tomu pro posloupnost $\big(g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty} = \big(x^n\big)_{n=1}^{\infty}$ je

$$\sigma_n := \sup_{x\in\langle 0,1)} |x^n| = 1$$

a $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$. Daná posloupnost tedy na intervalu $\langle 0, 1)$ stejnoměrně nekonverguje. A podle poznámky 1.2.8 tedy nemůže konvergovat ani na $\langle 0, 1\rangle$. Tím je demonstrována užitečnost věty 1.2.11.

1.2.13 Příklad

Vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^2 + 2x + n^2}{x^2 + n^2}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Nejprve snadno vypočteme limitní funkci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + 2x + n^2}{x^2 + n^2} = 1.$$

Označme nyní

$$g_n(x) := f_n(x) - 1 = \frac{2x}{x^2 + n^2}.$$

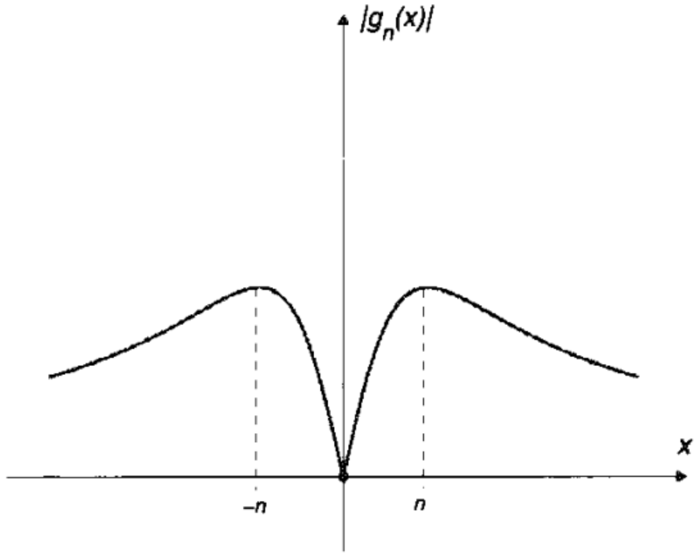
Jelikož chceme pro vyšetření stejnoměrné konvergence užít supremálního kritéria 1.2.11, bude třeba určit hodnotu suprema $\sigma_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |g_n(x)|$. K jeho zjištění užijeme znalost průběhu funkce $g_n(x)$. Z hodnoty první derivace

$$g_n'(x) = 2\frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$$

určíme stacionární body $x = \pm n$ podezřelé z lokálního extrému. Jelikož je funkce $g_n(x)$ spojitá všude na $\mathbf{R}$, $g_n(0) = 0$ a navíc

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to-\infty} g_n(x) = 0,$$

je zřejmé, že bod $x = n$ je bodem lokálního (a tedy globálního) maxima funkce $g_n(x)$ na $\mathbf{R}$. Podobně: bod $x = -n$ je bodem globálního minima funkce $g_n(x)$. Graf funkce $|g_n(x)|$ je vyobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 1.4
Graf funkce $x \mapsto \left|\frac{2x}{x^2+n^2}\right|$.

Odtud tedy

$$\sigma_n = g_n(n) = \frac{2n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n},$$

potažmo $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$. Proto tedy zadaná posloupnost konverguje na $\mathbf{R}$ ke své limitní funkci $f(x) = 1$ stejnoměrně.

1.2.14 Věta – *Bolzano-Cauchyova podmínka*

Posloupnost funkcí (1.1) je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzano-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m,n \geqslant n_0 \wedge x \in M \Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Důkaz:

- První implikace:
  - nechť $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na M k jisté funkci $f(x)$
  - pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m,n \in \mathbf{N}$ taková, že $m,n \geqslant n_0$, a pro všechna $x \in M$ platí

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \left|f_m(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  - a tedy

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leqslant \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f_m(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

- Druhá implikace:

- nechť posloupnost funkcí splňuje vztah (1.7)
- podle Bolzano-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti 1.1.8 posloupnost (1.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině M (označme ji $f(x)$)
- chceme dokázat $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na M
- zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (1.7) n_0 tak, aby pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platilo

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro libovolné pevně zvolené $n \geqslant n_0$ a pro m rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  platnou pro každé $x \in M$

- tím je důkaz zkompletován

1.3 Vlastnosti posloupností funkcí

V této sekci budeme demonstrovat, jak významná je stejnoměrná konvergence při zachovávání vlastností členů funkčních posloupností. Ukážeme například, že pro stejnoměrně konvergentní funkční posloupnosti bude možno libovolně zaměňovat pořadí vybrané matematické operace (limitování $\lim_{x \to c}$, derivování $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ či integrování $\int_a^b \mathrm{d}x$) a limitování $\lim_{n \to \infty}$.

1.3.1 Věta

Nechť posloupnost (1.1) funkcí spojitých na množině M stejnoměrně konverguje na M k funkci $f(x)$. Potom je funkce $f(x)$ na M spojitá.

Důkaz:

- abychom dokázali spojitost funkce $f(x)$ na M, musíme dokázat spojitost pro každé $c \in M$
- zvolme libovolné $\varepsilon > 0$
- ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ existuje n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbf{N})(n \geqslant n_0)\,(\forall x \in M): \qquad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.8}$$

- ze spojitosti funkce $f_{n_0}(x)$ v bodě c plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ existuje $U(c)$ takové, že

$$(\forall x \in U(c) \cap M): \qquad \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.9}$$

- zvolíme-li n_0 tak, aby platilo (1.8) a $U(c)$ tak, aby platilo (1.9), dostáváme celkem, že k číslu $\varepsilon > 0$ existuje $U(c)$ tak, že pro všechna $x \in U(c) \cap M$ platí

$$\left|f(x) - f(c)\right| \leqslant \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)\right| + \left|f_{n_0}(c) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- tím je důkaz dokončen

1.3.2 Věta

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbf{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c+\delta)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x \to c_+} f_n(x) = b_n.$$

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lim_{x\to c_+} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c_+} f_n(x) = \lim_{x\to c_+} \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{1.10}$$

Důkaz:

- První část (existence limit):
  - podle předpokladu konverguje posloupnost $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na intervalu $(c, c+\delta)$
  - tedy pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje podle věty 1.2.14 $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ a všechna $x \in (c, c+\delta)$ platí nerovnost
  $$\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.11}$$
  - dále využijeme druhého předpokladu, a sice existence vlastních limit funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ v bodě $x = c$ zprava
  - pro libovolně zvolená $m, n \geqslant n_0$ tudíž existují (z definice pravé spojitosti funkce) čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R}^+$ taková, že
  $$\begin{aligned} c < x < c+\delta_1 \;&\Rightarrow\; \big|f_m(x) - b_m\big| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ c < x < c+\delta_2 \;&\Rightarrow\; \big|f_n(x) - b_n\big| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \tag{1.12}$$
  neboť $\lim_{x\to c_+} f_n(x) = b_n$ a $\lim_{x\to c_+} f_m(x) = b_m$
  - chceme dokázat, že pro $m, n \geqslant n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$
  - zvolíme-li nyní x tak, že $c < x < c + \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, je (viz nerovnosti (1.11) a (1.12))
  $$\big|b_m - b_n\big| \leqslant \big|b_m - f_m(x)\big| + \big|f_m(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - b_n\big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
  - tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ je
  $$|b_m - b_n| < \varepsilon.$$
  a podle Bolzano-Cauchyovy podmínky 1.1.8 pro limity číselných posloupností tudíž existuje vlastní limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$
  - označme tuto limitu jako b. tj. $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

- Druhá část (rovnost limit):
  - zbývá dokázat, že $\lim_{x\to c_+} f(x) = b$
  - jelikož $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, existuje pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ krajní index $\ell_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoliv $n \geqslant \ell_0$ platí
  $$\big|b_n - b\big| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  - jelikož na intervalu $(c, c+\delta)$ platí $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro jakýkoli index $n \geqslant n_0$ a pro jakýkoli bod $x \in (c, c+\delta)$ platí
  $$\big|f(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  - položme $m_0 := \max\{\ell_0, n_0\}$

- pro každé $m \geqslant m_0$ existuje (díky existenci limity funkce $f_m(x)$ v bodě $x = c$ zprava) číslo $\delta_3 > 0$ tak, že pro každé $x \in (c, c + \delta_3)$ je
$$|f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$
- položíme-li $\Delta := \min\{\delta, \delta_3\}$, vidíme (jak vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti), že pro jakékoli $x \in (c, c + \Delta)$ platí
$$\big|f(x) - b\big| \leqslant \big|f(x) - f_m(x)\big| + \big|f_m(x) - b_m\big| + \big|b_m - b\big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
- skutečně tedy $\lim_{x \to c_+} f(x) = b$

1.3.3 Věta

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbf{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu
$$\lim_{x \to c_-} f_n(x) = b_n.$$
Pak existují vlastní limity $\lim_{n \to \infty} b_n$ a $\lim_{x \to c_-} f(x)$ a jsou si rovny, tj.
$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c_-} f_n(x) = \lim_{x \to c_-} \lim_{n \to \infty} f_n(x). \tag{1.13}$$

Důkaz:

- důkaz vyplývá z předešlé věty po dosazení $g_n(y) = f_n(-y)$
- konvergují-li totiž funkce $f_n(x)$ stejnoměrně na intervalu $(c - \delta, c)$, značí to, že funkce $g_n(y)$ konvergují stejnoměrně na $(d, d + \delta)$, kde $d = -c$
- dále
$$\lim_{x \to c_-} f_n(x) = \left| \begin{array}{c} y = -x \\ d = -c \end{array} \right| = \lim_{y \to d_+} g_n(y) = b_n$$
- pak podle (1.10) platí
$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c_-} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{y \to d_+} g_n(y) = \lim_{y \to d_+} \lim_{n \to \infty} g_n(y) = \lim_{x \to c_-} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
- to kompletuje důkaz

1.3.4 Důsledek

Nechť je pevně zvoleno $c \in \mathbf{R}$. Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu
$$\lim_{x \to c} f_n(x) = b_n.$$
Pak existují vlastní limity $\lim_{n \to \infty} b_n$ a $\lim_{x \to c} f(x)$ a jsou si rovny, tj.
$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c} f_n(x) = \lim_{x \to c} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

1.3.5 Poznámka

Tvrzení předešlých vět 1.3.2 a 1.3.3 lze zobecnit také na konvergenci k plus, resp. minus nekonečnu. To bude náplní následujících dvou vět.

1.3.6 Věta

Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $K > 0$ na intervalu (K, ∞) k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = b_n.$$

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- První část (existence limit):
  - podle předpokladu konverguje posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na intervalu (K, ∞)
  - tedy pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje podle věty 1.2.14 index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ a všechna $x \in (K, \infty)$ platí nerovnost
  $$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.14}$$
  - dále využijeme druhého předpokladu, a sice existence vlastních limit funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ pro x rostoucí nade všechny meze
  - pro libovolně zvolená $m, n \geqslant n_0$ totiž existují (z definice spojitosti funkcí $f_n(x)$ a $f_m(x)$ pro x jsoucí "poblíž" plus nekonečna) čísla $K_1, K_2 \in \mathbf{R}^+$ taková, že
  $$\begin{aligned} x < K_1 \;&\Rightarrow\; \left|f_m(x) - b_m\right| < \frac{\varepsilon}{3} \\ x < K_2 \;&\Rightarrow\; \left|f_n(x) - b_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \tag{1.15}$$
  neboť $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = b_n$ a $\lim_{x\to\infty} f_m(x) = b_m$
  - chceme dokázat, že pro $m, n \geqslant n_0$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$
  - zvolíme-li nyní x tak, že $x < \max\{K, K_1, K_2\}$, je (jak je patrno z nerovností (1.14) a (1.15))
  $$\left|b_m - b_n\right| \leqslant \left|b_m - f_m(x)\right| + \left|f_m(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - b_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
  - tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ je
  $$|b_m - b_n| < \varepsilon,$$
  a podle Bolzano-Cauchyovy podmínky 1.1.8 pro limity číselných posloupností tudíž existuje vlastní limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$
  - označme tuto limitu jako b, tj. $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

- Druhá část (rovnost limit):
  - zbývá dokázat, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$
  - jelikož $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, existuje pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ krajní index $\ell_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoliv $n \geqslant \ell_0$ platí
  $$\left|b_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  - jelikož na intervalu (K, ∞) platí $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro jakýkoli index $n \geqslant n_0$ a pro jakýkoli bod $x \in (K, \infty)$ platí
  $$\left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  - položme $m_0 := \max\{\ell_0, n_0\}$
  - pro každé $m \geqslant m_0$ existuje (díky existenci limity funkce $f_m(x)$ v plus nekonečnu) číslo $K_3 > 0$ tak, že pro každé $x \in (K_3, \infty)$ je
  $$|f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  - položíme-li $\widetilde{K} := \max\{K, K_3\}$, vidíme, že pro každé $x \in (\widetilde{K}, \infty)$ platí
  $$\left|f(x) - b\right| \leqslant \left|f(x) - f_m(x)\right| + \left|f_m(x) - b_m\right| + \left|b_m - b\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
  - skutečně tedy $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

1.3.7 Věta

Nechť posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje pro jisté $K < 0$ na intervalu $(-\infty, K)$ k funkci $f(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = b_n.$$

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- důkaz vyplývá z předešlé věty po dosazení $g_n(y) = f_n(-y)$
- konvergují-li funkce $f_n(x)$ stejnoměrně na $(-\infty, K)$, značí to, že funkce $g_n(y)$ konvergují stejnoměrně na (L, ∞), kde $L = -K > 0$
- dále $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \big|\ y = -x\ \big| = \lim_{y\to\infty} g_n(y) = b_n$
- pak podle předešlé věty platí

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{y\to\infty} g_n(y) = \lim_{y\to\infty}\lim_{n\to\infty} g_n(y) = \lim_{x\to-\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

- to kompletuje důkaz

1.3.8 Příklad

Rozhodněme, zda konverguje posloupnost funkcí

$$\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

zadaná na $\mathbf{R}$ ke své limitní funkci stejnoměrně. Limitou této triviální posloupnosti je nulová funkce (na celém $\mathbf{R}$) a tudíž není příliš složité zkoumat supremum

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{x}{n^2} - 0\right| = \sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{|x|}{n^2}$$

ze supremálního kritéria. Snadno zjistíme, že $\sigma_n = \infty$. Jelikož limitou posloupnosti $\left(\sigma_n\right)_{n=1}^{\infty}$ není nula, nekonverguje zadaná posloupnost ke své limitní funkci stejnoměrně. Budeme-li ovšem vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci stejné posloupnosti na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, situace se změní. Za daných předpokladů totiž

$$\sigma_n = \sup_{x\in\langle\alpha,\beta\rangle}\frac{|x|}{n^2} = \frac{\max\{|\alpha|, |\beta|\}}{n^2}.$$

Tehdy ale $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, a zadaná posloupnost proto konverguje na $\langle\alpha, \beta\rangle$ stejnoměrně. Posloupnost $\left(\frac{x}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ tedy konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu (dokonce i na každém otevřeném intervalu, který je omezený), ale na celém $\mathbf{R}$ stejnoměrně nekonverguje.

1.3.9 Věta

Nechť je dána posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť tato posloupnost stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle a, b\rangle$ k funkci $f(x)$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.16}$$

Důkaz:

- funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots$ jsou na $\langle a, b\rangle$ spojité a proto všechny integrály $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují
- podle věty 1.3.1 je však spojitá také funkce $f(x)$

- levá strana rovnosti (1.16) tedy rovněž existuje
- označíme-li

$$\gamma_n := \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

je naším úkolem prokázat, že posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k hodnotě $\gamma := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro všechna $n \geqslant n_0$ je splněna nerovnost

$$|\gamma_n - \gamma| = \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

- zvolme tedy $\varepsilon > 0$ libovolně
- z definice stejnoměrné konvergence 1.2.1 plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbf{N})(n \geqslant n_0)\,(\forall x \in \langle a, b\rangle): \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

- odtud a z vět o integrálu funkce jedné proměnné plyne

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in \langle a,b\rangle} \big|f_n(x) - f(x)\big| \cdot (b-a) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

což podle definice limity dokazuje platnost vztahu (1.16)

1.3.10 Poznámka

Obsah předešlé věty lze vyjádřit také jednoduchou větou: "Stejnoměrně konvergentní posloupnost spojitých funkcí lze na uzavřeném intervalu integrovat člen po členu," tedy

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.3.11 Věta

Nechť je dána posloupnost (1.1) funkcí diferencovatelných na otevřeném intervalu (a, b) taková, že pro alespoň jedno $c \in (a, b)$ číselná posloupnost $\big(f_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Nechť navíc posloupnost $\big(f_n'(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na (a, b). Potom také posloupnost (1.1) stejnoměrně konverguje na (a, b). Navíc, označíme-li její limitu $f(x)$, je tato diferencovatelná na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí rovnost

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Důkaz:

- Předpoklady věty:
  - zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně
  - jelikož posloupnost $\big(f_n'(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na (a, b), existuje podle Bolzano-Cauchyovy podmínky 1.2.14 zcela jistě $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro jakékoliv indexy $m, n \geqslant n_0$ a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

$$\big|f_m'(x) - f_n'(x)\big| < \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{1.17}$$

  - díky bodové konvergenci číselné posloupnosti $\big(f_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$ ale také existuje (podle 1.1.8) krajní index $\widetilde{n}_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro libovolné $m, n \geqslant \widetilde{n}_0$ platí

$$\big|f_m(c) - f_n(c)\big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.18}$$

- označme $\ell_0 := \max\{n_0, \widetilde{n}_0\}$
- pak jsou pro libovolné indexy $m, n \geqslant \ell_0$ splněny jak podmínka (1.17), tak také (1.18)

- První část důkazu:
  - zaveďme funkci $g(x)$ definičním předpisem $g(x) := f_m(x) - f_n(x)$
  - podle Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.12 existuje mezi bodem c a libovolným bodem $x \in (a,b)$ číslo ξ takové, že
$$g(x) - g(c) = g'(\xi)\,(x-c)$$
  - toto tvrzení platí dokonce i tehdy, je-li za x zvoleno samo c, tj. pro $x = c$
  - za předešlých předpokladů platí
$$f_m(x) - f_n(x) - f_m(c) + f_n(c) = (x-c)\left(f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\right)$$
  - odtud ale
$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| \leqslant \left|f_m(c) - f_n(c)\right| + |x-c| \cdot \left|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |x-c| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |b-a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
  - to ale neznačí nic jiného, než že posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na (a,b)

- Druhá část důkazu:
  - zbývá ještě dokázat, že v libovolném bodě $x_0 \in (a,b)$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a že její hodnota je rovna právě limitě $\lim_{n\to\infty} f'_n(x_0)$
  - zvolme tedy libovolně $x_0 \in (a,b)$ a také pevné $\delta > 0$ takové, že $a + \delta < x_0 < b - \delta$
  - položme
$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h}, \qquad \varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.19}$$
  - obě funkce jsou tedy definovány na intervalu $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$
  - snadno lze ukázat, že
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \varphi(h)$$
  - definujme ještě pomocnou funkci $\tau(h) := f_m(h) - f_n(h)$
  - z Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.12 vyplývá, že mezi body x_0 a $x_0 + h$ jistě existuje číslo ξ tak, že platí
$$\tau(x_0+h) - \tau(x_0) = h \cdot \tau'(\xi)$$
  - to jest
$$\frac{f_m(x_0+h) - f_m(x_0)}{h} - \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi),$$
    respektive
$$\varphi_m(h) - \varphi_n(h) = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)$$
  - z předpokladu (1.17) tudíž vyplývá nerovnost
$$\left|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)\right| \leqslant \left|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \widetilde{\varepsilon},$$
    což prokazuje, že funkční posloupnost $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na množině $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ k funkci $\varphi(x)$
  - ze vztahu (1.19) navíc triviálně vyplývá, že
$$\lim_{h\to 0_+} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0_-} \varphi_n(h) = f'_n(x_0)$$

– tím jsou naplněny předpoklady vět 1.3.2 a 1.3.3, a sice klademe-li v obou větách δ, $\varphi_n(h)$, $\varphi(h)$, $f_n'(x_0)$ a 0 za symboly δ, $f_n(x)$, $f(x)$, b_n a c

– z vět 1.3.2 a 1.3.3 pak tedy vyplývají rovnosti

$$\lim_{h\to 0_+} \varphi(h) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0), \qquad \lim_{h\to 0_-} \varphi(h) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$$

– vzhledem k definičnímu předpisu (1.19) funkce $\varphi(h)$ odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

1.3.12 Poznámka

Zde připomínáme znění Lagrangeovy věty o přírůstku pro funkci jedné proměnné, jež bývá vyslovena a dokázána prakticky v každém základním kurzu matematické analýzy.

Nechť je dána funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, jež je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) vlastní či nevlastní derivaci $f'(x)$. Potom v intervalu (a, b) existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ tak, že platí rovnost

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a).$$

1.3.13 Poznámka

Znění věty 1.3.11 lze vyjádřit také jednoduchou větou: "Posloupnost diferencovatelných funkcí, jež konverguje alespoň v jednom bodě, lze na otevřeném intervalu derivovat člen po členu, pokud je na něm posloupnost sestavená z derivací původních funkcí stejnoměrně konvergentní." Pak

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

1.3.14 Příklad

Pokusme se nyní vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{1}{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na intervalu $I = (0, \infty)$. Limitní funkcí je funkce $f(x) = 2\sqrt{x}$. Dále

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbf{R}^+} \left| \frac{1}{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)} - 2\sqrt{x} \right| = \sup_{x\in\mathbf{R}^+} \left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right).$$

Funkce $g_n(x) := \sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}$ je ale na celém $\mathbf{R}^+$ zjevně klesající, neboť

$$g_n'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\frac{1}{n}}}{\sqrt{x^2+\frac{x}{n}}} < 0,$$

a proto

$$\sigma_n = g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, konverguje vyšetřovaná posloupnost k funkci $f(x) = 2\sqrt{x}$ stejnoměrně.

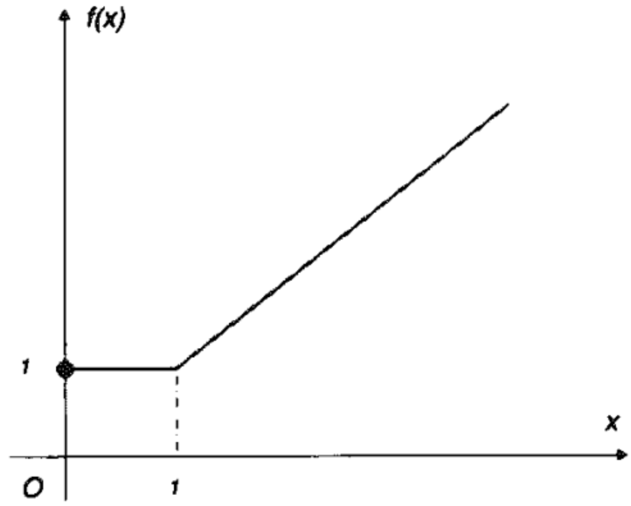
1.3.15 Příklad

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $A = \langle 0, \infty)$. Tentokrát má limitní funkce tvar

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & \dots \quad x \in \langle 0, 1\rangle \\ x & \dots \quad x > 1. \end{cases}$$



Obrázek 1.5
Graf limitní funkce $f(x)$.

Nyní vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Vidíme, že

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbf{R}_0^+} \left|\sqrt[n]{1+x^n} - f(x)\right| = \max\left\{\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} \left|\sqrt[n]{1+x^n} - 1\right|, \sup_{x>1}\left|\sqrt[n]{1+x^n} - x\right|\right\} =:$$

$$=: \max\left\{\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |g_n(x)|, \sup_{x>1} |h_n(x)|\right\} =: \max\{\alpha_n, \beta_n\}.$$

Nejprve budeme hledat extrém funkce $g_n(x)$ na množině $\langle 0, 1\rangle$, kde platí

$$g_n'(x) = x^{n-1}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} > 0.$$

Funkce je tudíž na zmíněné množině spojitá a rostoucí, proto

$$\alpha_n = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |g_n(x)| = g(1) = \sqrt[n]{2} - 1.$$

Dále vyšetříme extrém funkce $h_n(x)$ na množině $(1, \infty)$, kde platí

$$h_n'(x) = x^{n-1}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} - 1 < 0,$$

neboť pro $x > 1$ jsou splněny ekvivalentní nerovnosti

$$x^{n-1}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} - 1 < 0 \qquad \Leftarrow \qquad \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}} < 1 + \frac{1}{x^n}.$$

Funkce $h_n(x)$ je tudíž na množině $(1, \infty)$ spojitá a klesající, tedy

$$\beta_n = \sup_{x>1} |h_n(x)| = h(1) = \sqrt[n]{2} - 1.$$

Odsud

$$\sigma_n = \sqrt[n]{2} - 1.$$

A protože $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, konverguje zadaná posloupnost na množině A ke své limitní funkci $f(x)$ stejnoměrně.

1.3.16 Příklad

Vypočtěme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Posloupnost $\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná, monotónní a omezená, tudíž má limitu. Označme ji a. Jak je zřejmé, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{2(2n+1)!!} = \frac{a}{2}.$$

Matematickou indukcí snadno ukážeme, že platí nerovnost

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Pak tedy

$$b := \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leqslant a.$$

Navíc ještě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Odtud $b \cdot a = 0$, a proto $b = 0$. Matematická indukce také vede ke vztahu

$$\frac{1}{2}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}.$$

Odsud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{2(2n+1)!!} = \frac{a}{2} \leqslant b = 0.$$

Uzavíráme tedy, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0.$$

1.3.17 Příklad

Nechť $b \in (0,1)$ je pevně zvolený koeficient. Vypočtěme bodovou limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!}.$$

Triviálně platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!}\right)}.$$

Chceme tedy ukázat, že

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!}\right) = -\infty.$$

Snadno ale nahlédneme, že

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{b+i-1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(\frac{b+i-1}{i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1-b}{i}\right) = \left| \begin{array}{c} x \geqslant 0 \\ \ln(1-x) \leqslant -x \end{array} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b-1}{i} = (b-1)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}.$$

Jelikož ale číselná řada $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverguje k plus nekonečnu, vyplývá odtud, že $\ell = -\infty$, neboť $1 - b < 0$ díky skutečnosti, že $b \in (0,1)$. Pak snadno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!} = 0.$$

1.4 Cvičení

Cvičení 1.1
Nalezněte limitní funkci posloupnosti

$$\left((1-\frac{|x|}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Cvičení 1.2
Nalezněte limitní funkci posloupnosti

$$\left((\frac{n^2+5nx+2}{n^2})^n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Cvičení 1.3
Dokažte tvrzení věty 1.2.7.

Cvičení 1.4
Dokažte tvrzení věty 1.2.9.

Cvičení 1.5
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x)=\frac{n^3}{x^{n+1}},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.6
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n!},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.7
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},$$

a určete její limitní funkci. Na základě znalosti limitní funkce rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané posloupnosti funkcí.

Cvičení 1.8
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x)=\frac{\ln(nx)}{n} \qquad (x>0),$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.9
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x)=\frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}},$$

a určete její limitní funkci. Na základě znalosti limitní funkce rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané posloupnosti funkcí.

Cvičení 1.10
Nalezněte obor konvergence posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \sqrt[n^2]{n^2 x^{n(n+1)}},$$

a určete její limitní funkci.

Cvičení 1.11
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\sqrt[n]{1 + \mathrm{e}^{-nx}}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině všech nezáporných reálných čísel.

Cvičení 1.12
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.13
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n},$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $\langle -1, 1\rangle$, resp. b) $\langle -2, 2\rangle$.

Cvičení 1.14
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0, 1\rangle$.

Cvičení 1.15
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0, 1\rangle$.

Cvičení 1.16
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x},$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $\langle 0, 2\rangle$, b) $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.17
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.18
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right),$$

na množinách a) $\mathbf{R}^+$, b) $(1, \infty)$.

Cvičení 1.19
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.20
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(nx)$, na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.21
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right),$$

konverguje stejnoměrně na množině a) $(0,5)$, resp. b) $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.22
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0,\infty)$.

Cvičení 1.23
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\sqrt[n]{x^{-n}+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $(0,\infty)$.

Cvičení 1.24
Ukažte, že posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n),$$

konverguje na $\mathbf{R}$ stejnoměrně, ale

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Cvičení 1.25
Ukažte, že posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = nx\,\mathrm{e}^{-nx^2},$$

konverguje na intervalu $\langle 0,1\rangle$, avšak

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 1.26
Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 1.27
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2}{(x+n)(x+n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

Cvičení 1.28
Rozhodněte, zda je splněna rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{12}\frac{n\,\ln(n)\,x^2}{1+n^3x^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{12}\lim_{n\to\infty}\frac{n\,\ln(n)\,x^2}{1+n^3x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 1.29
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2x^2}{n^2+x^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině a) $\mathbf{R}$, resp. b) $M=\langle 0, c\rangle$, kde $c>0$.

Cvičení 1.30
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 1.31
Rozhodněte, zda funkční posloupnost

$$\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{x^n}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Cvičení 1.32
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2+3x^2}{n^3+x^3}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

Cvičení 1.33
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(2nx^2\mathrm{e}^{-nx}+3x\mathrm{e}^{-nx}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

Cvičení 1.34
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, 1)$.

Cvičení 1.35
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n^2}{n^2 + 5nx + 2} \right)^n$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 1.36
Rozhodněte, zda je pro posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\ln\left(x^4 + 4n^2x^2 + 4n^4\right)}{\ln^2(n)},$$

splněna rovnost

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Cvičení 1.37
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left((3\frac{x}{n^2} + 2\frac{x^2}{n^3})\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

Cvičení 1.38
Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^3 \frac{1 + 9nx - 4n^2x^2 + 4n^3x^3}{2n - n^2x + n^3x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 1.39
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{1}{n}(\frac{x}{n} - 1)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} + 2 \right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\langle 0, \infty)$.

Kapitola 2

Řady funkcí

Zavedeme-li do předpisu číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ proměnnou veličinu, podobně jako jsme to učinili pro posloupnosti v první kapitole těchto skript, obdržíme tzv. řadu funkcí. Budeme-li zkoumat některé vlastnosti funkčních řad, zjistíme, že samotná bodová konvergence je pro garanci jistých vlastností příliš slabá, a že bude tudíž nutno (v analogii k funkčním posloupnostem) zavést silnější pojem konvergence, tj. konvergenci stejnoměrnou.

2.1 Bodová konvergence řad funkcí

V prvním oddíle druhé kapitoly budeme definovat základní pojmy pro teorii funkčních řad a vyslovíme některá kritéria pro jejich bodovou konvergenci.

2.1.1 Úmluva

V celé kapitole jsou symboly m, n, n_0 vyhrazeny pro přirozená čísla.

2.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom nekonečný součet

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

nazýváme *řadou funkcí* na M a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{2.1}$$

2.1.3 Definice

Nechť je dána funkční řada (2.1) definovaná na množině M. Funkci

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

pro $n \in \mathbf{N}$ a $x \in M$ budeme nazývat $n-$*tým částečným součtem* řady (2.1) a posloupnost $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

2.1.4 Definice

Nechť je dána funkční řada (2.1) definovaná ma množině M. Nechť $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (2.1) *konverguje v bodě* $c \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\left(s_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (2.1) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N. Vlastní limitu

$$s(x) := \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (2.1) a zapisujeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{2.2}$$

Definiční obor $\mathrm{Dom}(s)$, tj. množinu všech $c \in M$, pro něž posloupnost $\big(s_n(c)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (2.1) a značit symbolem $\mathcal{O}$.

2.1.5 Poznámka

Obor konvergence řady (2.1) je tedy množina všech $c \in M$, pro něž číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje. Připomínáme, že součet $s(x)$ konvergentní funkční řady je na oboru konvergence $\mathcal{O}$ (díky poznámce 1.1.3) reálnou funkcí reálné proměnné. Kromě případu konvergentních řad rozeznáváme také řady divergující k plus nebo minus nekonečnu, popř. řady oscilující (tj. takové, jejichž součty neexistují ani jako vlastní ani jako nevlastní).

2.1.6 Poznámka

Díky symbolickému zápisu (2.2) lze na symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nahlížet dvojím způsobem: jednak jako na řadu funkcí a jednak jako na její součet. Z kontextu bude ale vždy zřejmé, o který význam se jedná.

2.1.7 Příklad

Uvažme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n, \tag{2.3}$$

kde $a \in \mathbf{R}$ je její jediný parametr. Takovou řadu bývá zvykem nazývat *geometrickou* řadou s *kvocientem* x. Pro její $n-$tý částečný součet $s_n(x) = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-1}$ platí, jak se lze lehce přesvědčit, jednoduchá rovnice

$$\frac{s_n(x) - a}{x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-2} = s_{n-1}(x) = s_n(x) - ax^{n-1},$$

odkud pak vyplývá vztah

$$s_n(x) = a\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

platný pro případ, kdy kvocient x není jednotkový. Pokud $x = 1$, pak lze ale triviálně nahlédnout, že $s_n(x)$ je konstantní funkcí, a to $s_n(x) = na$. Jelikož součet řady je definován jako limita posloupnosti částečných součtů, je součtem řady (2.3) funkce

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}.$$

To ovšem pouze pro případ, kdy $|x| < 1$. Tedy součtem geometrické řady s kvocientem z intervalu $(-1, 1)$ je podíl prvního jejího členu a rozdílu $1 - x$. Pro $|x| \geqslant 1$ řada diverguje, kromě triviálního případu, kdy $a = 0$.

2.1.8 Věta – *Bolzano-Cauchyova podmínka*

Řada funkcí (2.1) zadaná na množině M konverguje v bodě $c \in M$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzano-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m > n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \ldots + f_m(c)\big| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $n-$tý částečný součet řady (2.1)
- z předpokladů dokazované věty a z definice bodové konvergence víme, že posloupnost $\big(s_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bodě $c \in M$

- pak jsou ale naplněny předpoklady věty 1.1.8, tudíž výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m, n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|s_m(c) - s_n(c)\big| < \varepsilon$$

  je ekvivalentní bodové konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$

- jelikož ale pro každá $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m > n \geqslant n_0$ platí

$$s_m(c) - s_n(c) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(c) = f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \ldots + f_m(c),$$

  vyplývá odtud, že dokazovaný výrok je pravdivý (jako ekvivalence)

- povšimněte si, že tvrzení platí také pro případ, kdy $m = n + 1$

- tehdy výraz $f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \ldots + f_m(c)$ obsahuje ovšem pouze jediný sčítanec, a sice $f_{n+1}(c)$

2.1.9 Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině N součet $t(x)$. Nechť $M \cap N \neq \emptyset$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\big(f_n(x) + g_n(x)\big)$ konverguje na $M \cap N$ a jejím součtem na $M \cap N$ je funkce $s(x) + t(x)$.

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

- označíme-li $r_n(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\big(f_n(x) + g_n(x)\big)$, platí zcela triviální rovnost

$$r_n(x) = s_n(x) + f_n(x)$$

- jelikož bodová konvergence řad funkcí je dědičná vlastnost (viz cvičení 2.1), konvergují obě řady na průniku $M \cap N$

- z předpokladů dokazované věty vyplývá, že $s_n(x) \to s(x)$ na $M \cap N$ a podobně $t_n(x) \to t(x)$ na $M \cap N$

- tudíž pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ a jakékoliv $c \in M \cap N$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geqslant n_0$ platí

$$\big|s_n(x) - s(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro ono zmíněné $\varepsilon > 0$ existuje ale také $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $m \geqslant m_0$ platí

$$\big|t_m(x) - t(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položme $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$

- pak je pro libovolné $\ell \geqslant \ell_0$ splněna nerovnost

$$\big|r_\ell(x) - \big(s(x) + t(x)\big)\big| \leqslant \big|s_\ell(x) - s(x)\big| + \big|t_\ell(x) - t(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

  což implikuje jednak fakt, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\big(f_n(x) + g_n(x)\big)$ konverguje v každém bodě $c \in M \cap N$ (tedy bodově na $M \cap N$) a jednak skutečnost, že příslušným součtem je právě funkce $r(x) = s(x) + t(x)$, kde $\mathrm{Dom}(r) = M \cap N$

- tím je důkaz proveden

2.1.10 Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ konverguje na M také řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot f_n(x)$ a jejím součtem na množině M je funkce $c \cdot s(x)$.

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 2.2)

2.1.11 Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní funkční řada mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Nechť je dále dána funkce $g(x) : M \mapsto \mathbf{R}$, jež je omezená na M. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)\, f_n(x)$ konverguje na M a jejím součtem a množině M je funkce $g(x) \cdot s(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- z předpokladu omezenosti funkce $g(x)$ plyne, že existuje $\mathrm{K} > 0$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí nerovnost $\left|g(x)\right| < \mathrm{K}$
- zvolme $c \in M$ libovolně a označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- z předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, je patrno, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \geqslant n_0$ platí
$$\left|s_n(c) - s(c)\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$$
- označme $t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g(x)\, f_k(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)\, f_n(x)$
- zjevně platí $t_n(x) = g(x)\, s_n(x)$, odkud pak
$$\left|t_n(c) - g(c) \cdot s(c)\right| = \left|g(c) \cdot s_n(c) - g(c) \cdot s(c)\right| = \left|g(c)\right| \cdot \left|s_n(c) - s(c)\right| < \mathrm{K}\, \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}} = \varepsilon$$
- to znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)\, f_n(x)$ konverguje v bodě $c \in M$ k číslu $g(c) \cdot s(c)$
- a protože bylo c vybráno libovolně, je nyní prokázána platnost dokazovaného tvrzení

2.1.12 Věta

Nechť $k \in \mathbf{N}$. Potom funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ buďto obě konvergují nebo obě divergují k $+\infty$ nebo obě divergují k $-\infty$ nebo obě oscilují. Označíme-li $s(x)$ součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t(x)$ součet řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$, pak platí

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) + t(x),$$

za předpokladu, že obě řady konvergují.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $s_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- řadu $f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \ldots$ lze jednoduše přepsat do tvaru
$$0 + 0 + \ldots + 0 + f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \ldots$$
- označme $t_n(x)$ $n-$tý částečný součet této řady
- pak pro $n > k$ jistě platí rovnost $t_n(x) = f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + f_{k+3}(x) + \ldots + f_n(x)$, potažmo
$$s_n(x) = \big(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)\big) + t_n(x)$$
- po limitním přechodu $n \to \infty$ pak snadno získáváme všechna dokazovaná tvrzení

2.1.13 Poznámka

Zaměníme-li ve funkční řadě konečně mnoho jejich členů (funkcí), chování řady se tedy podle předešlé věty nemění.

2.1.14 Věta

Nechť je na množině M zadána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, jejímž součtem na M je funkce $s(x)$. Nechť je dále na M zadána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, mající na M součet $t(x)$. Nechť pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí

$$f_n(x) \leqslant g_n(x).$$

Pak pro všechna $x \in M$ platí nerovnost

$$s(x) \leqslant t(x). \tag{2.5}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$
- z předpokladů věty vyplývá, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí $s_n(x) \leqslant t_n(x)$
- po limitním přechodu $n \to \infty$ pak snadno získáváme tvrzení tvaru (2.5)

2.1.15 Věta – *nutná podmínka bodové konvergence*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentní řada zadaná na množině M. Pak funkční posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M k nulové funkci.

<u>*Důkaz:*</u>

- položme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ a $s_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$
- z předpokladů věty víme, že limita $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ existuje a navíc

  $$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x),$$

  kde $s(x)$ je součet uvažované řady
- jelikož ale $f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ pro každé $x \in M$, vyplývá z limitního přechodu rovnost

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x) - s(x) = 0$$
- to dokazuje vyslovené tvrzení

2.1.16 Poznámka

Nutnou podmínku bodové konvergence funkčních řad lze zapsat úspornou implikací (jednostrannou) tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \to 0.$$

Nutnou podmínku je možno s výhodou použít zejména při vyvracení konvergence funkčních řad. Na potvrzování konvergence řad však věta 2.1.15 bohužel nestačí.

2.1.17 Definice

Nechť je definována funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na M. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je *řadou s nezápornými členy*, jestliže pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí nerovnost

$$f_n(x) \geqslant 0.$$

2.1.18 Věta

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť pro jakékoliv $c \in M$ je číselná posloupnost jejích částečných součtů shora omezená. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní na M.

<u>*Důkaz:*</u>

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 1.1.13

2.1.19 Věta

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbf{N}$ tak, že je pro každý index $n \geqslant k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost

$$f_n(x) \leqslant g_n(x).$$

Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergentní, je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 2.3)

2.1.20 Důsledek

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbf{N}$ tak, že je pro každý index $n \geqslant k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost

$$f_n(x) \leqslant g_n(x).$$

Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergentní, je divergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

2.1.21 Věta

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbf{N}$ tak, že je pro každý index $n \geqslant k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leqslant \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}. \tag{2.6}$$

Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konvergentní, je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- z podmínky (2.6) mimo jiné vyplývá, že žádná z funkcí $f_n(x)$ ani $g_n(x)$ pro $n \geqslant k$ nenabývá na M nulové hodnoty
- z nerovnosti (2.6) vyplývá: pro $n \geqslant k$ a $x \in M$ platí

$$\frac{f_n(x)}{f_k(x)} = \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} \cdot \frac{f_{n-1}(x)}{f_{n-2}(x)} \cdots \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \leqslant \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} \cdot \frac{g_{n-1}(x)}{g_{n-2}(x)} \cdots \frac{g_{k+1}(x)}{g_k(x)} = \frac{g_n(x)}{g_k(x)}$$

- to značí, že pro $n \geqslant k$ platí

$$f_n(x) \leqslant \frac{f_k(x)}{g_k(x)}\, g_n(x)$$

- označme

$$\gamma(x) = \frac{f_k(x)}{g_k(x)}$$

- jedná se o funkci nezávislou na indexu n (neboť k je pevné), navíc je $g(x)$ omezená
- konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, pak podle věty 2.1.11 konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x) \cdot g_n(x)$
- jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x) \cdot g_n(x)$ je na M konvergentní funkční řadou nezáporných členů a navíc je majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, plyne z věty 2.1.19, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovněž konverguje

2.1.22 Důsledek

Nechť jsou na množině M zadány řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť existuje index $k \in \mathbf{N}$ tak, že je pro každý index $n \geqslant k$ a každé $x \in M$ splněna nerovnost (2.6). Pak je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergentní, je divergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

2.1.23 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ definované na množině M. Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $x \in M$ platí

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant g_n(x).$$

Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2.1.24 Věta – *srovnávací kritérium*

Nechť je funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ na množině M. Pak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ na M, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ na množině M rovněž konvergují.

Důkaz:

- z definice majorantní řady mimo jiné vyplývá, že žádná z funkcí $g_n(x)$ pro $n \geqslant k$ nenabývá na M záporné hodnoty
- z předpokladů věty a z Bolzano-Cauchyovy podmínky vyplývá, že pro jakékoliv $c \in M$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $m > n \geqslant n_0$ platí

$$g_{n+1}(c) + g_{n+2}(c) + g_{n+3}(c) + \ldots + g_m(c) < \varepsilon$$

- odtud ale

$$\left|f_{n+1}(c) + f_{n+2}(c) + f_{n+3}(c) + \ldots + f_m(c)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(c)\right| + \left|f_{n+2}(c)\right| + \left|f_{n+3}(c)\right| + \ldots + \left|f_m(c)\right| \leqslant$$

$$\leqslant g_{n+1}(c) + g_{n+2}(c) + g_{n+3}(c) + \ldots + g_m(c) < \varepsilon$$

- podle Bolzano-Cauchyovy podmínky tedy obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ konvergují v bodě c, tudíž všude v M

2.1.25 Důsledek

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ na množině M, pak také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M konverguje.

2.1.26 Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje *absolutně* na M, pokud na M konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje *relativně* na M, pokud na M konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ale $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ je na M divergentní.

2.1.27 Věta – *d'Alembertovo podílové kritérium*

Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na množině M. Nechť pro každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí $f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí nerovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| < 1,$$

pak $c \in \mathcal{O}$. Je-li naopak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| > 1,$$

pak $c \notin \mathcal{O}$.

Důkaz:

- vezměme libovolné $c \in M$

- nechť tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| = \ell < 1$$

- zvolme s takové, že $\ell < s < 1$
- pak jistě existuje $m_0 \geqslant n_0$ takové, že pro všechna $n > m_0$ platí

$$\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| \leqslant s = \frac{s^{n+1}}{s^n}$$

- jelikož $s < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ konvergentní
- podle věty 2.1.21 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, tudíž $c \in \mathcal{O}$
- nechť naopak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| = \ell > 1$$

- tentokrát zvolme s takové, že $\ell > s > 1$
- pak jistě existuje $m_0 \geqslant n_0$ takové, že pro všechna $n > m_0$ platí

$$\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| \geqslant s > 1$$

- není tedy jistě splněna nutná podmínka bodové konvergence
- proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ divergentní, tudíž $c \notin \mathcal{O}$

2.1.28 Věta – *Cauchyovo odmocninové kritérium*

Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zadaná na množině M. Pak všechna $c \in M$, pro něž platí nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} < 1,$$

patří do oboru konvergence $\mathcal{O}$ zadané řady. Každé $c \in M$, pro které

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} > 1,$$

do oboru konvergence nepatří.

<u>Důkaz:</u>

- vezměme libovolné $c \in M$
- nechť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} = \ell < 1$$

- lze tedy volit s takové, že $\ell < s < 1$
- z definice limity existuje jistě $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro každé $n \geqslant n_0$ platí $\sqrt[n]{|f_n(c)|} \leqslant s$, tj. $|f_n(c)| \leqslant s^n$
- jelikož je ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ jistě konvergentní (neboť $|s| < 1$), je podle srovnávacího kritéria konvergentní jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- je-li naopak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} > 1,$$

  pak existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro každé $n \geqslant n_0$ platí $\sqrt[n]{|f_n(c)|} \geqslant 1$, což značí, že $|f_n(c)| \geqslant 1$
- tudíž $\lim_{n\to\infty} f_n(c) > 0$, což odporuje nutné podmínce bodové konvergence 2.1.15
- proto v tomto druhém případě platí, že $c \notin \mathcal{O}$

2.1.29 Věta – *integrální kritérium*

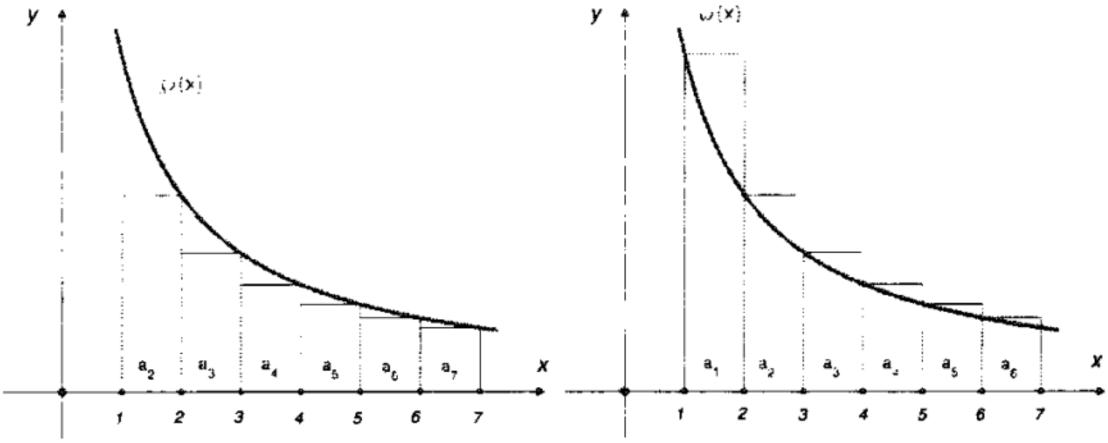
Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť $c \in M$. Nechť je posloupnost $\left(f_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí. Nechť dále existuje spojitá nerostoucí funkce $\wp(x) : \langle 1, \infty) \mapsto \mathbf{R}$ tak, že $\wp(n) = f_n(c)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Pak $c \in \mathcal{O}$ právě tehdy, když existuje integrál $\int_1^{\infty} \wp(x)\,\mathrm{d}x$ a je vlastní.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $a_n := f_n(c)$
- z předpokladů věty jasně vyplývá (viz také obrázek), že pro každé $n \geqslant 2$ platí sada nerovností

$$s_n(c) - a_1 \leqslant \int_1^n \wp(x)\,\mathrm{d}x \leqslant s_{n-1}(c). \tag{2.7}$$

  kde $s_n(x)$ je $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$



Obrázek 2.1
K důkazu integrálního kritéria.

- funkce $f(x)$ je, jak vyplývá z předpokladů, na $\langle 1, \infty)$ spojitá, tudíž integrál $\int_1^n \wp(x)\,\mathrm{d}x$ jistě existuje pro všechna $n \in \mathbf{N}$
- z levé části nerovnosti (2.7) vyplývá, že existuje-li vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \wp(x)\,\mathrm{d}x =: \gamma \in \mathbf{R},$$

  pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ je $s_n(c) \leqslant a_1 + \gamma$
- posloupnost $\left(f_n(c)\right)_{n=1}^{\infty}$ je tudíž shora omezená a z předpokladů také nezáporná
- to podle věty 2.1.18 značí, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, tj. c patří do jejího oboru konvergence $\mathcal{O}$
- z pravé části nerovnosti (2.7) vyplývá, že je-li integrál $\int_1^{\infty} \wp(x)\,\mathrm{d}x$ divergentní, tzn.

$$\int_1^{\infty} \wp(x)\,\mathrm{d}x = \infty,$$

  bude také $\lim_{n\to\infty} s_n(c) = \infty$, což implikuje fakt, že c nepatří do oboru konvergence $\mathcal{O}$ funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

2.1.30 Příklad

Hledejme nyní obor konvergence funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$. Aby vůbec řada mohla konvergovat v bodě $x \in \mathbf{R}$, musí být splněna nutná podmínka, tj. musí platit, že $\lim_{n\to\infty} n^x = 0$. Jak je ale patrné, pro $x \geqslant 0$ platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n^x = \begin{cases} \infty & \dots \quad x > 0 \\ 1 & \dots \quad x = 0, \end{cases}$$

a proto má smysl hledat body, v nichž řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ bodově konverguje, pouze mezi zápornými x. Za těchto okolností, tj. pro $x \in (-\infty, 0)$, je funkce $\wp(t) = t^x$ na intervalu $\langle 1, \infty)$ spojitá, klesající a platí pro ni, že $f(n) = n^x$. Tím jsou naplněny předpoklady věty 2.1.29. Uvažme nejprve $x \in (-1, 0)$. Pro tato x zjevně platí

$$\int_1^{\infty} t^x \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_1^{\infty} = \infty.$$

Je-li $x = -1$, pak

$$\int_1^{\infty} t^{-1} \, \mathrm{d}t = \left[\ln(t)\right]_1^{\infty} = \infty.$$

A nakonec pro $x < -1$ platí

$$\int_1^{\infty} t^x \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{x+1} \in \mathbf{R}.$$

Uzavíráme tedy, že oborem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ je množina

$$\mathcal{O} = (-\infty, -1).$$

2.1.31 Věta – *Raabeovo kritérium*

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť pro každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí $f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1\right) > 1, \tag{2.8}$$

pak $c \in \mathcal{O}$. Je-li naopak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1\right) < 1, \tag{2.9}$$

pak $c \notin \mathcal{O}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- vezměme libovolné $c \in M$
- nechť
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1\right) > 1$$
- pak existuje $\ell > 1$ tak, že od jistého indexu je splněna nerovnost
$$\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \geqslant 1 + \frac{\ell}{n}$$
- jistě lze volit s takové, že $1 < s < \ell$
- položme $b_n := n^{-s}$
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ je zjevně konvergentní (podle příkladu 2.1.30)
- pro názornost nyní zaveďme funkci
$$h(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^s$$
- pro její první derivaci snadno stanovíme rovnost
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{n}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{s-1}$$
- podle Lagrangeovy věty 1.3.12 o přírůstku existuje číslo $\gamma \in (0, t)$ tak, že
$$h(t) - h(0) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(\gamma) \cdot t$$

- zde nabádáme čtenáře, aby ověřil splnění všech předpokladů věty 1.3.12
- odtud tedy
$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^s - 1 = \frac{s}{n}\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^{s-1}\cdot t$$
- pro $t = 1$ takto dostáváme
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n}\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^{s-1},$$
  kde $\gamma \in (0,1)$
- z tohoto pomocného výpočtu vyplývá, že
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n}\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^{s-1} < 1 + \frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-1} \tag{2.10}$$
- protože
$$\lim_{n\to\infty} s\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-1} = s < \ell,$$
  existuje jistě index $m_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro všechny indexy $n \geqslant m_0$ je
$$s\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-1} < \ell$$
- pak tedy z rovnosti (2.10) vyplývá, že pro $n \geqslant m_0$ platí
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{\ell}{n} \leqslant \frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}$$
- odtud
$$\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 2.1.21 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c konverguje, čili $c \in \mathcal{O}$
- dokážeme nyní druhou část tvrzení
- nechť tedy platí
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} - 1\right) < 1$$
- pak existuje $\ell < 1$ tak, že od jistého indexu je splněna nerovnost
$$\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \leqslant 1 + \frac{\ell}{n}$$
- položme $b_n := n^{-1}$
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zjevně diverguje (podle příkladu 2.1.30)
- jistě existuje index $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geqslant m_0$ platí
$$\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)} \leqslant 1 + \frac{\ell}{n} < \frac{n+1}{n} = \frac{b_n}{b_{n+1}}$$
- odtud
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}$$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 2.1.21 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c diverguje, čili $c \notin \mathcal{O}$
- a to také završuje prováděný důkaz

2.1.32 Poznámka

Vztahy (2.8) a (2.9) jsou ekvivalentní vztahům

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right) > 1, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right) < 1.$$

2.1.33 Věta – *Leibnizovo kritérium*

Nechť je na množině M zadána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Nechť $c \in M$. Nechť jsou splněny následující vlastnosti:

1. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí rovnost $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$.
2. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí nerovnost $|f_{n+1}(c)| \leqq |f_n(c)|$.
3. Existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ a pro její hodnotu platí, že $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = 0$.

Potom číslo c patří do oboru konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- předpokládejme, že $f_1(c) > 0$
- v případě, že by $f_1(c) < 0$, by byl důkaz naprosto analogický
- nechť $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- z ní vyberme podposloupnost $\left(s_{2k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ sudých členů
- pro tu zjevně platí, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ je

  $$s_{2k+2}(c) = s_{2k}(c) + f_{2k+1}(c) + f_{2k+2}(c) \geqslant s_{2k}(c),$$

  neboť díky předpokladům je součet $f_{2k+1}(c) + f_{2k+2}(c)$ zcela jistě nezáporný
- číselná podposloupnost $\left(s_{2k}(c)\right)_{k=1}^{\infty}$ je tudíž neklesající
- dále ale také platí

  $$s_{2k}(c) = f_1(c) + \left(f_2(c) + f_3(c)\right) + \left(f_4(c) + f_5(c)\right) + \ldots + \left(f_{2k-2}(c) + f_{2k-1}(c)\right) + f_{2k}(c) < f_1(c),$$

  neboť všechny součty $f_{2k-2}(c) + f_{2k-1}(c)$ jsou z předpokladů věty nekladné a navíc $f_{2k}(c) < 0$
- z nerovnosti $s_{2k}(c) < f_1(c)$ ale vyplývá, že podposloupnost $\left(s_{2k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ je shora omezená číslem $f_1(c)$
- dokázáné vlastnosti omezenosti a monotonie zjevně implikují fakt, že podposloupnost $\left(s_{2k}(c)\right)_{k=1}^{\infty}$ má konečnou limitu; označme ji

  $$s := \lim_{k\to\infty} s_{2k}(c)$$
- uvažujme nyní podposloupnost $\left(s_{2k+1}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ lichých členů
- pro ni v bodě $c \in M$ platí rovnost $s_{2k+1}(c) = s_{2k}(c) + f_{2k+1}(c)$
- jelikož ale $\lim_{k\to\infty} s_{2k}(x) = s$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, je také $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}(c) = s$
- z toho, že $s_{2k}(c) \to s$ a $s_{2k+1}(c) \to s$, již triviálně vyplývá fakt, že

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) = \lim_{n\to\infty} s_n(c) = s$$
- tedy $c \in \mathcal{O}$

2.1.34 Příklad

Hledejme nyní obor konvergence funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^x$. Aby vůbec řada mohla konvergovat v bodě $x \in \mathbf{R}$, musí být splněna nutná podmínka, tj. musí platit, že

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^x = 0.$$

Jak je ale patrné, pro $x \geqslant 0$ tato podmínka splněna není, neboť $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^x$ ani neexistuje. Proto má smysl hledat body, v nichž řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^x$ bodově konverguje, pouze mezi zápornými x. Zcela zjevně platí, že za daných okolností, střídá řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^x$ znaménka. Dále platí $n^x \leqslant (n+1)^x$ a pro $x < 0$ také $\lim_{n\to\infty} n^x = 0$. Podle Leibnizova kritéria 2.1.33 je oborem konvergence zkoumané řady množina

$$\mathcal{O} = (-\infty, 0).$$

2.1.35 Věta – *zobecněné Raabeovo kritérium*

Nechť je na množině M zadána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Nechť $c \in M$. Nechť jsou splněny následující vlastnosti:

1. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí rovnost $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$.
2. Existuje vlastní limita
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}\right| - 1\right) = q.$$

Pak je-li $q > 1$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c absolutně. Je-li $q \in (0,1)$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c relativně. Pokud $q < 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ v bodě c diverguje.

Důkaz:

- pro případ, kdy $q > 1$, plyne dokazované tvrzení z Raabeova kritéria
- nechť tedy $q \in (0,1)$
- pak jistě existuje číslo $\ell \in (0,q)$ tak, že od jistého indexu je splněna nerovnost
$$n\left(\left|\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}\right| - 1\right) > \ell$$
- to jest
$$\left|\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}\right| > 1 + \frac{\ell}{n} > 1 \tag{2.11}$$
- proto platí také nerovnost $|f_{n+1}(c)| < |f_n(c)|$, která představuje naplnění druhého předpokladu Leibnizova kritéria
- odsud mimo jiné také vyplývá, že posloupnost $(|f_n(c)|)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, a protože je zcela bez pochyby také omezená zdola, existuje jistě vlastní limita
$$\lim_{n\to\infty}|f_n(c)| = \gamma \in \mathbf{R}_0^+$$
- dokážeme nakonec, že z daných předpokladů vyplývá i třetí předpoklad Leibnizova kritéria
- z nerovnosti (2.11) vyplývá, že od jistého indexu n_0 platí
$$\left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| < \frac{n}{n+\ell}$$
- bez pochyby tedy platí rovnost
$$\left|\frac{f_n(c)}{f_1(c)}\right| = \left|\frac{f_n(c)}{f_{n-1}(c)}\right| \cdot \left|\frac{f_{n-1}(c)}{f_{n-2}(c)}\right| \cdot \left|\frac{f_{n-2}(c)}{f_{n-3}(c)}\right| \cdots \left|\frac{f_3(c)}{f_2(c)}\right| \cdot \left|\frac{f_2(c)}{f_1(c)}\right|$$

- odtud

$$\left|f_{n+1}(c)\right| < \frac{n!\,\left|f_1(c)\right|}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} \tag{2.12}$$

- chceme nyní dokázat, že limitou výrazu na pravé straně je nula
- vyjdeme z triviální rovnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)}\right)}.$$

- nyní postačí dokázat, že

$$\hbar := \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)}\right) = -\infty$$

- snadno ale nahlédneme, že

$$\hbar = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{\ell+i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(\frac{i}{\ell+i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\ell}{\ell+i}\right) = \left|\begin{array}{c} x\geqslant 0 \\ \ln(1-x)\leqslant -x \end{array}\right| \leqslant -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ell}{\ell+i}$$

- jelikož ale číselná řada $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ell}{\ell+i}$ diverguje k plus nekonečnu, vyplývá odtud, že $\hbar = -\infty$
- odtud

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+\ell)(n+\ell-1)(n+\ell-2)\dots(\ell+2)(\ell+1)} = 0$$

- ze vztahu (2.12) proto vyplývá, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- jelikož jsou nyní splněny všechny předpoklady věty 2.1.33, plyne odsud, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(c)\right|$ diverguje z Raabeova kritéria
- celkem tedy: řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje v bodě c relativně
- dokážeme nyní třetí část tvrzení
- nechť tedy $q < 0$
- pak jistě existuje $\ell < 0$ takové, že od jistého indexu platí

$$\left|\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}\right| < 1 + \frac{\ell}{n} < 1$$

- pak ale $\left|f_{n+1}(c)\right| > \left|f_n(c)\right|$, což implikuje nesplnění nutné podmínky konvergence
- v tomto případě tedy $c \notin \mathcal{O}$, čímž je důkaz proveden

2.1.36 Definice

Nechť jsou dány řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ zadané na množině M. *Součinem řad* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ budeme rozumět řadu $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$, jejíž $n-$tý člen je na množině M definován předpisem

$$h_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\cdot g_{n-k}(x).$$

Značíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x).$$

2.1.37 Věta

Nechť jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ absolutně konvergentní na množině M. Nechť

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = g(x).$$

Pak součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ je také absolutně konvergentní na M a příslušným součtem je funkce $f(x) \cdot g(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme součin uvedených řad jako $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$
- dle předpokladů konvergují řady $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ a $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)|$ na M
- nechť $\sigma_n(x)$ je $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ a $\tau_n(x)$ je $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)|$
- nechť $h_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \cdot g_{n-k}(x)$ dle definice 2.1.36
- obě posloupnosti $\big(\sigma_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$ a $\big(\tau_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$ částečných součtů jsou zcela bez pochyby neklesající
- označme
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \sigma(x) \geqslant 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = \tau(x) \geqslant 0$$
- pro každé $n \in \mathbf{N}$ dále platí: $\sigma_n(x) \leqslant \sigma(x)$ a $\tau_n(x) \leqslant \tau(x)$
- dále pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} |h_k(x)| = |f_0(x)g_0(x)| + |f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_2(x)| + \ldots + |f_0(x)g_n(x) + f_1(x)g_{n-1}(x) + \ldots + f_n(x)g_0(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_0(x)g_0(x)| + |f_0(x)g_1(x)| + |f_1(x)g_2(x)| + \ldots + |f_0(x)g_n(x)| + |f_1(x)g_{n-1}(x)| + \ldots + |f_n(x)g_0(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \big[|f_0(x)| + |f_1(x)| + \ldots + |f_n(x)|\big] \cdot \big[|g_0(x)| + |g_1(x)| + \ldots + |g_n(x)|\big] = \sigma_n(x) \cdot \tau_n(x) \leqslant \sigma(x) \cdot \tau(x)$$

- částečné součty $\sum_{k=0}^{n} |h_k(x)|$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} |h_n(x)|$ jsou tedy shora omezené
- navíc je také posloupnost $\left(\sum_{k=0}^{n} |h_k(x)|\right)_{n=0}^{\infty}$ monotónní, jak triviálně vyplývá z faktu, že sčítáme pouze nezáporné členy
- podle věty 1.1.13 je proto posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} |h_k(x)|$ konvergentní, tedy uvedená řada na množině M konverguje
- zbývá dokázat, že jejím součtem je skutečně funkce $f(x) \cdot g(x)$
- označme pro tyto účely $\widetilde{\sigma}_n(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\widetilde{\tau}_n(x)$ $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$
- pak pro $n-$tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ platí (jak vyplývá z definice 2.1.36) rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(x) = \widetilde{\sigma}_n(x) \cdot \widetilde{\tau}_n(x)$$

- z limitního přechodu $n \to \infty$ odtud snadno vyplývá, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} h_k(x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\sigma}_n(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \widetilde{\tau}_n(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- tím je důkaz proveden

2.1.38 Poznámka

Jsou-li řady řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ relativně konvergentní na množině M, může jejich součin být divergentní na M. To nastává např. pro řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pokud je ale součin konvergentních řad konvergentní (žádná z řad přitom nemusí konvergovat absolutně), je její součet roven součinu $f(x) \cdot g(x)$. Jestliže alespoň jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je absolutně konvergentní, je i jejich součin konvergentní řadou se součtem $f(x) \cdot g(x)$.

2.1.39 Příklad

Při použití rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

vypočtěme součty číselných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$

Prostřednictvím jednoduchých úprav lehce získáme rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pro druhou řadu pak snadno platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

V analogii k posloupnostem funkcí zavedeme také pro řady funkcí se značným užitkem pojem stejnoměrné konvergence.

2.2.1 Definice

Řekneme, že řada funkcí konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ *stejnoměrně* ke svému součtu $s(x)$ a označíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \equiv s(x),$$

jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na M stejnoměrně k funkci $s(x)$.

2.2.2 Poznámka

Z předešlé definice, z věty 1.2.7 a z poznámky 1.2.8 přímo vyplývá, že stejnoměrná konvergence řady funkcí je *dědičná vlastnost*, t.j. konverguje-li řada (2.1) stejnoměrně na jisté množině, konverguje stejnoměrně také na každé její neprázdné podmnožině.

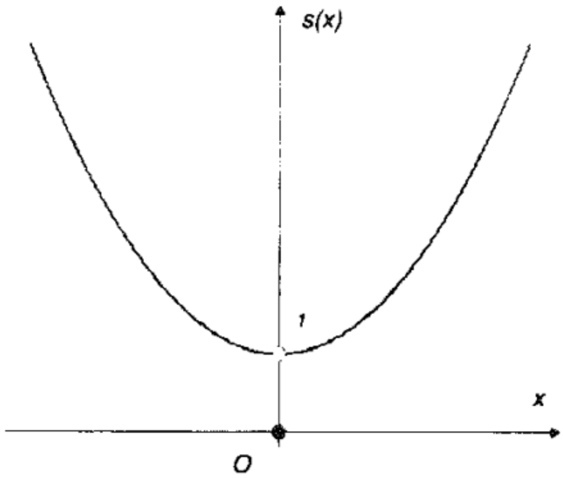
2.2.3 Příklad

Ukážeme, že součtem řady spojitých funkcí nemusí nutně být spojitá funkce. Uvažme řadu

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \ldots$$

Jde o geometrickou řadu s prvním členem x^2 a kvocientem $(1+x^2)^{-1}$. Oborem konvergence je množina $\mathbf{R}$, neboť i nula do něj patří, přestože kvocient je v tomto případě roven jedné. Součtem uvažované řady je funkce

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \ldots \quad x \neq 0 \\ 0 & \ldots \quad x = 0. \end{cases}$$



Obrázek 2.2
Graf součtové funkce $s(x)$.

Zatímco jsou všechny funkce $x \mapsto x^2(1+x^2)^{n-1}$ na $\mathbf{R}$ spojité, funkce $s(x)$ na $\mathbf{R}$ spojitá není. Opět (stejně jako v případě posloupností funkcí) lze ukázat, že zkoumaná řada konverguje pouze bodově, což, jak lehce nahlédneme, vede právě ke zmiňovanému "porušení" spojitosti.

2.2.4 Věta

Jestliže řada funkcí (2.1) stejnoměrně konverguje na $M \subset \mathbf{R}$, potom na $M \subset \mathbf{R}$ konverguje i bodově.

Důkaz:

- je snadným důsledkem předchozích definic a věty 1.2.3

2.2.5 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje na M stejnoměrně.

2.2.6 Věta

Nechť řada (2.1) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$. Potom součtem této řady je funkce spojitá na M.

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.3.1
- je-li funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ řadou spojitých funkcí, pak jistě také příslušná posloupnost částečných součtů $\big(s_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ je posloupností spojitých funkcí
- z předpokladů věty ale vyplývá, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$

- tím je zaručeno splnění předpokladů věty 1.3.1 a limita $s(x)$ posloupnosti částečných součtů je tudíž spojitá
- součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je tedy za daných okolností spojitá funkce

2.2.7 Věta – *Bolzano-Cauchyova podmínka*

Řada funkcí (2.1) konverguje na množině $M \subset \mathbf{R}$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $x \in M$ je splněna nerovnost
$$\left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\right| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.2.14
- označíme-li totiž $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti
$$s_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x), \qquad s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$
- podle věty 1.2.14 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $x \in M$ je splněna nerovnost
$$\left|s_m(x) - s_{n-1}(x)\right| < \varepsilon$$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že
$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right| = \left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\right| < \varepsilon$$
- to kompletuje důkaz

2.2.8 Poznámka

Předešlou větu lze shrnout následujícím formálním zápisem:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \equiv s(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})\left(m \geqslant n \geqslant n_0\right)(\forall x \in M): \quad \left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\right| < \varepsilon.$$
Stejnoměrná konvergence tedy opět (podobně jako tomu bylo u posloupností funkcí) požaduje existenci jistého indexu n_0, který je "univerzální" pro všechna $x \in M$.

2.2.9 Věta – *nutná podmínka stejnoměrné konvergence*

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na množině M stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})\left(m \geqslant n \geqslant n_0\right)(\forall x \in M): \quad \left|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\right| < \varepsilon$$
- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m \geqslant n \geqslant n_0$, platí také při speciální volbě $m = n$
- pak ale
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\left(n \geqslant n_0\right)(\forall x \in M): \quad \left|f_n(x)\right| = \left|f_n(x) - 0\right| < \varepsilon$$
- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k nulové funkci.

2.2.10 Poznámka

Nutná podmínka stejnoměrné konvergence je jednostrannou implikací, lze ji tedy využívat zejména při vyvracení stejnoměrné konvergence řady. Není-li totiž na množině M splněno, že $f_n(x) \rightrightarrows 0$, nemůže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M stejnoměrně konvergovat. Naproti tomu může nastat případ, kdy posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na jisté množině M stejnoměrně k nulové funkci, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ přesto na M stejnoměrně nekonverguje. Takovou řadou je např. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$$

zadaná například na množině $M = \langle 0, 1 \rangle$. Snadno se lze přesvědčit, že posloupnost $\left(\frac{x}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně konverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \left|\frac{x}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ ale na M nekonverguje (např. podle integrálního kritéria), tedy o stejnoměrnou konvergenci se jistě jednat nemůže.

2.2.11 Věta – *srovnávací kritérium*

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je na množině M majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jsou stejnoměrně konvergentní na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzano-Cauchyovu podmínku 2.2.7
- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na M
- tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí

$$0 \leqslant g_n(x) + g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x) < \varepsilon$$

- pro zvolené ε a k němu existující n_0 pak platí

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leqslant \\ \leqslant g_n(x) + g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

2.2.12 Důsledek

Konverguje-li řada na množině M regulárně, konverguje na M také stejnoměrně.

2.2.13 Poznámka

Důsledkem předešlé věty je také jedno z nejhojněji užívaných kritérií pro vyšetřování stejnoměrné konvergence řad funkcí.

2.2.14 Věta – *Weierstrassovo kritérium*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(x)$ jsou funkce a pro všechna $x \in M$ a všechna $n \in N$ je

$$|f_n(x)| \leqslant a_n.$$

Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ stejnoměrně konvergují na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme $g_n(x) := a_n$ pro všechna $x \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

2.2.15 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c+\delta)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x \to c_+} f_n(x) = b_n.$$

Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to c_+} s(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c_+} f_n(x) = \lim_{x \to c_+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{2.13}$$

Důkaz:

- označme $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ pro libovolné $x \in (c, c+\delta)$
- jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c, c+\delta)$ ke svému součtu $s(x)$, pak na $(c, c+\delta)$ také
$$s_n(x) \rightrightarrows s(x)$$
- jelikož každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x\to c_+} f_n(x) = b_n$, pak také každá z funkcí $s_n(x)$ má vlastní limitu
$$\lim_{x \to c_+} s_n(x) = \lim_{x \to c_+} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i =: r_n$$
- tato rovnost platí podle věty o limitě součtu
- r_n tak představuje $n-$tý částečný součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- tím jsou splněny předpoklady věty 1.3.2
- podle jejího tvrzení tedy platí, že existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} r_n$ a $\lim_{x\to c_+} s(x)$ a jsou si rovny, t.j.
$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c_+} s_n(x) = \lim_{x \to c_+} \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$
- po sérii dosazení
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{x \to c_+} s(x)$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \lim_{x \to c_+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{x \to c_+} f_i(x) = \lim_{x \to c_+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$
pak získáváme dokazované tvrzení

2.2.16 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c-\delta, c)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x \to c_-} f_n(x) = b_n.$$

Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to c_-} s(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c_-} f_n(x) = \lim_{x \to c_-} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- buď plyne z předešlé věty po záměně $f_n(x)$ za $f_n(-x)$
- nebo lze dokázat analogicky jako v předešlá věta užitím tvrzení 1.3.3

2.2.17 Důsledek

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\delta > 0$ na intervalu $(c-\delta, c+\delta)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = b_n.$$

Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to c} s(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{x\to c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- je důsledkem předešlých dvou vět

2.2.18 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\mathtt{K} > 0$ na intervalu $(\mathtt{K}, \infty)$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = b_n.$$

Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} s(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz:

- plyne z věty 1.3.6

2.2.19 Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje pro jisté $\mathtt{K} < 0$ na intervalu $(-\infty, \mathtt{K})$ ke svému součtu $s(x)$. Nechť každá z funkcí $f_n(x)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = b_n.$$

Pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to-\infty} s(x)$ a jsou si rovny, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

2.2.20 Věta

Předpokládejme, že řada (2.1) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle a, b\rangle$ a že jejím součtem na $\langle a, b\rangle$ je funkce $s(x)$. Potom číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a pro její součet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz:

- aplikujeme větu 1.3.9 na posloupnost $\big(s_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- označme tedy

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

- jelikož všechny funkce $f_n(x)$ jsou podle předpokladů spojité, je také každá funkce $s_n(x)$ na M spojitá

- dále na M platí, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 1.3.9 a z jejího tvrzení vyplývá, že

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

- dále snadno

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

2.2.21 Věta

Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcí diferencovatelných na intervalu (a,b) taková, že pro alespoň jedno $c \in (a,b)$ číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ konverguje. Nechť navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ stejnoměrně konverguje na (a,b) a jejím součtem je funkce $\sigma(x)$. Potom také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na (a,b). Navíc, označíme-li její součet $s(x)$, je tento diferencovatelný na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí rovnost

$$s'(x) = \sigma(x).$$

Důkaz:

- aplikujeme větu 1.3.11 na posloupnost $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- z předpokladů věty víme, že posloupnost $\left(s_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje alespoň pro jedno $c \in M$
- dále víme, že posloupnost částečných součtů $\left(\sigma_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje na M stejnoměrně, tedy

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows \sigma(x)$$

- tím jsou naplněny předpoklady věty 1.3.11 a platí tudíž

$$\left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)$$

- odtud

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \sigma(x)$$

- to završuje důkaz

2.2.22 Poznámka

Větu 2.2.20 shrnujeme slovy: "Stejnoměrně konvergentní řadu spojitých funkcí lze na uzavřeném intervalu integrovat člen po členu." Větu 2.2.21 shrnujeme slovy: "Řadu diferencovatelných funkcí lze na otevřeném intervalu derivovat člen po členu, pokud konverguje alespoň v jednom jeho bodě a řada sestavená z derivací jejích členů stejnoměrně konverguje." Tato věta totiž říká, že za daných předpokladů platí:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

2.2.23 Lemma – *Abelova parciální sumace*

Nechť $p \in \mathbf{N}$ a $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ pro všechna $i \in \widehat{p}$. Položme $s_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Pak platí:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{p-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_p b_p.$$

<u>*Důkaz:*</u>

$$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = s_1 b_1 + \sum_{i=2}^{p} (s_i - s_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{p} s_i b_i - \sum_{i=1}^{p-1} s_i b_{i+1} = \sum_{i=1}^{p-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_p b_p$$

2.2.24 Věta – *Abelovo a Dirichletovo kritérium*

Nechť $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ a $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti funkcí na množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ monotónní. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

1. *Abelova podmínka:* Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na M a existuje $\mathsf{K} \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí $|g_n(x)| < \mathsf{K}$.
2. *Dirichletova podmínka:* Nechť je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tzv. *stejnoměrně omezená* na množině M, tj. existuje $\mathsf{K} > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a pro každé $n \in N$ platí
$$\left| \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell(x) \right| \leqslant \mathsf{K}.$$
Nechť dále posloupnost $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M stejnoměrně k nulové funkci.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

<u>*Důkaz:*</u>

- vezměme libovolná $n_0, p \in \mathbf{N}$ a označme $s_i(x) := f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+2}(x) + \ldots + f_{n_0+i}(x)$
- pak z předchozího lemmatu vyplývá rovnost
$$\sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x) g_j(x) = \sum_{i=1}^{p} f_{n_0+i}(x)\, g_{n_0+i}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x) \left[g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x) \right] + s_p(x) g_{n_0+p}(x)$$
- odtud pak plyne srovnání
$$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x) g_j(x) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} |s_i(x)|\, |g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)| + |s_p(x)|\, |g_{n_0+p}(x)| \tag{2.14}$$
- *Abelova podmínka:*
  - z předpokladů Abelova kritéria víme, že
  $$(\exists \mathsf{K} > 0)(\forall x \in M)(\forall n \in \mathbf{N}): \qquad |g_n(x)| \leqslant \mathsf{K}$$
  - podle Bolzano-Cauchyovy podmínky aplikované na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ existuje k libovolnému pevnému $\varepsilon > 0$ takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $i \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ platí:
  $$|s_i(x)| = |f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+2}(x) + \ldots + f_{n_0+i}(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mathsf{K}}$$
  - z mezivýpočtu (2.14) pak plyne
  $$\left| \sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x) g_j(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mathsf{K}} \sum_{i=1}^{p-1} |g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2\mathsf{K}} |g_{n_0+p}(x)| =$$
  $$= \frac{\varepsilon}{2\mathsf{K}} |g_{n_0+1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

- v předešlém bodě jsme využili monotónii posloupnosti $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, díky níž mají všechny rozdíly $g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)$ stejné znaménko nebo jsou nulové
- tím je za použití Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad "Abelova" část důkazu věty provedena

- *Dirichletova podmínka:*
  - posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je omezená, a tudíž existuje $\mathrm{K} > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a pro všechna $i \in \mathbf{N}$ platí:

$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n_0+i} f_j(x)\right| = \left|s_i(x)\right| < \mathrm{K}$$

  - z mezivýpočtu (2.14) pak plyne

$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x)g_j(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\sum_{i=1}^{p-1}\left|g_{n_0+i}(x) - g_{n_0+i+1}(x)\right| + \mathrm{K}\left|g_{n_0+p}(x)\right| = \mathrm{K}\left|g_{n_0+1}(x)\right|$$

  - protože $g_n(x) \rightrightarrows 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že

$$(\forall x \in M): \quad \left|g_{n_0+1}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}}$$

  - tedy spolu

$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n_0+p} f_j(x)g_j(x)\right| \leqslant \mathrm{K}\left|g_{n_0+1}(x)\right| < \mathrm{K}\frac{\varepsilon}{\mathrm{K}} = \varepsilon$$

  - tím je "Dirichletova" část důkazu věty provedena

2.2.25 Poznámka

Z předcházející věty mimo jiné bezprostředně vyplývá Leibnizovo kritérium 2.1.33 pro konvergenci oscilujících číselných řad. Stačí totiž za $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ zvolit číselnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a za $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ oscilující posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ pak konverguje, pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Uvědomme si, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ je omezená. Z Dirichletova kritéria vyplývá rovněž logická alternativa Leibnitzova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci funkčních řad.

2.2.26 Věta – *Leibnizovo kritérium*

Nechť $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí zadaných na množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ monotónní. Nechť dále pro posloupnost $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ platí $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na M. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz:

- je náplní cvičení 2.8

2.2.27 Příklad

Budeme vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2+x^2)^{3/2}}\right) \tag{2.15}$$

na jejím oboru konvergence. Snahou je za použití Weierstrassova kritéria dokázat stejnoměrnou konvergenci řady (2.15) na co největší množině. Nejjednodušší metodou se zdá být omezení funkce

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2+x^2)^{3/2}}\right)$$

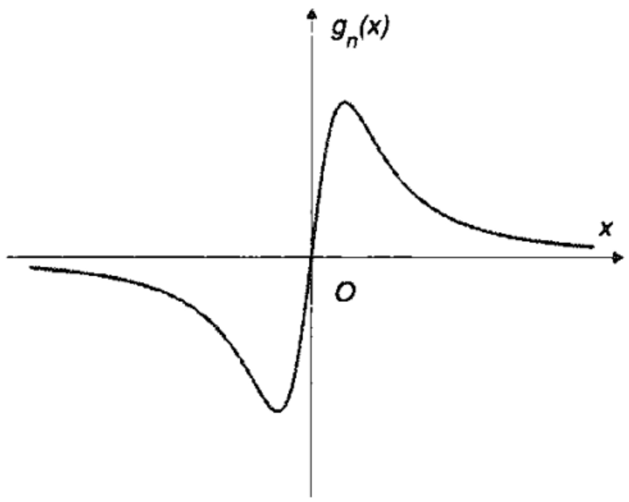
její supremální hodnotou na $\mathbf{R}$. Protože ale víme, že funkce $\operatorname{arctg}(x)$ je na celém $\mathbf{R}$ rostoucí, postačí vyšetřovat extrém funkce

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Pro hledání extrému položme první derivaci funkce $g_n(x)$ rovnu nule. Tedy

$$g_n'(x) = \sqrt{n}\,\frac{8n^2 - 2x^2}{(8n^2 + x^2)^{5/2}} = 0.$$

Rovnici řeší body $x = \pm 2n$, z nichž pouze bod $x_0 = 2n$ je vzhledem k průběhu funkce $g_n(x)$ jejím maximem.



Obrázek 2.3
Průběh funkce $g_n(x)$.

Maximum funkce $g_n(x)$ na množině $\mathbf{R}$ má tedy hodnotu

$$\max_{x\in\mathbf{R}} g_n(x) = g_n(2n) = \frac{2}{12^{3/2}}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Tohoto faktu a skutečnosti, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $|\operatorname{arctg}(x)| \leqslant |x|$, nyní využijeme při aplikaci Weierstrassova kritéria:

$$(\forall x \in \mathbf{R}): \qquad \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}\right)\right| \leqslant \left|\frac{\sqrt{n}\,x}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}\right| \leqslant \frac{2}{12^{3/2}}\frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Jelikož číselná řada vytvořená ze členů na pravé straně této nerovnosti zjevně konverguje, můžeme celý příklad uzavřít tvrzením, že řada funkcí (2.15) stejnoměrně konverguje na oboru konvergence $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

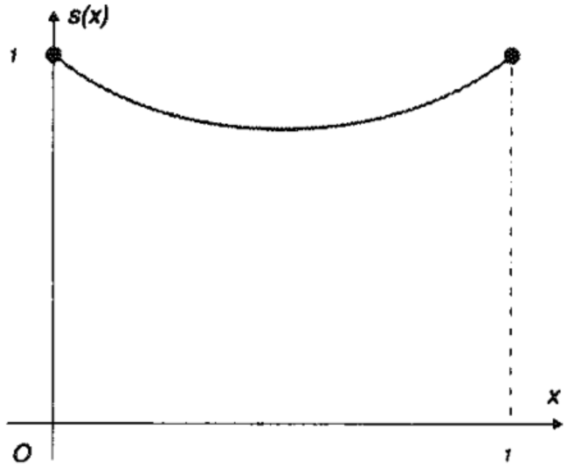
2.2.28 Příklad

Pokusme se rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)^n$$

na množině $I = \langle 0, 1 \rangle$. Součtem řady na celém I je funkce

$$s(x) = \frac{1}{1 + x(1-x)} = \frac{1}{1 + x - x^2},$$



Obrázek 2.4
Součet $s(x)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)^n$.

neboť uvedená řada je geometrickou řadou s kvocientem $q(x) = -x(1-x)$, pro nějž na množině I zjevně platí $|q(x)| < 1$. Jelikož je součtem spojitá funkce, nelze tvrdit, že zadaná řada na I stejnoměrně nekonverguje. Pokusme se nyní dokázat stejnoměrnou konvergenci pomocí Dirichletova kritéria. Zvolme $f_n(x) := (-1)^n$ a $g_n(x) := x^n(1-x)^n$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ je bez pochyby stejnoměrně omezená a navíc pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in I$ platí:

$$g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 \geqslant 0.$$

To plyne z faktu, že diskriminant kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ je záporný, tudíž pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $x^2 - x + 1 > 0$. Zbývá tedy ukázat, že posloupnost $(x^n(1-x)^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k nule. Snadno se přesvědčíme, že limitní funkcí je nula, a to i v krajních bodech intervalu I. Funkce $x \mapsto x^n(1-x)^n$ má na I bod lokálního maxima nezávislý na n a to $x_{stac} = \frac{1}{2}$. Odsud

$$\sigma_n = \sup_{x \in I}\left|x^n(1-x)^n\right| = \frac{1}{4^n}$$

a následně $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, což je postačující podmínkou pro tvrzení, že posloupnost $(x^n(1-x)^n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje na I stejnoměrně k nulové funkci. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje stejnoměrně na I.

2.2.29 Příklad

Prokažme stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \, \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$$

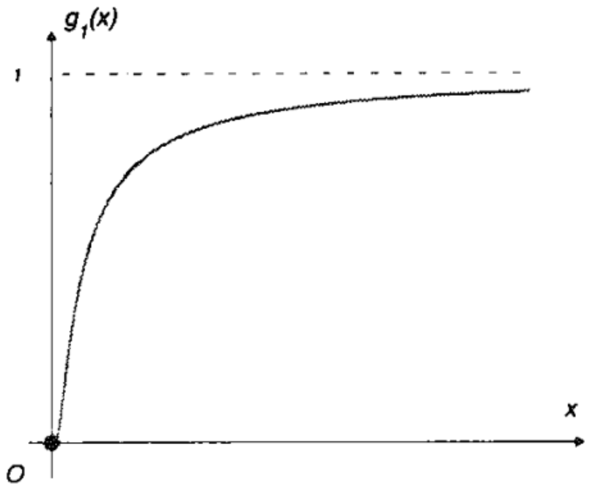
na intervalu $I = (0, \infty)$. K důkazu užijeme Abelova kritéria. Položíme $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ a $g_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$. Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní řadou konstantních funkcí, konverguje na I stejnoměrně. Dále se přesvědčíme, že funkce $g_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ je na I omezená. To lze snadno, neboť příslušná derivace

$$g_1'(x) = \frac{1}{x^2} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

je na I stále kladná a tedy $g_1(x)$ je na I rostoucí. Odtud $\sup_{x \in I} g_1(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$.
Zbývá tedy ukázat, že posloupnost $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. Pro všechna $x \in I$ a všechna n ale jistě platí sada implikací

$$1 \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{n+1}{x}} \;\Rightarrow\; g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x).$$

Z monotonie posloupnosti $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ a omezenosti $g_1(x)$ plyne omezenost všech funkcí $g_n(x)$. Podle Abelova kritéria tedy zadaná řada konverguje na množině $\mathbf{R}^+$ stejnoměrně.



Obrázek 2.5
Graf funkce $g_1(x)$.

2.2.30 Věta

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině M ke svému součtu $s(x)$. Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině N ke svému součtu $t(x)$. Nechť $M \cap N \neq \emptyset$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) + g_n(x)\big)$ konverguje stejnoměrně na $M \cap N$ a jejím součtem na $M \cap N$ je funkce $s(x) + t(x)$.

<u>Důkaz:</u>

- označme $s_n(x)$ n–tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $t_n(x)$ n–tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$
- označíme-li $r_n(x)$ n–tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) + g_n(x)\big)$, platí zcela triviální rovnost
$$r_n(x) = s_n(x) + f_n(x)$$
- jelikož stejnoměrná konvergence řad funkcí je dědičná vlastnost (jak se čtenář snadno přesvědčí), konvergují obě řady na $M \cap N$ také stejnoměrně
- z předpokladů dokazované věty vyplývá, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na $M \cap N$ a podobně $t_n(x) \rightrightarrows t(x)$ na $M \cap N$
- tudíž pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geqslant n_0$ a všechna $x \in M \cap N$ platí
$$\big|s_n(x) - s(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$
- pro ono zmíněné $\varepsilon > 0$ existuje ale také $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $n \geqslant m_0$ a všechna $x \in M \cap N$ platí
$$\big|t_n(x) - t(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$
- položme $\ell_0 := \max\{n_0, m_0\}$
- pak pro libovolné $n \geqslant \ell_0$ a všechna $x \in M \cap N$ je splněna nerovnost
$$\big|r_n(x) - \big(s(x) + t(x)\big)\big| \leqslant \big|s_n(x) - s(x)\big| + \big|t_n(x) - t(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
což implikuje jednak fakt, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) + g_n(x)\big)$ stejnoměrně konverguje na $M \cap N$, a jednak skutečnost, že příslušným součtem je právě funkce $r(x) = s(x) + t(x)$, kde $\mathrm{Dom}(r) = M \cap N$
- tím je důkaz proveden

2.2.31 Věta

Nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině M ke svému součtu $s(x)$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ stejnoměrně konverguje na M také řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot f_n(x)$ a jejím součtem na množině M je funkce $c \cdot s(x)$.

<u>Důkaz:</u>

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 2.9)

2.2.32 Věta

Nechť řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ regulárně konvergují na množině M. Nechť

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \equiv f(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \equiv g(x).$$

Pak součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ je také regulárně konvergentní na M a příslušným součtem je funkce $f(x) \cdot g(x)$.

Bez důkazu.

2.2.33 Věta

Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konvergují na M. Nechť je navíc posloupnost $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ monotónní pro každé $x \in M$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz:

- je náplní cvičení 2.32

2.2.34 Poznámka

Upozorňujeme, že předešlá věta by bez předpokladu o monotónii nebyla platná. Neplatí tedy, že konvergují-li obě řady na M stejnoměrně, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M. Položíme-li např.

$$f_n(x) = g_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ stejnoměrně konvergují na $\mathbf{R}$. Ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

dokonce ani nekonverguje, natož pak stejnoměrně.

2.3 Mocninné řady

Po zkoumání obecných řad funkcí nyní přejdeme k detailní analýze jejich nejzajímavějšího zástupce – k řadám mocninných funkcí. Jak se dovíme později (v následující kapitole), bude studium řad mocninných funkcí zásadní při hledání mocninných aproximací funkcí jedné proměnné.

2.3.1 Definice

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $c \in \mathbf{R}$. Potom řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

nazýváme *mocninnou řadou se středem v bodě c*.

2.3.2 Poznámka

Substitucí $\tilde{x} = x - c$ přejdeme ke studiu mocninných řad se středem v počátku, t.j. k řadám typu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$. Upozorňujeme, že následující tvrzení jsou platná pouze pro řady funkcí se středem v bodě nula. Pro řady s nenulovým středem je třeba všechna tvrzení tohoto oddílu vhodně modifikovat.

2.3.3 Poznámka

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zřejmě konverguje vždy alespoň pro $x = 0$. Navíc mohou nastat nejvýše tyto tři vzájemně se vylučující možnosti:

1. řada konverguje pouze v bodě $x = 0$, tj. $\mathcal{O} = \{0\}$,
2. řada konverguje pro alespoň jedno $x \neq 0$ a pro alespoň jedno $\tilde{x} \neq 0$ diverguje,
3. řada konverguje všude v $\mathbf{R}$, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

2.3.4 Příklady

Uvedeme mocninné řady s vlastnostmi 1, 2 a 3 z předešlé poznámky.

1. Limitním podílovým (d'Alembertovým) kritériem ukážeme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ má jednoprvkový obor konvergence $\mathcal{O} = \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)\, x| = \begin{cases} \infty > 1 & \dots \quad x \neq 0 \\ 0 < 1 & \dots \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Stejným způsobem ukážeme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 2^n}$ např. pro $|x| = 1$ konverguje a např. pro $|x| = 4$ diverguje

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} \frac{n\, 2^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} 2 > 1 & \dots \quad |x| = 4 \\ \frac{1}{2} < 1 & \dots \quad |x| = 1. \end{cases}$$

3. řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ naproti tomu konverguje všude v $\mathbf{R}$, neboť pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

2.3.5 Věta – *Abelovo lemma*

Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ $(x_0 \neq 0)$, potom konverguje absolutně na intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$.

Důkaz:

- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverguje a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ (viz nutná podmínka konvergence)
- posloupnost $(a_n x_0^n)_{n=0}^{\infty}$ je tudíž omezená, proto existuje číslo $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna n platí

$$\left| a_n x_0^n \right| < \mathrm{K}$$

- odsud pro x splňující nerovnost $|x| < |x_0|$ plyne

$$\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \right| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| < \mathrm{K} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

- řada $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ je konvergentní geometrickou řadou s kvocientem $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$
- ze srovnávacího kritéria pro číselné řady plyne tvrzení věty

2.3.6 Poznámka

Konverguje-li mocninná řada v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ $(x_0 \neq 0)$, neznamená to ale ještě, že na intervalu $(-|x_0|, |x_0|)$ konverguje stejnoměrně. To je zásadní poznatek.

2.3.7 Věta

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$, potom diverguje v každém bodě

$$x \in (-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, \infty).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- je ponechán čtenáři (viz 2.33)

2.3.8 Poznámka

Důsledkem předešlých dvou vět je skutečnost, že existuje číslo $\mathrm{R} \in \mathbf{R}$ tak, že pro $x \in \mathbf{R}$ taková, že $|x| < \mathrm{R}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje a naopak pro $x \in \mathbf{R}$ taková, že $|x| > \mathrm{R}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje. Toto číslo R budeme nazývat poloměrem konvergence.

2.3.9 Definice

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada se středen v bodě nula a $\mathcal{O}$ její obor konvergence. Supremum množiny $\mathcal{O}$ značíme R a nazýváme *poloměrem konvergence*. Interval $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$ budeme nazývat *intervalem konvergence*.

2.3.10 Poznámka

Je zřejmé, že $\mathrm{R} \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}$ a $(-\mathrm{R}, \mathrm{R}) \subset \mathcal{O}$.

2.3.11 Věta

Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nechť existují $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nebo $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Potom pro poloměr konvergence R zadané řady platí:

- $\mathrm{R} = L^{-1}$, pokud $L \neq 0$ a $L \neq \infty$
- $\mathrm{R} = \infty$, pokud $L = 0$
- $\mathrm{R} = 0$, pokud $L = \infty$.

<u>*Důkaz:*</u>

- při vyšetřování konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ užijeme např. podílové kritérium
- řada konverguje pro ta $x \in \mathbf{R}$, pro něž je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| < 1$$

- navíc řada diverguje pro ta $x \in \mathbf{R}$, pro něž je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| > 1$$

- pro poloměr konvergence tudíž platí

$$\mathrm{R} \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R} = \frac{1}{L}$$

- analogicky lze větu dokázat pro odmocninové kritérium

2.3.12 Příklad

Pokusme se nyní vypočítat poloměr konvergence mocninné řady z příkladu 2.3.4 – bod 2. Vidíme, že

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n\, 2^n}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

odkud $\mathrm{R} = 2$, což koresponduje s výsledkem dosaženým v příkladu 2.3.4.

2.3.13 Poznámka

Při vyšetřování oboru konvergence mocninných řad typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\beta n}$, kde $\beta \in \mathbf{N}$, je nutné přejít substitucí $t = x^\beta$ k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, jejíž poloměr konvergence určíme podle výše uvedených pravidel. Je-li tímto poloměrem číslo R_t, je poloměrem konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\beta n}$ číslo $R_x = \sqrt[\beta]{R_t}$.

2.3.14 Poznámka

Přejděme nyní k vyšetřování stejnoměrné konvergence obecných mocninných řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2.3.15 Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $r > 0$. Pak konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle 0, r\rangle$.

Důkaz:

- pro všechna $x \in \langle 0, r\rangle$ platí
$$|a_n x^n| \leqslant a_n r^n \tag{2.16}$$
- z předpokladu víme, že číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ je navíc podle (2.16) majorantní číselnou řadou k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na intervalu $\langle 0, r\rangle$
- podle Weierstrassova kritéria tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje na $\langle 0, r\rangle$ stejnoměrně

2.3.16 Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $r < 0$. Pak konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle r, 0\rangle$.

Důkaz:

- pro všechna $x \in \langle r, 0\rangle$ platí triviální nerovnost $r \leqslant x$
- budeme zkoumat stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n$$
- označme proto $f_n(x) = a_n r^n$ a $g_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$
- jelikož číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje podle předpokladů, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konstantních funkcí stejnoměrně na $\langle r, 0\rangle$
- posloupnost $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $x \in \langle r, 0\rangle$ monotónní, neboť platí sada ekvivalentních nerovností
$$x \geqslant r$$
$$\left(\frac{x}{r}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}$$
$$g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x)$$
- navíc je $g_n(x)$ omezená, neboť
$$\left|\frac{x^n}{r^n}\right| \leqslant 1$$
- podle Abelova kritéria tedy konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na $\langle r, 0\rangle$ stejnoměrně

2.3.17 Věta

Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence R. Potom tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu, který je částí jejího oboru konvergence.

Důkaz:

- jde vlastně o důsledek vět 2.3.15 a 2.3.16 a faktu, že konverguje-li řada na intervalech $\langle \alpha, 0\rangle$ a $\langle 0, \beta\rangle$ stejnoměrně, konverguje stejnoměrně také na jejich sjednocení $\langle \alpha, \beta\rangle$

2.3.18 Věta

Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence R. Potom součet $s(x)$ této řady je funkce spojitá na $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$.

Důkaz:

- zvolme $x \in (-\mathrm{R}, \mathrm{R})$
- k němu existuje $r \in (0, \mathrm{R})$ takové, že $x \in \langle -r, r\rangle$
- všechny funkce $x \mapsto a_n x^n$ jsou na $\langle -r, r\rangle$ spojité a podle věty 2.3.17 řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje na $\langle -r, r\rangle$ stejnoměrně
- tím jsou splněny předpoklady věty 2.2.6, a tedy $s(x)$ je spojitou funkcí v bodě $x \in \langle -r, r\rangle$
- jelikož byl bod x zvolen libovolně, je funkce $s(x)$ je spojitá na celém $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$

2.3.19 Věta – *Abelova*

Jestliže v pravém, resp. levém krajním bodě intervalu konvergence řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje (i relativně), potom funkce, která je jejím součtem, je v tomto bodě spojitá zleva, resp. zprava.

Bez důkazu.

2.3.20 Věta – *o integrování mocninné řady člen po členu*

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R. Definujme funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pro $x \in (-\mathrm{R}, \mathrm{R})$. Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na intervalu $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$ konverguje a definujeme-li funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

na intervalu $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$, je $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$.

Důkaz:

- nechť $x \in (-\mathrm{R}, \mathrm{R})$
- zvolme $r > 0$ tak, že $x \in \langle -r, r\rangle \subset (-\mathrm{R}, \mathrm{R})$
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je řadou spojitých funkcí, která podle věty 2.3.17 stejnoměrně konverguje na $\langle -r, r\rangle$
- tedy podle věty 2.2.20 číselná řada

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

  konverguje a pro její součet $F(x)$ platí

  $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

- jelikož bylo x zvoleno v intervalu $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$ libovolně, je $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na celém tomto intervalu

2.3.21 Věta

Mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz:

- označme $\mathtt{R}$ poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\mathtt{R}'$ poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$
- První implikace:
  - vezměme $x \in (-\mathtt{R}', \mathtt{R}')$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} |n\, a_n x^{n-1}|$ konverguje
  - odtud plyne, že konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n$
  - a dále pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in (-\mathtt{R}', \mathtt{R}')$ platí: $|a_n x^n| \leqslant |n\, a_n x^n|$
  - tedy pro všechna $x \in (-\mathtt{R}', \mathtt{R}')$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutně konverguje
  - a tedy $\mathtt{R} \geqslant \mathtt{R}'$
- Druhá implikace:
  - vezměme $x \in (-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ a zvolme $\varrho > 0$ tak, že $|x| < \varrho < \mathtt{R}$
  - víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje, a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \varrho^n = 0$
  - také $\lim_{n\to\infty} a_n \varrho^{n-1} = 0$
  - odsud plyne, že $(a_n \varrho^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ musí nutně být omezenou posloupností
  - tedy $\exists \mathtt{K} > 0$ takové, že pro všechna n platí $|a_n \varrho^{n-1}| \leqslant \mathtt{K}$
  - srovnáme
  $$|n\, a_n x^{n-1}| = n\, |a_n \varrho^{n-1}| \left|\frac{x}{\varrho}\right|^{n-1} \leqslant n\mathtt{K} \left|\frac{x}{\varrho}\right|^{n-1}$$
  - ovšem řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathtt{K} \left|\frac{x}{\varrho}\right|^{n-1}$ konverguje podle podílového kritéria, neboť
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,\mathtt{K}}{n\,\mathtt{K}} \left|\frac{x}{\varrho}\right| = \left|\frac{x}{\varrho}\right| < 1$$
  - a protože majoranta konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$
  - tudíž $\mathtt{R}' \geqslant \mathtt{R}$
- Závěr: $(\mathtt{R} \geqslant \mathtt{R}') \wedge (\mathtt{R}' \geqslant \mathtt{R}) \Rightarrow \mathtt{R} = \mathtt{R}'$

2.3.22 Věta – *o derivování mocninné řady člen po členu*

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má kladný poloměr konvergence. Pro $x \in (-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ položme

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pak platí:

1. Funkce $s(x)$ má na intervalu $(-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ spojitou derivaci (vlastní) a přitom
$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$
2. Funkce $s(x)$ má na intervalu $(-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ spojité derivace všech řádů.

Důkaz:

- z předešlé věty a věty 2.3.22 víme, že na intervalu $(-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ je funkce $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ primitivní k funkci
$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$
- tudíž $s'(x) = \sigma(x)$
- o spojitosti není pochyb, neboť derivujeme polynomické funkce a příslušnými derivacemi jsou opět polynomy
- opakovanou aplikací předešlého dostáváme druhou část dokazovaného tvrzení

2.3.23 Příklad

Vyšetřeme obor konvergence $\mathcal{O}$ mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}}{\sqrt{4+n^2}}\, x^n.$$

Poloměr konvergence zadané řady je $\mathrm{R} = 5$, neboť

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{-n-1}}{5^{-n}} \frac{\sqrt{4+n^2}}{\sqrt{4+(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2+2n+5}} = \frac{1}{5}.$$

V pravém krajním bodě $x = 5$ má řada tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Při vyšetřování její konvergence užijeme srovnávací kritérium:

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1,2\}: \qquad \frac{\sqrt{2}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} < \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n}$ diverguje, tedy diverguje i vyšetřovaná číselná řada. V bodě $x = -5$ má řada tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{4+n^2}}.$$

Tentokrát užijeme pro vyšetřování konvergence Leibnizovo kritérium. Jelikož platí rovnost $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+n^2}} = 0$ i monotonie, číselná řada konverguje. A to nás vede k tvrzení, že zadaná mocninná řada má obor konvergence $\mathcal{O} = \langle -5, 5)$.

2.4 Cvičení

Cvičení 2.1
Dokažte, že bodová konvergence řad funkcí je dědičná vlastnost.

Cvičení 2.2
Dokažte větu 2.1.10.

Cvičení 2.3
Dokažte větu 2.1.19.

Cvičení 2.4
Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Cvičení 2.5
Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}.$$

Cvičení 2.6
Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n} \qquad (x > 0).$$

Cvičení 2.7
Nalezněte obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

a vyšetřete její stejnoměrnou konvergenci na množině $(-\infty, -c)$, kde $c > 0$.

Cvičení 2.8
Dokažte větu 2.2.26.

Cvičení 2.9
Dokažte větu 2.2.31

Cvičení 2.10
Vyšetřete obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Cvičení 2.11
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)^2} \frac{\cosh(2nx) + \sinh(2nx)}{\cosh(2nx)}$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 2.12
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right).$$

Cvičení 2.13
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$$

na množině $\left\langle \frac{1}{3}, 5 \right\rangle$.

Cvičení 2.14
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin(x)}$$

na množině $\mathbf{R}$.

Cvičení 2.15
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$$

na množině $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 2.16
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^4(3x^2+2)^n}{(x^2+1)^n(x^2+2)^n}$$

na jejím oboru konvergence. Vypočtěte, čemu se rovná limita posloupnosti částečných součtů zadané řady.

Cvičení 2.17
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|}{(8n^2+x^2)^{3/2}}\right)$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.18
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3x^2 \mathrm{e}^{-n|x|}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.19
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2|x|} \operatorname{arctg}(x)$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.20
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.21
Určete definiční obor a derivaci funkce

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

Cvičení 2.22
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\,n^5 x}{3^n(3n^2+x^2)^2}$$

na jejím oboru konvergence.

Cvičení 2.23
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Cvičení 2.24
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\,x^n$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Cvičení 2.25
Rozhodněte, zda platí následující rovnost:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'.$$

Cvičení 2.26
Rozhodněte, zda platí následující rovnost:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 2.27
Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)\,x^n$ konverguje na množině $\langle 0,1\rangle$ absolutně (bodově), dále stejnoměrně, ovšem nikoliv regulárně.

Cvičení 2.28
Vyvraťte, nebo dokažte tvrzení, že stejnoměrně konvergentní řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nx^2}$$

nekonečně diferencovatelných funkcí má na $\mathbf{R}$ součet, který není diferencovatelný v bodě $x=0$.

Cvičení 2.29
Vypočtěte

$$\lim_{x\to 1_-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}.$$

Cvičení 2.30
Vypočtěte

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}.$$

Cvičení 2.31
Vypočtěte

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 2.32
Dokažte větu 2.2.33.

Cvičení 2.33
Dokažte větu 2.3.7.

Cvičení 2.34
Stanovte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p},$$

kde $p\in\mathbf{R}$ je parametr.

Cvičení 2.35
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Cvičení 2.36
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Cvičení 2.37
Stanovte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n,$$

kde $a > 0$ je parametr.

Cvičení 2.38
Stanovte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$

kde $a > 1$ je parametr.

Cvičení 2.39
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Cvičení 2.40
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n.$$

Cvičení 2.41
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n,$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

Cvičení 2.42
V závislosti na hodnotě parametru $\beta \in \mathbf{R}^+$ vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\beta^n + n}.$$

Cvičení 2.43
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{a^n + b^n} x^n,$$

kde $a, b > 0$ jsou parametry.

Cvičení 2.44
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{\ln(n)}}.$$

Cvičení 2.45
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-3)!!!}{(3n+1)!!!}(x-3)^n,$$

kde $n!!! := n(n-3)(n-6)\dots 1$.

Cvičení 2.46
Vyšetřete obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25^n}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^3 (x+3)^{2n}.$$

Cvičení 2.47
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^{2n}.$$

Cvičení 2.48
Rozhodněte, zda je možno řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{x+\sqrt{n^3+x^2}}{n^{3/2}}\right)$$

derivovat na množině $(0,\infty)$ člen po členu.

Cvičení 2.49
Vypočtěte

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1}.$$

Korektně zdůvodněte!

Cvičení 2.50
Ukažte, že řada funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

nekonveguje na svém oboru konvergence stejnoměrně, ačkoliv nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci je splněna.

Cvičení 2.51
Vypočtěte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(1-\frac{x^2}{2}\right)^n x^{2n+1}\,dx.$$

Korektně zdůvodněte!

Cvičení 2.52
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x}{3n + x^4}$$

na množině $M = \langle 0, \infty)$.

Cvičení 2.53
Nechť je dána řada funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}.$$

Sestavte příslušnou posloupnost jejích částečných součtů a poté pomocí definice rozhodněte o stejnoměrné konvergenci zadané řady na množině $M = (0, \infty)$. Uvažte, jakého kritéria lze při tomto postupu užít.

Cvičení 2.54
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^n}{2n}$$

a rozhodněte, zda na něm zadaná řada konverguje stejnoměrně. Korektně zdůvodněte!

Cvičení 2.55
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{x^2 + x^4 + n^4}{x^4 + n^4} \right)$$

na množině všech reálných čísel.

Cvičení 2.56
Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x \ln(n)}{n(x^2 + n^2)}$$

na množině $M = \langle 0, \infty)$.

Cvičení 2.57
Nalezněte obor konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^3 - x)^n}{6^n \ln(n)}.$$

Cvičení 2.58
Nalezněte řadu funkcí, která vznikne na množině $M = \langle -10^8, 10^8 \rangle$ derivací řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2 + x^2)}{\ln^2(n)}$$

člen po členu. Řádně ověřte, zda jsou splněny podmínky pro příslušnou záměnu.

Cvičení 2.59
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^n}{n^n} x^n.$$

Cvičení 2.60
Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{2x}{48 + n^2x^4} \, \mathrm{d}x.$$

Užijte Dirichletovo kritérium a znalosti rozvoje funkce $\ln(1+x)$.

Cvičení 2.61
Dirichletovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{x \ln(n)}{n(x^2+n^2)}$$

na množině $M = \langle 0, \infty)$.

Cvičení 2.62
Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)!}{n!(n+3)!} \frac{(x-1)^n}{2^n}.$$

Cvičení 2.63
Na množině $\mathbf{R}$ vyvraťte stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{x^2+n^2},$$

víte-li, že jejím součtem je funkce

$$s(x) = \frac{\pi x \operatorname{cotgh}(\pi x) - 1}{2x}.$$

Cvičení 2.64
Abelovým kritériem rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^n}{2n+1}$$

na množině $M = \langle 0, 1\rangle$. Dále popište, jakým jiným postupem lze stejnoměrnou konvergenci pro tento případ vyšetřit.

Cvičení 2.65
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{nx\ln(n)}{4n^4 + x^4 + n^2x^2}$$

na množině $M = (-\infty, \infty)$.

Cvičení 2.66
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^2}{\sqrt{n^6+x^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$. Řádně zdůvodněte!

Kapitola 3

Taylorův rozvoj funkce jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat hledáním polynomických funkcí, které jsou ekvivalentní vybraným funkcím jedné proměnné. Jak uvidíme později, bude možno některé funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ nahradit na okolí vybraného bodu $c \in \mathrm{Dom}(f)$ mocninnou řadou tak, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = f(x).$$

Takové funkce, pro které zmíněný mocninný ekvivalent existuje, budeme nazývat funkcemi analytickými. Náhrada libovolné funkce mocninnou řadou má celou řadu výhod, především při odhadování jejich hodnot, počítání limit apod.

3.1 Totální diferenciál funkce jedné proměnné

V prvním oddíle třetí kapitoly zavedeme pomocný pojem totálního diferenciálu funkce jedné proměnné. Ačkoliv pro funkci jedné proměnné není tento pojem tak zásadní, pro funkce více proměnných bude hrát klíčovou roli. My jeho znalosti užijeme především v následující kapitole, jež se bude věnovat řešení diferenciálních rovnic.

3.1.1 Definice

Nechť je funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí bodu $a \in \mathbf{R}$. *Totálním diferenciálem* funkce $f(x)$ v bodě a nazýváme lineární funkci $\mathrm{d}f_a(h)$ tvaru

$$\mathrm{d}f_a(h) = \alpha h,$$

kde $\alpha \in \mathbf{R}$, pro niž na jistém okolí bodu $h = 0$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + \eta(h),$$

přičemž

$$\lim_{h \to 0} \frac{\eta(h)}{h} = 0. \tag{3.1}$$

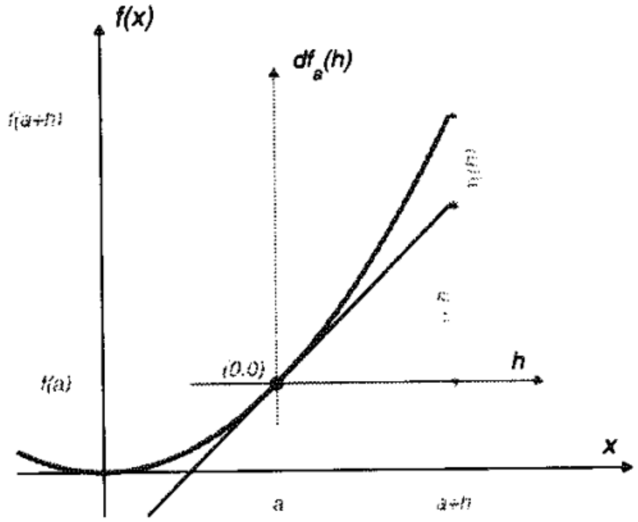
Jestliže taková funkce s vlastnostmi uvedenými výše existuje, říkáme, že *funkce $f(x)$ má v bodě a totální diferenciál* $\mathrm{d}f_a(h)$.

3.1.2 Poznámka

Funkci $\eta(h)$ z předešlé definice někdy nazýváme *zbytkovou funkcí*. Jak je patrno, popisuje zbytková funkce, jako hodně se lineární odhad $\mathrm{d}f_a(h) = \alpha h$ funkce $f(x)$ liší od jejího skutečného chování (na okolí bodu a.)

3.1.3 Poznámka

Lineární funkce
$$\mathrm{d}f_a(h) = \alpha h$$
představuje lineární aproximaci funkce $f(x)$ na okolí bodu $a \in \mathbf{R}$. Souřadný systém $\mathcal{O}hs$ pro totální diferenciál $s = \mathrm{d}f_a(h)$ je posunut vůči počátku systému Oxy o vektor $(a, f(a))$. Přímka $\mathrm{d}f_a(h) = \alpha \cdot h$ tedy prochází bodem $(a, f(a))$.



Obrázek 3.1
Grafická reprezentace totálního diferenciálu $\mathrm{d}f_a(h)$ funkce jedné proměnné.

Nejedná se ale o libovolnou přímku jdoucí tímto bodem, nýbrž o takovou, že zbytková funkce $\eta(h)$, popisující rozdíl mezi lineární aproximací $\alpha \cdot h$ a skutečnou funkcí $f(x)$, dává po dělení hodnotou h v limitě pro $h \to 0$ nulu, t.j.
$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{h} = 0.$$
To vlastně značí, že (pokud ovšem příslušná derivace existuje)
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha \cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\alpha \cdot h}{h} = f'(a) - \alpha = 0.$$
Tedy $f'(a) = \alpha$. Tudíž sklon totálního diferenciálu je α, čili přímka αh je tečnou ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(a, f(a))$. Korektněji bude tato otázka probrána v následující větě.

3.1.4 Věta – *věta o totálním diferenciálu*

Nechť funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ má v bodě $a \in \mathbf{R}$ totální diferenciál $\mathrm{d}f_a(h) = \alpha h$. Pak je funkce $f(x)$ v bodě a spojitá a má v něm derivaci. Navíc platí
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Důkaz:

- podle definice totálního diferenciálu platí pro $h \to 0$
$$\left|f(a+h) - f(a)\right| = \left|\alpha \cdot h + \eta(h)\right| \leqslant |\alpha| \cdot |h| + |\eta(h)| \to 0$$
- to dokazuje spojitost funkce $f(x)$ v bodě a
- dále
$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \alpha\right| = \left|\frac{f(a+h) - f(a) - \alpha \cdot h}{h}\right| = \frac{|\eta(h)|}{|h|}$$
- pravá strana má podle definice 3.1.1 pro $h \to 0$ limitu rovnou nule
- to ovšem značí, že
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$$

3.1.5 Příklad

Rozhodněme, zda má funkce $f(x) = x^2$ v bodě $a = 1$ totální diferenciál. Pokud by totální diferenciál v tomto bodě existoval, nutně by podle věty 3.1.4 měl podobu

$$\mathrm{d}f_1(h) = 2h.$$

Pak by ale zbytkovou funkcí byla funkce $\eta(h) = (1+h)^2 - 1 - 2h$. Dále snadno nahlédneme, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0,$$

což završuje důkaz, že zkoumaná funkce skutečně má v bodě $a = 1$ totální diferenciál. K jejímu grafu tedy v bodě $a = 1$ existuje tečná přímka

$$y = f(a) + \mathrm{d}f_1(h) = 1 + 2h = 1 + 2(x-1) = 2x - 1.$$

3.2 Taylorův vzorec

Probereme nyní možnost aproximovat chování libovolné funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jedné proměnné vhodným polynomem. Přitom se také budeme zabývat otázkou, jak přesná tato aproximace bude.

3.2.1 Věta

Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $f(x)$ je funkce třídy $\mathscr{C}^n\langle a, b\rangle$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) existuje také $f^{(n+1)}(x)$. Nechť dále c, x jsou dva různé body ležící v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje bod ξ, ležící mezi body c a x tak, že platí

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_{n+1}(x), \tag{3.2}$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \tag{3.3}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- označme J uzavřený interval s krajními body c a x
- položme
$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{\dot f(t)}{1!}(x-t) - \frac{\ddot f(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
- zřejmě $F(x) = 0$ a $F(c) = R_{n+1}(x)$
- v intervalu J má funkce $F(t)$ derivaci
$$\dot F(t) = -\dot f(t) - \left(-\dot f(t) + \ddot f(t)\frac{x-t}{1!}\right) - \left(-\ddot f(t)\frac{x-t}{1!} + f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\right) - \ldots -$$
$$- \left(-f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) - \left(-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n}}{n!}\right).$$
- v této rovnosti se první člen v každé závorce zruší se členem stojícím před ním
- proto
$$\dot F(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$
- protože $F(t)$ má derivaci na intervalu J°, je tudíž na něm $F(t)$ spojitá
- nechť $\varphi(t)$ je libovolná funkce spojitá na intervalu J, mající na J° derivaci

- podle jisté věty (viz [9], strana 274, věta 234) existuje uvnitř intervalu J° číslo ξ tak, že

$$\frac{F(x)-F(c)}{\varphi(x)-\varphi(c)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

- to značí, že

$$R_{n+1}(x)=f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{\varphi'(\xi)}\,\frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

- toto tvrzení platí pro jakoukoli funkci $\varphi(x)$ splňující výše uvedené požadavky
- zvolíme-li $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$, dostáváme

$$R_{n+1}(x)=f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}\,\frac{(x-\xi)^n}{n!}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

3.2.2 Definice

Rovnost (3.2) nazýváme *Taylorovým vzorcem* funkce $f(x)$ v bodě c a číslo (3.3) *Lagrangeovým zbytkem v Taylorově vzorci* funkce $f(x)$ po $n-$ tém členu. Polynom

$$\mathcal{T}_f^n(x):=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

pak nazýváme *Taylorovým polynomem* řádu n funkce $f(x)$ v bodě c. Je-li $c=0$, užíváme ve všech právě definovaných pojmech místo označení Taylorův označení *Maclaurinův*.

3.2.3 Poznámka

Taylorův polynom řádu n nemusí nutně být stupně n. Je-li totiž $f^{(n)}(c)=0$, nejvyšší ($n-$tá) mocnina v polynomu $\mathcal{T}_f^n(x)$ nevystupuje, a $\mathcal{T}_f^n(x)$ má tudíž stupeň nižší než n.

3.2.4 Příklad

Pokusme užitím teorie o Taylorových rozvojích vyčíslit hodnotu čísla $\ln(3/2)$. Užijeme pro tento účel např. funkce

$$f(x)=\ln(x+1).$$

Nalezneme nejprve Maclaurinův polynom řádu např. $n=4$ a vyčíslíme pak příslušnou chybu. Ve větě 3.2.1 tedy klademe $a=-1/2$, $b=1$ (například), dále $c=0$ a $x=1/2$, neboť chceme vyčíslovat hodnotu $\ln(3/2)=\ln(1/2+1)$. Snadno pak nahlédneme, že $f(0)=0$ a dále

$$f'(x)=\frac{1}{x+1},\qquad f'(c)=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2},\qquad f''(c)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3},\qquad f'''(c)=2$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(x+1)^4},\qquad f^{(4)}(c)=-6.$$

Odtud pak

$$\ln(x+1)=\mathcal{T}_f^4(x)+R_{n+1}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+R_{n+1}(x)$$

a následně

$$\ln(3/2)\approx\mathcal{T}_f^4(1/2)=\frac{77}{192}\approx 0.401042.$$

Tím jsme získali odhad čísla $\ln(3/2)$. Zbývá ale rozřešit otázku, do jaké míry je tento odhad přesný. Skutečná hodnota zbytku je sice teoreticky vyjádřena ve větě 3.2.1 jako

$$R_5(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-c)^5,$$

ale o skutečné hodnotě čísla ξ víme jen to, že leží kdesi v intervalu $(0, 1/2)$. Tedy je jasné, že skutečnou chybu nejsme schopni najít. Zkusíme tedy nalézt alespoň odhad této chyby. Označme ho např. $\mathcal{R}_5(x)$. Chceme, aby

$$R_5(x) \leqslant \mathcal{R}_5(x).$$

Jelikož $x = 1/2$ a $c = 0$, platí

$$R_5(1/2) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{5} \frac{1}{(\xi + 1)^5} \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

K určení odhadu $\mathcal{R}_5(x)$ nyní užijeme diferenciálního počtu. Jelikož je funkce $g(\xi) = (\xi + 1)^{-5}$ zjevně klesající, nastává její supremum, které hledáme na intervalu $(0, 1/2)$, právě v jeho levém krajním bodě. Tedy

$$\mathcal{R}_5(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sup_{x \in (0, 1/2)} g(\xi) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.00625.$$

Uzavíráme tedy, že

$$\ln(3/2) = 0.4010 \pm 0.0063,$$

což plně odpovídá skutečnosti, neboť skutečnou hodnotou je

$$\ln(3/2) = 0.405465\ldots.$$

Nyní ponecháváme na čtenáři, aby rozvážil, jak dosáhnout zpřesnění dosaženého výsledku.

3.3 Teorie Taylorových řad

Zkonstruujeme nyní Maclaurinovy rozvoje všech elementárních funkcí. Za tímto účelem nejprve vyslovíme důležitou větu, jež bývá nazývána větou Taylorovou.

3.3.1 Definice

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na jistém okolí $U(c)$ bodu $c \in \mathbf{R}$. Nechť na tomto okolí platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n. \tag{3.4}$$

Potom řadu (3.4) nazýváme *Taylorovou řadou funkce $f(x)$ se středem v bodě $c \in \mathbf{R}$*. Speciálně pro $c = 0$ mluvíme o tzv. *Maclaurinově řadě*. Funkci $f(x)$, kterou lze na nějakém okolí bodu c zapsat ve tvaru (3.4), nazýváme *funkcí analytickou v bodě c*.

3.3.2 Věta – *Taylorova*

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je analytická v bodě $c \in \mathbf{R}$. Potom funkce $f(x)$ má v bodě c derivace všech řádů a pro koeficienty a_n její Taylorovy řady se středem v bodě c platí:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c). \tag{3.5}$$

Důkaz:

- předpokládejme, že na jistém $U(c)$ platí rovnost (3.4)
- dosadíme-li do této rovnice $x = c$, dostáváme $f(c) = a_0$, čili

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(c)}{0!}$$

- postupným derivováním rovnosti (3.4) člen po členu získáme pro k–tou derivaci funkce $f(x)$ rovnost

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n (x-c)^{n-k}$$

- po dosazení $x = c$ dostáváme $f^{(k)}(c) = k!\, a_k$, a tedy

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

3.3.3 Poznámka

Po důkazu předešlé věty lze (poněnud populárněji) tvrdit, že Taylorova řada je vlastně Taylorův rozvoj do polynomu nekonečného stupně. Tedy každou analytickou funkci lze na okolí bodu rozepsat jako lineární kombinaci prvků nekonečné množiny $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$. Prostor analytických funkcí společně s jejich sčítáním a násobením skalárem proto tvoří nekonečnědimenzionální vektorový prostor s bází

$$(1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots).$$

3.3.4 Definice

Nechť $a \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}$. Pak definujeme *zobecněné kombinační číslo* předpisy

$$\binom{a}{0} := 1, \qquad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

3.3.5 Definice

Nechť $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Pak *dvojným faktoriálem* čísla m rozumíme číslo definované předpisem

$$n!! := \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor} (n - 2i).$$

3.3.6 Příklad

Postupně budeme hledat Maclaurinovy rozvoje elementárních funkcí. Zahájíme základními goniometrickými funkcemi $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Funkce $\sin(x)$ má v bodě $c = 0$ nenulové pouze liché derivace (jde o lichou funkci), tedy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.6}$$

zatímco u funkce $\cos(x)$ jsou nenulové pouze sudé derivace (sudá funkce). Odtud

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.7}$$

V obou případech je poloměrem konvergence plus nekonečno, jak se lze přesvědčit triviálním výpočtem, a proto je příslušným oborem konvergence množina všech reálných čísel, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Proto, abychom ale mohli s určitostí tvrdit, že ve vztazích (3.6) a (3.7) je možno psát rovnítka, bude ještě nutno rozhodnout, zda součtem příslušné Maclaurinovy řady je skutečně výchozí funkce. To bude námětem dalšího textu (viz poznámka 3.3.14 a dále).

3.3.7 Příklad

Hledejme nyní Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$. To je velice jednoduché, neboť pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí, že $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, potažmo $f^{(n)}(0) = 1$. Proto je příslušnou Maclaurinovou řadou řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Opět zcela triviálně nahlédneme, že řada konverguje pro všechna reálná x, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

3.3.8 Příklad

Nechť nyní $f(x) = \ln(1 + x)$. Snadno pak pro $n \in \mathbf{N}$ ukážeme rovnosti

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Proto je hledanou Maclaurinovou řadou funkce $f(x) = \ln(1+x)$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{3.8}$$

Vypočteme nejprve její poloměr konvergence. To lze snadno, neboť

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vyšetření bodové konvergence v krajních bodech intervalu konvergence, a sice v bodech $|x| = \mathrm{R} = 1$, je banální. Uzavíráme proto, že oborem konvergence řady (3.8) je množina $\mathcal{O} = (-1, 1\rangle$.

3.3.9 Příklad

Při hledání Maclaurinovy řady funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ užijeme drobného zjednodušení. Derivací funkce $f(x)$ získáme funkci

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

na kterou lze nahlížet jako na součet geometrické řady mající kvocient $-x^2$ a první člen roven jedné. Takovou řadou je jistě řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Proto tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Zpětnou integrací získáme pak hledanou rovnost

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{C},$$

kde ale $\mathrm{C} = 0$ díky skutečnosti, že $\operatorname{arctg}(0) = 0$. Zbývá vyšetřit obor konvergence. To je opět snadné, neboť

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Pak snadno nahlédneme, že

$$\mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle.$$

3.3.10 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr. Snadno určíme, že

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}.$$

Tedy $f(0) = 1$ a $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$. Odsud

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$

Užijeme-li definice 3.3.4, dosáváme pak zeštíhlený zápis tvaru

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Určení oboru konvergence bude poněkud rozsáhlejší, než jsme byli zvyklí v předešlých úlohách, neboť obor konvergence $\mathcal{O}$ bude závislý na hodnotě parametru α. Zahajíme nejprve nejjednodušším případem, kdy $\alpha \in \mathbf{N}$. Tehdy jsou ale od určitého n všechna zobecněná kombinační čísla nulová. Tudíž zkoumaná řada je fakticky konečná, proto konverguje všude v $\mathbf{R}$. Závěr tedy je, že

$$\mathcal{O} = \mathbf{R}.$$

Tentokrát vyberme hodnotu parametru α z množiny kladných reálných čísel (ovšem vyjma již zkoumaných přirozených čísel), tj. $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$. Poloměr konvergence zkoumané řady je v tomto případě roven jedné ($\mathrm{R} = 1$), neboť

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1.$$

V pravém krajním bodě $x = \mathrm{R} = 1$ vyšetříme absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ Raabeovým kritériem

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right) = 1 + \alpha > 1.$$

Povšimněme si, že pro $n \to \infty$ číslo n od určité hodnoty převýší pevně zvolené $\alpha > 0$, proto se absolutní hodnota upravuje tak, jak je uvedeno výše. Z Raabeova kritéria konverguje tedy jak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Uzavíráme, že pro $\alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$ je oborem konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

je uzavřený interval

$$\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle.$$

Nyní přejděme k záporným hodnotám parametru α, tj. $\alpha < 0$. Poloměr konvergence je i v tomto případě roven jedné (viz předešlý případ). Nejprve budeme zkoumat konvergenci této řady v levém krajním bodě $x = -1$. Zde platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!},$$

kde jsme položili $\beta := -\alpha > 0$. Jde o řadu s kladnými členy. Užijeme opětovně Raabeovo kritérium

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)(n+\beta)} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+1}{n+\beta} - 1 \right) = 1 - \beta < 1.$$

Řada tudíž diverguje. Pro $x = 1$ se pokusíme prokázat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!}$$

Leibnizovým kritériem. Leibnizova podmínka $|a_{n+1}| \leqq |a_n|$ je splněna, pokud

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)(n+\beta)}{(n+1)!} < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!},$$

resp. pokud

$$n + \beta < n + 1,$$

čili $\beta < 1$. Pro $\beta \geqslant 1$, tj. $\alpha \leqslant -1$, řada diverguje. Pro $\beta \in (0,1)$ je ještě nutno ověřit druhou Leibnitzovu podmínku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!} = 0.$$

Ta ale platí, jak jsme vypočetli v příkladu 1.3.17. Závěrem tedy je, že

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant -1 \quad &\dots \quad \mathcal{O} = (-1, 1) \\ \alpha \in (-1, 0) \quad &\dots \quad \mathcal{O} = (-1, 1\rangle. \end{aligned}$$

3.3.11 Příklad

Nalezněme nyní Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \arcsin(x)$. Funkci nejprve zderivujeme a užijeme výsledku příkladu 3.3.10. Odtud

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}(-1)^n \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ n \end{array} \right) x^{2n}.$$

Navíc

$$(-1)^n \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ n \end{array} \right) = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\ldots\frac{2n-1}{2}}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\, n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}.$$

Opět zintegrujeme s výsledkem

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{C},$$

kde $\mathrm{C} = 0$, neboť $\arcsin(0) = 0$. Uzavíráme tedy tvrzením, že hledanou řadou je řada

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Nalezněme ještě obor konvergence této řady. Poloměr konvergence je roven jedné, neboť

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\, \frac{2n+1}{2n+3}\, \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = 1.$$

Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{1}{2n+1}$ a $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{1}{2n+1}$ z obou krajních bodů intervalu konvergence konvergují absolutně podle Raabeova kritéria, jelikož

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Uzavíráme tedy, že $\mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$.

3.3.12 Poznámka

Pro přehlednost v této poznámce sumarizujeme Maclaurinovy řady vybraných elementárních funkcí.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad \mathcal{O} = (-1, 1\rangle$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathcal{O} = \mathbf{R}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n, \qquad \mathcal{O} = \begin{cases} \mathbf{R} & \ldots \ \alpha \in \mathbf{N}_0 \\ \langle -1, 1 \rangle & \ldots \ \alpha \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1 \rangle & \ldots \ \alpha \in (-1, 0) \\ (-1, 1) & \ldots \ \alpha \leqslant -1 \end{cases}$$

3.3.13 Příklad

Pokusme se určit Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = 1 + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \tag{3.9}$$

a rozhodnout o jejím oboru konvergence. Nejprve tedy funkci $f(x)$ zderivujeme a využijeme již známý rozvoj funkce $(1+x)^a$ pro $a = -1/2$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Zpětným integrováním dostáváme

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathtt{C}.$$

Pomocí známé hodnoty funkce $f(0) = 1$ určíme hodnotu konstanty $\mathtt{C} = 1$. Dále vyšetříme obor konvergence. Pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence vypočteme

$$\mathtt{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$

Proto je poloměr konvergence roven jedné, čili $\mathtt{R} = 1$. V levém krajním bodě $x = -\mathtt{R} = -1$ má redukovaná řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

O absolutní konvergenci této číselné řady rozhodneme Raabeovým kritériem. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

podle Raabeova kritéria řada konverguje. V pravém krajním bodě musí řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$$

také konvergovat, a to podle věty o absolutní konvergenci číselných řad. Uzavíráme tedy, že hledanou Maclaurinovou řadou funkce (3.9) je řada

$$1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

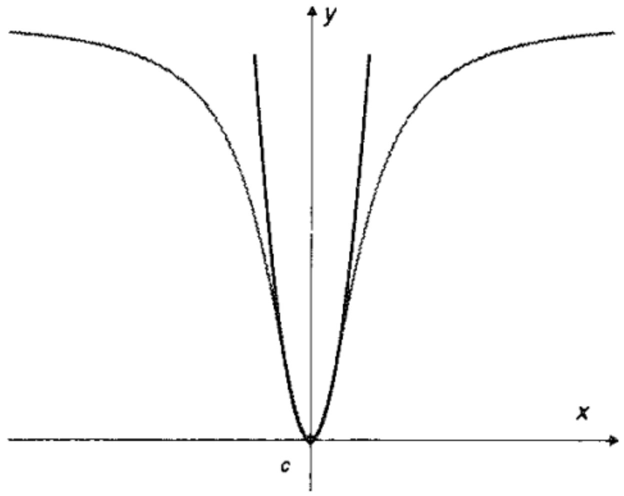
s definičním oborem $\mathrm{Dom}(f) = \mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$.

3.3.14 Poznámka

Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě $c \in \mathbf{R}$ všechny derivace, potom ji můžeme odhadnout mocninnou řadou na pravé straně rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{3.10}$$

Její součet však nemusí obecně být pro každé $x \in \mathcal{O}$ roven hodnotě $f(x)$. To je zcela zásadní poznatek a lze ho nahlédnout z faktu, že změníme-li funkci $f(x)$ vně jistého okolí bodu c (viz ilustrační obrázek níže), na jejích derivacích v bodě c se nic nezmění. Tedy Taylorova řada bude táž.

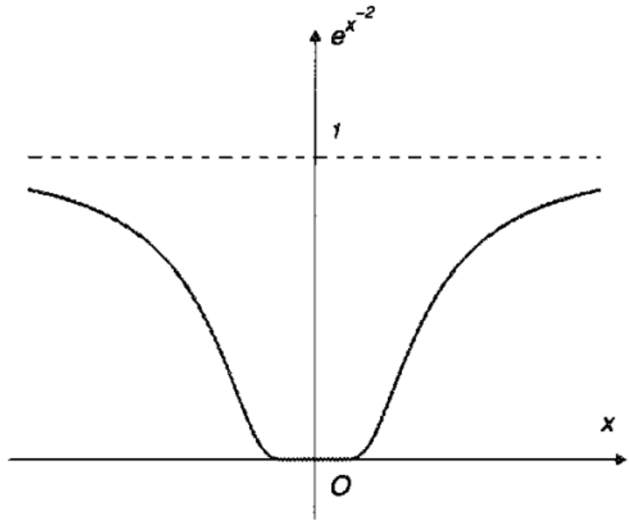


Obrázek 3.2
Funkce mající stejný Taylorův rozvoj v bodě c.

3.3.15 Příklad

Ukážeme nyní funkci $f(x)$, pro kterou bude rovnost (3.10) platit dokonce pouze v bodě c, ačkoliv pro její Taylorovu řadu platí $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Definujme funkci $f(x)$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \dots \quad x \neq 0 \\ 0 & \dots \quad x = 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.3
Graf funkce, která není analytická v bodě $x = 0$.

Budeme nyní hledat její Maclaurinovu řadu. Definujeme nejprve funkci

$$g(x) = \frac{1}{x^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

pro přirozené n. Budeme zkoumat její limity v nule. Po substituci $x = t^{-1}$ a násobné aplikaci l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = \lim_{t\to\infty} t^n e^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{nt^{n-2}}{2e^{t^2}} = \frac{n(n-2)t^{n-4}}{4e^{t^2}} = \ldots = 0.$$

A podobně lze ukázat, že také $\lim_{x\to 0_-} g(x) = 0$. Tedy celkem $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Funkce $f(x)$ má následující derivace

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

a tak dále. Tyto jsou tvořeny pouze výrazy typu funkce $g(x)$. Proto pro všechna přirozená $n \in \mathbf{N}_0$ platí, že $f^n(0) = 0$. Maclaurinovým rozvojem funkce $f(x)$ je proto řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

která konverguje na množině všech reálných čísel, tj. $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Jedná se, jak je patrno, o nulovou funkci. Posuďte nyní sami, jak velice se Maclaurinova řada liší od zadané funkce.

3.3.16 Poznámka

Při hledání Taylorovy řady (v bodě c) zadané funkce $f(x)$ je tedy třeba provést následující kroky:

- vypočítat hodnoty všech derivací funkce, tj. $f^{(n)}(c)$
- sestavit příslušnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \tag{3.11}$$

- vyšetřit obor konvergence $\mathcal{O}$ řady (3.11), neboť pouze tam eventuálně může být řada (3.11) Taylorovou řadou funkce $f(x)$
- rozhodnou, zda součtem řady (3.11) je skutečně výchozí funkce $f(x)$.

Pouze za těchto předpokladů lze prohlásit, že řada (3.11) je Taylorovou řadou funkce $f(x)$ v bodě c a že pro všechna $x \in \mathcal{O}$ platí rovnost (3.10). Jakými metodami lze rozhodnout, zda řada (3.11) skutečně konverguje k funkci $f(x)$? O tom bude pojednávat následující text.

3.3.17 Věta

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $c \in \mathbf{R}$ derivace všech řádů. Potom mocninná řada (3.11) je konvergentní a má součet $f(x)$ právě pro taková $x \in \mathbf{R}$, pro která platí, že

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Lagrangeův zbytek po n členech Taylorova vzorce (viz věta 3.2.1).

Důkaz:

- z věty 3.2.1 plyne, že

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_{n+1}(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$$

- řada (3.11) je konvergentní a má součet $f(x)$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} T_f^n(x) = f(x)$, t.j. když

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[f(x) - T_f^n(x)\right] = f(x) - f(x) = 0$$

- tím je tvrzení dokázáno

3.3.18 Věta

Nechť funkce $f(x)$ má na nějakém okolí $U(c)$ bodu $c \in \mathbf{R}$ spojité derivace všech řádů a nechť $x \in U^*(c)$. Předpokládejme dále, že existuje $\mathtt{K} \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé číslo t z otevřeného intervalu s krajními body c, x a pro všechna n platí

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \mathtt{K}.$$

Potom pro Lagrangeův zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci platí $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Důkaz:

- vyjdeme z Lagrangeova tvaru zbytku (viz věta 3.2.1)

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

- za daných předpokladů platí

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \leqslant \frac{\mathtt{K}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

- chceme nyní ukázat, že limita pravé strany je nula
- to prokážeme tak, že nejprve dokážeme konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathtt{K}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \tag{3.12}$$

  a poté užijeme nutné podmínky bodové konvergence 2.1.15
- podle ní bude pak platit, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{K}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} = 0,$$

  a tudíž také $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, a z věty 3.3.17 pak přímo vyplyne dokazované tvrzení
- jak je patrno, řada (3.12) konverguje například z podílového kritéria, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{K}|x-c|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{\mathtt{K}|x-c|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-c|}{n+2} = 0 < 1.$$

3.3.19 Poznámka

Za zmínku stojí také následující úvaha. Je-li součtem řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ funkce $s(x)$, pak Taylorovou řadou funkce $s(x)$ v bodě c je pouze a jedině řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. To značí, že jednoduchou možností, jak ověřit, je-li některá z řad Taylorovou řadou dané funkce, je prostě zjistit její součet a porovnat ho s výchozí funkcí. Rovnají-li se tyto, pak byl proces sestavování Taylorovy řady úspěšný. Jak bylo demonstrováno v příkladě 3.3.15, ne vždy povede tento proces k vysněnému cíli. Vyslovíme, nicméně, následující větu, která matematicky shrnuje sérii předešlých úvah.

3.3.20 Věta

Nechť je dána mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \tag{3.13}$$

na množině $M \ni c$. Nechť je funkce $s(x)$ součtem této řady na množině M. Pak Taylorovou řadou funkce $s(x)$ v bodě c je právě řada (3.13).

Důkaz:

- z Taylorovy věty 3.3.2 víme, že každá funkce má nejvýše jednu Taylorovu řadu (v jednom pevně zvoleném bodě c)

- z předpokladů věty víme, že na množině M platí rovnost

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

- dále snadno $s(c) = a_0$, $s'(c) = a_1$, $s''(c) = 2a_2$ atd.
- tedy celkem

$$s^{(n)}(c) = n!\, a_n$$

- Taylorova řada funkce $s(x)$ má tedy podle věty 3.3.2 tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{n!} (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = s(x)$$

- to kompletuje důkaz

3.3.21 Příklad

Završíme nyní úlohu hledání Maclaurinovy řady funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Jelikož pro jejich derivace zcela jistě platí nerovnosti

$$\left| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (\sin(x)) \right| = \left| \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (\cos(x)) \right| \leqslant 2,$$

jsou všechny derivace omezené na $\mathbf{R}$, a tudíž podle věty 3.3.18 je limita Lagrangeova zbytku v Taylorově vzorci nulová, a máme tedy (skutečně až nyní na tomto místě) oprávnění vložit mezi symbol funkce a příslušnou řadu znaménko rovnosti. Uzavíráme tedy slavnostně celý rozsáhlý výpočet jednoduchými rovnostmi

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

3.3.22 Příklad

Podobně jako v předcházejícím příkladu se nyní pokusíme ověřit, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.14}$$

je skutečně Maclaurinovou řadou exponenciální funkce e^x. Vycházíme přitom z výsledků příkladu 3.3.7. K dosažení našeho cíle užijeme věty 3.3.20 a poznámky 3.3.19. Hledejme tedy funkci $s(x)$, která je součtem řady (3.14). To jest

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Na oboru konvergence $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ lze řadu derivovat člen po členu. Takto získáme diferenciální rovnici

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = s(x).$$

Řešením diferenciální rovnice

$$s'(x) - s(x) = 0$$

je, jak je jednak triviálně patrno a jednak bude důkladně probráno v následující kapitole, systém funkcí

$$s(x) = \mathsf{C}\, \mathrm{e}^x.$$

Konstanta C musí být zvolena tak, aby ve vybraném bodě $x = \gamma$ korespondovaly hodnoty $s(\gamma)$ a $\mathsf{C}\, \mathrm{e}^\gamma$. Zvolme, jako budeme ostatně činit téměř vždy, $\gamma = 0$. Srovnáváme tedy hodnoty funkcí $s(x)$ a $\mathsf{C}\, \mathrm{e}^x$ v bodě nula. Snadno pak zjistíme, že integrační konstanta C musí být jednotková, neboť jedině tehdy je

$$s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \ldots = 1.$$

Uzavíráme, že hledanou funkcí je funkce $s(x) = \mathrm{e}^x$, a to prokazuje fakt, že

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

3.3.23 Příklad

U funkce $f(x) = \ln(1+x)$ je situace ještě jednodušší. Její derivací totiž získáme sadu rovností

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{3.15}$$

Zde jsme využili faktu, že pro $|x| < 1$ je součtem geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ právě funkce $\frac{1}{1+x}$. Čteno v obráceném pořadí to vlastně znamená, že Maclaurinovou řadou funkce $\frac{1}{1+x}$ je řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Zpětnou integrací vztahu (3.15) pak snadno zjišťujeme, že

$$\ln(1+x) + \mathsf{C} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{x^m}{m},$$

kde C je doposud hledanou integrační konstantou. Pro $x = 0$ musí ale být tato konstanta volena tak, aby $f(0) = 0$. Proto $\mathsf{C} = 0$ a platí

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

3.3.24 Poznámka

Obdobně lze prokázat, že pro všechny elementární funkce z poznámky 3.3.12 platí v příslušných vztazích skutečně rovnosti.

3.3.25 Tvrzení

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Důkaz:

- důkaz je proveden pomocí tzv. Fubiniovy věty ve skriptech [14]

3.3.26 Tvrzení

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Důkaz:

- Platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

- odsud (viz 3.3.25)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- a dále
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

3.3.27 Příklad

Vypočítejme, čemu se také rovná součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

z tvrzení 3.3.25. Nechť

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Vidíme, že díky vlastnostem mocninných řad lze funkci $s(x)$ derivovat s následujícím výsledkem

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2n-1}.$$

Dále zavedeme novou funkci $h(x) := x\, s'(x)$. Pro ni platí

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Zintegrujeme-li (rozkladem na parciální zlomky) získanou funkci, máme

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \mathrm{C},$$

kde zjevně $\mathrm{C} = 0$. Odsud pak

$$s(x) = \int_{\mathrm{C}}^{x} \frac{1}{2t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

Jelikož ale platí $s(0) = 0$, je konstanta $\mathrm{C} = 0$. Zadaná číselná řada má tutéž hodnotu jako $s(1)$. Uzavíráme tedy, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{1}{2t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

Metodou *per partes* lze ještě ukázat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} \mathrm{d}t.$$

Tento výpočet není zcela triviální, neboť vyžaduje několikanásobnou aplikaci l'Hospitalova pravidla. Doporučujeme čtenáři daný výpočet provést.

3.3.28 Příklad

Taylorových rozvojů lze rovněž použít k výpočtu limit. Uvažme např. limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right].$$

Substitucí $y = x^{-1}$ přejde tato limita na

$$\lim_{y\to 0_+} \frac{\left(1 - y + \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{e}^y - \sqrt{1+y^6}}{y^3}.$$

Dále užijeme známých rozvojů (viz poznámka 3.3.12)

$$\mathrm{e}^y \approx 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!}$$

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1+y^6} \approx 1.$$

Po dosazení pak snadno vychází, že zadaná limita má hodnotu

$$\lim_{y\to 0_+} \frac{\frac{1}{6}y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} a_n y^n}{y^3} = \frac{1}{6} + \lim_{y\to 0_+} \sum_{n=4}^{\infty} a_n y^{n-3} = \frac{1}{6}.$$

3.3.29 Příklad

Hledejme Taylorovu řadu funkce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5+x}}$$

v bodě $x = 3$ a vyšetřeme její obor konvergence. Není velmi obtížné zjistit, že

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n}(5+x)^{-\frac{3n+1}{3}},$$

kde jsme užili symbolu $n!!! = n(n-3)(n-6)(n-9)\ldots$ Pak ale

$$f^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{1}{2}\frac{(3n-2)!!!}{24^n}.$$

Proto je hledanou Taylorovou řadou funkce $g(x)$ řada

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{24^n\, n!}(x-3)^n.$$

Pro převrácenou hodnotu jejího poloměru konvergence pak platí

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)!!!}{24^{n+1}\,(n+1)!}\frac{24^n\, n!}{(3n-2)!!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{24(n+1)} = \frac{1}{8}.$$

Poloměrem konvergence je tedy $\mathrm{R} = 8$. Je dobré si nyní uvědomit, že krajní body intervalu konvergence jsou v tomto případě $x_\ell = -5$ a $x_\wp = 11$. V těchto dvou krajních bodech mají příslušné číselné řady následující tvary.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!} \tag{3.16}$$

v pravém krajním bodě, resp.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}$$

v levém krajním bodě. Jsou to tedy řady velice podobné, a sice v tom smyslu, že kdyby konvergovala druhá z nich, pak by jistě konvergovala i první (podle pravidla o absolutní konvergenci). Konvergenci obou řad vyšetříme zobecněným Raabeovým kritériem 2.1.35. Jelikož je hodnota limity

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}\frac{(3n+3)!!!}{(3n+1)!!!} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+3}{3n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{2}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

z intervalu $(0,1)$, je ze zobecněného Raabeova kritéria jasné, že řada (3.16) konverguje pouze relativně, tudíž že příslušným oborem konvergence je množina $\mathcal{O} = (-5, 11\rangle$.

3.3.30 Poznámka

V této poznámce vyslovíme tzv. *zobecněnou binomickou větu*. Užijeme již dokázané rovnosti

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} x^n$$

platné zcela obecně přinejmenším na intervalu $(-1,1)$. Pokusme se sestavit analogii binomického rozvoje

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

doposud platnou pouze pro $n \in \mathbf{N}$. Snadno nahlédneme, že

$$(a+b)^\gamma = a^\gamma\left(1+\frac{b}{a}\right)^\gamma = a^\gamma \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\gamma}{i}\left(\frac{b}{a}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\gamma}{i} a^{\gamma-i} b^i.$$

Tato rovnost platná přinejmenším pro taková $a, b \in \mathbf{R}$, pro něž

$$\left|\frac{b}{a}\right| \neq 1, \tag{3.17}$$

představuje zobecnění binomické věty tak, jak ji čtenář dosud vnímal. Doporučujeme také zvážit proč je ve vztahu (3.17) nerovnítko namísto na první pohled očekávaného znaku menší než.

3.3.31 Příklad

Pokusme se nalézt součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n}.$$

Označme ho například $s(x)$. Jednoduše lze zjistit, že definičním oborem hledaného součtu bude množina $\mathrm{Dom}(s) = \mathcal{O} = (-1, 1)$, neboť pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence platí rovnost

$$\mathtt{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+2} = 1$$

a divergence v krajních bodech $|x| = 1$ je zřejmá. Označme nyní

$$f(x) = \frac{s(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Jelikož je podle příslušné věty možno tuto řadu na intervalu $\mathcal{O}$ derivovat člen po členu, získáváme rovnost

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2},$$

kde jsme na poslední sumu nahlédli jako na na geometrickou řadu s kvocientem x^2 a prvním členem rovným x. Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x},$$

a proto

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \mathtt{C},$$

kde $\mathtt{C} = 0$, jak lze určit z faktu, že musí platit $f(0) = 0$. Pak tedy $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, odkud pak

$$s(x) = -\frac{x}{2} \ln(1-x^2).$$

Tato funkce je na množině $(-1, 1)$ součtem zadané řady.

3.3.32 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Označme ho $s(x)$. Definičním oborem hledaného součtu bude množina $\mathrm{Dom}(s) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$, neboť pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence platí rovnost

$$\mathtt{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Označme nyní

$$y(x) = \frac{s(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Derivováním pak získáváme první

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

a druhou derivaci

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) \cdot x^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Srovnáním se zadanou řadou pak obdržíme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' - y = 0 \tag{3.18}$$

s nulovou pravou stranou. Ze všech řešení této rovnice ovšem hledáme jenom takové řešení, pro nejž bude platit $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Uvedená rovnice je lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Ačkoliv korektní metody řešení diferenciálních rovnic budou popsány až v následující kapitole, my zde s předstihem užijeme výsledku příkladu 4.5.10, kde bylo vypočteno, že všechna řešení rovnice (3.18) jsou tvaru

$$y(x) = \mathsf{C}_1 \mathrm{e}^{x} + \mathsf{C}_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Okrajové podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ pak vedou ke dvěma rovnicím

$$\mathsf{C}_1 + \mathsf{C}_2 = 1, \qquad \mathsf{C}_1 - \mathsf{C}_2 = 0,$$

jejichž řešením je dvojice $(\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Proto

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = \cosh(x).$$

Příklad tedy uzavíráme finálním tvrzením, že

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = x \cdot \cosh(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

3.3.33 Příklad

V tomto příkladě budeme hledat součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Označme ho $s(x)$. Definičním oborem hledaného součtu bude množina $\mathrm{Dom}(s) = \mathcal{O} = \mathbf{R}$, neboť pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence platí rovnost

$$\mathrm{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Označme nyní

$$f(x) = \frac{s(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Proto

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\mathrm{e}^{x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

3.3.34 Příklad

Jedním z frekventovaných integrálů, které ovšem není možno řešit přímým integrováním, je určitý integrál

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Problém při pokusu řešit ho analyticky spočívá v tom, že primitivní funkce k funkci e^{-x^2} nemá elementární tvar, není tudíž vyjádřitelná jako "klasická" funkce. To je okamžik, kdy s výhodou užijeme teorii o mocninných aproximacích probranou dříve. Zmíněný integrál modifikujeme do často užívaného tvaru

$$\operatorname{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Tuto funkci bývá v matematice zvykem označovat jako *chybovou funkci* nebo anglicky *error function* (odtud zkratka v označení). Postup při stanovení mocninné řady, jež je mocninným ekvivalentem chybové funkce zahájíme hledáním Maclaurinovy řady integrandu. Jak snadno nahlédneme například z poznámky 3.3.12, platí vztah

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Jelikož je na intervalu konvergence možno podle příslušných vět integrovat a derivovat mocninné řady člen po členu, platí také

$$\operatorname{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right]_0^x \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

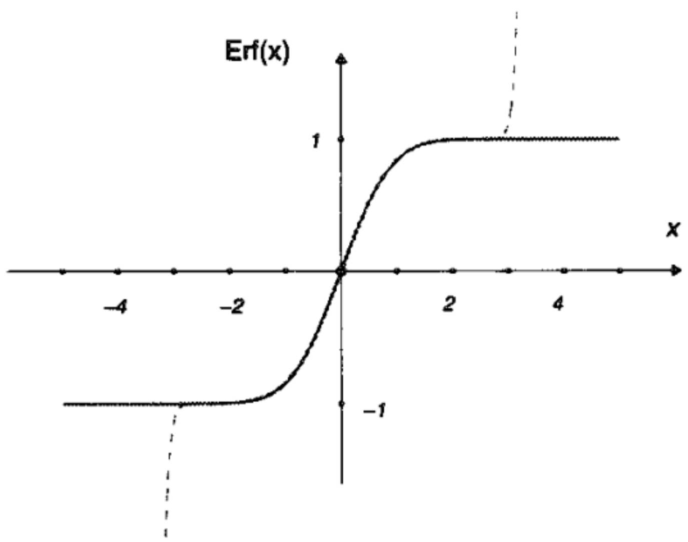
Chceme-li nalézt přibližnou hodnotu chybové funkce, vezmeme prvních $k+1$ členů jejího úplného rozvoje, čímž získáme hodnotu

$$\operatorname{Erf}(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}. \tag{3.19}$$

Zbývá ovšem vyčíslit chybu tohoto přiblížení. Jelikož je ale příslušná Maclaurinova řada řadou střídajících znamének, může být hledaná chyba $R_{k+1}(x)$ odhadnuta absolutní hodnotou následujícího členu, tj. prvního členu, jež nebyl zahrnut do aproximace (3.19). Tedy

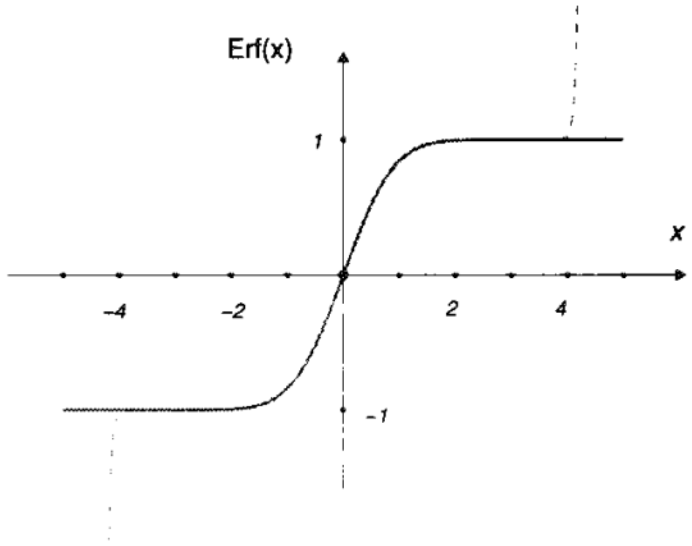
$$R_{k+1}(x) \leqslant \mathcal{R}_{k+1}(x) = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)(k+1)!}.$$

Jak je patrno, odhad chyby $\mathcal{R}_{k+1}(x)$ konverguje pro $k \to \infty$ poměrně rychle k nule, tedy již první aproximace (pro malá k) budou poměrně přesné. Pro ilustraci v následujícím obrázku vykreslujeme průběh chybové funkce.



Obrázek 3.4
Chybová funkce $\operatorname{Erf}(x)$ (plnou čarou) a její aproximace pro $k = 20$ (přerušovanou čarou).

Pro názornou představu níže ilustrujeme způsob konvergence Maclaurinovy řady funkce $\operatorname{Erf}(x)$ pro rostoucí k, tedy pro přesnější aproximaci.



Obrázek 3.5
Chybová funkce $\mathrm{Erf}(x)$ (plnou čarou) a její aproximace pro $k = 40$ (přerušovanou čarou).

3.4 Cvičení

Cvičení 3.1
Rozhodněte, zda má funkce $f(x) = x^3$ v bodě $a = 2$ totální diferenciál. Podrobně zdůvodněte.

Cvičení 3.2
Nalezněte Maclaurinovy řady základních funkcí z poznámky 3.3.12 a stanovte jejich obory konvergence.

Cvičení 3.3
Funkci $f(x) = \ln(\cos(x))$ rozepište do mocninné řady až do členu s x^6 včetně.

Cvičení 3.4
Funkci $f(x) = \sin(\sin(x))$ rozepište do mocninné řady až do členu s x^3 včetně.

Cvičení 3.5
Funkci

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2 + 2x + x^2}\right)$$

rozložte do mocninné řady podle mocnin výrazu $x + 1$.

Cvičení 3.6
Rozkladem na parciální zlomky nalezněte rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

do Maclaurinovy řady a určete její obor konvergence.

Cvičení 3.7
Nalezněte součet $s(x)$ mocninné řady

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cvičení 3.8
Nalezněte součet $s(x)$ mocninné řady

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Cvičení 3.9
Pro mocninnou řadu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ukažte, že platí $y''(x) = y(x)$.

Cvičení 3.10
Integrováním člen po členu vypočtěte součet řady

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + 25x^5 - \dots$$

Cvičení 3.11
Ověřte, že řada funkcí

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

vyhovuje obyčejné diferenciální rovnici $xy'' + y' - y = 0$.

Cvičení 3.12
Derivováním nebo integrováním člen po členu vypočtěte součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Cvičení 3.13
Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,4^n}.$$

Cvičení 3.14
Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2+n}.$$

Cvičení 3.15
S jakou přesností bude vypočtena hodnota $\frac{\pi}{4}$, jestliže použijeme prvních pět členů Maclaurinova rozvoje funkce $\operatorname{arctg}(x)$ pro $x = 1$?

Cvičení 3.16
Metodou neznámých koeficientů nalezněte první čtyři nenulové členy Maclaurinova rozvoje funkce $\operatorname{tg}(x)$.

Cvičení 3.17
Vypočtěte přibližnou hodnotu integrálu

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

pomocí tří nenulových členů příslušného rozvoje a odhadněte chybu.

Cvičení 3.18
Pomocí vhodného Maclaurinova rozvoje vypočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{x^3}.$$

Cvičení 3.19
Vypočtěte přibližně hodnotu čísla $\ln(5)$ pomocí prvních pěti nenulových členů příslušného rozvoje a odhadněte chybu.

Cvičení 3.20
Vypočtěte přibližně hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Návod: Daný integrál upravte s použitím metody *per partes* na jiný integrál. Užijte faktu, že

$$\lim_{x\to 0_+} \ln(x)\operatorname{arctg}(x) = 0.$$

Hodnotu získaného integrálu odhadněte pomocí prvních pěti nenulových členů příslušné řady a stanovte korektní odhad chyby. Dále pomocí vhodného rozvoje dokažte vztah z druhého bodu nápovědy.

Cvičení 3.21
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!}.$$

Cvičení 3.22
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n)!!}\,x^n.$$

Cvičení 3.23
Pomocí vhodné mocninné řady vypočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Cvičení 3.24
Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Cvičení 3.25
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n\,x^{n+1}}{3^n}$$

a určete její součet.

Cvičení 3.26
Funkci

$$f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

rozviňte do Maclaurinovy řady a vyšetřete její obor konvergence.

Cvičení 3.27
Pomocí vhodných Taylorových rozvojů určete hodnotu limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Cvičení 3.28
Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^n}{n!}.$$

Cvičení 3.29
Funkci
$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
rozviňte do mocninné řady se středem v bodě nula a určete její obor konvergence.

Cvičení 3.30
Nalezněte součet číselné řady
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}.$$

Cvičení 3.31
Užitím vhodných Taylorových řad určete hodnotu limity
$$\lim_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^x x^{-3}\sin(x) - x^{-2}(1+x)\right).$$

Cvičení 3.32
Sečtěte
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}.$$

Cvičení 3.33
Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^{12}+1} - \left(x^6 - x^4 + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right].$$

Cvičení 3.34
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce
$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2+x^3}$$
a její interval konvergence.

Cvičení 3.35
Nalezněte součet následující číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{4^{n+1}}.$$

Cvičení 3.36
Nalezněte součet řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,16^n}.$$

Cvičení 3.37
Nalezněte součet řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}.$$

Cvičení 3.38
Pomocí prvních pěti nenulových členů vhodné mocninné řady odhadněte hodnotu určitého integrálu
$$\int_0^1 \frac{\sinh(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Stanovte korektní odhad chyby.

Cvičení 3.39
Pro parametr α, pro nějž platí, že $\frac{\alpha}{3} \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$, vyšetřete obor konvergence a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-3)(\alpha-6)\dots(\alpha-3n+3)}{n!}\, x^n.$$

Cvičení 3.40
Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n}.$$

Cvičení 3.41
Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Cvičení 3.42
Ukažte, že

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cvičení 3.43
Užitím vhodných Taylorových řad určete hodnotu limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\big(\mathrm{tg}(x) - \sin(x)\big) - x^3}{x^5}.$$

Cvičení 3.44
Pomocí vhodné mocninné řady vypočtěte číslo $\sqrt[4]{700}$ s chybou menší než 10^{-4}.

Cvičení 3.45
Pro funkční řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ověřte, zda platí rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Cvičení 3.46
Dokažte, že Maclaurinova řada funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ nekonverguje na svém oboru konvergence stejnoměrně. Řádně zdůvodněte!

Cvičení 3.47
Nalezněte součet funkční řady

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

na množině (c, ∞), kde $c > 0$. Neopomeňte prokázat oprávněnost všech prováděných operací.

Cvičení 3.48
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{2^n (4n)!!}\, x^{2n}.$$

Cvičení 3.49
Nalezněte součet mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{(n-1)!}\, x^n$$
a jeho definiční obor.

Cvičení 3.50
Nalezněte součet mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\,.$$

Cvičení 3.51
Nalezněte součet číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$
a výsledek maximálně zjednodušte.

Cvičení 3.52
Nalezněte obor konvergence a součet funkční řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 2^n}\, x(x+x^2)^n.$$

Cvičení 3.53
Pro funkci
$$f(x) = \frac{2}{8x^3+4x^2+2x+1}$$
vypočtěte podíl
$$\frac{f^{(101)}(0)}{f^{(100)}(0)}.$$

Cvičení 3.54
Sečtěte mocninnou řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!!}\, x^n.$$

Cvičení 3.55
Určete součet mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n+1)}\, x^{n+1}$$
a jeho definiční obor. Výsledek maximálně zjednodušte.

Cvičení 3.56
Sestavte mocninnou řadu spojitých funkcí definovaných na množině $\mathbb{R}$ takovou, aby jejím oborem konvergence byl polouzavřený interval
$$\mathcal{O} = \langle 2, 8).$$

Cvičení 3.57
Přímou metodou odvoďte tvar Maclaurinovy řady pro funkci
$$f(x) = \sqrt{4-x}.$$
Upravte do nejjednoduchého tvaru. Poté korektně určete její obor konvergence.

Cvičení 3.58
Nalezněte Taylorovu řadu reprezentující integrál

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+16t^4}}\,\mathrm{d}t$$

a stanovte její obor konvergence. Řadu upravte do tvaru s dvojnými faktoriály.

Kapitola 4

Obyčejné diferenciální rovnice

V této kapitole se budeme věnovat zcela zásadní problematice, jež se vyskytuje ve všech fyzikálních, ekonomických, biologických a dalších disciplínách. Jedná se o řešení rovnic, kdy neznámou není číselná hodnota, nýbrž funkce jedné proměnné. Přitom klíčovou otázkou pro nás nebude pouze nalezení řešení obyčejné diferenciální rovnice, ale hlavně (a v matematice jde o to především) diskuse prostoru všech řešení dané rovnice. Budeme se tedy také snažit prokázat, že jsme nalezli všechna řešení a že tudíž žádné jiné již nemůže být nalezeno.

4.1 Základní pojmy

4.1.1 Úmluva

V celé této kapitole je symbol C (včetně všech indexovaných variant) vymezen pro libovolnou pevně zvolenou reálnou konstantu a symbol I (opět včetně všech indexovaných variant) pro otevřený interval z množiny $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

4.1.2 Poznámka

Budeme nyní v předstihu pracovat s některými pojmy z teorie funkcí více proměnných. Čtenář ale jistě bude užité pojmy intuitivně chápat, případně mu budou alespoň částečně nastíněny.

4.1.3 Definice

Nechť $F(t, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je reálná funkce $n+2$ reálných proměnných, která je vzhledem k proměnné z_n spojitá a není konstantní. Nechť je definována na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Potom symbol

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0 \tag{4.1}$$

nazýváme *(obyčejnou) diferenciální rovnicí n-tého řádu* pro neznámou funkci $y(x)$. *Řešením* rovnice (4.1) v množině Ω na otevřeném intervalu I nazýváme funkci $y(x)$, která má na I všechny derivace do řádu n včetně, pro každé $x \in I$ je $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in \Omega$ a platí rovnost (4.1). Otevřený interval I nazýváme *intervalem řešení diferenciální rovnice*. Je-li dále $F(t, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ polynom stupně m v proměnných $z_0, z_1, \ldots, z_n$, řekneme, že diferenciální rovnice (4.1) je rovněž *stupně* m. Diferenciální rovnici prvního stupně nazýváme také *lineární diferenciální rovnicí*. Rovnici, která není lineární, nazýváme *nelineární diferenciální rovnicí*.

4.1.4 Poznámka

Vyřešit danou diferenciální rovnici tedy znamená určit

- funkci $y(x)$, splňující rovnost (4.1),
- otevřený interval, na němž uvedená funkce tuto rovnost splňuje.

4.1.5 Definice

Je-li funkce $y(x)$ řešením rovnice (4.1) v Ω na intervalu I a $\widetilde{y}(x)$ řešením na $\widetilde{I}$, kde $I \subsetneqq \widetilde{I}$, přičemž

$$y(x) = \widetilde{y}(x)$$

na I, pak říkáme, že $\widetilde{y}(x)$ je *prodloužením* $y(x)$ na interval $\widetilde{I}$ a $y(x)$ je *zúžením* $\widetilde{y}(x)$ na interval I. Takové řešení, ke kterému v Ω neexistuje prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* v Ω.

4.1.6 Příklad

Funkce $y(x) = \mathrm{e}^x$ s definičním oborem $(-1, 1)$ je řešením diferenciální rovnice

$$y' - y = 0.$$

Maximálním řešením této rovnice je ale funkce $y(x) = \mathrm{e}^x$ s intervalem řešení $I = \mathbf{R}$. Podotýkáme, že maximálních řešení dané diferenciální rovnice může být více. Zde např. funkce $z(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{R}$ je také maximálním řešením uvedené rovnice.

4.1.7 Definice

Lineární diferenciální rovnicí řádu n budeme od této chvíle rozumět rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x), \tag{4.2}$$

kde $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$ a $y(x)$ je neznámá funkce. Jestliže $q(x) = 0$, říkáme, že (4.2) je *lineární diferenciální rovnicí bez pravé strany*. Rovnici

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \tag{4.3}$$

nazýváme *rovnicí bez pravé strany příslušnou k diferenciální rovnici* (4.2).

4.1.8 Poznámka

V literatuře se někdy diferenciální rovnice bez pravé strany nazývá homogenní a rovnice s pravou stranou nehomogenní. My se této terminologii z důvodu křížení pojmů (viz dále) raději vyhneme.

4.1.9 Definice

Nechť $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou funkce spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Pro libovolnou funkci $y(x)$, která má na I vlastní derivace do řádu n, položme

$$\widehat{L}\big(y(x)\big) = y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x).$$

Pak zobrazení $y(x) \mapsto \widehat{L}\big(y(x)\big)$ nazýváme *(obyčejným) diferenciálním operátorem řádu n* příslušným k rovnicím (4.2) a (4.3).

4.1.10 Poznámka

Užijeme-li nyní symboliku zavedenou v předešlé definici, lze rovnici (4.2) zapsat ve zformalizovaném tvaru

$$\widehat{L}\big(y(x)\big) = q(x). \tag{4.4}$$

Řešit diferenciální rovnici (4.4) pak de facto znamená nalézt v množině všech funkcí (přesněji v definičním oboru diferenciálního operátoru $\widehat{L}$) takové funkce, které operátor $\widehat{L}\big(y(x)\big)$ zobrazuje na funkci $q(x)$.

4.1.11 Věta

Diferenciální operátor $\widehat{L}(y(x))$ je lineární na množině $\mathscr{C}^n(I)$.

Důkaz:

- nechť $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$
- nechť $y(x)$ je funkce třídy $\mathscr{C}^n$ na I a $k \in \mathbf{R}$
- chceme ukázat, že $\widehat{L}(k \cdot y(x)) = k \cdot \widehat{L}(y(x))$
- to, že $k \cdot y(x) \in \mathscr{C}^n(I)$ je zcela zřejmé
- dále užijeme snadné vlastnosti derivace, a sice

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\big(k \cdot y(x)\big) = k \cdot y^{(m)}(x)$$

- pak ale

$$\widehat{L}\big(k \cdot y(x)\big) = k \cdot y^{(n)}(x) + k \cdot p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + k \cdot p_1(x)y'(x) + k \cdot p_0(x)y(x) = k \cdot \widehat{L}\big(y(x)\big)$$

- nechť dále $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou funkce třídy $\mathscr{C}^n(I)$
- chceme ukázat, že $\widehat{L}\big(y_1(x) + y_2(x)\big) = \widehat{L}\big(y_1(x)\big) + \widehat{L}\big(y_1(x)\big)$
- to, že $y_1(x) + y_2(x) \in \mathscr{C}^n(I)$ je opět zcela banální
- užijeme nyní další vlastnosti derivace, a sice

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\big(y_1(x) + y_2(x)\big) = y_1^{(m)}(x) + y_2^{(m)}(x)$$

- pak ale

$$\widehat{L}\big(y_1(x) + y_2(x)\big) = y_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + p_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots +$$

$$+p_1(x)y_1'(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_1(x) + +p_0(x)y_2(x) = \widehat{L}\big(y_1(x)\big) + \widehat{L}\big(y_1(x)\big)$$

4.1.12 Věta

Všechna řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$.

Důkaz:

- množina všech funkcí, které vyhovují rovnici $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$. de facto představuje tzv. jádro operátoru $\widehat{L}(y(x))$
- jak je známo ze základního učiva lineární algebry, tvoří jádro operátoru vždy vektorový prostor
- tím může být důkaz uzavřen
- o platnosti tvrzení se lze však snadno přesvědčit také přímo
- ponecháme na čtenáři, aby rozvážil jak

4.1.13 Poznámka

Předešlá věta představuje jeden z fundamentálních poznatků teorie diferenciálních rovnic. Zbývá ještě rozřešit otázku, jaká bude dimenze citovaného prostoru. Odpověď přinese, jak jinak, další text. Upozorňujeme ale důrazně, že předešlá věta je vyslovena jednak pouze pro lineární diferenciální rovnici (pro nelineární rovnice nic podobného neplatí) a jednak pro rovnici s nulovou pravou stranou.

4.1.14 Věta

Nechť $u(x)$ je jedno řešení rovnice (4.2). Pak všechna řešení rovnice (4.2) jsou právě všechny funkce $y(x)$ dané rovností

$$y(x) = z(x) + u(x),$$

kde za $z(x)$ klademe všechna řešení rovnice (4.3).

<u>*Důkaz:*</u>

- První implikace:
  - nechť $\widehat{L}(u(x)) = q(x)$ a $\widehat{L}(z(x)) = 0$
  - z linearity operátoru $\widehat{L}$ plyne, že $\widehat{L}(y(x)) = \widehat{L}(z(x)) + \widehat{L}(u(x)) = q(x)$
- Druhá implikace:
  - dokážeme, že rovnice (4.2) nemá jiné řešení než tvaru $y(x) = z(x) + u(x)$
  - předpokládejme pro spor, že existují dvě řešení $y_1(x)$ a $y_2(x)$ taková, že $\widehat{L}(y_1(x)) = q(x)$ a $\widehat{L}(y_2(x)) = q(x)$, a neexistuje žádná funkce $z(x)$, pro níž by platilo $\widehat{L}(z(x)) = 0$ a $y_2(x) = y_1(x) + z(x)$
  - vidíme ale, že $\widehat{L}(y_2(x) - y_1(x)) = 0$
  - odtud je jasné, že $z(x) := y_2(x) - y_1(x)$ musí být řešením rovnice (4.3)

4.1.15 Poznámka

Bývá zvykem zapisovat řešení rovnice (4.2) v pořadí $y(x) = z(x) + u(x)$, kde $z(x)$ jsou všechna řešení příslušné rovnice (4.3) a $u(x)$ jedno řešení rovnice (4.2). Řešení $u(x)$ se někdy nazývá *partikulárním*.

4.2 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Nejjednodušší diferenciální rovnicí je lineární rovnice prvního řádu. Její řešení je velice jednoduché a v podstatě spočívá ve výpočtu dvou neurčitých integrálů.

4.2.1 Věta

Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na intervalu I. Nechť pro funkce $P(x)$, $S(x)$ platí na intervalu I rovnosti $P'(x) = p(x)$ a $S'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$. Pak všechna řešení rovnice

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \tag{4.5}$$

jsou dána předpisem

$$y(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}\big(S(x) + \mathtt{C}\big). \tag{4.6}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- Odvození:
  - rovnici (4.5) vynásobíme faktorem $\mathrm{e}^{P(x)}$, tj.
  $$y'(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} + p(x)y(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} = q(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$$
  - levá strana představuje derivaci součinu $y(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$, a protože $S'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}$, platí dále
  $$y(x)\,\mathrm{e}^{P(x)} = S(x) + \mathtt{C}$$
  - řešení uvedené rovnice mají tedy tvar $y(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}\big(S(x) + \mathtt{C}\big)$
- Jednoznačnost:
  - dokážeme sporem

- nechť tedy funkce $z(x)$ řeší rovnici (4.5), ale přitom není tvaru $\mathrm{e}^{-P(x)}(S(x)+\mathtt{C})$
- tedy
$$z'(x)+p(x)z(x)=q(x) \tag{4.7}$$
- nechť $y(x)=\mathrm{e}^{-P(x)}(S(x)+\mathtt{C})$
- podle první části důkazu tedy $y(x)$ řeší zkoumanou rovnici, tj.
$$y'(x)+p(x)y(x)=q(x) \tag{4.8}$$
- odečtěme nyní rovnice (4.7) a (4.8)
- pak
$$\big(z'(x)-y'(x)\big)+p(x)\big(z(x)-y(x)\big)=0$$
- tuto rovnici vynásobme faktorem $\mathrm{e}^{P(x)}$
- rovnice pak přechází do tvaru
$$\Big[\big(z(x)-y(x)\big)\mathrm{e}^{P(x)}\Big]'=0$$
- odtud
$$z(x)=y(x)+\tilde{\mathtt{C}}\,\mathrm{e}^{-P(x)}=\mathrm{e}^{-P(x)}(S(x)+\mathtt{C})+\tilde{\mathtt{C}}\mathrm{e}^{-P(x)}=\mathrm{e}^{-P(x)}(S(x)+\tilde{\tilde{\mathtt{C}}})$$
- to je ale spor s předpokladem
- tím je prokázáno, že rovnice (4.5) nemá žádná jiná řešení než ta tvaru (4.6)

4.2.2 Příklad

Řešme rovnici
$$y'-2xy=2x$$
na množině $\Omega=\mathbf{R}^3$. Vypočteme $P(x)=\int p(x)\mathrm{d}x=-x^2$ (postačí jedna z primitivních funkcí), celou rovnici vynásobíme faktorem $\mathrm{e}^{P(x)}=\mathrm{e}^{-x^2}$ a získáme
$$y'\mathrm{e}^{-x^2}-2xy\,\mathrm{e}^{-x^2}=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$
Tato rovnice je ekvivalentní rovnici
$$\left(y\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\right)'=\left(-\mathrm{e}^{-x^2}+\mathtt{C}\right)'.$$
Odtud již získáme maximální řešení $y(x)=\mathtt{C}\,e^{x^2}-1$, kde $I=\mathbf{R}$.

4.2.3 Definice

Funkce $\mathrm{e}^{P(x)}$ z věty 4.2.1 se nazývá *integračním faktorem* rovnice (4.5).

4.2.4 Poznámka

Pojem integrační faktor má také obecnější užití. Viz např. příklad 4.3.18 nebo kniha [13].

4.2.5 Věta

Nechť $p(x)$ je funkce spojitá na otevřeném intervalu $I\subset\mathbf{R}$. Nechť $v(x)$ je jedno nenulové řešení rovnice
$$y'(x)+p(x)y(x)=0. \tag{4.9}$$
Pak všechna řešení rovnice (4.9) jsou právě všechny funkce $y(x)=\mathtt{C}\,v(x)$.

Důkaz:

- užijeme větu 4.2.1 a položíme v ní $q(x)=0$

- odtud $S(x) = \mathtt{C}_1$
- řešení je tudíž tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}(\mathtt{C}_1 + \mathtt{C}_2) = \mathtt{C}_3\,\mathrm{e}^{-P(x)}$
- tak vypadají podle 4.2.1 všechna řešení rovnice (4.9)
- $v(x)$ je jedno z nich, a tedy $v(x) = \mathtt{C}_4\mathrm{e}^{-P(x)}$ ($\mathtt{C}_4 \neq 0$)
- pro všechna řešení tedy platí

$$y(x) = \frac{\mathtt{C}_3}{\mathtt{C}_4}\mathtt{C}_4\mathrm{e}^{-P(x)} = \frac{\mathtt{C}_3}{\mathtt{C}_4}v(x) = \mathtt{C}\,v(x)$$

4.2.6 Důsledek

Všechna řešení rovnice (4.9) tvoří jednorozměrný vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

4.2.7 Poznámka

Rovnici

$$y^{(k+1)}(x) + p(x)y^{(k)}(x) = q(x)$$

lze převést na lineární rovnici prvního řádu substitucí $z(x) := y^{(k)}(x)$. Potom původní rovnice přejde na tvar $z'(x)+p(x)z(x) = q(x)$, který již snadno pomocí věty 4.2.1 vyřešíme. Dále pak provedeme k integrací k získání řešení celé úlohy.

4.2.8 Příklad

Hledejme maximální řesení diferenciální rovnice

$$xy'' + 8x^5\mathrm{e}^{x^2} = (1+2x^2)y',$$

vyhovující podmínkám $y(1) = \mathrm{e}$ a $y'(1) = 2\mathrm{e}$. Zavedeme novou funkci $z(x) = y'(x)$, čímž triviálně snížíme řád rovnice. Obdržíme tak lineární diferenciální rovnici

$$z' - \left(\frac{1}{x} + 2x\right)z = -8x^4\mathrm{e}^{x^2}.$$

Jejím integračním faktorem je výraz $x^{-1}\mathrm{e}^{-x^2}$. Je-li jím rovnice násobena, získáváme rovnici

$$\left(z(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -8x^3.$$

Odtud

$$z(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2x^4 + \mathtt{C},$$

a tedy

$$z(x) = \mathtt{C}\,x\mathrm{e}^{x^2} - 2x^5\mathrm{e}^{x^2}.$$

Pak ale

$$y(x) = \int z(x)\,\mathrm{d}x = \tilde{\mathtt{C}} + \frac{\mathtt{C}}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2}(-x^4+2x^2-2).$$

Konstanty $\tilde{\mathtt{C}}$ a $\mathtt{C}$ určíme z podmínek $y(1) = \mathrm{e}$ a $y'(1) = 2\mathrm{e}$. Odtud $\tilde{\mathtt{C}} = 0$ a $\mathtt{C} = 4$. Hledaným maximálním řešením je tedy funkce

$$y(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}(2-x^2), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

4.3 Nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

Složitějšími případy diferenciálních rovnic prvního řádu jsou rovnice nelineární. Ty je nutno řešit v závislosti na tom, jakého jsou typu. Seznámíme se nyní podrobněji s metodami jejich řešení.

4.3.1 Definice

Nechť $p(x), q(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I a nechť $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Potom rovnici tvaru

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^{\alpha}(x) \tag{4.10}$$

nazveme *Bernoulliho diferenciální rovnicí.*

4.3.2 Poznámka

Bernoulliho diferenciální rovnici řešíme tak, že celou rovnici vynásobíme faktorem $(1-\alpha)y^{-\alpha}(x)$. Tím dostáváme

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) + p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha}(x) = (1-\alpha)\,q(x).$$

Poté zavedeme novou funkci $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, čímž obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$z'(x) + p(x)(1-\alpha)z(x) = (1-\alpha)\,q(x),$$

neboť $z'(x) = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}(x)y'(x)$. Dále řešíme standardně, tedy metodou integračního faktoru.

4.3.3 Poznámka

Budeme se nyní zabývat hledáním řešení diferenciální rovnice

$$y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

respektive

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)},$$

kde $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou jisté funkce dvou proměnných. Obě zmiňované rovnice budeme souhrnně zapisovat ve formálním tvaru

$$f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{4.11}$$

4.3.4 Definice

Nechť $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou dané funkce dvou proměnných. Řešením diferenciální rovnice (4.11) rozumíme každou funkci $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$, definovanou na otevřeném intervalu I, pro kterou platí

$$f\big(x, \varphi(x)\big) + g\big(x, \varphi(x)\big)\,\varphi'(x) = 0,$$

respektive

$$f\big(\psi(y), y\big)\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} + g\big(\psi(y), y\big) = 0.$$

4.3.5 Poznámka

Nyní narazíme na dosud nedefinované pojmy z teorie funkce více proměnných. Prozatím vystačíme s formálním tvrzením, že znak parciální derivace funkce dvou proměnných $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ představuje v podstatě obyčejné derivování funkce $f(x,y)$ podle proměnné x, zatímco na druhou proměnnou y je při této operaci nahlíženo jako na konstantu.

Dále v analogii k pojmu totálního diferenciálu $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ funkce $x \mapsto f(x)$ (viz definice 3.1.1) zavádíme obdobný pojem pro funkci dvou proměnných $f(x,y) : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$. Z definičního předpisu (viz definice 1.2.28 ve skriptech [14]) vyplývá analogický vztah

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Geometrickým významem totálního diferenciálu je odhad odchylky funkční hodnoty funkce $f(x,y)$ od její hodnoty $f(x_0,y_0)$ v bodě (x_0,y_0), odchýlí-li se $x-$ová souřadnice bodu o $\mathrm{d}x$ od x_0 a $y-$ová souřadnice bodu o dy od y_0. Vztah totálního diferenciálu funkce dvou proměnných k právě probírané problematice je následující. Totálním diferenciálem funkce $H(x,y)$ je podle předchozího textu výraz

$$\frac{\partial H}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Totálním diferenciálem konstantní funkce $G(x,y) = \mathbb{C}$ je nula. Z rovnosti $H(x,y) = \mathbb{C}$ tedy plyne rovnost diferenciálů

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{4.12}$$

Pokud položíme v rovnici (4.11) $f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)$ a $g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$, mají rovnice (4.11) a (4.12) tentýž tvar a tedy rovnost

$$H(x,y) = \mathbb{C}$$

vyjadřuje vztah mezi proměnnými x, y, a může být tudíž použita k nalezení řešení diferenciální rovnice (4.11). Pro korektní definice, a tudíž úplné pochopení zde nastíněných pojmů, nahlédněte do knihy [14].

4.3.6 Definice

Jestliže existuje funkce $H(x,y)$ taková, že

$$f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \tag{4.13}$$

a zároveň

$$g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y), \tag{4.14}$$

nazýváme rovnost

$$H(x,y) = \mathbb{C} \tag{4.15}$$

formálním řešením (řešením v implicitním tvaru) rovnice (4.11).

4.3.7 Poznámka

Lze-li z formálního řešení (4.15) vyjádřit y jako funkci x nebo x jako funkci y, mluvíme v obou případech o *explicitním vyjádření řešení* diferenciální rovnice.

4.3.8 Definice

Diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými nazýváme rovnici tvaru

$$f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4.16}$$

kde $f(x), g(y)$ jsou funkce spojité v intervalech $I_1 \subset \mathbf{R}$, resp. $I_2 \subset \mathbf{R}$.

4.3.9 Věta

Nechť $f(x), g(y)$ jsou funkce spojité v intervalech $I_1 \subset \mathbf{R}$, resp. $I_2 \subset \mathbf{R}$. Nechť $F(x)$, $G(y)$ jsou libovolné, ale pevně zvolené primitivní funkce k funkcím $f(x)$ na I_1, resp. $g(y)$ na I_2. Pak je-li $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$ řešením rovnice (4.16), existuje jistě $\mathbb{C} \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechny body z intervalu řešení rovnice (4.16) platí

$$F(x) + G(y) = \mathbb{C}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- dokážeme např. pro $y = \varphi(x)$, pro $x = \psi(y)$ je důkaz analogický
- nechť tedy $y = \varphi(x)$ je řešení rovnice (4.16) na I
- pak $f(x) + g(\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0$
- odtud $F'(x) + (G \circ \varphi)'(x) = 0$, což je ekvivalentní rovnosti $(F + G \circ \varphi)'(x) = 0$
- tedy existuje $\mathbb{C} \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in I$ platí

$$F(x) + G(\varphi(x)) = F(x) + G(y) = \mathbb{C}$$

4.3.10 Poznámka

Tedy rovnice

$$H(x,y) = F(x) + G(y) = \mathbb{C}$$

je formálním řešením (řešením v implicitním tvaru) diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

4.3.11 Poznámka

Uvažme také, že diferenciální rovnice $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, která lze snadno převést na rovnici se separovanými proměnnými, má konstantní řešení $y(x) = \mathbb{C}$, kde pro $\mathbb{C}$ platí $g(\mathbb{C}) = 0$.

4.3.12 Příklad

Příklad 4.2.2 lze řešit také jako rovnici se separovanými proměnnými převedením na tvar

$$\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x.$$

Nalezneme-li obě primitivní funkce $\ln|1+y|$, resp. x^2, opět získáváme řešení tvaru

$$y(x) = \mathbb{C}\,\mathrm{e}^{x^2} - 1, \qquad I = \mathbf{R}.$$

4.3.13 Definice

Exaktní diferenciální rovnicí nazýváme rovnici tvaru (4.11), kde $f(x,y)$ a $g(x,y)$ jsou spojité funkce dvou proměnných na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$, které mají na M spojité parciální derivace vyhovující rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y). \tag{4.17}$$

4.3.14 Věta

Nechť $f(x,y)$, $g(x,y)$ jsou funkce spojité na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$ a nechť mají v M spojité parciální derivace splňující rovnost (4.17). Nechť je pevně zvolena uspořádaná dvojice $(x_0, y_0) \in M$. Pak rovnice

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

je formálním řešením exaktní diferenciální rovnice (4.11), a to takovým, že příslušné explicitní řešení prochází bodem (x_0, y_0).

Důkaz:

- ukážeme, že funkce
$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,\mathrm{d}t \tag{4.18}$$
splňuje rovnosti z definice 4.3.6
- nejprve ale snadno prokážeme, že příslušné explicitní řešení prochází bodem (x_0, y_0)
- pro důkaz tohoto postačí ukázat, že platí rovnost $H(x_0, y_0) = 0$
- to je ale přímo patrno z tvaru funkce $H(x,y)$
- přejděme nyní k důkazu rovností (4.13) a (4.14), jejichž splnění pak zaručí fakt, že rovnice $H(x,y) = \mathbb{C}$ bude odpovídajícím formálním řešením
- podotýkáme, že v této formulaci věty je $\mathbb{C} = 0$
- jelikož výraz $\int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,\mathrm{d}t$ nezávisí na x, platí

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$$

- parciální derivace $H(x,y)$ podle y je nepatrně komplikovanější
- při jejím výpočtu užijeme větu o záměně derivace podle parametru y (viz věta 4.2.43 ve skriptech [14]) a integrálu podle proměnné s
- odtud

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s + g(x_0,y)$$

- následně pak ze vztahu (4.17) vyplývá, že

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial g}{\partial s}(s,y)\,\mathrm{d}s + g(x_0,y) = \big[g(s,y)\big]_{x_0}^{x} + g(x_0,y) = g(x,y)$$

- tím je důkaz proveden

4.3.15 Poznámka

Na základě tvrzení předešlé věty bývá exaktní diferenciální rovnice často nazývána též *diferenciální rovnicí ve tvaru totálního diferenciálu*.

4.3.16 Poznámka

Pro pečlivější čtenáře nabídneme v této poznámce odvození vztahu (4.18). Aby rovnice $H(x,y) = \mathtt{C}$ představovala formální řešení exaktní diferenciální rovnice (4.11), měly by být podle definice 4.3.6 splněny vztahy

$$f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \tag{4.19}$$

a

$$g(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y). \tag{4.20}$$

Vyjdeme-li z prvního z nich, dostáváme

$$H(x,y) = \int_{\alpha}^{x} f(t,y)\,\mathrm{d}t + \mathtt{C}(y),$$

kde první integrál představuje primitivní funkci k funkci $f(x,y)$ vzhledem k první proměnné a druhý člen (jakási obecněji pojatá integrační konstanta) zohledňuje skutečnost, že parciální derivací funkce $\mathtt{C}(y)$ podle proměnné x bude v každém případě nula. Ve výše uvedeném vztahu zbývá vyčíslit právě hodnotu této integrační konstanty. K tomu užijeme druhý vztah (4.20). Derivací poslední rovnosti podle proměnné y nyní dostáváme

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{\alpha}^{x} f(t,y)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y} = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y} = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial g}{\partial t}(t,y)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y} =$$

$$= \big[g(t,y)\big]_{\alpha}^{x} + \frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y} = g(x,y) - g(\alpha,y) + \frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y}.$$

Má-li se podle (4.20) tato pravá strana rovnat výrazu $g(x,y)$, musí nutně platit

$$\frac{\mathrm{d}\mathtt{C}(y)}{\mathrm{d}y} = g(\alpha,y).$$

Tedy

$$\mathtt{C}(y) = \int_{\beta}^{y} g(\alpha,s)\,\mathrm{d}s.$$

Odtud

$$H(x,y) = \int_{\alpha}^{x} f(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_{\beta}^{y} g(\alpha,t)\,\mathrm{d}t.$$

Máli platit rovnost $H(x_0,y_0) = 0$, je třeba volit $\alpha = x_0$ a $\beta = y_0$.

4.3.17 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$y'x^2 - 2x(y + e^x) - x^2e^x = 0.$$

Po převedení do formálního tvaru

$$\left[2x(y + e^x) + x^2e^x\right] dx + x^2 dy = 0$$

se snadno přesvědčíme, že jde o exaktní diferenciální rovnici. Jak vidno, je $f(x, y) = 2x(y + e^x) + x^2e^x$ a $g(x, y) = x^2$, a proto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x.$$

Podmínka exaktnosti (4.17) je tedy splněna, a tudíž rovnost

$$H(x, y) = \int_0^x f(s, 0)\, ds + \int_0^y g(x, t)\, dt = C,$$

kde jsme položili $x_0 = y_0 = 0$, představuje formální řešení zadané rovnice. Povšimněte si, že bylo užito ekvivalentního tvaru funkce $H(x, y)$. Pak ale

$$H(x, y) = \int_0^x (2te^t + t^2e^t)\, dt + \int_0^y x^2\, ds = \left[t^2e^t\right]_0^x + yx^2 = x^2e^x + yx^2 = C.$$

Tato rovnice přestavuje řešení zadané rovnice v implicitním tvaru. Explicitní tvar ale získáme velice snadno:

$$y(x) = \frac{C}{x^2} - e^x, \qquad I = (0, +\infty).$$

Druhou alternativou pro definiční obor je pochopitelně otevřený interval $I = (-\infty, 0)$.

4.3.18 Poznámka

V některých případech lze předešlá metoda užít i pro diferenciální rovnice, které exaktní sice nejsou, ale může pro ně být nalezen tzv. *integrační faktor druhého druhu*, který, je-li jím rovnice násobena, převede zadanou rovnici na rovnici exaktní. Integrační faktor druhého druhu má nejčastěji podobu funkce proměnné x nebo funkce proměnné y. Jak lze tyto faktory nalézt si ukážeme v následujím příkladě.

4.3.19 Příklad

Pokusme se řešit diferenciální rovnici

$$y' = \frac{4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y}}{x^3e^y - xe^{2y}}. \tag{4.21}$$

Ve standardizovaném tvaru má tato rovnice tuto podobu:

$$(4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y})\, dx + (xe^{2y} - x^3e^y)\, dy = 0.$$

Označíme-li $f(x, y) = (4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y})\mu(x)$ a $g(x, y) = (xe^{2y} - x^3e^y)\mu(x)$, platí

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2e^y + 4e^{2y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{2y} - 3x^2e^y.$$

Rovnice tedy exaktní není. Avšak po vynásobení čitatele a jmenovatele integračním faktorem $\mu(x)$, jak uvidíme, již exaktní bude. Nalezněme nejprve tuto funkci. Zkoumejme tedy diferenciální rovnici

$$(4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y})\mu(x)\, dx + (xe^{2y} - x^3e^y)\mu(x)\, dy = 0.$$

Budeme hledat podmínku pro $\mu(x)$, aby výše uvedená rovnice byla rovnicí exaktní. Označíme-li $\tilde{f}(x, y) = 4x^4 - 6x^2e^y + 2e^{2y}$ a $\tilde{g}(x, y) = xe^{2y} - x^3e^y$, platí

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = (-6x^2e^y + 4e^{2y})\mu(x),$$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = \left(\mathrm{e}^{2y} - 3x^2\mathrm{e}^y\right)\mu(x) + \left(x\mathrm{e}^{2y} - x^3\mathrm{e}^y\right)\mu'(x).$$

Srovnání těchto parciálních derivací vede k rovnostem

$$\left(3\mathrm{e}^{2y} - 3x^2\mathrm{e}^y\right)\mu(x) = \left(x\mathrm{e}^{2y} - x^3\mathrm{e}^y\right)\mu'(x)$$

$$\frac{3\mathrm{e}^y\left(\mathrm{e}^y - x^2\right)}{x\mathrm{e}^y\left(\mathrm{e}^y - x^2\right)}\,\mu(x) = \mu'(x).$$

Tím jsme obdrželi lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$\mu' - \frac{3}{x}\mu = 0$$

řešitelnou např. separací proměnných. Výsledkem řešení je funkce

$$\mu(x) = \mathrm{C}\,x^3.$$

Rozšíříme-li tedy zlomek v rovnici (4.21) jednotkou tvaru $\frac{x^3}{x^3}$, přejde tato rovnice na rovnici exaktní. Pak tedy

$$\tilde{f}(x,y) = 4x^7 - 6x^5\mathrm{e}^y + 2x^3\mathrm{e}^{2y}$$

a

$$\tilde{g}(x,y) = x^4\mathrm{e}^{2y} - x^6\mathrm{e}^y.$$

Sestavme tedy příslušné formální řešení. Snadno

$$H(x,y) = \int_0^x \left(4s^7 - 6s^5\mathrm{e}^y + 2s^3\mathrm{e}^{2y}\right)\mathrm{d}s + \int_0^y 0\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^8 - x^6\mathrm{e}^y + \frac{1}{2}x^4\mathrm{e}^{2y}.$$

Rovnice

$$x^4\mathrm{e}^{2y} - 2x^6\mathrm{e}^y + x^8 = x^4\left(\mathrm{e}^y - x^2\right)^2 = \mathrm{C}$$

je tedy formálním řešením zadané rovnice. Proto má explixitní řešení tvar

$$y(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{C}}{x^2} + x^2\right), \qquad I = (0,\infty).$$

Definiční obor řešení by ale měl být rozebrán podrobněji. Uvedená množina totiž není jediným možným intervalem řešení. Diskusi ale ponecháme čtenáři.

4.3.20 Definice

Řekneme, že funkce dvou proměnných $f(x,y)$ definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}^2$ je *homogenní* funkcí stupně $\alpha \in \mathbf{R}$, jestliže pro každé $(x,y) \in M$ a všechna $t > 0$ platí:

- $(tx, ty) \in M$,
- $f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$.

4.3.21 Poznámka

Příkladem homogenní funkce je např. funkce

$$f(x,y) = y^2x + 2x^2y + \frac{y^5}{x^2},$$

neboť

$$f(tx,ty) = (ty)^2tx + 2(tx)^2ty + \frac{(ty)^5}{(tx)^2} = t^3\left(y^2x + 2x^2y + \frac{y^5}{x^2}\right) = t^3 f(x,y).$$

Jedná se tedy o homogenní funkci stupně tři.

4.3.22 Definice

Homogenní diferenciální rovnicí nazýváme rovnici (4.11), kde $f(x,y)$ i $g(x,y)$ jsou na otevřené množině $M \subset \mathbf{R}^2$ spojité a zároveň homogenní téhož stupně.

4.3.23 Věta

Homogenní diferenciální rovnice (4.11) má na intervalu $I = (-\infty, 0)$, resp. $I = (0, \infty)$ lineární řešení tvaru $y(x) = \mathsf{C}\,x$ pro všechny reálné konstanty C takové, že $f(-1, -\mathsf{C}) + g(-1, -\mathsf{C})\,\mathsf{C} = 0$, resp. $f(1, \mathsf{C}) + g(1, \mathsf{C})\,\mathsf{C} = 0$.

Důkaz:

- viz cvičení 4.74

4.3.24 Poznámka

Zatímco předešlá věta představuje způsob hledání lineárního řešení homogenní diferenciální rovnice, bude věta následující hledat řešení obecná. V podstatě lze říci, že substituce $y(x) = x \cdot u(x)$ převede každou homogenní diferenciální rovnici na rovnici se separovanými proměnnými, jejíž řešení bylo již probráno.

4.3.25 Věta

K homogenní diferenciální rovnici (4.11) existuje na intervalu $x \in (-\infty, 0)$, resp. na intervalu $x \in (0, \infty)$ diferenciální rovnice se separovanými proměnnými x a u taková, že funkce $u = u(x)$ je řešením této rovnice právě tehdy, když funkce

$$y(x) = u(x) \cdot x$$

je řešením homogenní diferenciální rovnice (4.11).

Důkaz:

- důkaz proveďme např. pro x z intervalu $(0, \infty)$
- nechť tedy $y(x) = u(x) \cdot x$ je řešením rovnice $f(x, y) + g(x, y)\,y'(x) = 0$
- vidíme, že $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$
- po dosazení dostaneme

$$f(x, u(x) \cdot x) + g(x, u(x) \cdot x)\big(u'(x) \cdot x + u(x)\big) = 0$$

- $f(x, y)$ i $g(x, y)$ jsou podle předpokladu věty homogenní téhož stupně α a předchozí vztah tedy vede k rovnostem

$$x^{\alpha} f(1, u) + x^{\alpha} u\, g(1, u) + x^{\alpha - 1} u'\, g(1, u) = 0$$

$$f(1, u) + u\, g(1, u) + u'\, x\, g(1, u) = 0$$

- zde již snadno odseparujeme

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{g(1, u)}{f(1, u) + u \cdot g(1, u)}\,\mathrm{d}u = 0$$

- tím je prokázána existence uváděné rovnice se separovanými proměnnými x, u

4.3.26 Poznámka

Dalším typem diferenciálních rovnic jsou rovnice typu

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right), \tag{4.22}$$

kde pro reálné koeficienty a_1, a_2, b_1, b_2 platí vztah

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.23}$$

Tyto rovnice jsou homogenními rovnicemi (neboť příslušné funkce jsou homogenní nultého stupně), a proto je řešíme substitucí $y(x) = x \cdot u(x)$.

4.3.27 Příklad

Nalezněme formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Jedná o homogenní diferenciální rovnici, jak je diskutováno výše. Navíc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Budeme hledat nejprve lineární řešení tvaru $y = \mathrm{C}\,x$. Taková ale neexistují, neboť rovnice

$$\mathrm{C}(1-\mathrm{C}) = 1 + \mathrm{C}$$

nemá řešení pro žádné reálné C. Pro nalezení obecného řešení užijeme tedy substituci $y(x) = x \cdot u(x)$. Pak

$$(u'x + u)(x - ux) = x + ux,$$

což lze pro $x \neq 0$ zjednodušit do tvaru

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

potažmo

$$\operatorname{arctg}(u) = \ln\left(|x|\sqrt{1+u^2}\right) + \mathrm{C}.$$

Formální řešení (řešení v implicitním tvaru) má tedy podobu

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \mathrm{C}.$$

Tato rovnice sice zadává implicitně funkci $y = y(x)$, ale explixitní řešení z této rovnosti získat nelze. Metody pro práci s implicitními funkcemi budou probírány ve vyšších partiích matematické analýzy.

4.3.28 Poznámka

Dalším typem diferenciálních rovnici jsou rovnice typu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{4.24}$$

kde pro reálné koeficienty a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 platí vztah (4.23). Tyto rovnice sice nejsou homogenními rovnicemi, ale mohou na ně být převedeny. Za podmínky (4.23) upravíme zkoumanou rovnici na předchozí typ (4.22) zavedením nové nezávisle proměnné ξ a nové funkce $\eta(\xi)$. Ty definujeme vztahy $x = \xi + h$ a $y = \eta + k$, kde čísla h, k jsou kořeny soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Po této substituci dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right),$$

neboť

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\eta + k) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}.$$

Poté užijeme substituci

$$u(\xi) = \frac{\eta(\xi)}{\xi}.$$

Není-li pro některou z rovnic splněna podmínka (4.23), zavádíme substituci

$$z(x) := a_1x + b_1y(x).$$

Dále řešíme např. separací proměnných, lze-li použít, nebo některou z předešlých metod.

4.3.29 Příklad

Nalezněme maximální řešení diferenciální rovnice

$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0.$$

Nejprve hledejme čísla h a k, pro něž by mělo platit

$$\begin{aligned} -2h + 4k - 6 &= 0 \\ h + k - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Snadno vypočteme, že $(h, k) = (1, 2)$. Původní rovnice bude tedy převedena substitucí $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$ na homogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{-2\xi + 4\eta}{\xi + \eta}. \tag{4.25}$$

Hledejme nejprve její lineární řešení tvaru $\eta = \mathtt{C}\,\xi$. Rovnice

$$\mathtt{C} = \frac{-2 + 4\mathtt{C}}{1 + \mathtt{C}},$$

resp.

$$\mathtt{C}^2 - 3\mathtt{C} + 2 = 0$$

má dvě řešení. Tím jsou nalezena dvě lineární řešení rovnice (4.25), a sice $\eta_1(\xi) = 2\xi$ a $\eta_2(\xi) = \xi$. Převedeno do původních proměnných tak máme

$$y_1(x) = 2x, \qquad \mathrm{Dom}(y_1) = \mathbf{R}$$

$$y_2(x) = x + 1, \qquad \mathrm{Dom}(y_2) = \mathbf{R}.$$

Dále užijeme (pro získání obecných řešení) substituci

$$z(\xi) := \frac{\eta(\xi)}{\xi},$$

odkud pak

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} \cdot \xi + z.$$

Po dosazení a následné separaci odtud vychází

$$\frac{1 + z}{(z - 2)(z - 1)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\left(\frac{-2}{z - 1} + \frac{3}{z - 2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$(z - 2)^3 = \frac{\mathtt{C}}{\xi}(z - 1)^2$$

$$\left(\frac{\eta}{\xi} - 2\right)^3 = \frac{\mathtt{C}}{\xi}\left(\frac{\eta}{\xi} - 1\right)^2$$

$$(\eta - 2\xi)^3 = \mathtt{C}(\eta - \xi)^2.$$

Formální řešení naší úlohy má tedy tvar

$$(y - 2x)^3 = \mathtt{C}(y - x - 1)^2.$$

4.3.30 Příklad

Rovnice

$$y' = \frac{y - x - 2}{y - x + 3}$$

je také předešlého typu, ovšem neplňuje podmínku (4.23). Proto zavedeme substituci $z(x) := y(x) - x$. Odtud $z' = y' - 1$ a dále $z' + 1 = \frac{z-2}{z+3}$. Rovnici lze převést na rovnici se separovanými proměnnými

$$(z + 3)\,\mathrm{d}z = -5\,\mathrm{d}x.$$

Odtud již snadno získáme formální řešení tvaru

$$z^2 + 6z = -10x + \mathbb{C},$$

resp.

$$y^2 - 2xy + x^2 + 4x + 6y = \mathbb{C},$$

odkud lze získat explicitní řešení

$$y_{1,2}(x) = x - 3 \pm \sqrt{\tilde{\mathbb{C}} - 10x}, \qquad I = \left(-\infty, \frac{\tilde{\mathbb{C}}}{10}\right).$$

4.3.31 Příklad

Řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{4x + 8}{y - 1}.$$

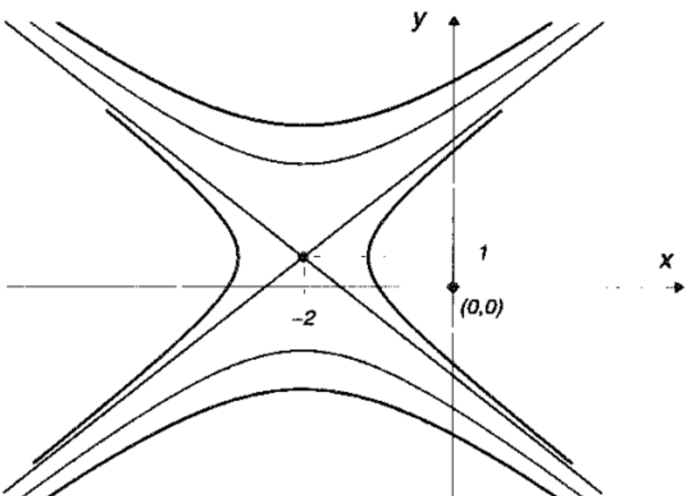
Jedná se opět o typ (4.24), pouze má jednodušší formu. Rovnice $4k + 8 = 0$, $1 - h = 0$ mají řešení $(k, h) = (-2, 1)$, a proto užijeme transformaci $x = \xi - 2$, $y = \eta + 1$. Ta převádí zadanou rovnici na jednoduchou homogení rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = 4\frac{\xi}{\eta}.$$

Její lineární řešení $\eta = \mathbb{C}\xi$ jsou všechna taková, jež vyhovují algeraické rovnici $\mathbb{C}^2 = 4$. Jedná se tedy o dvě funkce $\eta = 2\xi$ a $\eta = -2\xi$, což vede (převedeno do původních proměnných) na řešení

$$y_1(x) = 2x + 5, \;\; y_2(x) = -2x - 3, \;\; x \in \mathbf{R}.$$

Tato lineární řešení jsou vyobrazena černou barvou na obrázku níže.



Obrázek 4.1
Grafy řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{4x+8}{y-1}$. Černě jsou vyobrazena lineární řešení a barevně řešení hyperbolická. Přitom modrá, zelená, žlutá a červená barva odpovídají řešením (4.27) pro $\mathbb{C}$ rovno po řadě hodnotám $\mathbb{C} = -20$, $\mathbb{C} = -10$, $\mathbb{C} = 10$ a $\mathbb{C} = 3$.

Přistupme k hledání řešení nelineárních. Do rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = 4\frac{\xi}{\eta} \tag{4.26}$$

zavedeme novou funkci $z = z(\xi)$ vztahem $\eta(\xi) = \xi \cdot z(\xi)$. Dosazením získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\,\xi + z = \frac{4}{z},$$

jež vede na separovanou rovnici

$$\frac{z}{4 - z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Odtud

$$-\frac{1}{2}\ln\left|4 - z^2\right| = \ln\left|\tilde{\mathtt{C}}\,\xi\right|,$$

respektive

$$\left|4 - z^2\right| = \frac{\mathtt{C}}{\xi^2}.$$

Formálním řešením rovnice (4.26) je tedy rovnost

$$4\xi^2 - \eta^2 = \mathtt{C}.$$

Tedy formální řešení celé úlohy má tvar

$$(x+2)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = \frac{\mathtt{C}}{4}. \tag{4.27}$$

Jedná se tedy o nerovnoosou hyperbolu s poloosami závislými na integrační konstantě $\mathtt{C}$. Přitom druhá poloosa má vůči první poloose dvojnásobnou velikost. Některá z explicitních řešení jsou vyobrazena barevně na obrázku výše. Za povšimnutí stojí fakt, že pro $\mathtt{C} = 0$ mohou být z formálního řešení (4.27) odvozena také obě lineární řešení, která navíc představují asymptoty všech explicitních řešení.

4.3.32 Poznámka

Na závěr tohoto oddílu ještě shrňme základní rozdíl mezi lineárními a nelineárními diferenciálními rovnicemi. Uvažme dva jejich zástupce. Zatímco lineární rovnice

$$y' - 2xy = 2x$$

má řešení

$$y(x) = \mathtt{C}\mathrm{e}^{x^2} - 1,$$

má nelineární rovnice

$$y' - 2xy^2 = 2x$$

řešení

$$y(x) = \mathrm{tg}\big(\mathtt{C} + x^2\big).$$

Jak je patrno, pouze lineární rovnice mají řešení tvaru

$$y(x) \in \big[y_1(x)\big]_\lambda + y_p(x),$$

kde symbol $\big[y_1(x)\big]_\lambda$ reprezentuje lineární obal (v tomto případě lineární obal jednoprvkové množiny), tj. všechny násobky funkce $y_1(x)$.

4.4 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Přejdeme nyní ke studiu diferenciálních rovnic vyšších řádů. Jak bude ale zanedlouho jasné, řešení rovnic prvního řádu probraná v předešlé sekci budou představovat jednu ze základních procedur vedoucích k nalezení řešení rovnic řádů vyšších. Zároveň ukážeme, že některá tvrzení z oddílu 4.2 bude možno v tomto oddíle výhodně zobecnit.

4.4.1 Poznámka

Nechť jsou funkce $p_0(x), p_1(x), q(x)$ spojitými funkcemi zadanými na otevřeném intervalu I. Nechť je dána lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x). \tag{4.28}$$

Nechť $v(x)$ je na I řešením rovnice

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \tag{4.29}$$

a pro všechna $x \in I$ platí $v(x) \neq 0$. Ukážeme, že za daných předpokladů lze vhodnou substitucí snížit řád rovnice (4.28) z druhého na první. To provedeme tak, že do rovnice (4.28) zavedeme novou funkci $z(x)$, a sice definičním předpisem

$$z(x) := \frac{y(x)}{v(x)}.$$

Pak ale

$$y'(x) = z'(x)v(x) + z(x)v'(x)$$

a také

$$y''(x) = z''(x)v(x) + 2z'(x)v'(x) + z(x)v''(x).$$

Dosadíme-li nyní tyto výrazy do vztahu (4.28), dostáváme rovnici

$$z''(x)v(x) + z'(x)\big(2v'(x) + p_1(x)v(x)\big) + z(x)\big(v''(x) + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x)\big) = q(x).$$

Užijeme-li nyní předpokladu, že $v''(x) + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x) = 0$, vychází odtud

$$z''(x) + z'(x)\left(2\frac{v'(x)}{v(x)} + p_1(x)\right) = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Po substituci $w(x) = z'(x)$ pak obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$w'(x) + w(x)\left(2\frac{v'(x)}{v(x)} + p_1(x)\right) = \frac{q(x)}{v(x)}$$

prvního řádu řešitelnou metodou integračního faktoru. Výsledkem tedy bude funkce tvaru

$$w(x) = \mathtt{C}_1 f(x) + f_p(x).$$

Odtud

$$z(x) = \mathtt{C}_1 \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathtt{C}_2 + \int f_p(x)\,\mathrm{d}x,$$

odkud

$$y(x) = \mathtt{C}_1 v(x) \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mathtt{C}_2 v(x) + v(x) \int f_p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Shrnuto: dvě funkce

$$v(x),\ v(x) \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

generují bázi dvojrozměrného prostoru všech řešení rovnice (4.29) a funkce $v(x) \int f_p(x)\,\mathrm{d}x$ představuje partikulární řešení rovnice (4.28).

4.4.2 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2}{x}\,y' + y = 0 \tag{4.30}$$

užitím faktu, že funkce $v(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ je jedním z jejích řešení. Dle předešlé poznámky zavedeme substituci

$$y(x) = \frac{z(x) \cdot \sin(x)}{x},$$

jež generuje následující vztahy pro derivace.

$$y' = z'\frac{\sin(x)}{x} + z\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$y'' = z''\frac{\sin(x)}{x} + 2z'\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} + z\frac{-x^3\sin(x) - 2x^2\cos(x) + 2x\sin(x)}{x^4}$$

Dosaďme je do zkoumané rovnice. Výsledkem je rovnice

$$z''\frac{\sin(x)}{x} + z'\frac{2\cos(x)}{x} = 0,$$

u které substitucí $w = z'$ triviálně snížíme řád. Máme

$$w' + 2w\operatorname{cotg}(x) = 0.$$

Integračním faktorem této rovnice je $\sin^2(x)$. Pak

$$\left(w \cdot \sin^2(x)\right)' = \mathtt{C}'$$

a tedy

$$w(x) = \frac{\mathtt{C}}{\sin^2(x)},$$

odkud

$$z(x) = \int w(x)\,\mathrm{d}x = \mathtt{C}_1\operatorname{cotg}(x) + \mathtt{C}_2,$$

potažmo

$$y(x) = \mathtt{C}_1\frac{\cos(x)}{x} + \mathtt{C}_2\frac{\sin(x)}{x}, \qquad I = \mathbf{R}^+.$$

To je tedy hledané řešení rovnice (4.30). Povšimněme si, že všechna řešení dané rovnice tvoří dvojrozměrný vektorový prostor, jehož bází je uspořádaný soubor

$$\left(\frac{\cos(x)}{x}, \frac{\sin(x)}{x}\right).$$

4.4.3 Poznámka

Výsledek předešlého příkladu nás vede k domněnce, že všechna řešení lineární diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ řádu n tvoří lineární vektorový prostor dimenze n. Toto pravdivé tvrzení bude dokázáno v dalším textu. Nejprve ale vyslovíme obecnou větu o snížení řádu diferenciální rovnice.

4.4.4 Věta – *Snížení řádu diferenciální rovnice*

Nechť jsou dány funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$, jež jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Nechť je funkce $v(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \tag{4.31}$$

na intervalu I a navíc pro všechna $x \in I$ platí, že $v(x) \neq 0$. Pak substituce $y(x) = z(x) \cdot v(x)$ vede ke snížení řádu diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x). \tag{4.32}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť tedy $v(x)$ je nenulové řešení rovnice s nulovou pravou stranou, tj.

$$\widehat{L}(v) = v^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)v^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)v'(x) + p_0(x)v(x) = 0$$

- do rovnice $\widehat{L}(y(x)) = q(x)$ zavedeme nyní novou funkci $z(x)$ prostřednictvím předpisu $y(x) = z(x) \cdot v(x)$

- pro $k-$tou derivaci funkce $y(x)$ pak tedy podle Leibnizova pravidla o derivování součinu platí

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} z^{(i)} v^{(k-i)}$$

- proveďme nyní dosazení

$$\widehat{L}\big(z(x) \cdot v(x)\big) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^{(i)} v^{(n-i)} + p_{n-1}(x) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} z^{(i)} v^{(n-i-1)} +$$

$$+ p_{n-2}(x) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} z^{(i)} v^{(n-i-2)} + \ldots + p_1(x)\big(z'v + zv'\big) + p_0(x) zv = q(x)$$

- na tuto rovnici nyní nahlížejme jako na diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x)$
- hledejme v předešlém zápise koeficient před absolutním členem $z(x) = z^{(0)}(x)$
- jak je patrno, jedná se o součet

$$\binom{n}{0} v^{(n)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{0} v^{(n-1)} + p_{n-2}(x) \binom{n-2}{0} v^{(n-2)} + \ldots + p_1(x) v' + p_0(x) v =$$

$$= v^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) v^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x) v'(x) + p_0(x) v(x) = \widehat{L}(v) = 0$$

- tedy absolutní člen zkoumané rovnice

$$\wp_n(x) z^{(n)}(x) + \wp_{n-1}(x) z^{(n-1)}(x) + \ldots + \wp_1(x) z'(x) + \wp_0(x) z(x) = q(x)$$

  vypadává, tj. $\wp_0(x) = 0$
- bude proto možno snížit její řád minimálně o jedna
- zkoumejme nyní další koeficienty $\wp_i(x)$ rovnice $\widehat{L}(z) = q(x)$
- snadno

$$\wp_n(x) = v^{(0)}(x) = v(x)$$

- a obecně pak

$$\wp_m(x) = \binom{n}{m} v^{(n-m)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{m} v^{(n-1-m)} +$$

$$+ p_{n-2}(x) \binom{n-2}{m} v^{(n-2-m)} + \ldots + p_{m+1}(x) \binom{m+1}{m} v^{(m+1-m)} + p_m(x) \binom{m}{m} v^{(m-m)}$$

- tedy

$$\wp_m(x) = \binom{n}{m} v^{(n-m)} + p_{n-1}(x) \binom{n-1}{m} v^{(n-1-m)} +$$

$$+ p_{n-2}(x) \binom{n-2}{m} v^{(n-2-m)} + \ldots + m\, p_{m+1}(x) v' + p_m(x) v$$

- tím jsme obdrželi diferenciální rovnici

$$\widehat{L}(z) = z^{(n)}(x) + \frac{\wp_{n-1}(x)}{v(x)} z^{(n-1)}(x) + \frac{\wp_{n-2}(x)}{v(x)} z^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{\wp_1(x)}{v(x)} z'(x) = \frac{q(x)}{v(x)}$$

- substitucí $w(x) := z'(x)$ nyní snížíme triviálně řád

- pak tedy získáme rovnici řádu $n-1$ tvaru

$$\widehat{L}(w)=w^{(n-1)}(x)+\frac{\wp_{n-1}(x)}{v(x)}w^{(n-2)}(x)+\frac{\wp_{n-2}(x)}{v(x)}w^{(n-3)}(x)+\ldots+\frac{\wp_1(x)}{v(x)}w(x)=\frac{q(x)}{v(x)}$$

- jsou-li $w(x)$ všechna její řešení, jsou potom funkce $y(x)=v(x)\int w(x)\,\mathrm{d}x$ všechna řešení rovnice (4.32)

4.4.5 Poznámka

Předešlou větu lze shrnout následovně: Znalost jednoho nenulového řešení příslušné lineární diferenciální rovnice bez pravé strany umožňuje snížit řád původní rovnice minimálně o jedna.

4.4.6 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$x^2y''-5xy'+8y=16 \tag{4.33}$$

užitím faktu, že funkce $v(x)=x^2$ je řešením rovnice

$$x^2y''-5xy'+8y=0. \tag{4.34}$$

Dle věty 4.4.4 zavedeme do zadané rovnice novou funkci $z(x)$ předpisem $y(x)=z(x)\cdot x^2$. Odtud $y'=z'x^2+2xz$ a $y''=z''x^2+4xz'+2z$. Po dosazení se původní rovnice redukuje do tvaru

$$z''x^4-x^3z'=16.$$

Po zavedení substituce $w(x)=z'(x)$ dojde k formálnímu snížení řádu. Lineární diferenciální rovnici

$$w'-\frac{w}{x}=\frac{16}{x^4}$$

prvního řádu standardně vynásobíme integračním faktorem x^{-1} a získáváme tak rovnost

$$\left(w(x)\cdot\frac{1}{x}\right)'=\frac{16}{x^5},$$

která vede k řešení

$$w(x)=\hat{\mathtt{C}}\,x-\frac{4}{x^3}.$$

Dále

$$z(x)=\int w(x)\,\mathrm{d}x=\mathtt{C}_1x^2+\mathtt{C}_2+\frac{2}{x^2},$$

odkud již získáme úplné řešení úlohy, a sice

$$y(x)=\mathtt{C}_1x^4+\mathtt{C}_2x^2+2,\qquad I=\mathbf{R}.$$

Toto řešení může být také zapsáno ve tvaru

$$y(x)\in\left[x^4,x^2\right]_\lambda+2,$$

ze kterého je patrno, že prostor všech řešení rovnice (4.34) je dvoudimenzionální a že jeho bází je uspořádaný soubor $\left(x^4,x^2\right)$. Funkce $y(x)=2$ pak představuje partikulární řešení rovnice (4.33).

4.4.7 Poznámka

Jedním z významných výsledků teorie o diferenciálních rovnicích je na první pohled překvapující fakt, že hledáme-li řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big)=0$ takové, že ve vybraném bodě $x_0\in\mathbf{R}$ platí

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0, \tag{4.35}$$

existuje pouze jediné takové řešení, a sice řešení nulové, tj. nulová funkce $y(x)=0$. Toto tvrzení nyní korektně vyslovíme a dokážeme. Bude totiž výchozím bodem dalších úvah.

4.4.8 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ jsou spojité na I. Nechť $y(x)$ je takovým rešením rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$, že pro pevně zvolené $x_0 \in I$ platí (4.35). Pak $y(x) = 0$ pro každé $x \in I$.

Důkaz:

- nechť $H = \{x \in I : x > x_0 \wedge y(x) \neq 0\}$
- předpokládejme, že $H \neq \emptyset$ a snažme se dojít ke sporu
- První část:
  - vidíme, že H je jistě zdola omezená, má tedy infimum, pro které platí $\xi := \inf(H) \geqslant x_0$
  - bude-li $\xi = x_0$, pak snadno
$$y(\xi) = y'(\xi) = \ldots = y^{(n-1)}(\xi) = 0$$
  - bude-li $\xi > x_0$, potom jistě platí:
$$(\forall x \in (x_0, \xi)) : \; y(x) = 0$$
  - ze spojitosti rovněž plyne, že $y(\xi) = 0$, a tedy také $y'_-(\xi) = 0$
  - poněvadž ale víme, že ve všech bodech existují vlastní derivace (oboustranné), pak jistě platí, že $y'(\xi) = 0$
  - stejnou úvahou dostáváme:
$$(\forall k \in \mathbf{N})(k < n) : \; y^{(k)}(\xi) = 0$$
  - z rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ pak přímo vychází, že také $y^{(n)}(\xi) = 0$
  - tím jsme tedy prokázali, že v infimu množiny H jsou všechny derivace (včetně nejvyšší) nulové
- Druhá část:
  - zvolme nyní $x_2 \in I$ takové, že $x_2 > \xi$ a $x_2 \in H$ (tedy $y(x_2) \neq 0$)
  - z definice lineární diferenciální rovnice víme, že všechny funkce $p_i(x)$ jsou na I spojité, jsou tedy spojité i na intervalu $\langle \xi, x_2 \rangle$
  - proto jistě existuje $\mathrm{K} > 0$ tak, že pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ a všechna $x \in \langle \xi, x_2 \rangle$ platí
$$|p_i(x)| \leqslant \mathrm{K}$$
  - zvolme nyní $\delta > 0$ takové, aby $\xi + \delta < x_2$, ale přitom aby
$$\sum_{i=1}^{n} \delta^i < \frac{1}{\mathrm{K}} \tag{4.36}$$
  - víme dále, že funkce $y^{(n)}(x)$ je na I spojitá, neboť je součtem součinů spojitých funkcí
  - proto také nabývá na uzavřeném intervalu $\langle \xi, \xi + \delta \rangle$ svého maxima
  - čili existuje $x_3 \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ takové, že
$$|y^{(n)}(x_3)| = \max\{|y^{(n)}(x)| : x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle\}$$
  - položme $\sigma := |y^{(n)}(x_3)|$
  - jestliže $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$, pak podle Lagrangeovy věty o přírůstku 1.3.12 existuje mezi bodem ξ a bodem $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ číslo μ takové, že
$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(\xi) = y^{(n)}(\mu) \cdot (x - \xi)$$
  - tedy
$$|y^{(n-1)}(x)| = |y^{(n-1)}(x) - \overbrace{y^{(n-1)}(\xi)}^{=0}| = |y^{(n)}(\mu)| \cdot |x - \xi| \leqslant \sigma \cdot \delta$$

- analogicky tedy pro všechna $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ platí

$$\left|y^{(n-2)}(x)\right| \leqslant \delta^2 \sigma$$

$$\left|y^{(n-3)}(x)\right| \leqslant \delta^3 \sigma$$

$$\vdots$$

$$\left|y^{(n-k)}(x)\right| \leqslant \delta^k \sigma$$

$$\vdots$$

$$\left|y(x)\right| \leqslant \delta^n \sigma$$

- z rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$ a posledně prokázaných nerovností tudíž plyne

$$\left|y^{(n)}(x)\right| = \left|-\sum_{m=0}^{n-1} p_k(x) y^{(m)}(x)\right| \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} \left|p_k(x)\right| \cdot \left|y^{(m)}(x)\right| < \mathrm{K} \cdot \sigma \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \delta^{n-m} =$$

$$= \mathrm{K} \cdot \sigma \cdot \sum_{k=1}^{n} \delta^k \leqslant \sigma \tag{4.37}$$

- položíme-li v rovnosti (4.37) $x = x_3$, obdržíme nerovnost $\sigma < \sigma$, kterou lze splnit pouze tehdy, je-li $\sigma = 0$
- odtud ale vychází, že pro všechna $x \in \langle \xi, \xi + \delta \rangle$ platí

$$y^{(n-1)}(x) = y^{(n-2)}(x) = \ldots = y'(x) = y(x) = 0$$

- to je ale spor s předpokladem, že ξ je infimem množiny M
- a proto musí být množina H nutně prázdná

• Diskuse:

  - analogicky by se postupovalo pro $H = \big\{x \in I : x < x_0 \wedge y(x) \neq 0\big\}$
  - důležité je si uvědomit, že zásadní předpokladem je fakt, že I je interval
  - pokud by např. množina I byla disjunktním sjednocením dvou intervalů, důkaz bychom neprovedli

4.4.9 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť dále $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$ a $x_0 \in I$. Pak existuje nejvýše jedno řešení $v(x)$ rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = q(x)$ takové, že pro každé $i \in \widehat{\underline{n-1}}$ platí n podmínek

$$v^{(i)}(x_0) = d_i. \tag{4.38}$$

Důkaz:

• předpokládejme, že existují dvě různá řešení $v(x)$ a $w(x)$ splňující podmínku (4.38)

• definujme funkci $z(x) := v(x) - z(x)$

• odtud

$$\widehat{L}\big(z(x)\big) = \widehat{L}\big(v(x) - w(x)\big) = \widehat{L}\big(v(x)\big) - \widehat{L}\big(w(x)\big) = q(x) - q(x) = 0$$

• zároveň také pro každé $i \in \widehat{\underline{n-1}}$ platí $z^{(i)}(x_0) = d_i - d_i = 0$

• podle věty 4.4.8 je tedy funkce $z(x)$ nulovou funkcí, což značí, že $v(x) = w(x)$

• a to je spor s předpokladem

4.4.10 Definice

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají v množině $M \subset \mathbf{R}$ všechny derivace až do řádu $n-1$ včetně. Pak funkci definovanou vztahem

$$W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.39}$$

nazýváme *Wronského determinantem (wronskiánem)* funkcí $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ na množině M.

4.4.11 Příklad

Vypočtěme wronskián systému funkcí

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}.$$

Sestavme tedy příslušný determinant. Je jím

$$W_{1,x,x^2,x^3,\dots,x^k}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} & x^k \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} & kx^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (k-1)(k-2)x^{k-3} & k(k-1)x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-1)! & k!\,x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k! \end{vmatrix} = k! \cdot W_{1,x,x^2,x^3,\dots,x^{k-1}}(x),$$

kde byl proveden rozvoj determinantu podle posledního řádku. Ze získaného rekurentního předpisu snadno odvodíme finální výsledek

$$W_{1,x,x^2,x^3,\dots,x^k}(x) = k!(k-1)!(k-2)!\dots 1 = \prod_{i=1}^{k} i!$$

4.4.12 Věta

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají v množině $M \subset \mathbf{R}$ derivace až do řádu $n-1$ včetně a jsou lineárně závislé. Potom pro všechna $x \in M$ platí:

$$W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = 0.$$

Důkaz:

- funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ jsou lineárně závislé
- tedy existují reálná čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ (ne všechna nulová) tak, že platí

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

- a tedy také pro všechna $k \in \widehat{n-1}$ a všechna $x \in M$ platí

$$c_1 f_1^{(k)}(x) + c_2 f_2^{(k)}(x) + \dots + c_n f_n^{(k)}(x) = 0$$

- sloupce determinantu (4.39) jsou tudíž lineárně závislé, z čehož plyne, že pro všechna $x \in M$ platí

$$W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = 0$$

4.4.13 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Pak pro každé $x \in I$ platí nerovnost

$$W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x) \neq 0.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- pro spor předpokládejme, že existuje $x_0 \in I$ takové, že $W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x_0) = 0$
- pokusme se sestavit diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\, y^{(i)}(x) = 0,$$

  jíž řeší všechny lineárně nezávislé funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$

- tyto funkce dosadíme do schématu hledané rovnice
- obdržíme soustavu

$$y_j^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\, y_j^{(i)}(x) = 0 \qquad (j \in \widehat{n})$$

  n rovnic pro n neznámých funkcí $p_i(x)$

- tuto soustavu lze přepsat do maticové rovnosti

$$\begin{pmatrix} y_1^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_1'(x) & y_1(x) \\ y_2^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_2'(x) & y_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n'(x) & y_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1}(x) \\ p_{n-2}(x) \\ \vdots \\ p_0(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

- podle Cramerova pravidla má soustava řešení

$$p_i(x) = \frac{\Delta_{(i)}}{\Delta},$$

  kde Δ je determinant soustavy a $\Delta_{(i)}$ je determinant matice, jež vznikne nahrazením $i-$tého sloupce matice soustavy sloupcovým vektorem pravé strany

- protože ale

$$\Delta = W_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x)$$

  a existuje $x_0 \in I$, pro nějž $\Delta(x_0) = 0$, jsou všechny $p_i(x)$ v tomto bodě nespojité, což je spor s definicí lineární diferenciální rovnice

- lineární diferenciální rovnice vyhovující zadaným podmínkám tedy neexistuje

4.4.14 Poznámka

Všimněte si, že funkce $y_1(x) = x$ a $y_2(x) = \ln(x)$ jsou zcela zjevně lineárně nezávislé, přesto ale existuje bod $x_0 = \mathrm{e}$, v němž je příslušný wronskián nulový, tj.

$$W_{y_1,y_2}(\mathrm{e}) = \begin{vmatrix} x & \ln(x) \\ 1 & x^{-1} \end{vmatrix}(\mathrm{e}) = 1 - \ln(x)\big|_{x=\mathrm{e}} = 0.$$

Z předchozí věty tedy plyne, že obě funkce nemohou být na intervalu $\mathbf{R}^+$ řešením žádné lineární diferenciální rovnice druhého řádu $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$.

4.4.15 Poznámka

Následující věta se bude zabývat otázkou, kolik existuje řešení $y(x)$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ takových, které v daném bodě x_0 vyhovují podmínkám

$$y^{(i)}(x_0) = d_i \qquad (i \in \widehat{n-1}), \tag{4.40}$$

kde čísla $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$ jsou pevně zvolena. Série rovnic (4.40) bývá nazývána *počátečními podmínkami* diferenciální rovnice (ve standardizovaném tvaru).

4.4.16 Věta – *o jednoznačnosti*

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Nechť jsou pevně zvoleny bod $x_0 \in I$ a čísla $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $L(y(x)) = 0$ takové, že pro něj platí počáteční podmínky (4.40).

<u>*Důkaz:*</u>

- vezměme tedy $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ a $x_0, d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ dle předpokladů věty
- z věty 4.4.13 víme, že
$$W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x_0) \neq 0 \tag{4.41}$$
- požadované řešení $y(x)$ rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ vyhovující podmínkám (4.40) budeme hledat ve tvaru lineární kombinace funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- předpokládáme tedy, že
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \tag{4.42}$$
kde c_i jsou dosud neznámé reálné konstanty
- jejich hodnoty se pokusíme vypočítat z podmínek (4.40)
- získáme tím soustavu rovnic
$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) &= d_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) &= d_1 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= d_{n-1} \end{aligned} \tag{4.43}$$
pro neznámé $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$
- tato soustava může být přepsána do maticového zápisu
$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_{n-1}(x_0) & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_{n-1}'(x_0) & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$
- povšimněme si, že determinantem soustavy je právě transponovaný wronskián (4.41)
- z lineární algebry víme, že je-li tento determinant nenulový (a v našem případě je, jak vidno z podmínky (4.41)), pak má tato soustava řešení
- tedy existují čísla $c_i \in \mathbf{R}$ $(i \in \widehat{n})$ tak, že soustava (4.43) je splněna
- tedy řešení (4.42) vyhovuje podmínkám $y^{(i)}(x_0) = d_i$ a navíc se skutečně jedná o řešení zkoumané rovnice, neboť
$$\widehat{L}(y(x)) = c_1 \widehat{L}(y_1(x)) + c_2 \widehat{L}(y_2(x)) + \ldots + c_n \widehat{L}(y_n(x)) = 0$$
- to, že nalezené řešení je jedinečné, vyplývá pak z již dokázaného tvrzení 4.4.9, kde je za $q(x)$ položena nulová funkce

4.4.17 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$. Pak každé řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$ je lineární kombinací funkcí $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- zvolme libovolně $x_0 \in I$
- nechť $z(x)$ je řešením rovnice $\widehat{L}(z(x)) = 0$
- předpokládejme pro spor, že $z(x)$ není lineární kombinací funkcí $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- jelikož $z(x)$ zkoumanou rovnici řeší, musí být na I minimálně $n-$krát diferencovatelná
- položme tedy
$$d_i := z^{(i)}(x_0)$$
  pro všechna $i \in \widehat{n-1}$
- nechť $v(x)$ je řešení zkonstruované podle věty 4.4.16 tak, aby $v^{(i)}(x_0) = d_i$
- $v(x)$ je tedy, jak plyne z předešlé věty, lineární kombinací funkcí $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- z věty 4.4.8 ale plyne spor, neboť z daných předpokladů vychází
$$\widehat{L}\big(v(x) - z(x)\big) = 0 \quad \wedge \quad (v-z)^{(i)}(x_0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v(x) = z(x)$$

4.4.18 Poznámka

Předešlé tvrzení přináší zásadní poznatek o prostoru všech řešení lineárních diferenciálních rovnic. A sice fakt, že maximální počet lineárně nezávislých řešení dané rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$ bez pravé strany je roven řádu této rovnice. Odsud ihned vyplývá následující důsledek.

4.4.19 Důsledek – *základní věta teorie diferenciálních rovnic*

Vektorový prostor všech řešení diferenciální rovnice $L(y(x)) = 0$ řádu n má dimenzi n.

4.4.20 Definice

Každá množina n lineárně nezávislých řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, jež podle věty 4.4.17 generuje bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, se nazývá *fundamentálním systémem* řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}\big(y(x)\big) = 0$, resp. $\widehat{L}\big(y(x)\big) = q(x)$.

4.4.21 Poznámka

Ukažme nyní, proč se výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ definuje jako
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} := \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x). \tag{4.44}$$
Snadno nahlédneme, že $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})' = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ a $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})'' = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Je tedy patrno, že funkce $v(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ je řešením diferenciální rovnice
$$y''(x) + y(x) = 0.$$
Rovněž ale funkce $y_1(x) = \sin(x)$ a $y_2(x) = \cos(x)$ jsou dvě nezávislá řešení téže rovnice, neboť pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí
$$W_{\cos(x),\sin(x)}(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0.$$
Tyto funkce tedy tvoří fundamentální systém (tento musí mít pouze a právě dva prvky), a proto musí být funkce $v(x)$ lineární kombinací obou funkcí z fundamentálního systému zkoumané rovnice. Tedy
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = a\cos(x) + b\sin(x),$$
kde a a b jsou dosud neznámé konstanty. Jejich hodnoty ale snadno vypočteme z počátečních podmínek $v(0) = 1$ a $v'(0) = \mathrm{i}$. Odtud $a = 1$ a $b = \mathrm{i}$. A platí tedy vztah (4.44), jenž bývá nazýván *Eulerovým vzorcem*.

4.4.22 Poznámka

Jelikož obecná teorie rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ byla již plně vyčerpána, budeme se od této chvíle zabývat hledáním obecných řešení rovnice $\widehat{L}(Y(x)) = q(x)$ s nenulovou pravou stranou. Máme přitom stále na mysli platnost obecné věty 4.1.14, ve které je se tvrdí, že všechna řešení rovnice $\widehat{L}(Y(x)) = q(x)$ jsou právě všechny funkce $Y(x)$ dané rovností

$$Y(x) = y(x) + y_p(x),$$

kde $y(x)$ jsou všechna řešení rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ bez pravé strany a $y_p(x)$ je jedno partikulární řešení rovnice $\widehat{L}(Y(x)) = q(x)$.

4.4.23 Věta – *o metodě variace konstant*

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I. Nechť množina

$$\{y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$

je fundamentálním systémem rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Jestliže pro funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ platí n rovností

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j^{(i)}(x) = 0$$

pro $i \in \widehat{n-2}$ a

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j^{(n-1)}(x) = q(x)$$

a funkce $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots, F_n(x)$ jsou po řadě primitivní k funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots, f_n(x)$ v intervalu I, pak funkce $Y(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j(x)$ je řešením rovnice

$$\widehat{L}(Y(x)) = q(x). \tag{4.45}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- víme, že funkce $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ jsou za daných předpokladů všemi řešeními rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$
- snahou je hledat řešení rovnice (4.45) v podobném tvaru, a sice ve tvaru $\sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j(x)$, ve kterém jsou tzv. *variovány* konstanty (změněny na funkce)
- přitom $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ jsou dosud neznámé funkce (pro jejich určení je třeba stanovit n výše citovaných podmínek)
- provedeme nyní první derivaci funkce $Y(x)$:

  $$Y'(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j'(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j'(x) y_j(x),$$

  v níž položíme výraz $F_1'(x) y_1(x) + F_2'(x) y_2(x) + \ldots + F_n'(x) y_n(x)$ roven nule (tím jsme obdrželi první podmínku)
- analogicky dále:

  $$Y''(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j''(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j'(x) y_j'(x),$$

  kde klademe $\sum_{j=1}^{n} F_j'(x) y_j'(x) = 0$ (to představuje druhou podmínku)
- až

  $$Y^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j'(x) y_j^{(n-2)}(x),$$

  kde položíme $\sum_{j=1}^{n} F_j'(x) y_j^{(n-2)}(x) = 0$

- pro $n-$tou derivaci
$$Y^{(n)}(x)=\sum_{j=1}^{n}F_j(x)y_j^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{n}F_j'(x)y_j^{(n-1)}(x)$$
pak položíme výraz $F_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+F_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+F_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)$ roven pravé straně rovnice (4.45)
- tím je zaručeno, že
$$\widehat{L}(Y(x))=\sum_{j=1}^{n}F_j(x)\widehat{L}(y_j(x))+\sum_{j=1}^{n}F_j'(x)y_j^{(n-1)}=q(x)$$
- pro konkrétní tvar řešení pak dostáváme n podmínek:
$$\begin{aligned}f_1(x)y_1(x)+f_2(x)y_2(x)+\ldots+f_n(x)y_n(x)&=0\\ f_1(x)y_1'(x)+f_2(x)y_2'(x)+\ldots+f_n(x)y_n'(x)&=0\\ &\vdots\\ f_1(x)y_1^{(n-2)}(x)+f_2(x)y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+f_n(x)y_n^{(n-2)}(x)&=0\\ f_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+f_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+f_n(x)y_n^{(n-1)}(x)&=q(x)\end{aligned}$$
- tato soustava může být přepsána do maticového zápisu
$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_{n-1}(x)\\ f_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\\ q(x)\end{pmatrix} \qquad (4.46)$$
- povšimněme si, že determinantem soustavy je právě wronskián fundamentálního systému
$$\{y_1(x),\, y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$$
- ten je ale zřejmě pro všechna $x\in I$ nenulový
- z lineární algebry odtud vyplývá, že soustava (4.46) pro neznámé $f_1(x),\, f_2(x),\ldots,f_n(x)$ je vždy řešitelná
- funkce $f_1(x),\, f_2(x),\ldots,f_n(x)$ jsou navíc spojité na I, a tedy k nim jistě existují funkce primitivní
- tím je věta dokázána

4.4.24 Poznámka

Z důkazu předešlé věty vyplývá postup při hledání řešení rovnice (4.45). Označme nejprve
$$\Delta(x):=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$
Soustavu (4.46) pro neznámé funkce $f_1(x),\, f_2(x),\ldots,f_n(x)$ budeme řešit Cramerovým pravidlem. Označme pro tento účel
$$\Delta_1(x):=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x)\\ 0 & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x)\\ q(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

první dílčí determinant (vznikl záměnou prvního sloupku ve wronskiánu za sloupcový vektor pravé strany rovnice (4.46). Dále podobně

$$\Delta_2(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & \dots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & 0 & \dots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & 0 & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & q(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

pro druhý dílčí determinant a tak dále. Nakonec tedy

$$\Delta_n(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & q(x) \end{vmatrix}.$$

Pak hledané funkce $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají tvar

$$f_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}$$

a jsou navíc spojité. Nechť

$$F_i(x) = \int f_i(t)\,\mathrm{d}t + \mathbb{C}_i$$

jsou primivní funkce k funkcím $f_i(x)$. Pak hledaným řešením rovnice (4.45) je funkce

$$Y(x) = F_1(x)y_1(x) + F_2(x)y_2(x) + \ldots + F_n(x)y_n(x).$$

4.4.25 Příklad

Znovu se navracíme k řešení příkladu 4.2.2. Tentokráte jej budeme řešit metodou variace konstant. Nejprve tedy vyřešíme rovnici $y' - 2xy = 0$. Po snadné separaci dostáváme řešení rovnice s nulovou pravou stranou ve tvaru $y(x) = \mathbb{C}\,\mathrm{e}^{x^2}$. Řešení rovnice $\widehat{L}(Y(x)) = 2x$ předpokládáme podle věty 4.4.23 ve tvaru $Y(x) := F(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$. Pro $f(x) := F'(x)$ pak (podle návodu demonstrovaného v minulé poznámce) má platit:

$$f(x)\,\mathrm{e}^{x^2} = 2x.$$

Odsud $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ a následně $F(x) = -\mathrm{e}^{-x^2} + \mathbb{C}$. Uzavíráme tedy, že kompletní řešení zadané rovnice je opět tvaru

$$Y(x) = \mathbb{C}\,\mathrm{e}^{x^2} - 1, \qquad I = \mathbf{R}.$$

4.4.26 Příklad

Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 6x\mathrm{e}^{2x},$$

víme-li, že fundamentálním systémem zadané rovnice je množina

$$F_S = \{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}\}. \tag{4.47}$$

Funkce e^{2x}, $x\mathrm{e}^{2x}$ řeší příslušnou rovnici bez pravé strany a pro jejich wronskián platí

$$W_{\mathrm{e}^{2x},\,x\mathrm{e}^{2x}} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4x} \neq 0.$$

Tím byla mimo jiné provedena kontrola, že množina (4.47) skutečně fundamentálním systémem je. Metodou variace konstant hledáme řešení tvaru

$$y(x) = F_1(x)\,\mathrm{e}^{2x} + F_2(x)\,x\mathrm{e}^{2x}.$$

Užijeme zautomatizovaný postup podrobně probraný v poznámce 4.4.24. Podle něj

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^{2x} \\ 6x\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = -6x^2\mathrm{e}^{4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 2\mathrm{e}^{2x} & 6x\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = 6x\mathrm{e}^{4x}.$$

Proto

$$f_1(x) = \frac{\Delta_1}{W} = -6x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\Delta_2}{W} = 6x.$$

Pro příslušné primitivní funkce pak snadno

$$F_1(x) = -2x^3 + \mathsf{C}_1, \qquad F_2(x) = 3x^2 + \mathsf{C}_2,$$

odkud pak získáváme finální řešení tvaru

$$y(x) = \mathsf{C}_1\mathrm{e}^{2x} + \mathsf{C}_2 x\mathrm{e}^{2x} + x^3\mathrm{e}^{2x}, \qquad I = \mathbf{R}.$$

4.4.27 Věta

Nechť funkce $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), q(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I a rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ má fundamentální systém. Pak pro libovolně pevně zvolené $x_0 \in I$ a libovolná čísla $d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno řešení $u(x)$ rovnice

$$\widehat{L}(y(x)) = q(x) \tag{4.48}$$

takové, že $u^{(i)}(x_0) = d_i$ pro všechna $i \in \widehat{n-1}$.

Důkaz:

- podle věty 4.4.23 existuje řešení rovnice (4.48), označme jej $Y(x)$
- položme $\delta_i := d_i - Y^{(i)}(x_0)$
- nalezneme řešení rovnice $\widehat{L}(z(x)) = 0$ takové, že $z^{(i)}(x_0) = \delta_i$
- to jistě existuje podle věty 4.4.16 a je právě jediné
- položíme $u(x) = Y(x) + z(x)$
- pak
$$\widehat{L}(u(x)) = \widehat{L}(Y(x)) + \widehat{L}(z(x))) = q(x) + 0 = q(x)$$
- tedy $u(x)$ je řešením rovnice (4.48)
- navíc $u^{(i)}(x_0) = Y^{(i)}(x_0) + z^{(i)}(x_0) = d_i - \delta_i + \delta_i = d_i$
- tudíž řešení $u(x)$ vyhovuje požadovaným podmínkám a je pravě jedno
- tím je důkaz proveden

4.5 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Ze všech možných lineárních diferenciálních rovnic budeme nyní podrobněji zkoumat rovnice s konstantními koeficienty. Jedná se o nejfrekventovanější typy diferenciálních rovnic a také o typy poměrně snadno řešitelné. Seznámíme se proto nyní s metodami jejich řešení.

4.5.1 Definice

Lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty (řádu n) rozumíme rovnici tvaru

$$\widehat{L}(y(x)) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x), \tag{4.49}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ($a_n \neq 0$) a $q(x)$ je spojitá funkce.

4.5.2 Poznámka

Pokusme se hledat některá řešení diferenciální rovnice (4.49). Pro tento záměr budeme uvažovat funkce tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Snadno nahlédneme, že

$$y^{(k)} = \lambda^k \mathrm{e}^{\lambda x},$$

a tedy po dosazení do (4.49) a krácení výrazem $\mathrm{e}^{\lambda x}$ dostaneme

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{4.50}$$

Je-li tedy některé λ řešením této rovnice, pak funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením (4.49). Zároveň ale není tato úvaha vyčerpávající, neboť pro diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0$$

má algebraická rovnice (4.50) pouze jediný kořen $\lambda = 1$. Z obecné teorie ale vyplývá, že kromě funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{x}$ musí být ve fundamentálním systému zkoumané rovnice ještě jedna funkce. Předešlá metoda ji ale nenachází. Proto bude nutné zkoumat řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty podrobněji.

4.5.3 Definice

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (4.49). Polynom

$$\ell(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \tag{4.51}$$

nazýváme *charakteristickým polynomem* diferenciální rovnice (4.49).

4.5.4 Věta

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{4.52}$$

s konstantními koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Nechť nula je $k-$násobným kořenem jejího charakteristického polynomu. Pak lineární obal

$$[1, x, x^2, \ldots, x^{k-2}, x^{k-1}]_\lambda$$

tvoří $k-$dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.52).

Důkaz:

- označme $\ell(\lambda)$ charakteristický polynom rovnice (4.52)
- je-li nula $k-$násobným kořenem $\ell(\lambda)$, pak tedy

  $$\ell(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_{k-1} \lambda^{k+1} + a_k \lambda^k,$$

  čili $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-2} = a_{k-1} = 0$
- rovnice (4.52) má tedy podobu

  $$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{k-1} y^{k+1}(x) + a_k y^k(x) = 0 \tag{4.53}$$

- proto všechny funkce 1, x, $x^2, \ldots, x^{k-2}$, x^{k-1} rovnici (4.53) řeší
- nyní zbývá dokázat, že uvedené funkce jsou lineárně nezávislé

- podle věty 4.4.12 stačí dokázat, že příslušný wronskián není nulový
- jak ale bylo vypočteno v příkladě 4.4.11, platí

$$W_{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^{k-1}}(x) = \prod_{i=1}^{k-1} i! \neq 0,$$

čímž je důkaz zkompletován

4.5.5 Poznámka

Dokázané tvrzení nyní zobecníme pro případ, kdy $k-$násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ bude komplexní číslo $\alpha \in \mathbf{C}$.

4.5.6 Věta

Nechť je zadána lineární diferenciální rovnice (4.52) s konstantními koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Nechť číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ je $k-$násobným kořenem jejího charakteristického polynomu. Pak lineární obal

$$\left[\mathrm{e}^{\alpha x}, x\mathrm{e}^{\alpha x}, x^2\mathrm{e}^{\alpha x}, \ldots, x^{k-2}\mathrm{e}^{\alpha x}, x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\right]_\lambda$$

tvoří $k-$dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.52).

<u>*Důkaz:*</u>

- k důkazu použijeme tvrzení předešlé věty
- do rovnice

$$\widehat{L}(y(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0 \tag{4.54}$$

zavedeme novou funkci $z(x)$ předpisem

$$y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{4.55}$$

- z Leibnizovy formule pro derivaci součinu dostáváme

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^i \mathrm{e}^{\alpha x} z^{(k-i)}(x).$$

- to po dosazení do rovnice (4.54) a krácení výrazem $\mathrm{e}^{\alpha x}$ vede na rovnici

$$\widehat{L}(z(x)) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} a_k \alpha^i z^{(k-i)}(x) = 0 \tag{4.56}$$

- charakteristický polynom této rovnice má tedy tvar

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} a_k \alpha^i \mu^{k-i}$$

- pokusme se ho upravit
- snadno nahlédneme, že platí

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} a_k \alpha^i \mu^{k-i} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\alpha + \mu)^k$$

- je-li tedy $\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ charakteristický polynom rovnice (4.54), platí mezi temito dvěma polynomy jednoduchý vztah
$$\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu),$$
tj. $\lambda = \alpha + \mu$
- dle předpokladu věty je ale komplexní číslo α $k-$násobným kořenem polynomu $\ell(\lambda)$
- to značí, že
$$\ell(\lambda) = a_n (\lambda - \alpha)^k (\lambda - \beta)^{k_\beta} (\lambda - \gamma)^{k_\gamma} \dots,$$
kde čísla $\alpha, \beta, \gamma \dots$ jsou různé komplexní kořeny charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$ s násobnostmi po řadě k, k_β, k_γ atd.
- pak ale
$$\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu) = a_n \mu^k \left[\mu - (\beta - \alpha)\right]^{k_\beta} \left[\mu - (\gamma - \alpha)\right]^{k_\gamma} \dots$$
- tedy nula je $k-$násobným kořenem polynomu $\wp(\mu)$, což umožňuje užít větu 4.5.4
- podle ní funkce $z_1(x) = 1$, $z_2(x) = x$, $z_3(x) = x^2, \dots, z_k(x) = x^{k-1}$ řeší rovnici (4.56) a navíc lineární obal
$$\left[1, x, x^2, \dots, x^{k-2}, x^{k-1}\right]_\lambda$$
tvoří $k-$dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.56)
- ze substitučního vztahu (4.55) pak ale vyplývá, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, $y_3(x) = x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ řeší rovnici (4.54) a navíc lineární obal
$$\left[\mathrm{e}^{\alpha x},\, x\mathrm{e}^{\alpha x},\, x^2\mathrm{e}^{\alpha x}, \dots, x^{k-2}\mathrm{e}^{\alpha x},\, x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\right]_\lambda$$
tvoří $k-$dimenzionální podprostor vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.55)
- tím je důkaz dokončen

4.5.7 Lemma

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $\wp_1(x), \wp_2(x), \dots, \wp_r(x)$ jsou polynomy. Nechť pro každé $x \in I$ platí
$$\sum_{j=1}^{r} \wp_j(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_j x} = 0.$$
Potom pro každé $x \in I$ platí sada rovností
$$\wp_1(x) = \wp_2(x) = \dots = \wp_r(x) = 0.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- důkaz provedeme matematickou indukcí podle r
- pro $r = 1$ plyne z rovnosti $\wp_1(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x} = 0$ rovnost $\wp_1(x) = 0$ pro všechna x
- předpokládejme, že platí implikace
$$\sum_{j=1}^{r-1} \wp_j(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_j x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \wp_1(x) = \wp_2(x) = \dots = \wp_{r-1}(x) = 0$$
- vyjdeme z rovnosti $\sum_{j=1}^{r} \wp_j(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_j x} = 0$, která vede na
$$\sum_{j=1}^{r-1} \wp_j(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_j x} + \wp_r(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_r x} = 0$$
- odtud pro všechna $x \in I$ platí $\wp_r(x) = 0$, a to jsme měli dokázat

4.5.8 Důsledek

Nechť $r \in \mathbf{N}$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{N}$. Pak funkce

$$\begin{gathered} e^{\alpha_1 x}, x\, e^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{k_1-1} e^{\alpha_1 x}, \\ e^{\alpha_2 x}, x\, e^{\alpha_2 x}, x^2 e^{\alpha_2 x}, \ldots, x^{k_2-1} e^{\alpha_2 x}, \\ \vdots \\ e^{\alpha_r x}, x\, e^{\alpha_r x}, x^2 e^{\alpha_r x}, \ldots, x^{k_r-1} e^{\alpha_r x} \end{gathered} \tag{4.57}$$

jsou na každém otevřeném intervalu lineárně nezávislé.

4.5.9 Věta

Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$ s konstantními koeficienty. Nechť jejich násobnosti jsou po řadě k_1, $k_2, \ldots, k_r$. Pak fundamentálním systémem této rovnice je systém funkcí (4.57).

Důkaz:

- jde o přímý důsledek věty 4.5.6 a důsledku 4.5.8

4.5.10 Příklad

Řešme diferenciální rovnici

$$y'' - y = 0$$

s nulovou pravou stranou. Jedná se zcela zjevně o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristický polynom

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$. Proto má zkoumaná rovnice (podle věty 4.5.9) fundamentální systém $\{e^x, e^{-x}\}$, a jejím úplným řešením jsou tudíž funkce

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

4.5.11 Příklad

Zkoumejme diferenciální rovnici

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 36. \tag{4.58}$$

Řešme nejprve tuto rovnici jako rovnici bez pravé strany. Její charakteristický polynom

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18$$

má kořeny $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobný kořen $\lambda_{2,3} = -3$. Proto má zkoumaná rovnice (podle věty 4.5.9) fundamentální systém

$$\{e^{2x}, e^{-3x}, x\, e^{-3x}\},$$

a řešení rovnice bez pravé strany jsou tedy funkce tvaru

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_2 x\, e^{-3x}.$$

Pro řešení rovnice s pravou stranou lze jistě užít metodu variace konstant. Ta je ale v tomto případě příliš zdlouhavá v porovnání s následující úvahou. Víme totiž podle věty 4.1.14, že k nalezení úplného řešení postačí nalézt jediné partikulární řešení rovnice (4.58). To lze ale snadno, neboť je jím konstantní funkce $y_p(x) = -2$. Uzavíráme tedy, že maximálním řešením rovnice (4.58) je systém funkcí

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_2 x\, e^{-3x} - 2, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

4.5.12 Poznámka

Rovnice

$$y^{(4)} - y = 0$$

má vzhledem k tomu, že kořeny jejího charakteristického polynomu jsou čísla $\{-1, 1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, fundamentální systém (jeden z možných)

$$F_S = \{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\} = \{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}, \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x), \cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)\}.$$

Z teorie polynomů ale víme, že pokud je kořenem polynomu číslo $\alpha = a + \mathrm{i}b$, potom je kořenem také číslo $\alpha^* = a - \mathrm{i}b$ komplexně sdružené k α. Namísto funkcí $\mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\alpha^* x}$ budeme do fundamentálního systému vždy zahrnovat jejich reálné a imaginární části

$$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx),\ \mathrm{e}^{ax}\sin(bx).$$

Tím dostaneme jiný fundamentální systém téže rovnice, ve kterém ale nebudou vystupovat komplexní čísla. Uzavíráme, že rovnice $y^{(4)} - y = 0$ má nově fundamentální systém tvaru $F_S = \{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}, \sin(x), \cos(x)\}$.

4.5.13 Poznámka

Jelikož nalezení fundamentálního systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je beze zbytku probráno, přistupme nyní k řešení těchto s rovnic s nenulovými pravými stranami. Jak bylo diskutováno v příkladě 4.5.11, lze v těchto případech vždy užít metodu variace konstant (viz věta 4.4.23) podrobně ilustrovanou v poznámce 4.4.24 nebo teoretickou větu 4.1.14, je-li snadné uhodnout některé z partikulárních řešení. Za určitých okolností bude ale možno řešit rovnici

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

elegantněji. Taková situace nastane v případě, že pravá strana bude vyjádřena v jednom z následujících tvarů:

- $q(x) = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$, kde $P(x)$ je polynom,
- $q(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$, kde $P(x)$ je polynom.

Přistupme tedy nyní k hledání příslušných partikulárních řešení.

4.5.14 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}$, koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ z definice 4.5.1 jsou reálná čísla a $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Pak existuje polynom stupně r, který je řešením diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ s konstantními koeficienty.

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť $P(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ a $b_r \neq 0$
- hledáme řešení diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ ve tvaru

$$y(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

- vidíme, že

$$\begin{aligned} y'(x) &= r c_r x^{r-1} + \ldots + c_1 \\ y''(x) &= r(r-1) c_r x^{r-2} + \ldots + 2c_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- z rovnosti $\widehat{L}(y(x)) = P(x)$ po porovnání koeficientů u stejných mocnin x pak dostáváme

$$\begin{gathered} a_0c_r = b_r \\ a_0c_{r-1} + a_1rc_r = b_{r-1} \\ \vdots \\ a_0c_0 + a_1c_1 + 2c_2a_2 + \ldots + r(r-1)\ldots(r-n+1)a_rc_r = b_0 \end{gathered}$$

- jde o $r+1$ rovnic pro $r+1$ neznámých $c_0, c_1, \ldots, c_r$
- protože $a_0 \neq 0$ a soustava je v trojúhelníkovém tvaru, její řešitelnost je zřejmá
- jelikož $a_0 \neq 0$ a $b_r \neq 0$, plyne z rovnosti $a_0c_r = b_r$, že $y(x)$ je tedy skutečně polynomem stupně r

4.5.15 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}_0$ a dále $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, kde $a_k \neq 0$ a $a_n \neq 0$. Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně r tak, že funkce $y(x) = x^kQ(x)$ je řešením diferenciální rovnice

$$a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_ky^{(k)}(x) = P(x). \tag{4.59}$$

Důkaz:

- u této rovnice lze substitucí $w(x) = y^{(k)}(x)$ triviálně snížit řád
- po substituci má rovnice tvar

$$a_nw^{(n-k)}(x) + a_{n-1}w^{(n-k-1)}(x) + \ldots + a_kw(x) = P(x) \tag{4.60}$$

- jelikož $a_k \neq 0$, jsou pro rovnici (4.60) splněny předpoklady předešlé věty
- proto polynom $R(x)$ stupně r je partikulárním řešením rovnice (4.60)
- tedy funkce

$$\wp(x) = \int\int\ldots\int R(x)\,(\mathrm{d}x)^k$$

  je partikulárním řešením rovnice (4.59)
- těchto k integrací polynomu $R(x)$ vede k tomu, že $\wp(x)$ je rovněž polynom a jeho stupeň bude zjevně

$$\deg(\wp) = r + k$$

- tedy existují koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_{r+k}$ takové, že $b_{r+k} \neq 0$ a navíc

$$\wp(x) = b_{r+k}x^{r+k} + b_{r+k-1}x^{r+k-1} + b_{r+k-2}x^{r+k-2} + \ldots + b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x + b_0$$

- přitom k posledních členů tohoto polynomu je vzhledem k platnosti věty 4.5.4 součástí fundamentálního systému zkoumané rovnice, a nemusí tudíž být zahrnuto do tvaru partikulárního řešení
- proto lze za partikulární řešení považovat polynom

$$b_{r+k}x^{r+k} + b_{r+k-1}x^{r+k-1} + b_{r+k-2}x^{r+k-2} + \ldots + b_kx^k =$$

$$= x^k\left(b_{r+k}x^r + b_{r+k-1}x^{r-1} + b_{r+k-2}x^{r-2} + \ldots + b_k\right) = x^kQ(x),$$

  kde $\deg(Q) = r$

4.5.16 Věta

Nechť $P(x)$ je polynom stupně $r \in \mathbf{N}_0$ a číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{4.61}$$

kde $k \in \mathbf{N}_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně r takový, že funkce

$$y(x) = x^k Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

je partikulárním řešením diferenciální rovnice (4.61).

<u>*Důkaz:*</u>

- zajímá nás řešení diferenciální rovnice

$$\widehat{L}\big(y(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{4.62}$$

- do této rovnice (4.62) zavedeme novou funkci $z(x)$ předpisem

$$y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{4.63}$$

- z Leibnizovy formule pro derivaci součinu dostáváme

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i \mathrm{e}^{\alpha x} z^{(k-i)}(x).$$

- to po dosazení do rovnice (4.62) a krácení výrazem $\mathrm{e}^{\alpha x}$ vede na rovnici

$$\widehat{L}\big(z(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_k \alpha^i z^{(k-i)}(x) = P(x) \tag{4.64}$$

- charakteristický polynom této rovnice má tedy tvar

$$\wp(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_k \alpha^i \mu^{k-i} = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\alpha + \mu\big)^k$$

- je-li tedy $\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ charakteristický polynom rovnice (4.62), platí mezi temito dvěma polynomy jednoduchý vztah

$$\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu),$$

  tj. $\lambda = \alpha + \mu$

- dle předpokladu věty je ale komplexní číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ $k-$násobným kořenem polynomu $\ell(\lambda)$

- to značí, že

$$\ell(\lambda) = a_n (\lambda - \alpha)^k (\lambda - \beta)^{k_\beta} (\lambda - \gamma)^{k_\gamma} \ldots,$$

  kde čísla α, β, $\gamma\ldots$ jsou různé komplexní kořeny charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$ s násobnostmi po řadě k, k_β, k_γ atd.

- pak ale

$$\wp(\mu) = \ell(\alpha + \mu) = a_n\,\mu^k \left[\mu - (\beta - \alpha)\right]^{k_\beta} \left[\mu - (\gamma - \alpha)\right]^{k_\gamma} \ldots$$

- tedy nula je $k-$násobným kořenem polynomu $\wp(\mu)$, což umožňuje užít předešlou větu 4.5.15

- podle ní je partikulárním řešením rovnice (4.64) funkce $z_p(x) = x^k Q(x)$, kde $\deg(Q) = r$

- ze substituční rovnosti (4.63) ihned vyplývá, že funkce $y_p(x) = x^k Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ je partikulárním řešením rovnice (4.62)

4.5.17 Věta

Nechť $P_1(x), P_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše $r \in \mathbf{N}_0$ a komplexní číslo $\beta + \mathrm{i}\gamma$ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = \mathrm{e}^{\beta x}\big(P_1(x)\cos(\gamma x) + P_2(x)\sin(\gamma x)\big), \qquad (4.65)$$

kde $k \in \mathbf{N}_0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak existují polynomy $Q_1(x)$ a $Q_2(x)$ stupně nejvýše r takové, že funkce

$$y(x) = x^k \mathrm{e}^{\beta x}\big(Q_1(x)\cos(\gamma x) + Q_2(x)\sin(\gamma x)\big)$$

je partikulárním řešením diferenciální rovnice (4.65).

Důkaz:

- tvrzení této věty snadno převedeme na větu předešlou
- vzhledem k platnosti exponeciálně-goniometrických rovností

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

  které je možno snadno odvodit z Eulerova vzorce uvedeného v příkladě 4.4.21, lze rovnici (4.65) přepsat do tvaru

$$\widehat{L}(y(x)) = \mathrm{e}^{\beta+\mathrm{i}\gamma}\left(\frac{P_1(x)}{2} + \frac{P_2(x)}{2\mathrm{i}}\right) + \mathrm{e}^{\beta-\mathrm{i}\gamma}\left(\frac{P_1(x)}{2} - \frac{P_2(x)}{2\mathrm{i}}\right)$$

- pravá strana (resp. oba její sčítance) jsou nyní tvaru (4.61)
- navíc čísla $\beta + \mathrm{i}\gamma$ a $\beta - \mathrm{i}\gamma$ mají zcela jistě v charakteristickém polynomu totožnou násobnost
- polynomy $\frac{P_1(x)}{2} + \frac{P_2(x)}{2\mathrm{i}}$ a $\frac{P_1(x)}{2} - \frac{P_2(x)}{2\mathrm{i}}$ mají stupeň nejvýše r
- tvrzení věty tudíž skutečně vyplývá z věty 4.5.16

4.5.18 Příklad

Budeme hledat obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -8\mathrm{e}^x \qquad (4.66)$$

užitím předešlých vět o speciálních tvarech partikulárních řešení. Pro srovnání ale nejprve úlohu vyřešíme metodou variace konstant. Rovnice

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \qquad (4.67)$$

má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$ a jednonásobný kořen $\lambda = 2$. Proto je příslušným fundamentálním systémem množina

$$F_S = \{\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}\}.$$

Wronskián tohoto systému má hodnotu

$$W_{\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^x & (2+x)\mathrm{e}^x & 4\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4x}.$$

Pro metodu variace konstant vypočteme dílčí determinanty

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} \\ 0 & (1+x)\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^{2x} \\ -8\mathrm{e}^x & (2+x)\mathrm{e}^x & 4\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = (8-8x)\mathrm{e}^{4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{2x} \\ e^x & 0 & 2e^{2x} \\ e^x & -8e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 8e^{4x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (1+x)e^x & 0 \\ e^x & (2+x)e^x & -8e^x \end{vmatrix} = -8e^{3x}.$$

Tedy hledané derivace $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ variačních koeficientů mají po řadě hodnoty

$$f_1(x) = 8 - 8x, \qquad f_2(x) = 8, \qquad f_3(x) = -8e^{-x}.$$

Samotné variační koeficienty pak obdržíme poměrně snadnými integracemi

$$F_1(x) = 8x - 4x^2 + C_1, \qquad F_2(x) = 8x + C_2, \qquad F_3(x) = 8e^{-x} + C_3.$$

Hledaným řešením je tudíž systém funkcí

$$y(x) = \left(8x - 4x^2 + C_1\right) e^x + \left(8x + C_2\right) xe^x + \left(8e^{-x} + C_3\right) e^{2x} =$$
$$= C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x} + 16xe^x + 4x^2e^x,$$

kde ale člen $16xe^x$ může být ze zápisu vypuštěn, neboť je již obsažen v lineárním obalu $\left[e^x, xe^x, e^{2x}\right]_\lambda$. Proto je maximálním řešením této úlohy systém funkcí

$$y(x) \in \left[e^x, xe^x, e^{2x}\right]_\lambda + 4x^2e^x, \qquad I = \mathbf{R}. \tag{4.68}$$

Přistupme nyní k druhému způsobu řešení. Řešíme tedy rovnici

$$\widehat{L}(y(x)) = -8e^x.$$

Nejprve je třeba si uvědomit, že číslo $\alpha = 1$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu (viz rovnice (4.67)). Proto bude podle tvrzení věty 4.5.16 předpokládat řešení ve tvaru

$$y_p(x) = ax^2e^x.$$

Zbývá tedy určit hodnotu neznámé konstanty $a \in \mathbf{R}$. Její nalezení ale může být provedeno přímým dosazením do rovnice (4.66). Jelikož

$$y_p'(x) = a(2x + x^2)e^x,$$
$$y_p''(x) = a(2 + 4x + x^2)e^x,$$
$$y_p'''(x) = a(6 + 6x + x^2)e^x,$$

snadno lze odsud vypočist, že $a = 4$. Partikulárním řešením je tak funkce $y_p(x) = 4x^2e^x$, což potvrzuje správnost výsledku (4.68). Tím je demostrována značná výhodnost druhé metody oproti variaci konstant.

4.5.19 Definice

Eulerovou diferenciální rovnicí se středem v bodě $c \in \mathbf{R}$ nazýváme rovnici tvaru

$$a_n(x-c)^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x-c)^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x-c)y'(x) + a_0y(x) = q(x),$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ $(a_n \neq 0)$ a $q(x)$ je spojitá funkce.

4.5.20 Poznámka

Pro Eulerovu rovnici se středem v bodě c lze užít substituci $\xi = x - c$ k převedení na Eulerovu diferenciální rovnici se středem v bodě nula. Jelikož $\frac{d\xi}{dx} = 1$, plyne odtud, že

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi}.$$

Proto je navržená substituce triviálně proveditelná a de facto spočívá pouze v náhradě všech členů $x - c$ písmenem ξ a všech derivací podle x derivacemi podle ξ.

4.5.21 Poznámka

Eulerovu diferenciální rovnici se středem v bodě nula lze na intervalu $I = (0, \infty)$, resp. $I = (-\infty, 0)$ převést na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty záměnou nezávisle proměnné x za nezávisle proměnnou t prostřednictvím vztahů $x = \mathrm{e}^t$, resp. $x = -\mathrm{e}^t$. Na intervalu $I = (0, \infty)$ tedy budeme provádět substituci $y(x) = y(\mathrm{e}^t)$, kde $t = \ln(x)$. Z tohoto substitučního schématu lze užitím věty o derivaci složené funkce snadno odvodit, že

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{y}\frac{1}{x}$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dot{y}\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} + \dot{y}\left(\frac{1}{x}\right)' = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2}$$

$$y'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}\dot{y} - \frac{2}{x^3}\ddot{y} - \frac{1}{x^3}\ddot{y} + \frac{1}{x^3}\dddot{y} = \frac{1}{x^3}\dddot{y} - \frac{3}{x^3}\ddot{y} + \frac{2}{x^3}\dot{y}.$$

Tedy

$$xy' = \dot{y}$$

$$x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$$

$$x^3y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y},$$

a rovnice

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = q(x)$$

je tím převedena na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

4.5.22 Věta – *o superpozici*

Nechť jsou dány spojité funkce $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_k(x)$. Nechť množina

$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_r(x)\}$$

je fundamentálním systémem lineární diferenciální rovnice $\widehat{L}(y(x)) = 0$. Nechť dále funkce $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k}$ jsou po řadě partikulárními řešeními rovnic $\widehat{L}(y(x)) = q_i(x)$, kde $i \in \widehat{k}$. Pak úplným řešením diferenciální rovnice

$$\widehat{L}(y(x)) = \sum_{i=1}^{k} q_i(x)$$

je funkce

$$y(x) = \sum_{j=1}^{r} \mathtt{C}_j y_j(x) + \sum_{i=1}^{k} y_{p_i}(x).$$

Důkaz:

- je ponechán čtenáři

4.5.23 Poznámka

Tvrzení předešlé věty lze vysvětlit následovně. Budeme-li řešit rovnici

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q(x),$$

jejíž pravá strana se skládá z k sčítanců, tj.

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \ldots + q_k(x),$$

pak její partikulární řešení je součtem k partikulárních řešení k rovnic

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = q_i(x).$$

Tedy například rovnici

$$y'' + y = 2x + \mathrm{e}^x \tag{4.69}$$

budeme řešit takto. Fundamentálním systémem rovnice $y'' + y = 0$ je množina $\{\cos(x), \sin(x)\}$. Partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = 2x$$

je, jak lze velice jednodušše vypočítat, funkce $y_{p_1} = 2x$, zatímco partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = \mathrm{e}^x$$

budeme očekávat ve tvaru $y_{p_2} = a\mathrm{e}^x$. Snadno pak dopočteme, že $a = 1/2$. Podle tvrzení věty 4.5.22 je tudíž úplným řešením rovnice (4.69) funkce

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 2x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

4.5.24 Příklad

Budeme hledat maximální řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice

$$y'''x^4 - 5y''x^3 - 8y'x^2 + 8yx = 72,$$

vyhovující podmínkám $y(1) = 2, y'(1) = 13$ a $y''(1) = 44$. Vydělíme-li zadanou rovnici proměnnou x, získáme Eulerovu diferenciální rovnici třetího řádu. Tu pro $x > 0$ řešíme substitucí $x = \mathrm{e}^t$. Ta vede k transformačním vztahům z poznámky 4.5.21. Po dosazení získáme diferenciální rovnici třetího řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 8\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 8y = 72\,\mathrm{e}^{-t}. \tag{4.70}$$

Jelikož charakteristický polynom této rovnice má tvar

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 - \lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 8),$$

je fundamentálním systémem zmiňované rovnice množina

$$F_S = \{\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{8t}\}.$$

Pro řešení rovnice se speciální pravou stranou předpokládáme podle věty 4.5.16 partikulární řešení tvaru $y_p(t) = at\mathrm{e}^{-t}$. Tento předpoklad vede po dosazení do rovnice (4.70) k hodnotě $a = 4$. Rovnice (4.70) má tedy obecné řešení

$$y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{8t} + 4t\mathrm{e}^{-t}.$$

Návratem k nezávisle proměnné x získáme

$$y(x) = C_1\,x + \frac{C_2}{x} + C_3\,x^8 + \frac{4}{x}\ln(x).$$

Nalezení řešení vyhovujícího podmínkám $y(1) = 2, y'(1) = 13$ a $y''(1) = 44$ vede po dvojím derivování posledně uvedené rovnice na soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 2 \\ C_1 - C_2 + 8C_3 &= 9 \\ 2C_2 + 56C_3 &= 56 \end{aligned}$$

pro neznámé C_1, C_2, C_3. Tuto soustavu řeší trojice $(C_1, C_2, C_3) = (1, 0, 1)$. Hledaný tvar řešení tedy je

$$y(x) = x + x^8 + \frac{4}{x}\ln(x), \qquad I = \mathbf{R}^+.$$

4.5.25 Příklad

Hledejme maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + xy = 0,$$

vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Na zadanou rovnici nelze aplikovat žádnou z účinných metod, proto budeme hledat řešení ve tvaru mocninné řady

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.71}$$

kde $a_n \in \mathbf{R}$ jsou neznámé koeficienty. Tím se seznámíme s jednou z dalších metod, jak hledat řešení diferenciálních rovnic. Podotýkáme, že řada (4.71) je Taylorovou řadou se středem v bodě nula (v bodě, v němž jsou stanoveny počáteční podmínky). Pak

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

a navíc

$$x \cdot y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Dosadíme nyní do zadané rovnice

$$y'' + xy = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1}\right]x^n = 0.$$

Z této rovnosti je patrno, že nutně $a_2 = 0$ a $a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1} = 0$. Odtud

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \wedge \quad a_2 = 0.$$

Odsud mimo jiné plyne, že $a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$. Jelikož $y(0) = 1$, musí být $a_0 = 1$. Pro splnění podmínky $y'(0) = 0$ je nutné, aby $a_1 = 0$. Pak ale $a_4 = a_7 = a_{10} = \ldots = 0$. Uzavíráme tedy:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n}x^{3n} \quad \wedge \quad a_{i+3} = \frac{-a_i}{(i+3)(i+2)} \quad \wedge \quad a_0 = 1.$$

Obor konvergence vyšetříme např. podílovým kritériem

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{3n+3}\,x^{3n+3}}{a_{3n}\,x^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)}\right| = 0 < 1.$$

Oborem konvergence nalezeného řešení je tudíž množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$.

4.5.26 Příklad

Teorie diferenciálních rovnic lze zužitkovat také při hledání součtů mocninných řad. Ukážeme si to na poněkud komplikovanějším příkladě. Budeme hledat součet řady

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}\,x^{2n}. \tag{4.72}$$

Řadu zderivujeme s výsledkem

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}\,x^{2n-1}.$$

Podobně

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-2)!}\,x^{2n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{(2m)!}\,x^{2m}.$$

Tuto druhou derivaci ještě poněkud upravíme

$$s''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{(2m)!}\,x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m}{(2m)!}\,x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = s(x) + x\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Užijeme-li známých rozvojů (viz 3.3.12)

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

platných v $\mathbf{R}$, získáváme tím diferenciální rovnici

$$s''(x) - s(x) = x\sinh(x) + \cosh(x)$$

pro hledanou funkci $s(x)$. Rovnici bez pravé strany vyřešíme snadno. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má dva kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$, proto je fundamentálním systémem zkoumané rovnice množina $\{e^x, e^{-x}\}$. Rovnici s pravou stranou, zapsanou v upraveném tvaru

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x + \frac{1}{2}(1-x)e^{-x},$$

vyřešíme superpozicí. Hledejme tedy nejprve partikulární řešení rovnice

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x.$$

Očekáváme ho podle příslušných vět ve tvaru $y_{p_1}(x) = (ax+b)xe^x$. Snadno dopočteme dosazením, že $(a,b) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Podobně předpokládáme partikulární řešení rovnice

$$s''(x) - s(x) = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x}$$

ve tvaru $y_{p_2}(x) = (ax+b)xe^{-x}$, odkud $(a,b) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$. Superpozicí tedy získáváme obecné řešení

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{8}x(x+1)e^x + \frac{1}{8}x(x-1)e^{-x}.$$

Zbývá již jen určit hodnoty integračních konstant C_1 a C_2. K jejich stanovení užijeme počáteční podmínky $s(0) = 0$ a $s'(0) = 0$, které vedou k soustavě

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 - C_2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.$$

Snadno $(C_1, C_2) = (0,0)$. Hledaným součtem řady (4.72) je tedy funkce

$$s(x) = \frac{1}{8}x(x+1)e^x + \frac{1}{8}x(x-1)e^{-x} = \frac{x^2}{4}\cosh(x) + \frac{x}{4}\sinh(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

4.6 Cvičení

V následujících cvičeních bude s předstihem využíváno některých základních poznatků z kapitoly 5, jak je demonstrováno např. v příkladě 5.2.22.

Cvičení 4.1
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = \frac{3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x - 2y + 1}{4x^2 - 10xy + 2x}.$$

Ukažte, že při vhodné volbě integrační konstanty představuje řešení jistou kuželosečku. Stanovte její normální tvar, hlavní a vedlejší signaturu, správný název a střed, existuje-li.

Cvičení 4.2
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy'' = y' - (y')^3.$$

Cvičení 4.3
Řešte diferenciální rovnici

$$xy''' + 3(1-2x)y'' + 3(3x-4)y' + 9y = 9,$$

víte-li, že funkce $v(x) = \frac{1}{x}$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.4
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$2y(x-1)y' + y^2 = 4x(3x-2),$$

procházející bodem $(x,y) = (1,2)$.

Cvičení 4.5
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''(x+1)^2 + 4y'(x+1) + 2y = 0,$$

vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$.

Cvičení 4.6
Nalezněte funkci $y(x)$, která splňuje podmínku $y(0) = -1$ a je maximálním řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' - (8x + 2y + 2)^2 = 0.$$

Cvičení 4.7
Na intervalu $I = (1, \infty)$ nalezněte úplné řešení diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0,$$

víte-li, že funkce $v(x) = \sqrt{x^2-1}$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.8
Nalezněte a diskutujte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}.$$

Cvičení 4.9
Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu, v jejímž fundamentálním systému jsou funkce $\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{3x}\cos(2x)$ a jejímž řešením je funkce $4\sinh(x)$.

Cvičení 4.10
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 6y' + 10y = 4\mathrm{e}^{3x}\cos(x),$$

které vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 2$.

Cvičení 4.11
Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{6x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 2}{10xy + 2x^2 - 4x}.$$

Ukažte, že řešením může být i jistá kuželosečka.

Cvičení 4.12
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^{x}\cos(2x),$$

které vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 2$.

Cvičení 4.13
Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice

$$y - 2x = y'(y - x).$$

Cvičení 4.14
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2y'' - xy' + y = \sqrt{-x},$$

které vyhovuje podmínkám $y(-1) = 0$ a $y'(-1) = 0$.

Cvičení 4.15
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 20\mathrm{e}^{2x}.$$

Cvičení 4.16
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy''y' = (y')^2 + x^4.$$

Cvičení 4.17
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2y'' - xy' + y = \frac{4}{x},$$

vyhovující podmínkám $y(1) = 2$ a $y'(1) = 0$.

Cvičení 4.18
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$24x - 8y - 12 + (2y - 6x + 5)y' = 0,$$

procházející bodem $(x, y) = (9, 29)$.

Cvičení 4.19
Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$(4x + 12)y'' + (y')^3 = 4y',$$

vyhovující podmínkám $y(1) = -8$ a $y'(1) = -2$.

Cvičení 4.20
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'(x + y^2) = y,$$

procházející bodem $(x, y) = (16, 4)$.

Cvičení 4.21
Pomocí metody variace konstant nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16\mathrm{e}^x.$$

Cvičení 4.22
Sestavte Eulerovu diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu s fundamentálním systémem $F_S = \left\{x^3, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right\}$.

Cvičení 4.23
Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2y''' + x(7-6x)y'' + 4(3x^2-7x-4)y' + 4(8+7x-2x^2)y = -18x\mathrm{e}^{2x}.$$

Využijte skutečnosti, že funkce e^{2x} řeší příslušnou rovnici s nulovou pravou stranou.

Cvičení 4.24
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x - y + 2 + (y - x + 3)y' = 0.$$

Stanovte, jakou křivku řešení představuje. Načrtněte!

Cvičení 4.25
Řešte rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Cvičení 4.26
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{y+4x}{y+2x} + \frac{y}{2x}.$$

Diskutujte, jakou křivku získané řešení představuje, a stanovte její charakteristiky.

Cvičení 4.27
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$4xy'' + (4x+8)y' + (x+4)y = 0,$$

vyhovující podmínkám

- a) $y(1) = \frac{7}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ a $y'(1) = -\frac{23}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$,
- b) $y(0) = 4$ a $y'(0) = -2$,

víte-li, že jedním z řešení zadané rovnice je jakási exponenciální funkce.

Cvičení 4.28
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'\sin(x) = 3\cos(x)\left(y^{2/3} - y\right),$$

procházející bodem $(x, y) = \left(\frac{17}{4}\pi, 27\right)$.

Cvičení 4.29
Na množině $\mathbf{R}^+$ nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy + \mathrm{e}^x - xy' = 0.$$

Cvičení 4.30
Řešte rovnici

$$y' = 2x(x^2 + y).$$

Cvičení 4.31
Řešte diferenciální rovnici

$$y' + y\cos(x) = \sin(x)\,\cos(x).$$

Cvičení 4.32
Řešte diferenciální rovnici
$$y' + 4xy = 4x\sqrt{y}.$$

Cvičení 4.33
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$y'\sin(x) - y = 1 - \cos(x),$$
procházející bodem $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Cvičení 4.34
Řešte diferenciální rovnici
$$2xyy' + 1 + y^2 = 0.$$

Cvičení 4.35
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$xy' + (x+1)y = 3x^2\mathrm{e}^{-x},$$
vyhovující podmínkám

- a) $(x, y) = (1, 0)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.36
Řešte diferenciální rovnici
$$y' = -\frac{y}{3x + y^2}.$$

Cvičení 4.37
Řešte diferenciální rovnici
$$(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x.$$

Cvičení 4.38
Řešte diferenciální rovnici
$$xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

Cvičení 4.39
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$y\ln|y| + xy' = 0,$$
vyhovující podmínce $y(-1) = -\mathrm{e}$.

Cvičení 4.40
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$yy' = \mathrm{e}^{-y^2}\sin(x),$$
procházející bodem $(x, y) = \left(3\pi, -\sqrt{\ln(4)}\right)$.

Cvičení 4.41
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$2xy + (x^2 - y^2)y' = 0,$$
procházející bodem $(x, y) = \left(-2, \sqrt{3}\right)$.

Cvičení 4.42
Řešte diferenciální rovnici
$$\mathrm{e}^{-y} = \left(2y + x\mathrm{e}^{-y}\right) y'.$$

Cvičení 4.43
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Cvičení 4.44
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+3}.$$
procházející bodem $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Cvičení 4.45
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice
$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0,$$
procházející bodem

- a) $(x, y) = (2, 3)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.46
Řešte diferenciální rovnici
$$xy' = y - x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$$

Cvičení 4.47
Řešte diferenciální rovnici
$$xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cvičení 4.48
Řešte diferenciální rovnici
$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$
víte-li, že funkce $v(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.49
Řešte diferenciální rovnici
$$x^2(\ln(x) - 1)y'' - xy' + y = 0.$$

Cvičení 4.50
Nalezněte maximální množinu, na níž jsou funkce $\ln(x)$ a x lineárně nezávislé.

Cvičení 4.51
Dokažte, že funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 0$.

Cvičení 4.52
Řešte diferenciální rovnici
$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2,$$
víte-li, že funkce $v(x) = x$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.53
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2,$$

víte-li, že fundametální systém příslušné rovnice bez pravé strany je $\{x, \mathrm{e}^x\}$.

Cvičení 4.54
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \operatorname{tg}(x).$$

Cvičení 4.55
Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 6x\mathrm{e}^{2x}.$$

Cvičení 4.56
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Cvičení 4.57
Řešte diferenciální rovnice

- a) $y'' + 3y' + 2y = 0$,
- b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$,
- c) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Cvičení 4.58
Nalezněte fundamentální systémy rovnic

- a) $y^{(5)} - y'' = 0$,
- b) $y^{(6)} + 64y = 0$.

Cvičení 4.59
Řešte rovnici

$$y'' - y = x^3.$$

Cvičení 4.60
Řešte rovnici

$$y''' + 2y'' + y' = 36\mathrm{e}^{2x}.$$

Cvičení 4.61
Řešte rovnici

$$y'' + y' - 2y = 8\sin(2x).$$

Cvičení 4.62
Řešte diferenciální rovnice

- a) $y'' - 2y' + 10y = \mathrm{e}^x + \sin(3x)$,
- b) $y'' - 2y' + 10y = \mathrm{e}^x \sin(3x)$.

Cvičení 4.63
Řešte rovnici

$$y^{(4)} - y''' + y'' + 9y' - 10y = 0.$$

Cvičení 4.64
Nalezněte diferenciální rovnici s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou, mající fundamentální systém

- a) $F_S = \{\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)\}$,
- b) $F_S = \left\{\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x^2\sin(x)\right\}$.

Cvičení 4.65
Řešte rovnici
$$x^2y'' + xy' + y = x.$$

Cvičení 4.66
Nalezněte funkci $y(x)$, která vyhovuje rovnici
$$xy'' - 2\frac{y}{x} = \frac{9}{4\sqrt{-x}}$$
a podmínkám $y(-1) = y'(-1) = 0$.

Cvičení 4.67
Nalezněte a diskutujte implicitní tvar řešení rovnice
$$y' + \frac{y+1}{x+1} = 0.$$

Cvičení 4.68
Řešte rovnici
$$y'' - 4y' + 4y = (6x+2)\mathrm{e}^{2x}$$
za podmínek $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.

Cvičení 4.69
Nalezněte implicitní tvar řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{-3x^2 - y^2 + 12x - 2y + 6}{2xy + 2x}.$$
Ukažte, že řešením může být i jistá kuželosečka. Stanovte její typ a střed, má-li ho.

Cvičení 4.70
Řešte pohybovou rovnici pro netlumený řízený oscilátor
$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon\cos(\Omega t),$$
kde $m, k, \varepsilon, \Omega$ jsou kladné reálné konstanty a funkce $x(t)$ je funkcí času t. Úlohu řešte pro $\Omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Cvičení 4.71
Řešte předchozí cvičení za podmínky $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Cvičení 4.72
Řešte rovnici
$$y^{(4)} + y''' + 7y'' + 9y' - 18y = 6240\sin(x)\cos(2x).$$

Cvičení 4.73
Sestavte diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu s fundamentálním systémem obsahujícím funkce x a $\ln(x)$.

Cvičení 4.74
Stanovte podmínku pro konstantu $\mathbb{C} \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $y(x) = \mathbb{C}x$ byla řešením homogenní diferenciální rovnice.

Cvičení 4.75
Na množině $\mathbf{R}^+$ nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 8x^2y'' - 24xy' + 24y + 72x = 0.$$

Cvičení 4.76
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x(1-x)y'' + xy' - y = x(2-x),$$

víte-li, že jedním z prvků fundamentálního systému zadané rovnice je jakási lineární funkce.

Cvičení 4.77
Řešte rovnici

$$y''' + y'' + y' + y = 4x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Cvičení 4.78
Řešte diferenciální rovnici

$$x(1-x)^2y'' - 2y = 36x^2(1-x)^3,$$

víte-li, že funkce $v(x) = \frac{x}{1-x}$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.79
Pro $x > 0$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2y''' = 2y'.$$

Cvičení 4.80
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - y = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Cvičení 4.81
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = 4\mathrm{e}^x\cos(x).$$

Cvičení 4.82
Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou a fundamentálním systémem $F_S = \{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x), \mathrm{e}^{-x}\cos(2x), 3x\mathrm{e}^{-x}\sin(2x), 3x\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\}$.

Cvičení 4.83
Nalezněte a diskutujte formální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1-2x-y}{1+x+5y}.$$

Cvičení 4.84
Řešte diferenciální rovnici

$$y''' - 3y' + 2y = (9x+1)\mathrm{e}^x.$$

Cvičení 4.85
Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x.$$

Cvičení 4.86
Na množině $\mathbf{R}^-$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2y'' - xy' + y = 2x.$$

Cvičení 4.87
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' + xy = xe^{x^2}y^{1/2}$$

tak, aby vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.88
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$e^{-x}y' = y + y^5$$

tak, aby vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.89
Určete všechna řešení rovnice

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} - 21y''' + 144(4 + 21x) = 0.$$

Cvičení 4.90
Která funkce vyhovuje současně podmínce $y(1) = \frac{1}{2}$ a rovnici

$$4xyy' + \sqrt{x^4 - 4y^4} = 4y^2 \ ?$$

Cvičení 4.91
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Cvičení 4.92
Hledejte formální řešení diferenciální rovnice

$$y'(y - x) = y - 2x.$$

Cvičení 4.93
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy'' = (3 + 4x^4)y' + 16x^7e^{x^4}.$$

Cvičení 4.94
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' - y'' - 2y' + 8 = 0.$$

Cvičení 4.95
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2y'' + xy' = (y')^2.$$

Cvičení 4.96
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy' + 2y = 4x^2e^{x^2} + 2x^2y,$$

procházející bodem

- a) $(x, y) = (1, 4e)$,
- b) $(x, y) = (0, 0)$.

Cvičení 4.97
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$\sin(x)\left(y' - x^2\right) + y\cos(x) = 0,$$

procházející bodem $(x, y) = \left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$.

Cvičení 4.98
Řešte rovnici

$$x(1 + x^2)y'' - 2y' = -2.$$

Cvičení 4.99
Na množině $(-1, 1)$ řešte diferenciální rovnici

$$(1 - x^2)(y'' + 9x) = xy'.$$

Cvičení 4.100
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y,$$

procházející bodem $(x, y) = (-1, 1)$.

Cvičení 4.101
Nalezněte všechna maximální řešení zadané diferenciální rovnice

$$y''' + y'' - 8y' - 12y + 30\mathrm{e}^{-2x} = 0.$$

Cvičení 4.102
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y'\mathrm{tg}(x) = \frac{3}{\cos^3(x)}.$$

Cvičení 4.103
Pro kladná x hledejte řešení diferenciální rovnice

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = -2x.$$

Cvičení 4.104
Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \mathrm{tg}\left(\frac{y - 2x}{x + 1}\right).$$

Cvičení 4.105
Řešte rovnici

$$y'' + 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{tg}(x).$$

Cvičení 4.106
Řešte rovnici

$$y^2 - 2xy + x^2y' = 0.$$

Cvičení 4.107
Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y'' - 2x(1 + x)y' + 2(1 + x)y = 8x^3\mathrm{e}^{2x},$$

víte-li, že funkce $v(x) = x$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.108
Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou, jejímiž řešeními jsou funkce $\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-2x}, \sinh(2x), \cosh(2x)$.

Cvičení 4.109
Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^{x}.$$

Cvičení 4.110
Nalezněte funkci $y(x)$, která protíná osu y a je maximálním řešením diferenciální rovnice

$$(x-2)^2y'' - (x-2)y' - 3y = x.$$

Cvičení 4.111
Řešte rovnici

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 3\sin(x).$$

Cvičení 4.112
Na množině $\mathbf{R}^+$ řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Cvičení 4.113
Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy' = y(1 - y^2x^2),$$

vyhovující podmínce $(x, y) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

Cvičení 4.114
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2x-3}{x(x-1)}y' = \frac{2x-3}{x(x-1)}.$$

Cvičení 4.115
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^3y'' - x^2y' - 3xy + 16\ln(-x) = 0.$$

Cvičení 4.116
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2(x))y = 0,$$

víte-li, že funkce $\mathrm{tg}(x)$ je jedním z jejích řešení.

Cvičení 4.117
Pro $x > 0$ řešte diferenciální rovnici

$$x^2y''' + 2x(3x-2)y'' + 2(6x^2 - 8x + 3)y' + 4(3 - 4x + 2x^2)y = 8x\,e^{-2x},$$

víte-li, že funkce $v(x) = e^{-2x}$ je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.118
Najděte všechny funkce $y(x)$, které řeší rovnici

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3(x)}$$

a splňují vztahy $y(3\pi) = y'(3\pi) = 0$.

Cvičení 4.119
Za podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ a $y''(0) = 8$ řešte rovnici

$$y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 4e^{x}.$$

Cvičení 4.120
Řešte rovnici

$$y'' \sin^2(x) = 2y.$$

Nápověda: Rovnici řeší např. funkce $\operatorname{cotg}(x)$.

Cvičení 4.121
Řešte diferenciální rovnici

$$x^3y''' - 6x^2y'' + x(18 - x^2)y' + 2(x^2 - 12)y = 12x^5\,\mathrm{e}^{2x},$$

víte-li, že funkce x^2 je jedním řešením příslušné rovnice bez pravé strany.

Cvičení 4.122
Řešte rovnici

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

s dodatečnou podmínkou $y(1) = \frac{1}{2}$.

Cvičení 4.123
Sestavte lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty nejnižšího možného řádu s nulovou pravou stranou, jejímž řešením je funkce $y(x) = 8x\mathrm{e}^x \sin(3x)$.

Cvičení 4.124
Sestavte lineární diferenciální rovnici nejnižšího možného řádu, jejímž fundamentálním systémem je množina $F_S = \{x\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^{-x}\}$.

Cvičení 4.125
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$x^2y''' = 18x^2 + 2y'.$$

Cvičení 4.126
Řešte rovnici

$$y' \sin(x) - y = 1 - \cos(x)$$

s podmínkou $(x, y) = \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.

Cvičení 4.127
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''(x+1)^2 + 4y'(x+1) + 2y = 0,$$

vyhovující podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$. Užijte faktu, že funkce $\frac{x}{(x+1)^2}$ zadanou rovnici řeší.

Cvičení 4.128
Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

jež vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.129
Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice

$$y'' - xy' - 2y = 0,$$

jež vyhovuje podmínkám $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.130
Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice

$$xy'' + 2y' - xy = 0,$$

jež vyhovuje podmínce $y(0) = 1$.

Cvičení 4.131
Nalezněte analytické řešení diferenciální rovnice

$$xy'' - xy' - y = 0,$$

jež vyhovuje podmínce $y'(0) = 1$.

Cvičení 4.132
Metodou řad nalezněte fundamentální systém diferenciální rovnice

$$(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$$

Cvičení 4.133
Dokažte větu 4.5.22.

Cvičení 4.134
Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{7y - 8x - 7}{-2y + 13x + 2}.$$

Cvičení 4.135
Sestavte diferenciální rovnici, jejíž množina všech řešení je tvaru $\left[\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}\right]_\lambda + x$.

Cvičení 4.136
Pro diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 7y''' - y'' - 87y' = \wp(x)$$

stanovte příslušný fundamentální systém. Rozhodněte poté, v jakém optimálním tvaru budete předpokládat partikulární řešení, má-li pravá strana tvar:

- a) $\wp(x) = 12x\mathrm{e}^{-5x}$
- b) $\wp(x) = 12x$
- c) $\wp(x) = 12x\mathrm{e}^{3x}$
- d) $\wp(x) = 12x\mathrm{e}^{-5x}\cos(2x)$
- e) $\wp(x) = 12x\cos(2x)$.

Kapitola 5

Kvadratické formy a kvadratické plochy

5.1 Bilineární a kvadratické formy

Těžištěm našeho zájmu bude nyní speciální typ zobrazení z vektorového prostoru $\mathcal{V}_r$ dimenze $r \in \mathbf{N}$ do tělesa $\mathbf{R}$. Zobrazení budeme nazývat kvadratickou formou a odhalíme u něj celou řadu zajímavých obecných vlastností. Poznatky z tohoto oddílu užijeme jednak v oddíle následujícím při studiu kvadratických ploch – nadstavbě známého pojmu "kuželosečka," ale rovněž při vyšetřování extrémů funkce více proměnných v dalších partiích matematické analýzy (viz například skripta [14]).

5.1.1 Definice

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$. *Hlavním minorem řádu* $k \in \widehat{r}$ *matice* $\mathbb{A}$ (k–tým hlavním minorem) nazveme determinant Δ_k matice $(a_{ij})_{i,j=1}^k$.

5.1.2 Poznámka

Matici $\mathbb{A}$ komplexních čísel nazveme *hermitovskou*, platí-li rovnost $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\sharp$, kde symbol $\mathbb{A}^\sharp$ definujeme předpisem

$$\mathbb{A}^\sharp = (\mathbb{A}^*)^\mathsf{T} .$$

5.1.3 Definice

(Symetrickou) bilineární formou v $\mathbf{R}^r$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$, definované předpisem

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} x_i y_j, \tag{5.1}$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbf{R}$ $(i, j \in \widehat{r})$. Matici $\mathbb{A}$ řádu r vytvořenou z koeficientů a_{ij} nazýváme *maticí bilineární formy* a její hodnost $\mathrm{h}(\mathbb{A})$ *hodností bilineární formy*. Řekneme, že bilineární forma (5.1) je *regulární*, resp. *singulární* je-li matice $\mathbb{A}$ regulární, resp. singulární. Řekneme, že bilineární forma (5.1) je v *diagonálním tvaru*, je-li matice $\mathbb{A}$ v diagonálním tvaru.

5.1.4 Poznámka

Bilineární formu můžeme snadno vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^\mathsf{T} \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} .$$

5.1.5 Poznámka

Kromě pojmu symetrická bilineární forma se často zavádí také obecnější pojem, a sice hermitovská bilineární forma. Korektní zavedení vyslovíme v následující definici, avšak v dalším textu budeme nadále pracovat pouze se symetrickými bilineárními (a posléze i kvadratickými) formami.

5.1.6 Definice

Nechť je dána hermitovská komplexní matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{r}$. *Hermitovskou bilineární formou* v $\mathbf{C}^r$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^r \mapsto \mathbf{C}$, definované předpisem

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^{\mathsf{T}} \mathbb{A} \vec{y}^{*}. \tag{5.2}$$

5.1.7 Definice

Kvadratickou formou rozumíme takové zobrazení $q(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$, k němuž existuje symetrická bilineární forma $qq(\vec{x}, \vec{y})$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí rovnost

$$q(\vec{x}) := qq(\vec{x}, \vec{x}). \tag{5.3}$$

Kvadratickou formu $q(\vec{x})$ a bilineární formu $qq(\vec{x}, \vec{y})$ z rovnosti (5.3) budeme nazývat *vzájemně přidruženými*. *Matici kvadratické formy* a *hodnost kvadratické formy* pak definujeme jako matici, resp. hodnost přidružené bilineární formy. Řekneme, že kvadratická forma (5.3) je *regulární*, resp. *singulární*, je-li přidružená bilineární forma regulární, resp. singulární. Řekneme, že kvadratická forma (5.3) je v *diagonálním tvaru*, je-li přidružená bilineární forma v diagonální tvaru.

5.1.8 Příklad

Příkladem kvadratické formy ve třídimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^3$ je forma

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 14x_2x_3 - 11x_3^2.$$

Převedena do maticového zápisu má tato forma tvar

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Přidružená bilineární forma má proto tvar

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 7x_2y_3 + 7x_3y_2 - 11x_3y_3.$$

5.1.9 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}_r$. Zobrazení z V_r do $\mathcal{V}_r$ zavedené předpisem

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} r_{ij} x_j$$

pro $i \in \hat{r}$ nazýváme *lineárním zobrazením* ve $\mathcal{V}_r$. Matice $\mathbb{R} = (r_{ij})_{i,j=1}^{r}$ se pak nazývá *maticí lineárního zobrazení*. Zavedené zobrazení nazveme *regulárním*, resp. *singulárním*, je-li matice $\mathbb{R}$ regulární, resp. singulární.

5.1.10 Poznámka

Předešlé zobrazení lze stručně shrnout zápisem $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$.

5.1.11 Definice

Řekneme, že lineární zobrazení $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$ je *ortogonální*, pokud pro každé dva indexy $i, j \in \hat{r}$ $(i \neq j)$ platí

$$\sum_{k=1}^{r} r_{ki} r_{kj} = 0.$$

Řekneme, že lineární zobrazení $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$ je *ortonormální*, jestliže pro každé dva indexy $i, j \in \hat{r}$ platí

$$\sum_{k=1}^{r} r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}.$$

5.1.12 Příklad

Nechť $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je pevně zvolený úhel. Pak zobrazení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

představuje otočení o úhel φ ve dvoudimenzionálním prostoru. Toto zobrazení je ortonormální, neboť

$$(\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 0$$

a také

$$(\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} = (\sin(\varphi), \cos(\varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 1.$$

5.1.13 Příklad

Podobně jako v předešlém příkladě, je také otočení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kolem osy x_3 ve třídimenzionálním prostoru rovněž ortonormálním zobrazením. Ověření příslušných rovností je ponecháno čtenáři jako cvičení.

5.1.14 Poznámka

Je-li zobrazení z definice 5.1.9 regulární, existuje k němu inverzní lineární zobrazení

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} y_j \quad (i \in \hat{r}),$$

jehož matice $\mathbb{P}$ je inverzní k matici $\mathbb{R}$, tj. $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{-1}$.

5.1.15 Věta

Lineární substitucí $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ přejde kvadratická forma $q(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} x_i x_j$ s maticí $\mathbb{A}$ ve formu $q(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{r} b_{ij} y_i y_j$ se symetrickou maticí $\mathbb{B} = \mathbb{R}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\mathbb{R}$.

Důkaz:

- $q(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\, \mathbb{A}\, \vec{x}$ a $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$
- dosadíme:
$$q(\vec{y}) = (\mathbb{R}\vec{y})^{\mathsf{T}} \mathbb{A} (\mathbb{R}\vec{y}) = (\vec{y}^{\mathsf{T}} \mathbb{R}^{\mathsf{T}}) \mathbb{A}\mathbb{R}\vec{y} = \vec{y}^{\mathsf{T}} (\mathbb{R}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\mathbb{R})\vec{y}$$
- tedy skutečně $\mathbb{B} = \mathbb{R}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\mathbb{R}$
- matice $\mathbb{B}$ je symetrická, což plyne z vlastností maticového násobení $\mathbb{R}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\mathbb{R}$, kde $\mathbb{A}$ je symetrická matice

5.1.16 Poznámka

Hlavní snahou této sekce bude převádět libovolné kvadratické formy z obecných tvarů na tvary diagonální, které jsou snáze interpretovatelné. Přitom, jak uvidíme, klasifikace kvadratických forem podle diagonálních tvarů (přesněji normálních tvarů) bude zásadní při studiu kvadratických ploch v další sekci. Výchozí větou pro zmiňovanou klasifikaci bude tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem, který právě vyslovíme.

5.1.17 Věta – *Zákon setrvačnosti kvadratických forem*

Ke každé kvadratické formě $q(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ s maticí $\mathbb{A}$ existuje regulární zobrazení $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež tuto formu převede na tvar

$$q(y_1, y_2, \ldots, y_r) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \tag{5.4}$$

kde λ_i $(i \in \widehat{r})$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$. Přitom uvedené zobrazení je ortonormální, tj. sloupce matice $\mathbb{R}$ tvoří ortonormální soubor.

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$
- podle jisté algebraické věty existuje unitátní matice $\mathbb{R}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{R}^\top \mathbb{D}\,\mathbb{R}$, kde

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

- dále $q(\vec{x}) = \vec{x}^\top \mathbb{A}\,\vec{x} = \vec{x}^\top \mathbb{R}^\top \mathbb{D}\,\mathbb{R}\,\vec{x} = \left(\mathbb{R}\vec{x}\right)^\top \mathbb{D}\,\mathbb{R}\,\vec{x}$
- označme nyní $\vec{y} := \mathbb{R}\vec{x}$
- pak tedy

$$q(\vec{x}) = \vec{y}^\top\,\mathbb{D}\,\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1\, y_1 \\ \lambda_2\, y_2 \\ \vdots \\ \lambda_r\, y_r \end{pmatrix} = \lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 + \ldots + \lambda_r\, y_r^2$$

- jelikož $\mathbb{R}$ je unitární matice, jsou sloupce matice $\mathbb{R}$ vzájemně ortonormální

5.1.18 Poznámka

Pouze připomínáme, že číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ nazýváme *vlastním číslem* matice $\mathbb{A}$, existuje-li nenulový vektor $\vec{x}_\lambda$ tak, že

$$\mathbb{A}\vec{x}_\lambda = \lambda\vec{x}_\lambda.$$

Každý takový vektor pak nazýváme *vlastním vektorem* příslušným vlastnímu číslu λ. Přitom každá matice $\mathbb{A}$ řádu r má právě r vlastních čísel, jež mohou být vypočteny z rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Tato rovnice je totiž algebraickou rovnicí, kde na levé straně stojí polynom stupně r. Z algebry víme, že každý takový polynom má právě r kořenů a že je-li číslo $a + ib$ jeho kořenem, pak také komplexně sdružené číslo $a - ib$ je jeho kořenem. Dále je známo, že je-li matice $\mathbb{A}$ symetrická, pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.

Tak tomu bude tedy i u zkoumaných kvadratických forem, neboť jejich matice jsou z definice symetrické. Pro vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ matice $\mathbb{A}$ také platí známý vztah

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_i .$$

5.1.19 Věta – *o normalizovatelnosti kvadratických forem*

Kvadratickou formu $q(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ hodnosti h lze vždy převést regulární substitucí $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ ve formu

$$q(y_1, y_2, \ldots, y_r) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \ldots - y_{s_1+s_2}^2, \tag{5.5}$$

kde $h = s_1 + s_2$.

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť je tedy dána kvadratická forma $q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\vec{x}$ s maticí $\mathbb{A}$
- nechť jsou její vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ uspořádana tak, že prvních s_1 těchto čísel je kladných, dalších s_2 těchto čísel je záporných
- tedy $s_1 + s_2 = h$
- $r - h$ vlastních čísel je proto nulových
- vyjdeme ze zákona setrvačnosti kvadratických forem 5.1.17
- podle něj lze formu $q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\vec{x}$ převést regulární transformací $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{z}$ na tvar

  $$q(z_1, z_2, \ldots, z_r) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2$$

- nyní zaveďme další transformaci $\vec{z} = \mathbb{P}\vec{y}$, kde

  $$\mathbb{P} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_{s_1}}, \sqrt{-\lambda_{s_1+1}}, \sqrt{-\lambda_{s_1+2}}, \ldots, \sqrt{-\lambda_h}, 1, 1, \ldots, 1\right)$$

  je diagonální matice s uvedenými prvky na hlavní diagonále
- takové zobrazení je regulárním zobrazením, neboť pro příslušný determinant platí

  $$\det(\mathbb{P}) = \prod_{k=1}^{s_1} \sqrt{\lambda_k} \cdot \prod_{k=s_1+1}^{h} \sqrt{-\lambda_k} \cdot \prod_{k=h}^{r} 1 > 0$$

- je-li matice $\mathbb{A}$ regulární, tj. $h = r$, pak navíc $\det(\mathbb{P}) = \sqrt{|\det(\mathbb{A})|}$
- jak zobrazení $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{z}$, tak také zobrazení $\vec{z} = \mathbb{P}\vec{y}$ jsou regulární, a proto tedy

  $$\vec{x} = \mathbb{R}(\mathbb{P}\vec{y}) = (\mathbb{R}\cdot\mathbb{P})\vec{y}$$

  je hledaným zobrazením a navíc regulárním, neboť $\det(\mathbb{R}\cdot\mathbb{P}) = \det(\mathbb{R})\det(\mathbb{P}) \neq 0$
- tím je důkaz proveden

5.1.20 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Tvar (5.4), resp. (5.5) pak nazýváme *kanonickým*, resp. *normálním* tvarem kvadratické formy.

5.1.21 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Uspořádanou trojici $(s_1, s_2, r-h)$ z věty 5.1.19 nazýváme *signaturou* kvadratické formy a značíme ji $\operatorname{sg}(q)$.

5.1.22 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *pozitivně definitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme

$$q(\vec{x}) \rhd 0,$$

jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) platí ostrá nerovnost $q(\vec{x}) > 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *negativně definitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme

$$q(\vec{x}) \lhd 0,$$

jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) platí ostrá nerovnost $q(\vec{x}) < 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *pozitivně semidefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme

$$q(\vec{x}) \unrhd 0,$$

jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí neostrá nerovnost $q(\vec{x}) \geqslant 0$ a existuje $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) takové, že $q(\vec{x}) = 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *negativně semidefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme

$$q(\vec{x}) \unlhd 0,$$

jestliže pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ platí neostrá nerovnost $q(\vec{x}) \leqslant 0$ a existuje $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) takové, že $q(\vec{x}) = 0$. Formu $q(\vec{x})$ nazýváme *indefinitní* v $\mathbf{R}^r$ a označíme

$$q(\vec{x}) \lhd\!\rhd 0,$$

jestliže existují $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^r$ taková, že $q(\vec{x}) < 0$ a $q(\vec{y}) > 0$.

5.1.23 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy kladná.

<u>*Důkaz:*</u>

- věta je vyslovena jako ekvivalence, proto budeme dokazovat dvě implikace
- První implikace:
  - nechť je tedy forma $q(\vec{x})$ pozitivně definitní, tj. $q(\vec{x}) \rhd 0$
  - nechť $\lambda \in \mathbf{R}$ je vlastní číslo její matice $\mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}\,\vec{x} = \lambda\vec{x}$, kde $\vec{x}$ není nulový vektor
  - odsud vyplývá
  $$\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x}$$
  - tedy $q(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x}$
  - a následně
  $$\lambda = \frac{q(\vec{x})}{\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x}} = \frac{q(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} > 0$$
  - tato nerovnost vyplývá jednak z faktu, že pro nenulové $\vec{x}$ je $q(\vec{x}) > 0$, ale také ze skutečnosti, že velikost $\|\vec{x}\|$ (říkejme jí raději euklidovská norma - viz následující kapitola) nenulového vektoru není nikdy nulová
- Druhá implikace:
  - nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$
  - podle jisté algebraické věty existuje unitátní matice $\mathbb{U}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^{\mathsf{T}}\mathbb{D}\,\mathbb{U}$, kde
  $$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$
  - dále
  $$q(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\,\vec{x} = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{U}^{\mathsf{T}}\mathbb{D}\,\mathbb{U}\,\vec{x} = \left(\mathbb{U}\vec{x}\right)^{\mathsf{T}}\mathbb{D}\,\mathbb{U}\,\vec{x}$$

– označme nyní $\vec{y} := \mathbb{U}\vec{x}$

– jelikož $\mathbb{U}$ je unitární matice, je vektor $\vec{y}$ rovněž nenulový

– pak tedy

$$q(\vec{x}) = \vec{y}^{\mathsf{T}}\, \mathbb{D}\, \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_r) \begin{pmatrix} \lambda_1\, y_1 \\ \lambda_2\, y_2 \\ \vdots \\ \lambda_r\, y_r \end{pmatrix} = \lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 + \ldots + \lambda_r\, y_r^2 > 0$$

– poslední nerovnost je důsledkem skutečnosti, že vlastní čísla jsou z předpokladů kladná a alespoň jedno y_i není nulové

5.1.24 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy nezáporná a alespoň jedno z nich je nulové.

Důkaz:

- důkaz je obměnou předešlého důkazu
- pouze všechny ostré nerovnosti jsou nahrazeny neostrými

5.1.25 Věta

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je negativně definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy záporná.

Důkaz:

- postačí si uvědomit skutečnost, že je-li kvadratická forma $q(\vec{x})$ negativně definitní, je forma $-q(\vec{x})$ pozitivně definitní
- tvrzení pak beze zbytku plyne z věty 5.1.23

5.1.26 Důsledek

Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je negativně semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice formy nekladná a alespoň jedno z nich je nulové. Kvadratická forma $q(\vec{x})$ je indefinitní právě tehdy, když existují alespoň dvě vlastní čísla matice formy, z nichž jedno je kladné a jedno je záporné.

5.1.27 Věta

Nechť $q(\vec{x})$ je kvadratická forma v $\mathbf{R}^r$ hodnosti h a signatury $\operatorname{sg}(q) = (s_1, s_2, r-h)$.

1. Forma $q(\vec{x})$ je pozitivně, resp. negativně definitní v $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když $h = r = s_1$, resp. $h = r = s_2$.
2. Forma $q(\vec{x})$ je pozitivně, resp. negativně semidefinitní v $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když $h < r$ a $s_1 = h$, resp. $h < r$ a $s_2 = h$.
3. Forma $q(\vec{x})$ je indefinitní v $\mathbf{R}^r$, je-li $s_1 s_2 \neq 0$.

Důkaz:

- je přímým důsledkem předešlých vět

5.1.28 Poznámka

Kromě typů definitností z definice 5.1.22 budeme také rozlišovat typy *excentricity* kvadratických forem. Ty zavedeme v následující definici a s výhodou je zužitkujeme při pozdější klasifikaci kvadratických ploch.

5.1.29 Definice

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ a nechť $\operatorname{sg}(q) = (s_1, s_2, s_3)$ je její signatura. Řekneme, že kvadratická forma $q(\vec{x})$ je *eliptická*, resp. *hyperbolická*, resp. *parabolická* v prostoru $\mathbf{R}^r$, jestliže $s_1 = r$ nebo $s_2 = r$, resp. $s_1 s_2 \neq 0$ a $s_3 = 0$, resp. $s_3 \neq 0$.

5.1.30 Věta – *Sylvestrovo kritérium*

Nechť $q(\vec{x})$ je kvadratická forma v $\mathbf{R}^r$ s maticí $\mathbb{A}$ a hlavními minory Δ_i, kde $i \in \widehat{r}$. Pak $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní právě tehdy, když pro všechna $i \in \widehat{r}$ je $\Delta_i > 0$. Forma $q(\vec{x})$ je negativně definitní právě tehdy, když pro všechna $i \in \widehat{r}$ je $(-1)^i \Delta_i > 0$.

Důkaz:

- dokážeme nejprve první část tvrzení
- to je vysloveno jako ekvivalence, proto budeme dokazovat dvě implikace
- První implikace:
  - nechť je tedy kvadratická forma $q(\vec{x}) = x^\mathsf{T} \mathbb{A} \vec{x}$ pozitivně definitní
  - ukážeme, že za tohoto předpokladu je matice

$$\mathbb{A}_k := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

    pozitivně definitní
  - nechť je tedy $(y_1, y_2, \dots, y_k)^\mathsf{T}$ nenulový vektor
  - potom platí

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

  - znaménko nerovnosti plyne z definice pozitivní definitnosti kvadratických forem

- matice $\mathbb{A}_k$ je tedy pozitivně definitní a proto má všechna vlastní čísla $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ kladná, z čehož vyplývá, že pro všechna $k \in \widehat{r}$ platí

$$\Delta_k = \det(\mathbb{A}_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i > 0$$

- Druhá implikace:
  - předpokládejme, že pro všechna $k \in \widehat{r}$ platí $\det(\mathbb{A}_k) > 0$
  - matematickou indukcí dokážeme, že kvadratická forma $q(\vec{x}) = x^\intercal \mathbb{A} \vec{x}$ je pozitivně definitní, tj. že matice $\mathbb{A} = \mathbb{A}_n$ je pozitivně definitní
  - pro $k = 1$ je zřejmé, že $\mathbb{A}_1$ je pozitivně definitní
  - indukčním předpokladem tedy bude pozitivní definitnost matice $\mathbb{A}_{n-1}$
  - označme
  $$d_n = \frac{\det(\mathbb{A}_n)}{\det(\mathbb{A}_{n-1})}$$
  - dále označme $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\intercal$ vektor, který řeší soustavu
  $$\mathbb{A}_n \vec{z} = (0, 0, \ldots, 0, d_n)^\intercal$$
  - z Cramerova pravidla vyplývá rovnost $z_n = 1$
  - proto pro $i \in \widehat{n-1}$ platí vztahy
  $$a_{in} = a_{ni} = -a_{i1} z_1 - a_{i2} z_2 - \ldots - a_{i,n-1} z_{n-1}$$
  - a dále
  $$a_{nn} = d_n - a_{n1} z_1 - a_{n2} z_2 - \ldots - a_{n,n-1} z_{n-1}$$
  - označme
  $$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -z_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -z_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - označme dále
  $$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$
  - nyní lze rutinním výpočtem ověřit, že platí vztah $\mathbb{A}_n = \mathbb{R}^\intercal \mathbb{D} \mathbb{R}$
  - nechť $\vec{x}$ je libovolný nenulový vektor
  - označme $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$
  - protože matice $\mathbb{R}$ je regulární, je také vektor $\vec{y}$ nenulový
  - označme ještě $\vec{y}_\bullet = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})^\intercal$
  - pak jednoduchými úpravami dostáváme sérii rovností
  $$q(\vec{x}) = \vec{x}^\intercal \mathbb{A} \vec{x} = \vec{x}^\intercal \mathbb{R}^\intercal \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x} = (\mathbb{R}\vec{x})^\intercal \mathbb{D} \mathbb{R} \vec{x} = \vec{y}^\intercal \mathbb{D} \vec{y} = \vec{y}_\bullet^\intercal \mathbb{A}_{n-1} \vec{y}_\bullet + d_n y_n^2 > 0$$
  - oba poslední sčítance jsou nezáporné, protože matice $\mathbb{A}_{n-1}$ je z indukčního předpokladu pozitivně definitní a číslo d_n je kladné
  - ostrá nerovnost vyplývá z faktu, že je-li $\vec{y}$ nenulový vektor, je buď $y_n \neq 0$ nebo $\vec{y}_\bullet \neq \vec{0}$
- tvrzení Sylvestrova kritéria o negativní definitosti vyplývá z faktu, že je-li kvadratická forma $q(\vec{x})$ negativně definitní, je forma $-q(\vec{x})$ pozitivně definitní

5.1.31 Definice

Nechť jsou dány vektory $\vec{u}, \vec{v}$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^r$ a kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$. Pak řekneme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou $q-$*ortogonální*, jestliže

$$qq(\vec{u}, \vec{v}) = 0,$$

kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bilineární forma přidružená ke kvadratické formě $q(\vec{x})$.

5.1.32 Definice

Bázi

$$\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$$

vektorového prostoru $\mathbf{R}^r$ nazýváme *polární bází* odvozenou od kvadratické formy $q(\vec{x})$, zkráceně: polární bází kvadratické formy $q(\vec{x})$, jestliže pro každá $i, j \in \widehat{r}$ zároveň platí:

1. $qq(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, pokud $i \neq j$,
2. $q(\vec{u}_i) \in \{0, +1, -1\}$,

kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bilineární forma přidružená ke kvadratické formě $q(\vec{x})$.

5.1.33 Příklad

Například pro kvadratickou formu $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ je polární bází množina

$$\mathcal{B}_P = \left((1,0,0)^\intercal, (0,1,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\right).$$

Ale pozor! Není jedinou polární bází. Pokusíme se nalést další. Hledejme například polární bázi obsahující zvolený vektor

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^\intercal,$$

pro který platí $q(\vec{u}) = 1$. Hledejme tedy druhý vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^\intercal$. Ten by měl splňovat společně s vektorem $\vec{u}$ podmínku $q-$ortogonality, tj.

$$qq(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 + v_2) = 0.$$

Dále by mělo platit $q(\vec{v}) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Jelikož máme k dispozici pouze dvě podmínky pro tři neznámé v_1, v_2, v_3, lze jednu z nich volit. Zvolme například $v_1 = 0$. Pak ale z podmínky $q-$ortogonality vychází, že $v_2 = 0$. $q-$normalizační podmínka $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ pak vede k určení $v_3 = 1$. Tedy $\vec{v} = (0,0,1)^\intercal$. Hledejme třetí vektor $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^\intercal$. Ten by měl splňovat dvě podmínky $q-$ortogonality, konkrétně

$$qq(\vec{u}, \vec{w}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(w_1 + w_2) = 0,$$

$$qq(\vec{v}, \vec{w}) = (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_3 = 0.$$

Proto $w_3 = 0$ a $w_2 = -w_1$. Podmínka $q-$ortonormality $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ vede k rovnosti $2w_1^2 = 1$, odkud vychází, že $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pak tedy

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^\intercal.$$

Hledanou nestandardní polární bází je tudíž soubor

$$\mathcal{B}'_P = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^\intercal, (0,0,1)^\intercal, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^\intercal\right).$$

5.1.34 Poznámka

Pro určení normálního tvaru zadané kvadratické formy, pro určení její signatury a příslušné polární báze je používána tzv. *Babylónská redukce*, někdy nazývaná též *Lagrangeovým algoritmem*. Tato procedura spočívá v převedení kvadratické formy v prostoru $\mathbf{R}^r$ na maximálně r čtverců. Při této redukci na čtverce je ale třeba mít na zřeteli, aby v každém nově vytvořeném čtverci byly vždy obsaženy všechny sčítance obsahující vybranou proměnnou. Tedy např. první čtverec by měl být zkonstruován tak, aby se ve zbylém výraze již nevyskytovala proměnná x_1. Proto bude mít první čtverec obecně r sčítanců, druhý $r-1$ atd. Poslední čtverec Lagrangeova algoritmu pak bude představován pouze jistým násobkem kvadrátu x_r^2 poslední proměnné. Lépe lze proceduru pochopit na konkrétním příkladě. Zkoumejme proto kvadratickou formu

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Doplnění na čtverce pak probíhá následovně

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3 = \left(x_1 - x_2 + x_3\right)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 = \left(x_1 - x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_2 - 2x_3\right)^2 + 4x_3^2.$$

Tedy normální tvar zadané formy má podobu

$$q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

kde $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 2x_3$ a $y_3 = 2x_3$. Signaturou zadané kvadratické formy je pak trojice $\operatorname{sg}(q) = (2, 1, 0)$. Zkoumaná forma je proto regulární, indefinitní a hyperbolická. Pro inverzní transformaci platí maticový vztah

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé sloupce matice přechodu, jak se přesvědčíme později, představují vektory polární báze. Tedy

$$\mathcal{B}_P = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \equiv \left\{(1,0,0)^\mathsf{T}, (1,1,0)^\mathsf{T}, (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^\mathsf{T}\right\}.$$

Snadno ověříme, že se skutečně o polární bázi jedná, neboť jsou splněny jak $q-$normalizační podmínky $q(\vec{u}_1) = 1$, $q(\vec{u}_2) = -1$, $q(\vec{u}_3) = 1$, tak také podmínky $q-$ortogonality $qq(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = qq(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = qq(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$.

5.1.35 Věta

Nechť je zadána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v prostoru $\mathbf{R}^r$ a její polární báze $\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$. Pak regulární lineární zobrazení $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y}$ zadané rovnostmi

$$x_k = u_{1_k}y_1 + u_{2_k}y_2 + u_{3_k}y_3 + \ldots + u_{r_k}y_r$$

převádí formu $q(\vec{x})$ na normální tvar.

<u>*Důkaz:*</u>

- z vektorů polární báze $\mathcal{B}_P$ sestavme matici

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} u_{1_1} & u_{2_1} & u_{3_1} & \dots & u_{r_1} \\ u_{1_2} & u_{2_2} & u_{3_2} & \dots & u_{r_2} \\ u_{1_3} & u_{2_3} & u_{3_3} & \dots & u_{r_3} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_{1_r} & u_{2_r} & u_{3_r} & \dots & u_{r_r} \end{pmatrix}$$

- zobrazení $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y}$ zaveďme do kvadratické formy
- pak tedy

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} = \left(\mathbb{B}\vec{y}\right)^\mathsf{T}\mathbb{A}\left(\mathbb{B}\vec{y}\right) = \vec{y}^\mathsf{T}\left(\mathbb{B}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\mathbb{B}\right)\vec{y}$$

- zkoumejme nyní matici

$$\mathbb{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\,\mathbb{B} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1_1} & u_{1_2} & u_{1_3} & \dots & u_{1_r} \\ u_{2_1} & u_{2_2} & u_{2_3} & \dots & u_{2_r} \\ u_{3_1} & u_{3_2} & u_{3_3} & \dots & u_{3_r} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_{r_1} & u_{r_2} & u_{r_3} & \dots & u_{r_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3r} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1_1} & u_{2_1} & u_{3_1} & \dots & u_{r_1} \\ u_{1_2} & u_{2_2} & u_{3_2} & \dots & u_{r_2} \\ u_{1_3} & u_{2_3} & u_{3_3} & \dots & u_{r_3} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_{1_r} & u_{2_r} & u_{3_r} & \dots & u_{r_r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1_1} & u_{1_2} & u_{1_3} & \dots & u_{1_r} \\ u_{2_1} & u_{2_2} & u_{2_3} & \dots & u_{2_r} \\ u_{3_1} & u_{3_2} & u_{3_3} & \dots & u_{3_r} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_{r_1} & u_{r_2} & u_{r_3} & \dots & u_{r_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r a_{1j}u_{1j} & \sum_{j=1}^r a_{1j}u_{2j} & \sum_{j=1}^r a_{1j}u_{3j} & \dots & \sum_{j=1}^r a_{1j}u_{rj} \\ \sum_{j=1}^r a_{2j}u_{1j} & \sum_{j=1}^r a_{2j}u_{2j} & \sum_{j=1}^r a_{2j}u_{3j} & \dots & \sum_{j=1}^r a_{2j}u_{rj} \\ \sum_{j=1}^r a_{3j}u_{1j} & \sum_{j=1}^r a_{3j}u_{2j} & \sum_{j=1}^r a_{3j}u_{3j} & \dots & \sum_{j=1}^r a_{3j}u_{rj} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{j=1}^r a_{rj}u_{1j} & \sum_{j=1}^r a_{rj}u_{2j} & \sum_{j=1}^r a_{rj}u_{3j} & \dots & \sum_{j=1}^r a_{rj}u_{rj} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} qq(\vec{u}_1,\vec{u}_1) & qq(\vec{u}_1,\vec{u}_2) & qq(\vec{u}_1,\vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_1,\vec{u}_r) \\ qq(\vec{u}_2,\vec{u}_1) & qq(\vec{u}_2,\vec{u}_2) & qq(\vec{u}_2,\vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_2,\vec{u}_r) \\ qq(\vec{u}_3,\vec{u}_1) & qq(\vec{u}_3,\vec{u}_2) & qq(\vec{u}_3,\vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_3,\vec{u}_r) \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ qq(\vec{u}_r,\vec{u}_1) & qq(\vec{u}_r,\vec{u}_2) & qq(\vec{u}_r,\vec{u}_3) & \dots & qq(\vec{u}_r,\vec{u}_r) \end{pmatrix}$$

- užijeme-li nyní vlastností vektorů polární báze, dostáváme odtud

$$\mathbb{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\,\mathbb{B} = \begin{pmatrix} q(\vec{u}_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\vec{u}_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(\vec{u}_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(\vec{u}_r) \end{pmatrix}$$

- odsud již přímo plyne, že forma

$$q(\vec{y}) = (y_1, y_2, \dots, y_r) \begin{pmatrix} q(\vec{u}_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(\vec{u}_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(\vec{u}_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(\vec{u}_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

  je v normálním tvaru

- přitom hodnoty $q(\vec{u}_1), q(\vec{u}_2), \dots, q(\vec{u}_r)$, které jsou buď 0 nebo 1 nebo -1, jednoznačně určují signaturu zadané kvadratické formy

5.1.36 Poznámka

Podle předešlé věty je tedy polární báze takovou bází v $\mathbf{R}^r$, v níž má zvolená kvadratická forma normální tvar. Tento poznatek s výhodou zužitkujeme při studiu obecných kvadratických ploch.

5.1.37 Příklad

Nechť je dána kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - x_2x_3.$$

Hledáme její polární bázi, která obsahuje vektor $\vec{u}_1 = (0,1,1)^\mathsf{T}$, existuje-li. Pokusíme se také stanovit její typ, definitnost, signaturu, normální tvar v souřadnicích polární báze a transformační vztahy, které ji na její normální tvar převádějí. Daná kvadratická forma má maticový zápis tvaru

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bilineární formou přisdruženou k zadané kvadratické formě má tedy podobu

$$qq(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Nejprve se budeme snažit zkonstruovat polární bázi $\mathcal{B}_P = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ s již zadaným vektorem $\vec{u}_1 = (0,1,1)^\mathsf{T}$. Jelikož je zřejmé, že forma $q(\vec{x})$ je indefinitní, o čemž se snadno přesvědčíme pomocí definice, a

$$q(\vec{u}_1) = -1,$$

bude taková polární báze existovat. Její konstrukci provedeme přímo užitím patřičné definice. Začneme hledáním vektoru $\vec{u}_2 = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T}$, splňujícího podmínky $q(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$ a $q(\vec{u}_2) \in \{0, -1, 1\}$. Protože ale máme pouze dvě podmínky pro tři neznámé x_1, x_2, x_3, lze jednu z nich volit. My zde např. volíme

$$x_1 = 0. \tag{5.6}$$

První podmínka dává rovnost

$$(0,1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3) = 0,$$

a tedy (pro volbu (5.6)) dostáváme $x_2 = -x_3$. Dosadíme-li oba získané vztahy do druhé podmínky, obdržíme

$$q(\vec{u}_2) = x_3^2 = 1.$$

Zde podotýkáme, že hodnoty 0 nebo -1 na pravé straně této rovnosti byly z pochopitelných důvodů zavrhnuty. Rovnici řeší např. hodnota $x_3 = 1$, což vede k nalezení druhého vektoru polární báze ve tvaru $\vec{u}_2 = (0,-1,1)^\mathsf{T}$. Dále pokračujeme analogicky hledáním posledního vektoru $\vec{u}_3 = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T}$, splňujícího podmínky $q(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = 0$, $q(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0$ a $q(\vec{u}_3) \in \{0, -1, 1\}$. Uvedené podmínky q-ortogonality vedou k rovnostem

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0, \qquad -x_2 + x_3 = 0.$$

Po vyjádření $x_2 = x_3$ a $x_1 = 2x_3$ získává třetí podmínka jednoduchou podobu

$$q(\vec{u}_3) = x_3^2 = 1.$$

Opět jsme z množiny $\{0, -1, 1\}$ vyloučili hodnoty $0, -1$. Řešením rovnice je např. hodnota $x_3 = 1$ a tedy $\vec{u}_3 = (2,1,1)^\mathsf{T}$. Uzavíráme tedy, že hledanou polární bází je množina

$$\mathcal{B}_P = \{(0,1,1)^\mathsf{T}, (0,-1,1)^\mathsf{T}, (2,1,1)^\mathsf{T}\}. \tag{5.7}$$

Úloha má zřejmě i další řešení (má dokonce nespočetně mnoho řešení). Např. změníme-li volbu (5.6) na $x_2 = 0$ nebo $x_3 = 0$, dostaneme polární bázi tvaru $\mathcal{B}_P = \{(0,1,1)^\mathsf{T}, (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^\mathsf{T}, (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^\mathsf{T}\}$. Zpět ale k polární bázi (5.7). Určíme transformační vztahy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

pro převod zadané kvadratické formy na normální tvar

$$q(\vec{y}) = q(\vec{u}_1)y_1^2 + q(\vec{u}_2)y_2^2 + q(\vec{u}_3)y_3^2 = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

hyperbolického typu. Odsud snadno nahlédneme, že signatura zadané formy je $\mathrm{sg}\,(q) = (2,1,0)$.

5.2 Kvadratické plochy

Po podrobném studiu kvadratických forem přistoupíme v tomto oddíle k vyšetřování základních vlastností kvadratických ploch (kvadrik) v r–dimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^r$.

5.2.1 Definice

Nechť je dána nenulová čtvercová symetrická matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$, vektor $\vec{b} \in \mathbf{R}^r$ a číslo $c \in \mathbf{R}$. Funkci $Q(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ tvaru

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^\intercal \mathbb{A}\, \vec{x} - 2\,\vec{b}^\intercal \vec{x} + c \tag{5.8}$$

nazýváme *kvadratickou funkcí* v prostoru $\mathbf{R}^r$. Množina

$$Q^{-1}(0) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^r : Q(\vec{x}) = 0\} \tag{5.9}$$

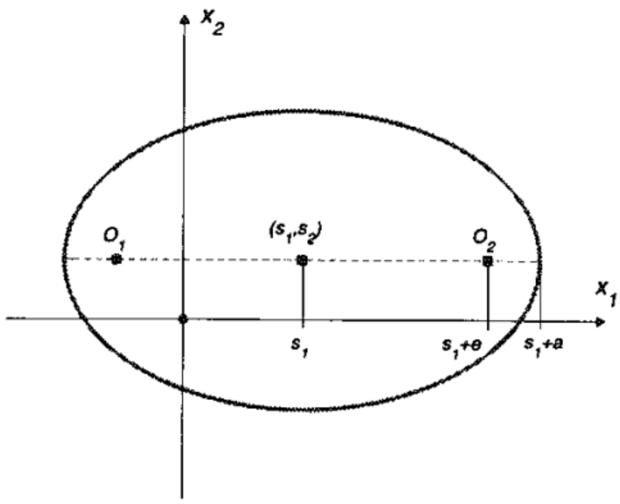
se nazývá *kvadratickou plochou (kvadrikou)* určenou rovnicí $Q(\vec{x}) = 0$. Matici $\mathbb{A}$, vektor $\vec{b}$ a číslo c nazýváme *maticí*, *vektorem* a *absolutním členem* kvadratické funkce (kvadriky). Kvadratickou formu $q(\vec{x}) = \vec{x}^\intercal \mathbb{A}\, \vec{x}$ nazýváme *kvadratickou formou příslušnou ke kvadratické funkci* (5.8), resp. *ke kvadrice* (5.9). Kvadriku ve dvoudimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^2$ nazýváme také *kuželosečkou*.

5.2.2 Poznámka

Nejfrekventovanějšími kvadrikami ve dvoudimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^2$ jsou elipsa, hyperbola a parabola. Tyto kuželosečky bývají nejčastěji uváděny ve středoškolských diagonálních tvarech, kdy jejich hlavní osy (či tzv. poloosy) jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Proberme nyní stručně základní vlastnosti těchto elementárních kuželoseček. *Elipsa* je množina bodů v rovině, jež mají od dvou pevně zvolených bodů O_1, O_2 (tzv. *ohnisek elipsy*) stálý součet vzdáleností $2a$. Čísla a, b ($a \geqslant b$) nazýváme po řadě *hlavní a vedlejší poloosou* elipsy. Vzdálenost obou ohnisek od středu elipsy se nazývá *excentricita* a vypočte se pomocí vztahu $e := \sqrt{a^2 - b^2}$. Například elipsa

$$\frac{(x_1 - s_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - s_2)^2}{b^2} = 1$$

je elipsou o poloosách a a b se středem v bodě (s_1, s_2). Její podoba je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 5.1
Elipsa o poloosách a a b se středem v bodě (s_1, s_2). Body $(s_1 + e, s_2)$ a $(s_1 - e, s_2)$ reprezentují ohniska elipsy. Jejich vzdálenost od středu elipsy je rovna excentricitě $e := \sqrt{a^2 - b^2}$.

Tato elipsa může být snadno zapsána v definičním tvaru $Q(x_1, x_2) = \vec{x}^\top \mathbb{A}\, \vec{x} - 2\,\vec{b}^\top \vec{x} + c$, položíme-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} s_1\, a^{-2} \\ s_2\, b^{-2} \end{pmatrix}, \qquad c = \frac{s_1^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} - 1.$$

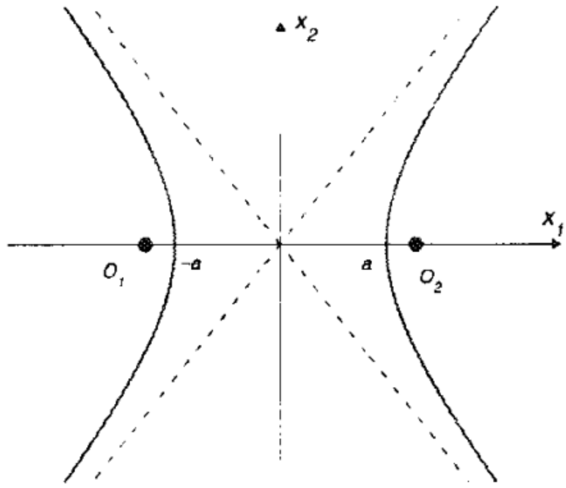
Hyperbola je množina bodů v rovině, jež mají od dvou pevně zvolených bodů O_1, O_2 (tzv. *ohnisek hyperboly*) stálý rozdíl vzdáleností $2a$. Čísla a, b nazýváme po řadě *hlavní a vedlejší poloosou* hyperboly. Vzdálenost obou ohnisek od středu hyperboly se nazývá *excentricita* a vypočte se pomocí vztahu $e := \sqrt{a^2 + b^2}$. Přímky

$$x_{2_{1,2}} = \pm \frac{b}{a} x_1$$

se nazývají *asymptotami* hyperboly. Rovnice hyperboly ve standardním diagonálním tvaru je

$$\frac{(x_1 - s_1)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - s_2)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Její tvar je pro $(s_1, s_2) = (0, 0)$ vyobrazen na obrázku níže.

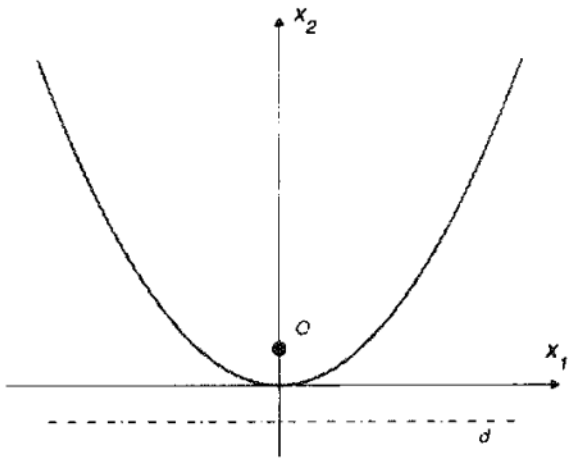


Obrázek 5.2
Hyperbola $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ o poloosách a a b se středem v bodě $(0, 0)$.

Parabola je množina bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od pevně zvoleného bodu O (tzv. *ohniska paraboly*) a pevné přímky d (tzv. *řídící přímky paraboly*). Vzdálenost bodu O od řídící přímky je p. Rovnice paraboly ve standardním diagonálním tvaru je

$$x_1^2 - 2p\, x_2 = 0.$$

Graficky je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 5.3
Parabola $x_1^2 - 2px_2 = 0$. Bod O je ohniskem paraboly, čárkovaná přímka je tzv. *direktrix*, řídící přímka paraboly.

5.2.3 Poznámka

Parabola $x_1^2 - 2p\,x_2 = 0$ z předešlé poznámky má maticový tvar

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2\,(0,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Příslušná kvadratická forma je tedy singulární, a proto není možno definovat regularitu kuželoseček pomocí regularity příslušné kvadratické formy. Kdybychom k tomuto přistoupili, museli bychom zároveň připustit, že parabola by byla singulární kvadrikou. Tomu se ovšem chceme vyhnout, proto budeme regularitu kvadrik definovat poněkud odlišně.

5.2.4 Definice

Nechť je dána kvadratická funkce (5.8). Kvadratickou formu

$$q_0(x_0, \vec{x}) := \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\,\vec{x} - 2\,\vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x}\,x_0 + c\,x_0^2 \tag{5.10}$$

v $\mathbf{R}^{r+1}$ nazýváme *rozšířenou kvadratickou formou příslušnou ke kvadrice* (5.9), resp. *ke kvadratické funkci* (5.8). Její matici budeme označovat symbolem $\mathbb{A}_{(ex)}$.

5.2.5 Příklad

Pro kvadratickou funkci $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2 + 3$ definovanou v $\mathbf{R}^2$ má příslušná rozšířená kvadratická forma tvar

$$q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_0x_2 + 3x_0^2.$$

Podotýkáme, že q_0 je kvadratickou formou v $\mathbf{R}^3$.

5.2.6 Definice

Řekneme, že daná kvadrika je *regulární*, resp. *singulární*, jestliže její rozšířená kvadratická forma je regulární, resp. singulární. *Hlavní signaturou* kvadriky (označujeme $\mathrm{SG}(Q)$) rozumíme signaturu její rozšířené kvadratické formy. *Vedlejší signaturou* kvadriky (značíme $\mathrm{sg}(Q)$) rozumíme signaturu její kvadratické formy.

5.2.7 Příklad

V poznámce 5.2.3 jsme diskutovali parabolu $x_1^2 - 2p\,x_2 = 0$, kde $p \neq 0$. Její matice rozšířené kvadratické formy $q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 2p\,x_2x_0 = 0$ má následující podobu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a je zjevně regulární, neboť $p \neq 0$ a sloupce uvedené matice jsou zřetelně nezávislé. Proto je parabola regulární kuželosečkou v $\mathbf{R}^2$. Pokusme se nalézt její signaturu. Stanovit vedlejší signaturu je značně jednoduché. Platí totiž $\mathrm{sg}(Q) = (1,0,1)$. Pro stanovení hlavní signatury bude nutné převést rozšířenou formu $q_0(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 2p\,x_2x_0 = 0$ na diagonální tvar. Zavedeme proto s výhodou substituci

$$x_1 = y_1, \qquad x_0 = y_2 + y_3, \qquad x_2 = y_2 - y_3.$$

Po provedení této záměny dostáváme

$$q_0(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 = 0.$$

Proto je hlavní signaturou paraboly trojice $\mathrm{SG}(Q) = (2,1,0)$, což opět potvrzuje její regularitu.

5.2.11 Věta

Nechť je dána kvadratická funkce (5.8). Nechť $\mathbb{A}$ je její matice a $\vec{b}$ její vektor. Pak bod $\vec{s} \in \mathbf{R}^r$ je středem kvadriky (5.9) právě tehdy, je-li splněna rovnost

$$\vec{b} = \mathbb{A}\,\vec{s},$$

tj. právě tehdy, rovnají-li se hodnosti $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = \mathrm{h}(\mathbb{A}|\vec{b})$.

Důkaz:

- z definice kvadratické plochy vyplývá rovnost $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\mathsf{T}$
- proto

  $Q(\vec{s}+\vec{x}) = (\vec{s}+\vec{x})^\mathsf{T}\mathbb{A}\,(\vec{s}+\vec{x}) - 2\,\vec{b}^\mathsf{T}(\vec{s}+\vec{x}) + c = \vec{s}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{s} + \vec{s}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} + \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{s} + \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} - 2\,\vec{b}^\mathsf{T}\vec{s} - 2\,\vec{b}^\mathsf{T}\vec{x} + c$
- jelikož $\vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{s} = \left(\mathbb{A}\,\vec{s}\right)^\mathsf{T}\vec{x} = \vec{s}^\mathsf{T}\mathbb{A}^\mathsf{T}\vec{x} = \vec{s}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x}$, lze předešlý vztah upravit do tvaru

  $$Q(\vec{s}+\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} + 2(\vec{s}\,\mathbb{A} - \vec{b})^\mathsf{T}\vec{x} + \vec{s}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{s} - 2\,\vec{b}^\mathsf{T}\vec{s} + c = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} + 2(\mathbb{A}\,\vec{s} - \vec{b})^\mathsf{T}\vec{x} + Q(\vec{s})$$
- podobně lze ukázat, že

  $$Q(\vec{s}-\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} - 2(\mathbb{A}\,\vec{s} - \vec{b})^\mathsf{T}\vec{x} + Q(\vec{s})$$
- rovnost (5.12) tedy nastává právě tehdy, když $\mathbb{A}\,\vec{s} = \vec{b}$
- zmiňované $\vec{s}$ existuje podle Frobeniovy věty právě tehdy, rovnají-li hodnosti matice $\mathbb{A}$ a matice, jež vznikne z matice $\mathbb{A}$ přidáním sloupce $\vec{b}$, tedy platí-li rovnost $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = \mathrm{h}(\mathbb{A}|\vec{b})$

5.2.12 Věta – *Zákon setrvačnosti kvadratických ploch*

Ke každé kvadratické funkci $Q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s maticí $\mathbb{A}$ existuje ortonormální transformace $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = 0$ do tvaru

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{r} \beta_i y_i + \gamma = 0, \tag{5.13}$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

Důkaz:

- tvrzení této věty plyne přímo ze zákona setrvačnosti kvadratických forem 5.1.17
- za transformaci $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ postačí volit transformaci, jež převádí kvadratickou formu $\vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x}$ na kanonický tvar

5.2.13 Věta

Ke každé kvadratické funkci $Q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s vedlejší signaturou $\mathrm{sg}(q) = (s_1, s_2, r - s_1 - s_2)$ existuje regulární lineární transformace $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y} + \vec{s}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = 0$ do tvaru

$$Q(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \ldots - y_{s_1+s_2}^2 - 2\beta y_{s_1+s_2+1} + \gamma = 0, \tag{5.14}$$

kde nejvýše jedno z čísel β, γ je nenulové. Navíc $\beta \in \{0,1\}$ a $\gamma \in \{-1,0,1\}$.

Důkaz:

- vyjdeme z faktu, že podle věty 5.2.12 existuje regulární lineární transformace $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{z}$, jež převádí kvadriku $Q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathbb{A}\,\vec{x} - 2\,\vec{b}^\mathsf{T}\vec{x} + c = 0$ do tvaru

  $$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{r} \beta_i z_i + \gamma = 0, \tag{5.15}$$

  kde λ_i jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$

- předpokládáme přitom, že vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ jdou uspořádana tak, že prvních s_1 těchto čísel je kladných, dalších s_2 těchto čísel je záporných a zbylých $r - s_1 - s_2$ vlastních čísel je nulových
- rozdělme nyní důkaz na tři alternativy
- První alternativa: $s_1 + s_2 = r$
  - podotýkáme, že všechna vlastní čísla jsou za tohoto předpokladu nenulová
  - pro každé $i \in \widehat{r}$ platí
  $$\lambda_i z_i^2 - 2\beta_i z_i = \lambda_i \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\beta_i^2}{\lambda_i}$$
  - zavedeme-li tedy substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\,\vec{z}$ sadou i vztahů
  $$w_i = \sqrt{|\lambda_i|} \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right),$$
  transformuje se zápis (5.15) do tvaru
  $$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \gamma = 0$$
  - označme $\kappa := \left| \gamma - \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \right|$
  - je-li $\kappa = 0$, je tvrzení dokázáno
  - je-li $\kappa \neq 0$, zavedeme jednoduchou transformaci $\vec{y} = \frac{\vec{w}}{\kappa}$, čímž obdržíme finální tvar rovnice kvadriky, a sice
  $$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 \pm 1 = 0$$
- Druhá alternativa: $s_1 + s_2 = r - 1$
  - za daných předpokladů platí $\lambda_r = 0$
  - opět zavedeme-li substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\,\vec{z}$, tentokrát definovanou vztahy
  $$w_i = \sqrt{|\lambda_i|} \left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right), \qquad i \in \widehat{r-1}$$
  $$w_r = z_r$$
  - kvadrika se pak transformuje do tvaru
  $$\sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} - 2\beta_r w_r + \gamma = 0$$
  - je-li $\beta_r = 0$, je situace triviálně řešitelná (viz výše), neboť výraz $\kappa := \left| \gamma - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \right|$ je pouhou konstantou
  - je-li $\beta_r \neq 0$, zavedeme substituci
  $$y_i = w_i, \qquad i \in \widehat{r-1}$$
  $$y_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \beta_r w_r - \frac{\gamma}{2}$$
  - ta potom vede k normálnímu tvaru
  $$\sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 - 2y_r = 0$$
  - tím je tato část tvrzení prokázána
- Třetí alternativa: $s_1 + s_2 < r - 1$

- za daných předpokladů platí $\lambda_{s_1+s_2+1} = \lambda_{s_1+s_2+2} = \ldots = \lambda_r = 0$
- opět zavedeme-li substituci $\vec{w} = \mathbb{P}\,\vec{z}$, tentokrát definovanou vztahy

$$w_i = \sqrt{|\lambda_i|}\left(z_i - \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right), \qquad i \in \widehat{s_1 + s_2}$$

$$w_i = z_i, \qquad i = s_1 + s_2 + 1, s_1 + s_2 + 2, \ldots, r$$

- kvadrika se pak transformuje do tvaru

$$\sum_{i=1}^{s_1+s_2} \operatorname{sgn}(\lambda_i) w_i^2 - \sum_{i=1}^{s_1+s_2} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} - \sum_{i=s_1+s_2+1}^{r} 2\beta_i w_i + \gamma = 0$$

- jsou-li všechna $\beta_{s_1+s_2+1}$, $\beta_{s_1+s_2+2}$, až β_r nulová, je důkaz zřejmý
- pokud tomu tak není, zavedeme substituci

$$y_i = w_i, \qquad i \in \widehat{s_1 + s_2}$$

$$y_{s_1+s_2+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s_1+s_2} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i} + \sum_{i=s_1+s_2+1}^{r} \beta_i w_i - \frac{\gamma}{2}$$

$$y_i = w_i, \qquad s_1 + s_2 + 1 < i < r$$

- tato potom vede k normálnímu tvaru

$$\sum_{i=1}^{s_1+s_2} \operatorname{sgn}(\lambda_i) y_i^2 - 2y_{s_1+s_2+1} = 0$$

- tím je důkaz zkompletován

5.2.14 Poznámka

Pouze upozorňujeme, že každá kvadrika může být převedena do takového tvaru, v němž první prvek s_1 vedlejší signatury kvadriky je větší nebo roven druhému prvku s_2. Této možnosti se v dalším textu přidržíme.

5.2.15 Definice

Rovnici (5.13), resp. (5.14) nazýváme *kanonickým*, resp. *normálním* tvarem kvadriky.

5.2.16 Poznámka

Z věty 5.2.13 mimo jiné vyplývá, že dvě kvadriky je možno vzájemně převést regulární transformací pouze tehdy, mají-li tytéž hlavní i vedlejší signatury. Z definice normálního tvaru kvadriky je kromě jiného zřejmé, že existuje pouze nepatrně mnoho těchto normálních tvarů. Vzhledem k platnosti zákona setrvačnosti tak lze každou kvadratickou plochu v dané dimenzi jednoznačně přiřadit k danému normálnímu tvaru. Proto má hlubší význam provést podrobné klasifikace těchto normálních tvarů kvadrik, a to zejména v prostorech $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$.

5.2.17 Poznámka

Klasifikace kuželoseček

normální tvar	název	$\mathrm{SG}(Q)$	$\mathrm{sg}(Q)$	regularita	centrálnost
$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	imaginární elipsa	$(3, 0, 0)$	$(2, 0, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	elipsa	$(2, 1, 0)$	$(2, 0, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	hyperbola	$(1, 2, 0)$	$(1, 1, 0)$	reg.	ano
$x_1^2 - 2x_2 = 0$	parabola	$(2, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	reg.	ne
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	imaginární různoběžky	$(2, 0, 1)$	$(2, 0, 0)$	sing.	ano
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	různoběžky	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	sing.	ano
$x_1^2 + 1 = 0$	imaginární rovnoběžky	$(2, 0, 1)$	$(1, 0, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 - 1 = 0$	rovnoběžky	$(1, 1, 1)$	$(1, 0, 1)$	sing.	ano
$x_1^2 = 0$	přímka	$(1, 0, 2)$	$(1, 0, 1)$	sing.	ano

5.2.18 Příklad

Zkoumejme nyní kvadratickou plochu

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 10 = 0 \tag{5.16}$$

zadanou v prostoru $\mathbf{R}^2$. Nejprve budeme zkoumat příslušnou kvadratickou formu $q(x_1, x_2)$. Jejím doplněním na kvadráty

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 =: y_1^2$$

zjišťujeme, že transformací, jež převod realizuje, je zobrazení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Inverzním zobrazením je pak

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme-li toto zobrazení do rovnice kvadriky, získáme tvar

$$Q(x_1, x_2) = y_1^2 - 4(y_1 - y_2) - 8y_2 + 10 = y_1^2 - 4y_1 - 4y_2 + 10 = 0,$$

který druhým doplněním na kvadráty upravíme do tvaru

$$Q(x_1, x_2) = \left(y_1 - 2\right)^2 - 4y_2 + 6 = \left(y_1 - 2\right)^2 - 2(2y_2 - 3) = z_1^2 - 2z_2 = 0.$$

Tvar $Q(z_1, z_2) = z_1^2 - 2z_2 = 0$ je tedy normálním tvarem zadané kvadriky a příslušným zobrazením, jež formu $Q(x_1, x_2)$ na normální tvar převádí, je

$$z_1 = x_1 + x_2 - 2$$

$$z_2 = 2x_2 - 3,$$

resp.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Z normálního tvaru je tedy zřejmé, že zkoumanou kuželosečkou je parabola, jejíž osa není rovnoběžná se souřadnými osami (viz obrázek).

5.2.20 Příklad

Nalezněme normální tvar a název kvadratické plochy

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0 \tag{5.17}$$

a transformaci $\vec{x} = \mathbb{M}\,\vec{z} + \vec{s}$, která ji na normální tvar převádí. Kvadratická forma

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2$$

je formou parabolickou. Pro první transformační vztahy platí

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 &= y_2 - y_3 \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Odtud

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2(y_2 - y_3) + 1 = y_1^2 - (y_2 - 1)^2 + 2y_3 + 1 = 0.$$

Normálním tvarem vyšetřované kvadriky je tedy $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$, čili se jedná o hyperbolický paraboloid. Druhé transformační vztahy jsou

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 - 1 \\ z_3 &= -y_3 - 1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_2 + 1 \\ y_3 &= -z_3 - 1. \end{aligned}$$

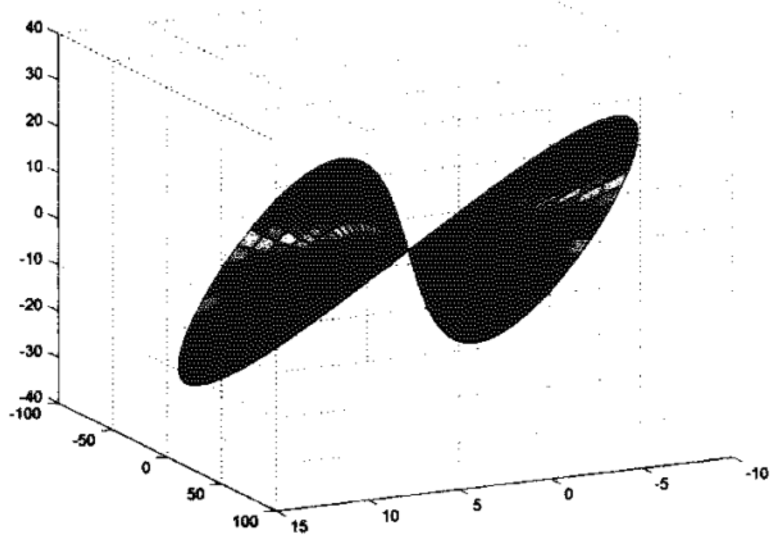
Celkem tedy

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{M}\,\vec{z} + \vec{s}.$$

Hyperbolický paraboloid $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$ lze vykreslit (např. v prostředí MATLAB) parametrickým vyjádřením

$$z_1 = \varrho\cos(\varphi), \qquad z_2 = \varrho\sin(\varphi), \qquad z_3 = \frac{\varrho^2}{2}\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) = \frac{\varrho^2}{2}\cos(2\varphi),$$

kde $\varrho \geqslant 0$ a $\varphi = \langle 0, 2\pi)$ jsou tzv. polární parametry.



Obrázek 5.6
Grafická vizualizace hyperbolického paraboloidu (5.17) v nediagonálním tvaru.

Obrázek výše byl získám užitím parametrických rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \\ \frac{\varrho^2}{2}\cos(2\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

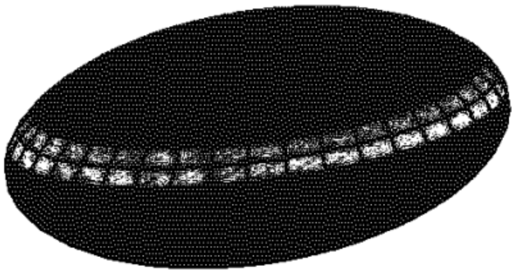
kde $\varrho \in \langle 0, 4\rangle$ a $\varphi = \langle 0, 2\pi)$.

5.2.21 Poznámka

V této poznámce uvedeme diagonální tvary a vyobrazení některých reálných kvadrik v $\mathbb{R}^3$. Kladné reálné konstanty a, b a c budeme nazývat *poloosami*. Podotýkáme, že dvojicí signatur $\mathrm{SG}(Q)$ a $\mathrm{sg}(Q)$ je kvadrika určena jednoznačně. Navíc platí, že zaměníme-li první a druhý člen u obou signatur, typ kvadriky se nemění. Tedy kvadriky se signaturami $\mathrm{SG}(Q_1) = (r_1, r_2, r_3)$, $\mathrm{sg}(Q_1) = (s_1, s_2, s_3)$ a $\mathrm{SG}(Q_2) = (r_2, r_1, r_3)$, $\mathrm{sg}(Q_2) = (s_2, s_1, s_3)$ jsou shodného typu. My se zde přidržíme úmluvy 5.2.14, a budeme tedy uvažovat pouze takové normální tvary, pro něž $s_1 \geqslant s_2$.

1. Elipsoid

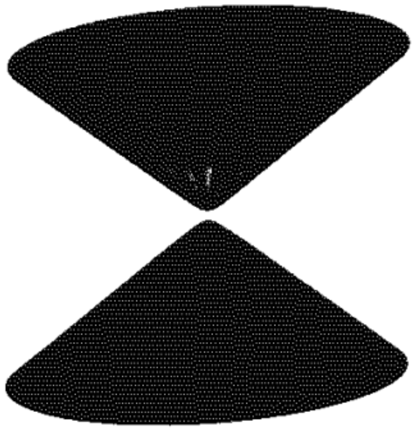
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$



Všemi třemi základními řezy (rovinami $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$) jsou elipsy.

2. Dvoudílný hyperboloid

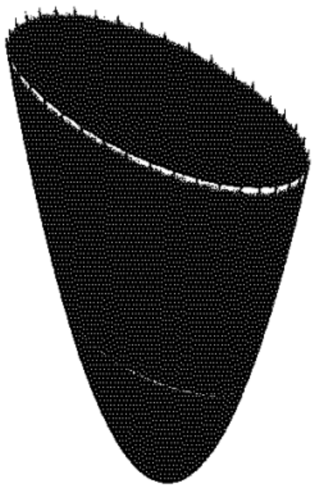
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$$



Základními řezy jsou dvě hyperboly a jedna elipsa. Řez rovinou $x_3 = d \in (-c, c)$ je prázdná množina.

3. Eliptický paraboloid

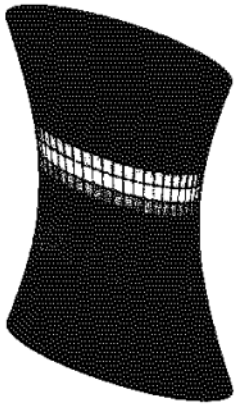
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 2\frac{x_3}{c} = 0$$



Základními řezy jsou dvě paraboly a jedna elipsa.

4. Jednodílný hyperboloid

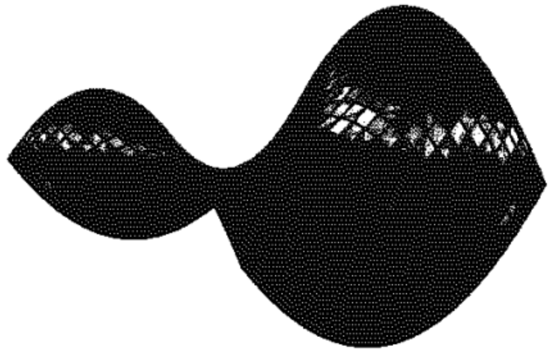
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

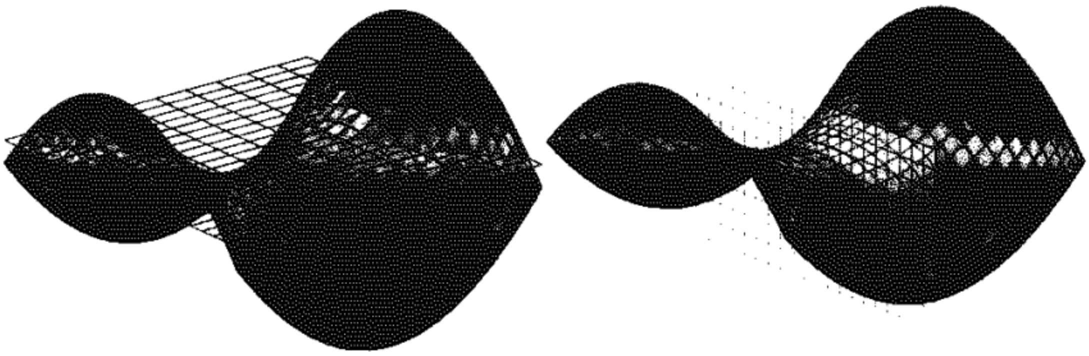


Základní řezy jsou dvě hyperboly a jedna elipsa.

5. Hyperbolický paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 2\frac{x_3}{c} = 0$$

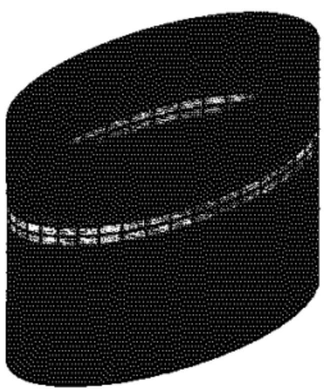




Základními řezy jsou dvě paraboly (obrázek vlevo) a jedna hyperbola (obrázek vpravo).

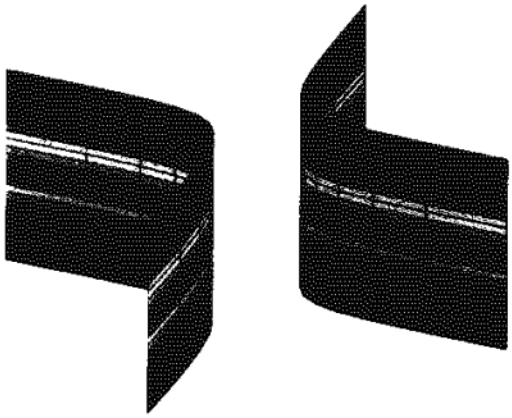
6. Eliptický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



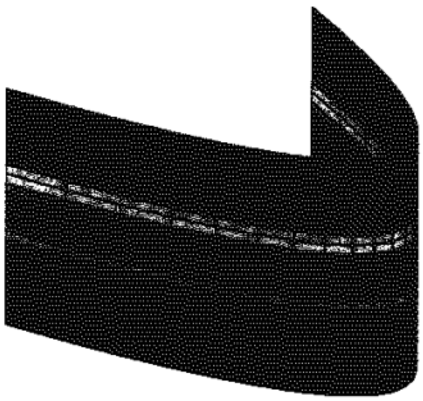
7. Hyperbolický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



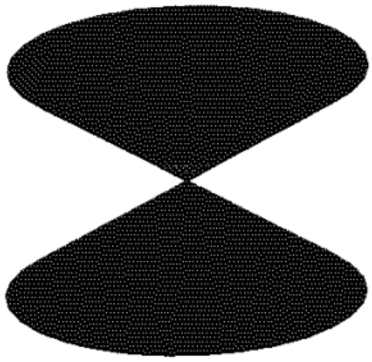
8. Parabolický válec

$$\frac{x_1^2}{a^2} - 2\frac{x_2}{b} = 0$$



9. Eliptický kužel

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$



5.2.22 Příklad

V tomto příkladě budeme demonstrovat užitečnost probírané teorie při řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Budeme hledat nelineární formální řešení diferenciální rovnice

$$y'(y^2 + 4xy - 4x^2) = 2(y^2 - 4xy - 4x^2)$$

a stanovíme, jakou křivku v $\mathbf{R}^2$ toto formální řešení představuje a kterými významnými body prochází. Jedná se o homogenní diferenciální rovnici, pro níž zavedeme substituci $y(x) = z(x)\,x$. Lineární řešení tentokrát hledat nebudeme. Zmíněnou substitucí přejde zadaná rovnice na tvar

$$z'x + z = 2\frac{z^2 - 4z - 4}{z^2 + 4z - 4}.$$

Po snadné separaci dostáváme

$$\frac{z^2+4z-4}{z^3+2z^2+4z+8}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{z^2+4z-4}{(z+2)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\frac{-1}{z+2}+\frac{2z}{4+z^2}\right)\mathrm{d}z = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\left(\frac{4+z^2}{2+z}\right) = -\ln(x)+\mathtt{C}$$

$$\frac{4+z^2}{2+z} = \frac{\mathtt{C}}{x}.$$

Nyní se navrátíme k původní funkci $y(x)$. Tak získáme rovnost

$$4x^2+y^2 = 2\mathtt{C}x+\mathtt{C}y,$$

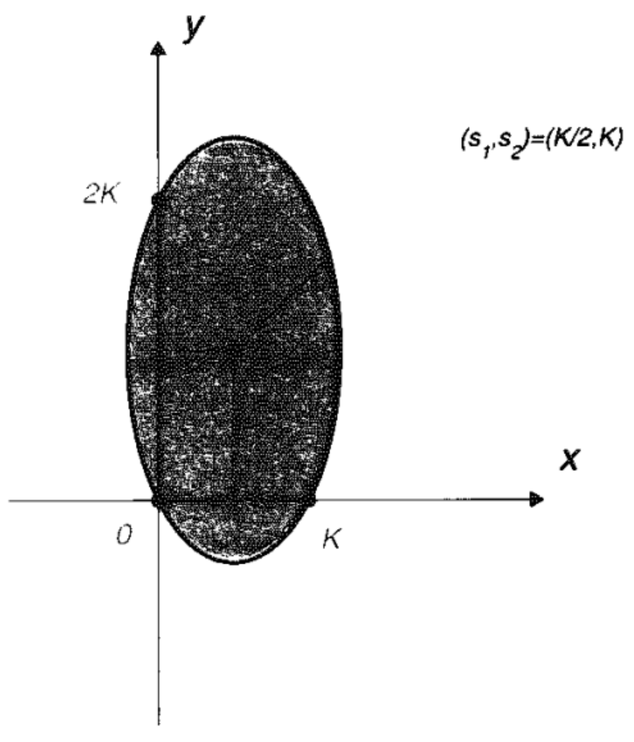
kterou po úpravě na čtverce redukujeme do tvaru

$$4\left(x-\frac{\mathtt{C}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\mathtt{C}}{2}\right)^2 = \frac{\mathtt{C}^2}{2}.$$

Zde je již patrno, že se bude jednat o elipsu. Označíme-li $\mathtt{K} := \mathtt{C}/2$, máme

$$\frac{\left(x-\frac{\mathtt{K}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}\mathtt{K}}{2}\right)^2}+\frac{(y-\mathtt{K})^2}{\left(\sqrt{2}\mathtt{K}\right)^2} = 1.$$

Detekovaná elipsa má střed v bodě $\vec{s} = (\mathtt{K}/2, \mathtt{K})$, velikosti poloos $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathtt{K}$, $b = \sqrt{2}\mathtt{K}$ a pro libovolné $\mathtt{K} \neq 0$ prochází počátkem souřadného systému (viz obrázek).



Obrázek 5.7
Graf formálního řešení rovnice $y'(y^2+4xy-4x^2) = 2(y^2-4xy-4x^2)$.

5.2.23 Poznámka

V této poznámce budeme klasifikovat regulární kvadriky v prostoru $\mathbf{R}^4$.

normální tvar	název	$\mathrm{SG}(Q)$	$\mathrm{sg}(Q)$	centrálnost
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+1=0$	imaginární eliptikon	$(5,0,0)$	$(4,0,0)$	ano
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-1=0$	eliptikon	$(4,1,0)$	$(4,0,0)$	ano
$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2+1=0$	dvoudílný eliptický hyperbolikon	$(4,1,0)$	$(3,1,0)$	ano
$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-1=0$	jednodílný eliptický hyperbolikon	$(3,2,0)$	$(3,1,0)$	ano
$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2+1=0$	hyperbolický hyperbolikon	$(3,2,0)$	$(2,2,0)$	ano
$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_4=0$	eliptický parabolikon	$(4,1,0)$	$(3,0,1)$	ne
$x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_4=0$	hyperbolický parabolikon	$(3,2,0)$	$(2,1,1)$	ne

5.3 Cvičení

Cvičení 5.1
Lagrangeovým algoritmem určete normální tvar a polární bázi kvadratické formy

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2.$$

Cvičení 5.2
Pro kvadratickou formu ze cvičení 5.1 určete polární bázi přímou metodou.

Cvičení 5.3
Nalezněte všechny hodnoty parametru $a\in\mathbf{R}$, pro něž je uvedená kvadratická forma a) pozitivně, b) negativně definitní.

$$q(\vec{x})=(1+a)x_1^2+(4a+1)x_2^2+(a-1)x_3^2+2(1-2a)x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

Cvičení 5.4
Pro kvadratickou formu

$$q(\vec{x})=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$$

stanovte signaturu, typ, regularitu, normální tvar, polární bázi a transformaci $\vec{x}=\mathbb{M}\vec{y}$, která danou kvadratickou formu převádí na normální tvar.

Cvičení 5.5
Rozhodněte, zda může vektor $\vec{u}=(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0)^\mathsf{T}$ být součástí polární báze kvadratické formy ze cvičení 5.4. Pokud ano, zkompletujte ji.

Cvičení 5.6
Pro která $\lambda\in\mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$q(\vec{x})=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

pozitivně definitní v $\mathbf{R}^3$?

Cvičení 5.7
Nalezněte regulární lineární transformaci, která převádí kvadratickou formu

$$q(\vec{x})=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$$

na kvadratickou formu

$$r(\vec{y})=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

Cvičení 5.8
Nalezněte polární bázi kvadratické formy $q(\vec{x})$ ze cvičení 5.7.

Cvičení 5.9
Nalezněte normální tvar kvadratické plochy

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 - \frac{1}{2} = 0$$

a transformaci $\vec{x} = \mathbb{M}\,\vec{z}$, která ji na normální tvar převádí.

Cvičení 5.10
Nalezněte normální tvar a typ kuželosečky

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0.$$

Cvičení 5.11
Nalezněte střed kuželosečky

$$25x_1^2 - 14x_1x_2 + 25x_2^2 + 64x_1 - 64x_2 - 224 = 0.$$

Cvičení 5.12
Určete typ a normální tvar následujících kvadrik:

- a) $x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2 + 1 = 0$
- b) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$
- c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 29 = 0$
- d) $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2 - 3 = 0$
- e) $2x_1^2 + 31x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 16$
- f) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1 = 2$
- g) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 = 1$
- h) $2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_2 + 2x_3 = 1$
- i) $4x_1^2 + 17x_2^2 + 30x_3^2 - 16x_1x_2 - 8x_1x_3 + 26x_2x_3 + 4x_2 + 20x_3 + 4 = 0$
- j) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 2x_2 = 1$
- k) $2x_1^2 + 19x_2^2 + 2x_3^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3 - 4x_2 - 16x_3 - 12 = 0$
- l) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0.$

Cvičení 5.13
Rozhodněte, zda je kvadrika

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 - 86x_1 - 88x_2 + 32x_3 + 161 = 0$$

regulární.

Cvičení 5.14
Zapište normální tvar kvadriky, mající hlavní signaturu $(3, 1, 0)$ a vedlejší $(2, 1, 0)$. Stanovte její název.

Cvičení 5.15
Pomocí metody řezů načrtněte všechny kvadriky v $\mathbf{R}^3$.

Cvičení 5.16
Nalezněte všechny polární báze kvadratické formy

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_4^2 + 6x_5^2 + 6x_1x_3 + 2x_1x_5 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + 2x_3x_5,$$

obsahující vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^\top$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $\vec{u}_3 = (-3, -1, 1, 0, 0)^\top$ a $\vec{u}_4 = (0, 1, 0, 1, 0)^\top$. Na základě znalosti jedné takové báze stanovte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{M}\,\vec{y}$, které danou kvadratickou formu převádějí na normální tvar, a tento zapište. Jaká je signatura uvedené formy?

Cvičení 5.17
Kvadrika s absolutním členem $c = -3$ je zadána pomocí matice své rozšířené kvadratické formy

$$\mathbb{A}_{(ex)} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 13 & -12 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 13 & 5 & 24 & -7 \\ -12 & -2 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Stanovte její normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Nalezněte polární bázi $\mathcal{B}_P$ v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.18
Nalezněte všechny hodnoty parametru $\lambda \in \mathbf{R}$, pro něž je kvadratická forma

$$x^2 + (\lambda^2+1)y^2 + (6\lambda - 5)z^2 + 2\lambda xy - 4xz - 2\lambda yz$$

pozitivně semidefinitní.

Cvičení 5.19
Pro kvadratickou formu

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

určete signaturu, typ, normální tvar a polární bázi obsahující vektor $(-1,0,0)^{\mathsf{T}}$, pokud existuje.

Cvičení 5.20
V prostoru $\mathbf{R}^3$ sestrojte polární bázi $\mathcal{B}_P$ generovanou kvadratickou formou

$$q(\vec{x}) = 9x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

splňující následující požadavky:

- $(-1,2,1) \in \mathcal{B}_P$
- $\exists \vec{u} \in \mathcal{B}_P : \big\langle \vec{u} \,|\, (1,0,0) \big\rangle_s = 0.$

Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$, které zadanou kvadratickou formu převádějí na její normální tvar. Tuto transformaci proveďte.

Cvičení 5.21
Nalezněte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro něž je zadaná kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = (1-a)x_1^2 - 4x_2^2 + (a^2 - 6a + 5)x_3^2 - 4x_1x_2 + 2(a-1)x_1x_3 + 4x_2x_3$$

negativně definitní.

Cvičení 5.22
Kvadrika s absolutním členem $c = 60$ je zadána pomocí matice své rozšířené kvadratické formy

$$\mathbb{A}_{(ex)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 16 & 2 \\ -2 & -3 & -8 & -13 \\ 16 & -8 & 60 & 8 \\ 2 & -13 & 8 & -35 \end{pmatrix}.$$

Stanovte její normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Nalezněte polární bázi $\mathcal{B}_P$ v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.23
Zapište normální tvar kvadriky, mající hlavní signaturu $(2,1,1)$ a vedlejší $(2,1,0)$. Uveďte její název.

Cvičení 5.24
Nechť je v množině $\mathbf{R}^4$ dána kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 18x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4.$$

Určete její typ, normální tvar, signaturu a typ definitnosti.

Cvičení 5.25
Nalezněte polární bázi kvadratické formy

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_1x_4 + 18x_2x_3 - 6x_2x_4 - 2x_3x_4,$$

obsahující vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$, $\vec{u}_2 = (-2, 1, 0, 0)^\mathsf{T}$ a $\vec{u}_3 = (-9, 3, 1, 0)^\mathsf{T}$. Na základě znalosti takové báze stanovte transformační vztahy $\vec{x} = \mathbb{M}\,\vec{y}$, které danou kvadratickou formu převádějí na normální tvar a tento zapište. Jaká je signatura uvedené formy?

Cvičení 5.26
Kterou z následujících kvadratických forem

- a) $y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + 2y_2y_3$,
- b) $y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3$,
- c) $-4y_1^2 + 8y_2^2 + 3y_3^2$

lze převést regulární lineární transformací na kvadratickou formu

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 16x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 12x_2x_3?$$

Cvičení 5.27
Pro která $a \in \mathbf{R}$ je kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + (4 - 2a - a^2)x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

pozitivně definitní v $\mathbf{R}^3$?

Cvičení 5.28
Dokažte, že otočení

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o úhel φ kolem osy x_3 je ortonormálním zobrazením ve třídimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^3$.

Cvičení 5.29
Rozhodněte o platnosti následující věty: Nechť je dána kvadratická forma $q(\vec{x})$ v $\mathbf{R}^r$ s nenulovou maticí $\mathbb{A}$. Nechť Δ_i $(i \in \hat{r})$ jsou hlavní minory matice $\mathbb{A}$. Pak $q(\vec{x})$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $\forall i \in \hat{r}:\ \Delta_i \geqslant 0$ a současně $\exists i \in \hat{r}:\ \Delta_i = 0$.

Cvičení 5.30
Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru β, pro které lze kvadratickou plochu

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 18x_3^2 + \beta^2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 6x_2x_4 + (2\beta - 16)x_3x_4 = 1$$

převézt regulární transformací na plochu $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$.

Cvičení 5.31
V závislosti na hodnotě reálného parametru μ rozhodněte, jaký útvar vymezuje rovnice

$$x^2 + 4x + 17z^2 - 2y + 6xz + 6z(3 - \mu) + 2y^2 - 2xy = 9\mu^2 + \mu - 5.$$

Cvičení 5.32
V závislosti na hodnotě reálného parametru μ rozhodněte o typu definitnosti kvadratické formy

$$-x_1^2 - (\mu^2 + 6\mu)x_2^2 - \mu^2 x_3^2 - 2\mu x_1 x_2 - 8x_1 x_3 - 20\mu x_2 x_3.$$

Cvičení 5.33
Pro kvadratickou plochu

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 24x_2^2 - 5x_3^2 + 10x_1x_2 - 4x_1x_3 - 14x_2x_3 + 4x_1 + 26x_2 - 24x_3 - 3 = 0$$

stanovte normální tvar, název, hlavní a vedlejší signaturu. Dále rozhodněte, je-li zadaná kvadrika centrální a regulární. Zdůvodněte! Nalezněte polární bázi v prostoru $\mathbf{R}^3$, která je generována příslušnou kvadratickou formou.

Cvičení 5.34
Pro kvadratickou plochu

$$x^2 + 8xy + 8xz + 4y^2 + 2yz + 4z^2 + ax + by + cz = 1$$

nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbf{R}$ tak, aby bod $(2, -4, 6)^\mathsf{T}$ byl jejím středem.

Cvičení 5.35
Nalezněte poslední vektor $\overline{\lambda} = (x_\lambda, y_\lambda, u_\lambda, v_\lambda)^\mathsf{T}$, jež společně s vektory $(2, 1, -1, 2)^\mathsf{T}$, $(3, 1, 0, 2)^\mathsf{T}$ a $(-1, 0, 0, -1)^\mathsf{T}$ vytváří polární bázi kvadratické formy

$$-2u^2 + 2uv + 5v^2 - 6vx + 2x^2 - 8uy - 4vy + 2xy - y^2.$$

Jaká je signatura zadané formy? Neopomeňte diskutovat řešitelnost úlohy.

Cvičení 5.36
Nalezněte všechny hodnoty parametru β, pro něž má kvadratická plocha

$$4x^2 + 4xy + \beta xz + 5y^2 - 10yz + 11z^2 - 4x + 2y + 2z = 7$$

střed v bodě $(2, 0, 1)^\mathsf{T}$.

Cvičení 5.37
Nalezněte transformační vztahy $x = x(r, s)$ a $y = y(r, s)$, které kvadratickou formu

$$q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$$

převádějí na kanonický tvar.

Cvičení 5.38
Nalezněte všechny hodnoty parametru ℓ, pro něž lze kvadratickou formu

$$q_1(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 8x_1x_3 + 38x_2x_3 - 33x_3^2$$

převést na formu

$$q_2(\vec{y}) = y_1^2 - 8y_1y_2 + 15y_2^2 + 6y_1y_3 - 24y_2y_3 + 4\ell y_2y_3 + (8 - \ell - 4\ell^2)y_3^2.$$

Zapište rovnice tohoto převodu.

Cvičení 5.39
Nalezněte regulární lineární transformaci, jež převádí kvadratickou formu

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 15x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$$

převést na formu

$$q(\vec{y}) = y_1^2 + 4y_1y_2 + 3y_2^2 + 6y_1y_3 + 14y_2y_3 + 8y_3^2 - 2y_1y_4 - 6y_2y_4 - 4y_3y_4.$$

Cvičení 5.40
Nalezněte všechny hodnoty parametru ℓ, pro něž je kvadratická forma

$$q(\vec{y}) = y_1^2 - 8y_1y_2 + 17y_2^2 + 6y_1y_3 - 26y_2y_3 + 11y_3^2 + 2y_1y_4 - 8y_2y_4 - 4\ell y_2y_4 + 6y_3y_4 + 4\ell y_3y_4 + (2 + \ell + 4\ell^2)y_4^2$$

pozitivně semidefinitní.

Cvičení 5.41
Nalezněte polární bázi kvadratické formy

$$x^2 - 4y^2 + 7z^2 + 12xy - 6xz - 18yz$$

takovou, že obsahuje vektor $\vec{u} = (7, 1, 4)^{\mathsf{T}}$ a jiný její vektor je kolmý (v obvyklém smyslu) k vektoru $(0, 1, 0)^{\mathsf{T}}$. Na základě znalosti hledané báze sestavte transformační vztahy a zapište normální tvar, na nějž tyto vztahy zadanou formu převádějí.

Cvičení 5.42
Klasifikujte regulární kvadriky v prostoru $\mathbf{R}^5$. Vytvořte vlastní názvosloví.

Kapitola 6

Metrické, normované a Hilbertovy prostory

V poslední kapitole těchto skript se seznámíme se základními stavebními kameny budování metrických prostorů. Zavedeme obecně pojaté pojmy skalárního součinu, normy ve vektorovém prostoru a nakonec také metriky. Tyto tři pojmy umožní nahlédnout mnohem obecněji na pojem okolí bodu a tudíž i na vlastnosti odvozené, jako například otevřenost či uzavřenost množiny. Abstraktnější pojetí vzdálenosti v metrických prostorech pak také povede k abstraktnější definici konvergence posloupností.

6.1 Výchozí nerovnosti

V prvním oddíle shrneme základní nerovnosti, jejichž platnost mnohokráte zužitkujeme při zavádění základních pojmů této kapitoly.

6.1.1 Úmluva

V celé kapitole budeme pod symbolem q rozumět reálné číslo takové, že $q \neq 0$ a $q \neq 1$. Symbol $\bar{q}$ pak bude reprezentovat číslo dané rovností

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{q}} = 1. \tag{6.1}$$

6.1.2 Věta

Nechť $a_1, a_2 \dots a_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{r} a_i^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nerovnost dokážeme indukcí
- úpravou

$$(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0$$

$$2a_1^2 + 2a_2^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

$$2(a_1^2 + a_2^2) \geqslant (a_1 + a_2)^2$$

  jsme prokázali platnost vztahu pro $r = 2$

- předpokládejme nyní, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

- pak ale

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + 2a_{n+1}^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_{n+1}^2 = 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2$$

- tím je tvrzení dokázáno

6.1.3 Věta

Nechť $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ a $q > 1$. Potom platí

$$ab \leqslant \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\bar{q}}}{\bar{q}}. \tag{6.2}$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když $a^q = b^{\bar{q}}$.

Důkaz:

- pro $b = 0$ nebo $a = 0$ je platnost tvrzení zřejmá
- uvažme tedy $a > 0$ a $b > 0$
- pro pevně zvolené $b > 0$ budeme vyšetřovat funkci

$$\varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\bar{q}}}{\bar{q}} - ab$$

- tato funkce je spojitá na intervalu $\langle 0, \infty)$ a v množině $(0, \infty)$ má derivaci

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a} = a^{q-1} - b$$

- uvažovaná funkce je tedy klesající na intervalu $\langle 0, b^{\frac{1}{q-1}}\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle b^{\frac{1}{q-1}}, \infty)$
- minimum funkce $\varphi(a)$ tedy nastává v bodě $a = b^{\frac{1}{q-1}}$, tj. pro taková a, b, pro něž $a^q = b^{\bar{q}}$
- hodnotou nalezeného minima je

$$\min_{a \in \mathbf{R}_0^+} \varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{a^q}{\bar{q}} - a \cdot a^{q-1} = a^q \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{q}} - 1\right) = 0$$

- tedy pro všechny ostatní hodnoty je $\varphi(a) > 0$, to jest platí vztah (6.2)
- tím je tvrzení dokázáno

6.1.4 Věta

Nechť $a > 0$, $b > 0$. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Potom platí

$$ab \geqslant \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\bar{q}}}{\bar{q}}. \tag{6.3}$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když $a^q = b^{\bar{q}}$.

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz úloha 6.1)

6.1.5 Věta – *Hölderova nerovnost*

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a $b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Nechť dále $q > 1$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{r} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}. \tag{6.4}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- pro $\vec{a} = \vec{0}$ nebo $\vec{b} = \vec{0}$ je platnost tvrzení zřejmá
- nenastane-li tento případ, položme pro $k \in \hat{r}$

$$A_k := \frac{a_k}{\left(\sum_{\ell=1}^{r} a_\ell^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \qquad B_k := \frac{b_k}{\left(\sum_{\ell=1}^{r} b_\ell^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}} \tag{6.5}$$

- potom platí

$$A_1^q + A_2^q + \ldots + A_r^q = B_1^{\tilde{q}} + B_2^{\tilde{q}} + \ldots + B_r^{\tilde{q}} = 1 \tag{6.6}$$

- z věty 6.1.3 plyne

$$A_k B_k \leqslant \frac{1}{q} A_k^q + \frac{1}{\tilde{q}} A_k^{\tilde{q}}$$

- odtud sečtením a užitím vztahu (6.6)

$$\sum_{k=1}^{r} A_k B_k \leqslant \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$$

- zpětným dosazením za A_k a B_k ze vztahu (6.5) potom dostáváme nerovnost (6.4), jež byla dokázat

6.1.6 Věta – *Hölderova nerovnost č. 2*

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a $b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou kladná reálná čísla. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{r} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}. \tag{6.7}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- je ponechán čtenáři (viz úloha 6.2)

6.1.7 Věta – *Minkovského nerovnost*

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a $b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou nezáporná reálná čísla. Nechť dále $q > 1$. Pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.8}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- pro $q = 1$ je platnost tvrzení zřejmá
- pro $q > 1$ užijeme rozpisu

$$\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q = \sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^{q-1} a_k + \sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^{q-1} b_k \tag{6.9}$$

- označme

$$c_k = (a_k + b_k)^{q-1} = (a_k + b_k)^{\frac{q}{\tilde{q}}}$$

- z Hölderovy rovnosti (6.4) pak dostáváme

$$\sum_{k=1}^{r} a_k c_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} c_k^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} = \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

- podobně

$$\sum_{k=1}^{r} b_k c_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} c_k^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} = \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

- z rovnosti (6.9) pak plyne

$$\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q = \sum_{k=1}^{r} c_k a_k + \sum_{k=1}^{r} c_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \left(\left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

- odtud

$$\left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{1-\frac{1}{\tilde{q}}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- jelikož ale stále platí vztah (6.1), a tedy $1 - \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q}$, plyne odsud dokazované tvrzení

6.1.8 Věta – *Minkovského nerovnost č.2*

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a $b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou kladná reálná čísla. Nechť dále $q < 1$ a $q \neq 0$. Pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^{r} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{r} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.10}$$

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz úloha 6.3)

6.1.9 Poznámka

Věty 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 a 6.1.8 lze zobecnit také pro komplexní čísla. Např. pro $q > 1$ a libovolná $\vec{a} \in \mathbf{C}^r$ a $\vec{b} \in \mathbf{C}^r$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{r} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} |b_k|^{\tilde{q}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}, \tag{6.11}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{r} |a_k + b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} (|a_k| + |b_k|)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{r} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.12}$$

6.1.10 Věta – *Buňakovského nerovnost*

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a $b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou libovolná komplexní čísla. Pak platí

$$\left|\sum_{k=1}^{r} a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{r} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{r} |b_k|^2. \tag{6.13}$$

Důkaz:

- tvrzení vyplývá z nerovnosti (6.11) po dosazení $q = 2$

6.2 Pre-Hilbertovy prostory

V této části kapitoly zavedeme obecný pojem skalárního součinu. Zobecníme tedy skalární součin vektorů $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$ a $\vec{y} \in \mathbf{R}^r$ zavedený na střední škole vztahem $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i$.

6.2.1 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle.|.\rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\mapsto\mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita:* pro všechna $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{V}$ a každé $\alpha\in\mathbf{C}$ platí $\langle\alpha\vec{x}+\vec{y}|\vec{z}\rangle=\alpha\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle+\langle\vec{y}|\vec{z}\rangle$
- *hermiticita:* pro všechna $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{V}$ platí $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle=\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle^*$
- *pozitivní definitnost:* pro všechna $\vec{x}\in\mathcal{V}$ platí $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\geqslant 0$ a navíc $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle=0$ právě tehdy, když $\vec{x}=\vec{0}$.

Dvojici $\{\mathcal{V},\langle.|.\rangle\}$ nazýváme *pre-Hilbertovým prostorem.*

6.2.2 Věta

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle.|.\rangle:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\mapsto\mathbf{C}$ skalárním součin. Pak pro všechna $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{V}$ a $\alpha\in\mathbf{C}$ platí rovnosti

$$\langle\vec{0}|\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}|\vec{0}\rangle=0,$$
$$\langle\vec{x}|\alpha\vec{y}+\vec{z}\rangle=\alpha^*\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle.$$

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz úloha 6.4)

6.2.3 Věta – *Cauchy-Buňakovského nerovnost*

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle.|.\rangle$ skalární součin na $\mathcal{V}$. Pak pro všechna $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{V}$ platí nerovnost

$$\left|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\right|\leqslant\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}. \tag{6.14}$$

Důkaz:

- triviálně ověříme, že pro $\vec{x}=\vec{0}$ platí v Cauchy-Buňakovského vztahu znaménko rovnosti
- podobně tomu bude, pokud je vektor $\vec{y}$ lineární kombinací vektoru $\vec{x}$, tj. když existuje $\lambda\in\mathbf{C}$ takové, že $\vec{y}=\lambda\vec{x}$
- pak totiž
$$|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|=|\langle\vec{x}|\lambda\vec{x}\rangle|=|\lambda^*|\,|\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle|=|\lambda|\,|\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle|$$
- a také
$$\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}=\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\lambda\vec{x}|\lambda\vec{x}\rangle}=\sqrt{\lambda\lambda^*\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}=\sqrt{|\lambda|^2\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle^2}=|\lambda|\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle$$
- zbývá tedy zkoumat případ lineárně nezávislých nenulových vektorů, kdy tedy pro všechna nenulová $\lambda\in\mathbf{C}$ platí nerovnost $\lambda\vec{x}-\vec{y}\neq\vec{0}$
- v tomto případě tedy z axiomu pozitivní definitnosti vyplývá, že
$$\langle\lambda\vec{x}-\vec{y}|\lambda\vec{x}-\vec{y}\rangle>0$$
- budeme nyní upravovat levou stranu této nerovnosti
- získáme tak vztah
$$|\lambda|^2\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle-\lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle-\lambda^*\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle>0. \tag{6.15}$$
- uvedený vztah platí pro všechna λ, my však zvolíme jedno speciálně vybrané, a sice
$$\lambda=\frac{\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}\qquad\Rightarrow\qquad\lambda^*=\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}.$$
- tyto dvě hodnoty dosadíme do vztahu (6.15) a získáme
$$\frac{|\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle|^2}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}-\frac{|\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle|^2}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}-\frac{|\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle|^2}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}+\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle>0$$
- odkud již plyne nerovnost
$$-\frac{|\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle|^2}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}+\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle>0,$$
- tím je nerovnost (6.14) dokázána

6.2.4 Poznámka

Pokusme se rozřešit otázku, za jakých předpokladů zadává hermitovská bilineární forma (viz také definice (5.1.6))

$$qq(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\,\vec{y}^{*} = (x_1,x_2,\ldots,x_r)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_r^* \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

skalární součin v $\mathbf{C}^r$. Axiom levé linearity je splněn triviálně. Splnění axiomu hermiticity je zaručeno tím, že v definičním vztahu (6.16) je druhý vektor zpracováván v komplexně sdružené podobě. Aby ale byl splněn požadavek pozitivní definitnosti, musí být přidružená kvadratická forma $q(\vec{x},\vec{x})$ pozitivně definitní. Jako důsledek tedy: Každá bilineární forma $qq(\vec{x},\vec{y})$ v $\mathbf{R}^r$, jejíž příslušná kvadratická forma $q(\vec{x})$ je pozitivně definitní, zadává na $\mathbf{R}^r$ skalární součin, tzv. $\mathbb{A}-$*skalární součin*

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle := qq(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\,\vec{y}. \tag{6.17}$$

Standardní skalární součin

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i = \vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{y} = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathbb{I}\,\vec{y} \tag{6.18}$$

je tedy speciálním případem obecného součinu (6.17). Budeme ho nadále značit symbolem $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle_s$.

6.2.5 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle .|.\rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\mapsto\mathbf{C}$ skalární součin. Řekneme, že vektory $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{V}$ jsou *ortogonální* a označíme $\vec{x}\perp\vec{y}$, platí-li pro ně rovnost $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$. Řekneme, že množina vektorů $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r\}$ je *ortogonální* ve $\mathcal{V}$, platí-li implikace

$$i\neq j \quad\Rightarrow\quad \vec{x}_i\perp\vec{x}_j.$$

6.2.6 Poznámka

Je-li $\mathbb{A}-$skalární součin zaveden maticovým vztahem (6.17), splývá pojem ortogonality z definice 6.2.5 s pojmem $q-$ortogonality z definice 5.1.31.

6.2.7 Poznámka

Platnost Cauchy-Buňakovského nerovnosti skýtá možnost zavést obecný úhel $\angle(\vec{x},\vec{y})$ mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ vektorového prostoru $\mathbf{C}^r$. Zavádíme ho definičním vztahem

$$\cos\big(\angle(\vec{x},\vec{y})\big) = \frac{\big|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\big|}{\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\,\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}}.$$

6.2.8 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{V}$ jsou libovolné dva nenulové vektory. Pak $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí rovnost

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle^2 = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\cdot\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle. \tag{6.19}$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve první implikaci
  - nechť tedy existuje $\lambda\in\mathbf{R}$ takové, že $\vec{y}=\lambda\vec{x}$
  - pak pro levou stranu dokazované rovnosti platí

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle^2 = \langle\vec{x}|\lambda\vec{x}\rangle^2 = \big(\lambda^*\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\big)^2 = \big(\lambda\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\big)^2 = \lambda^2\,\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle^2$$

- pro pravou stranu dokazované rovnosti platí

$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\cdot\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\cdot\langle\lambda\vec{x}|\lambda\vec{x}\rangle=\lambda\lambda^{*}\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle^{2}=\lambda^{2}\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle^{2}$$

- tím je první implikace dokázána

- dokážeme nyní druhou implikaci
  - nechť tedy platí rovnost (6.19)
  - jelikož $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou nenulové, platí také, že $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle\neq 0$ a také $\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle\neq 0$
  - uvažme sérii rovností

$$\langle\vec{y}-\lambda\vec{x}|\vec{y}-\lambda\vec{x}\rangle=\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle+\langle\vec{y}|-\lambda\vec{x}\rangle+\langle-\lambda\vec{x}|\vec{y}\rangle+\langle-\lambda\vec{x}|-\lambda\vec{x}\rangle=$$
$$=\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle-\lambda\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle-\lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\lambda^{2}\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle=\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle-2\lambda\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle+\lambda^{2}\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle$$

  - protože ale na reálném vektorovém prostoru platí rovnost $\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$, vychází odtud rovnost

$$\langle\vec{y}-\lambda\vec{x}|\vec{y}-\lambda\vec{x}\rangle=\left(\sqrt{\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}-\lambda\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}\right)^{2}.$$

  - jelikož $\sqrt{\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}$ a $\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$ jsou dvě reálná nenulová čísla, lze jistě nalézt takové $\lambda\neq 0$, že platí rovnost

$$\sqrt{\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle}=\lambda\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$$

  - pak ale pro ono vypočtené λ dostáváme

$$\langle\vec{y}-\lambda\vec{x}|\vec{y}-\lambda\vec{x}\rangle=0$$

  - ze třetího axiomu skalárního součinu odtud vyplývá, že $\vec{y}-\lambda\vec{x}=\vec{0}$, tedy že $\vec{y}$ je $\lambda-$násobkem vektoru $\vec{x}$, což završuje důkaz

6.2.9 Příklad

Uvažujme množinu $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ všech funkcí $f(x):\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ spojitých na intervalu $\langle a,b\rangle$. Není těžké prokázat, že $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$. Ukažme, že předpis

$$\langle f(x)|g(x)\rangle:=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.20}$$

zavádí na $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ skalární součin. Zvolme libovolně $f(x),g(x),h(x)\in\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ a $\alpha\in\mathbf{R}$. Snadno

$$\langle\alpha f(x)|g(x)\rangle=\int_a^b\alpha\,f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\langle f(x)|g(x)\rangle,$$

$$\langle f(x)+h(x)|g(x)\rangle=\int_a^b\big(f(x)+h(x)\big)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b h(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\langle f(x)|g(x)\rangle+\langle h(x)|g(x)\rangle.$$

Ověření hermiticity (zde symetrie) je také snadné:

$$\langle f(x)|g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\langle g(x)|f(x)\rangle.$$

Zbývá dokázat pozitivní definitnost. Splnění nerovnosti

$$\langle f(x)|f(x)\rangle=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$$

je zaručeno triviálně a implikace

$$\langle f(x)|f(x)\rangle=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0\qquad\Leftrightarrow\qquad f(x)=0$$

je důsledkem skutečnosti, že funkce $f^2(x)$ je jednak z definice prostoru $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ spojitá a také nezáporná. Integrál z takové funkce může být nulový pouze tehdy, je-li tato funkce nulová. Čili prostor

$$\{\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle},\langle f(x)|g(x)\rangle\}$$

je prostorem pre-Hilbertovým. Je ale důležité si uvědomit, že připustíme-li v předchozích úvahách nespojité funkce, situace se razantně změní (viz například [15]).

6.3 Normované prostory

Na obecném vektorovém prostoru zavedeme nyní zobecnění pojmu velikost vektoru.

6.3.1 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\|\,.\,\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost:* $\|\vec{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
- *homogenita:* pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda\,\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$.

Dvojici $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ nazýváme *lineárním normovaným prostorem*.

6.3.2 Příklad

Ukážeme, že pro libovolný prvek $x \in \mathcal{V}$ z normovaného prostoru $\mathcal{V}$ s normou $\|\,.\,\|$ platí nerovnost $\|\vec{x}\| \geqslant 0$. Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme $\lambda = -1$. Pak z axiomu homogenity plyne

$$\|-\vec{x}\| = |-1|\,\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|\,.$$

Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položme $y := -x$. Pak

$$\|\vec{x} + (-\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|-\vec{x}\|$$

a následně $0 \leqslant \|\vec{x}\|$.

6.3.3 Poznámka

Standardní normu vektoru $\vec{x} \in \mathbf{R}^r$, někdy také nazývanou normou *euklidovskou*, definujeme předpisem

$$\|\vec{x}\|_s := \sqrt{\sum_{k=1}^{r} x_i^2}.$$

Ovšem podobně jako byl zobecněn skalární součin, může být zobecněna také norma. K tomuto zobecnění nám poslouží následující věta.

6.3.4 Věta

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathrm{n}(\vec{x})$, definované předpisem

$$\mathrm{n}(\vec{x}) := \sqrt{\langle \vec{x}|\vec{x} \rangle}, \tag{6.21}$$

je normou na $\mathcal{V}$.

Důkaz:

- ověříme axiomy normy
- axiom nulovosti:
  - je-li $\vec{x} = \vec{0}$, pak
  $$\mathrm{n}(\vec{0}) := \sqrt{\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle} = 0$$
  - je-li $\mathrm{n}(\vec{x}) = 0$, pak tedy $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li $\vec{x} = \vec{0}$
  - tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána
- axiom trojúhelníkové nerovnosti:

- provedeme následující sérii úprav

$$\mathrm{n}^2(\vec{x}+\vec{y}) = \langle\vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\big(\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\big) + \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle \leqslant 2\big|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\big| + \mathrm{n}^2(\vec{x}) + \mathrm{n}^2(\vec{y})$$

- užijeme-li nyní Cauchy-Buňakovského nerovnosti (6.14), dostáváme

$$\mathrm{n}^2(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant 2\,\mathrm{n}(\vec{x})\mathrm{n}(\vec{y}) + \mathrm{n}^2(\vec{x}) + \mathrm{n}^2(\vec{y}) = \big(\mathrm{n}(\vec{x}) + \mathrm{n}(\vec{y})\big)^2$$

- tím je dokázáno, že

$$\mathrm{n}(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant \mathrm{n}(\vec{x}) + \mathrm{n}(\vec{y})$$

- axiom homogenity:
  - nechť tedy $\lambda \in \mathbf{C}$ je zvoleno libovolně
  - pak snadno

$$\mathrm{n}(\lambda\vec{x}) := \sqrt{\langle\lambda\vec{x}|\lambda\vec{x}\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda^*}\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2}\,\mathrm{n}(\vec{x}) = |\lambda|\,\mathrm{n}(\vec{x})$$

- tím je prokázáno, že zobrazení $\mathrm{n}(\vec{x})$ je normou na $\mathcal{V}$

6.3.5 Definice

Nechť $\langle.|.\rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathrm{n}(\vec{x})$ definované vztahem (6.21) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem*.

6.3.6 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle.|.\rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ platí tzv. *rovnoběžníková rovnost* tvaru

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}-\vec{y}|\vec{x}-\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle +$$
$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{x}|-\vec{y}\rangle + \langle-\vec{y}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle = 2\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + 2\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

6.3.7 Věta – *Pythagorova věta*

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle.|.\rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak platí implikace

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- jelikož $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$, plyne z hermiticity skalárního součinu, že také $\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle = 0$
- dále snadno

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle$$

- a protože prostřední dva členy tohoto součtu jsou nulové, platí

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

6.3.8 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dvě normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$. Řekneme, že norma $\|.\|_2$ *není silnější* než norma $\|.\|_1$, jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí

$$\|\vec{x}\|_2 \leqslant \alpha\,\|\vec{x}\|_1.$$

6.3.9 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a dvě normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$. Řekneme, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ jsou *ekvivalentní*, není-li jedna silnější druhé, t.j. existují-li $\alpha, \beta > 0$ taková, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí:

$$\|\vec{x}\|_2 \leqslant \alpha \|\vec{x}\|_1 \quad \wedge \quad \|\vec{x}\|_1 \leqslant \beta \|\vec{x}\|_2.$$

6.3.10 Věta

Je-li dimenze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ konečná, jsou každé dvě normy na $\mathcal{V}$ ekvivalentní.

<u>*Důkaz:*</u>

- viz [2]

6.3.11 Poznámka

Předešlá věta je v teorii normovaných prostorů naprosto zásadní, neboť umožňuje přenášet platnost jistých tvrzení mezi dvěma normovanými prostory $\{\mathcal{V}, \|.\|_1\}$ a $\{\mathcal{V}, \|.\|_2\}$. Platí-li totiž určité tvrzení o normě $\|.\|_1$ v normovaném prostoru $\{\mathbf{R}^r, \|.\|_1\}$, platí analogické tvrzení o normě $\|.\|_2$ v normovaném prostoru $\{\mathbf{R}^r, \|.\|_2\}$. Toho matematika hojně využívá především v důkazech vět z teorie funkce více proměnných a ve funkcionální analýze.

6.3.12 Poznámka

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Z věty 6.2.8 mimo jiné vyplývá následující skutečnost. Platí-li pro nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ rovnost

$$\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

pak existuje kladné λ tak, že $\vec{y} = \lambda\vec{x}$. Platí-li naopak rovnost

$$\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

pak je rovnost $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ splněna pro jisté záporné λ.

6.3.13 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť jsou dále zadány dva libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Pak $\vec{x}, \vec{y}$ jsou lineárně závislé (ve smyslu $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, kde $\lambda \geqslant 0$) právě tehdy, je-li splněna rovnost

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \tag{6.22}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- dokážeme nejprve první implikaci
  - nechť tedy existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ takové, že $\vec{y} = \lambda\vec{x}$
  - pak pro levou stranu rovnosti (6.22) máme

    $$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} + \lambda\vec{x}\| = |1 + \lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

  - pro pravou stranu vychází

    $$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + |\lambda| \|\vec{x}\| = (1 + |\lambda|)\|\vec{x}\|$$

  - nyní již snadno prokážeme, že rovnost $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$ nastává právě tehdy, když $\lambda \geqslant 0$
- dokážeme nyní druhou implikaci
  - nechť naopak platí rovnost (6.22), tj.

    $$\langle \vec{x} + \vec{y}|\vec{x} + \vec{y} \rangle = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

- jelikož tělesem v této větě je množina $\mathbf{R}$ reálných čísel, mění se hermiticita z definice skalárního součinu na obyčejnou symetrii, čili $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle$
- odtud ale

$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle + 2\,\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

- díky této rovnosti a větě 6.2.8 (včetně poznámky 6.3.12) odtud vyplývá, že existuje nezáporné λ takové, že $\vec{y} = \lambda\vec{x}$
- tím je důkaz zakončen

6.3.14 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť jsou dále zadány dva libovolné vektory $\vec{x},\vec{y} \in \mathcal{V}$. Pak $\vec{x},\vec{y}$ jsou lineárně závislé (přesněji $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, kde $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$) právě tehdy, je-li splněna rovnost

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| + \|\vec{x}+\vec{y}\|. \tag{6.23}$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve první implikaci
  - nechť tedy existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ takové, že $\vec{y} = \lambda\vec{x}$
  - pak pro pravou stranu rovnosti (6.23) máme

$$\|\vec{y}\| + \|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\lambda\vec{x}\| + \|\vec{x}+\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\| + |1+\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$$

  - nyní již snadno prokážeme, že rovnost $|\lambda| + |1+\lambda| = 1$ nastává právě tehdy, když $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$
- dokážeme nyní druhou implikaci
  - nechť naopak platí rovnost (6.23)
  - to mimo jiné znamená, že $\|\vec{x}\| \geqslant \|\vec{y}\|$
  - ze vztahu (6.23) máme

$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle\vec{y}|\vec{y}\rangle + 2\,\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\,\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = -\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

  - díky této rovnosti a větě 6.2.8 (včetně poznámky 6.3.12) odtud vyplývá, že existuje záporné λ takové, že $\vec{y} = \lambda\vec{x}$
  - aby byla splněna podmínka $\|\vec{x}\| \geqslant \|\vec{y}\|$, musí navíc platit $|\lambda| \leqslant 1$
  - tedy $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$
  - tím je důkaz zakončen

6.3.15 Příklad

Nechť je v prostoru $\mathbf{R}^2$ zaveden skalární součin předpisem

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = (x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Nechť jsou dány body $\vec{a} = (-1, 0)$ a $\vec{b} = (1, 0)$. Nalezněme všechny body $\vec{c} \in \mathbf{R}^2$ tak, aby trojúhelník $\triangle\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ byl pravoúhlý a měl pravý úhel při vrcholu $\vec{c}$. Úlohu budeme nejprve řešit pro standardní skalární součin. Označme tedy $\vec{x} := \vec{c} - \vec{a} = (c_1+1, c_2)$ a $\vec{y} := \vec{c} - \vec{b} = (c_1 - 1, c_2)$. Aby $\vec{x} \perp \vec{y}$ v klasickém smyslu, musí platit

$$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = c_1^2 + c_2^2 - 1 = 0,$$

tudíž všechny hledané body $\vec{c}$ leží na jednotkové *Thaletově* kružnici $c_1^2 + c_2^2 = 1$. V případě skalárního součinu (6.24) pak musí platit

$$(c_1+1, c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (c_1+1, c_2) \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 - 1 \\ 3c_1 + 10c_2 - 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy

$$c_1^2 + 10c_2^2 + 6c_1c_2 - c_1 - 3c_2 = 0.$$

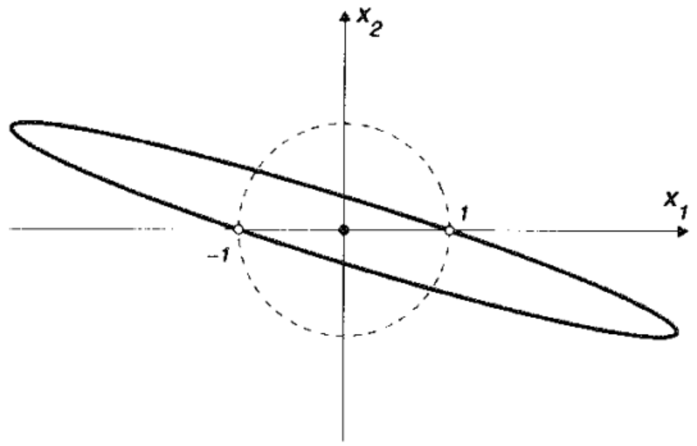
Jedná se o rovnici kvadratické plochy. Tvar vyšetříme standardním postupem.

$$Q(c_1, c_2) = c_1^2 + 10c_2^2 + 6c_1c_2 - c_1 - 3c_2 = (c_1 + 3c_2)^2 + c_2^2 = 0.$$

Vhodnými body $\vec{c}$ jsou tedy takové body, jež vyhovují rovnici

$$(c_1 + 3c_2)^2 + c_2^2 = 1,$$

jež představuje *Thaletovu elipsu* procházející body $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (viz obrázek).



Obrázek 6.1
Thaletova kružnice (čárkovaně) a Thaletova elipsa (plnou čarou).

6.3.16 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle.|.\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalární součin. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Řekneme, že množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r\}$ je *ortonormální* ve $\mathcal{V}$, je-li ortogonální a zároveň pro každé $i \in \hat{r}$ platí $\|\vec{x}_i\| = 1$.

6.3.17 Věta – Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle.|.\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalární součin. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť $\{\vec{y}_n \in \mathcal{V} : n \in \mathbf{N}\}$ je množina lineárně nezávislých vektorů z $\mathcal{V}$. Pak existuje ortonormální množina $\{\vec{x}_n \in \mathcal{V} : n \in \mathbf{N}\}$ vektorů z prostoru $\mathcal{V}$ taková, že pro každé $k \in \hat{n}$ platí

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $\vec{u}_1 = \vec{y}_1$
- jelikož $\|\vec{u}_1\| \neq 0$, lze definovat
$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$
- tedy $\|\vec{x}_1\| = 1$
- položme $\vec{u}_2 = \vec{y}_2 - \langle \vec{y}_2 | \vec{x}_1 \rangle \, \vec{x}_1$
- pak platí $\langle \vec{u}_2 | \vec{x}_1 \rangle = 0$

- protože jsou vektory $\vec{y}_1$ a $\vec{y}_2$ lineárně nezávislé, je $\|\vec{u}_2\| \neq 0$ a lze definovat

$$\vec{x}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}$$

- množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ je ortonormální a navíc

$$\left[\vec{y}_1, \vec{y}_2\right]_\lambda = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2\right]_\lambda.$$

- dále postupujeme indukcí
- nechť máme sestrojenu ortonormální množinu $S_m = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ takovou, že $\left[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m\right]_\lambda = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right]_\lambda$
- uvažme prvek

$$\vec{u}_{m+1} = \vec{y}_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle \vec{y}_{m+1} | \vec{x}_k \rangle \, \vec{x}_k$$

- zřejmě $\langle \vec{u}_{m+1} | \vec{x}_k \rangle = 0$ pro každé $k = \widehat{n}$
- protože dle předpokladů věty jsou vektory $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m, \vec{y}_{m+1}$ lineárně nezávislé, je $\vec{u}_{m+1} \neq \vec{0}$
- definujme vektor

$$\vec{x}_{m+1} = \frac{\vec{u}_{m+1}}{\|\vec{u}_{m+1}\|}$$

- pak je množina

$$S_{m+1} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}\}$$

  ortonormální ve $\mathcal{V}$ a navíc

$$\left[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m, \vec{x}_{m+1}\right]_\lambda = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{y}_m, \vec{y}_{m+1}\right]_\lambda.$$

- tím je důkaz proveden

6.3.18 Příklad

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor polynomů definovaných na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Nechť je ve $\mathcal{V}$ zadána spočetná množina

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \dots\}$$

lineárně nezávislých prvků z $\mathcal{V}$. Skalární součin libovolných prvků $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$ nechť je podle vztahu (6.20) na $\mathcal{V}$ zadán vztahem

$$\langle f(x) | g(x) \rangle := \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Budeme nyní hledat ortonormální ekvivalent k množině S. Užijeme Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces diskutovaný v předešlé větě. Jelikož

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1 | 1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} = 1,$$

je tedy první z hledaných funkcí funkce $\ell_1(x) = 1$. Dále protože

$$\langle x | \ell_1(x) \rangle = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

položíme $u_2(x) = x - \frac{1}{2}$. Pak tedy $\langle x - \frac{1}{2} | 1 \rangle = 0$. Jelikož $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$, je druhou z hledaných funkcí funkce $\ell_2(x) = \sqrt{3}\,(2x - 1)$. Dále

$$\langle x^2 | \ell_1(x) \rangle = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

$$\langle x^2 | \ell_2(x) \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 x^2 \, (2x - 1) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Proto dle Gramm-Schmidtovy procedury klademe

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2x - 1) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

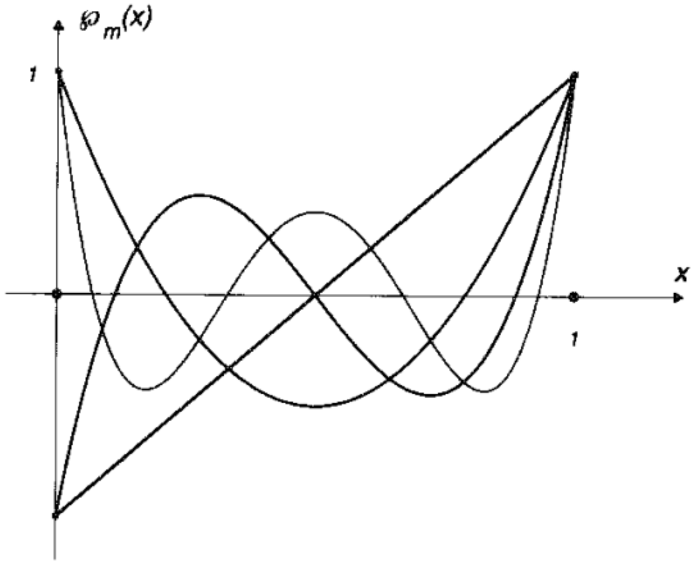
Z normalizace $\|u_3\| = \frac{1}{180}$ pak plyne, že $\ell_3(x) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x - 1)$. Analogicky $\ell_4(x) = \sqrt{7}\,(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)$, $\ell_5(x) = \sqrt{9}\,(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1)$ atd. Tímto způsobem obdržíme tzv. *Legendreovy polynomy* $\ell_m(x)$ vyhovující rovnosti

$$\int_0^1 \ell_m(x)\ell_k(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mk}.$$

Jejich nenormované průběhy

$$\wp_m = \frac{\ell_m(x)}{\sqrt{2m-1}}$$

vykreslujeme v následujícím grafu.



Obrázek 6.2
Nenormované Legendreovy polynomy.

6.3.19 Příklad

Ukážeme nyní, jakým způsobem zavést normu na prostoru matic. Nechť $\mathscr{M}$ je vektorový prostor všech čtvercových matic řádu r nad tělesem $\mathbf{R}$. Ukážeme, že zobrazení

$$\mathrm{n}(\mathbb{A}) := \max\{|\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\}$$

definuje na $\mathscr{M}$ normu. Rovnost $\mathrm{n}(\mathbb{A}) = 0$ nastává právě tehdy, když $\mathbb{A}$ je nulovou maticí. Nerovnost

$$\mathrm{n}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \leqslant \mathrm{n}(\mathbb{A}) + \mathrm{n}(\mathbb{B})$$

plyne z faktu, že maximálním elementem matice součtu může být součet maximálních elementů obou matic, a to ještě pouze v případě, že se tyto dva maximální elementy vyskytovaly na stejné pozici jak v matici $\mathbb{A}$, tak v matici $\mathbb{B}$. Dále pro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\mathrm{n}(\alpha\mathbb{A}) = \max\{|\alpha\,\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\} = |\alpha|\,\max\{|\mathbb{A}_{ij}| : i, j \in \widehat{r}\} = |\alpha|\,\mathrm{n}(\mathbb{A}).$$

O normu se tudíž jedná.

6.4 Metrické prostory

Třetí ze základních pojmů této kapitoly je pojem metriky, tj. zobecnění pojmu vzdálenost. Jemu bude věnována tato sekce.

6.4.1 Definice

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Zobrazení $\varrho : M \times M \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *metrikou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy metriky*:

- *nulovost:* $\varrho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$
- *symetrie:* pro všechna $x, y \in M$ platí $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $x, y, z \in M$ platí $\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

Dvojici $\{M, \varrho\}$ nazýváme *metrickým prostorem*.

6.4.2 Poznámka

Povšimněte si, že na rozdíl od skalárního součinu a normy je metrika definovaná na obecné množině, ne tedy nutně na prostoru vektorovém.

6.4.3 Příklad

Ukážeme, že pro libovolné prvky $x, y \in M$ z metrického prostoru M s metrikou ϱ platí nerovnost $\varrho(x, y) \geqslant 0$. Položme v trojúhelníkové nerovnosti $z := x$. Pak $\varrho(x, x) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, x)$ a následně za použití prvního a druhého axiomu získáváme $0 \leqslant \varrho(x, y)$.

6.4.4 Věta

Zobrazení zavedené předpisem

$$\tau(x, y) := \begin{cases} 0 & \ldots \quad x = y \\ 1 & \ldots \quad x \neq y \end{cases} \tag{6.25}$$

je metrikou na libovolné množině M.

<u>*Důkaz:*</u>

- triviální

6.4.5 Definice

Metriku zavedenou množině M vztahem (6.25) nazýváme *triviální metrikou*.

6.4.6 Věta

Nechť $p \geqslant 1$. Pak zobrazení zavedené předpisem

$$\varrho_p(\vec{x}, \vec{y}) := \left(\sum_{k=1}^{r} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.26}$$

je metrikou v $\mathbf{R}^r$.

<u>*Důkaz:*</u>

- vlastnosti nulovosti a symetrie jsou splněny triviálně
- trojúhelníková nerovnost je splněna podle vztahu (6.12), kde klademe $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$, a tedy $a_k + b_k = x_k - z_k$

6.4.7 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.26) nazýváme *$p-$metrikou*.

6.4.8 Věta

Zobrazení zavedené předpisem

$$\sigma(\vec{x},\vec{y}) := \max_{1\leqslant i\leqslant r} |x_i - y_i| \tag{6.27}$$

je metrikou v $\mathbf{R}^r$.

<u>*Důkaz:*</u>

- vlastnosti nulovosti a symetrie jsou opět splněny triviálně
- trojúhelníková nerovnost vyplývá z nerovností

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leqslant \sigma(\vec{x},\vec{z}) + \sigma(\vec{z},\vec{y})$$

- jelikož každý rozdíl $|x_i - y_i|$ je menší než $\sigma(\vec{x},\vec{z}) + \sigma(\vec{z},\vec{y})$ platí také, že

$$\max_{1\leqslant i\leqslant r} |x_i - y_i| \leqslant \sigma(\vec{x},\vec{z}) + \sigma(\vec{z},\vec{y}),$$

  což bylo dokázat

6.4.9 Definice

Metriku zavedenou na prostoru $\mathbf{R}^r$ vztahem (6.27) nazýváme $\sigma-$*metrikou.*

6.4.10 Poznámka

Vztah mezi $\sigma-$metrikou a $p-$metrikou může být vyjádřen rovnicí

$$\sigma(\vec{x},\vec{y}) = \lim_{p\to\infty} \varrho_p(\vec{x},\vec{y}).$$

6.4.11 Poznámka

Speciálními případy $p-$metriky jsou tzv. *síťová metrika* $(p=1)$

$$\varrho_1(\vec{x},\vec{y}) \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a klasická tzv. *euklidovská metrika* $(p=2)$

$$\varrho_e(\vec{x},\vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

6.4.12 Poznámka

Mezi síťovou, euklidovskou, obecnou $p-$metrikou a $\sigma-$metrikou platí následující vztah. Nechť $p > 2$. Pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{R}^r$ platí

$$\sigma(\vec{x},\vec{y}) \leqslant \varrho_p(\vec{x},\vec{y}) \leqslant \varrho_e(\vec{x},\vec{y}) \leqslant \varrho_1(\vec{x},\vec{y}).$$

Navíc také

$$\varrho_p(\vec{x},\vec{y}) \leqslant \sqrt[p]{r}\,\sigma(\vec{x},\vec{y}) \leqslant r\,\sigma(\vec{x},\vec{y}),$$

kde tentokrát $p \geqslant 1$.

6.4.13 Definice

Nechť $\{M,\varrho\}$ je metrický prostor s libovolnou metrikou $\varrho(x,y)$. Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny množiny M. *Vzdáleností množin* A a B rozumíme číslo

$$\mathrm{dist}(A,B) := \inf\{\varrho(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Vzdálenost bodu $a \in M$ *od množiny* $A \subset M$ definujeme jako

$$\mathrm{dist}(A,a) := \mathrm{dist}(A,\{a\}).$$

6.4.14 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ a norma $\|.\|$. Pak zobrazení $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ je metrikou na $\mathcal{V}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- je ponechán čtenáři (viz úloha 6.5)

6.4.15 Definice

Metriku zavedenou na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ vztahem $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ nazýváme *metrikou generovanou normou*.

6.4.16 Poznámka

Z definic 6.3.5 a 6.4.15 vyplývá, že základním stavebním kamenem (generátorem) zkoumaných prostorů je skalární součin. Pomocí něho lze totiž definovat normu a pomocí této normy pak metriku.

6.4.17 Poznámka

Z poznámky 6.3.11 plyne následující fakt pro metriky $\varrho, \widetilde{\varrho}$ generované po řadě normami $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$. Platí-li určité tvrzení o metrice ϱ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$, platí analogické tvrzení o metrice $\widetilde{\varrho}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \widetilde{\varrho}\}$.

6.4.18 Definice

Nechť jsou ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ dány dva body $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Pak *úsečkou* s krajními body $\vec{a}$ a $\vec{b}$ rozumíme množinu

$$\leftrightarrow \vec{a}\vec{b} := \left\{\vec{x} \in \mathcal{V} : \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}),\, t \in \langle 0, 1\rangle\right\}.$$

6.4.19 Definice

Nechť je zadán vektorový prostor $\mathcal{V}$. Řekneme, že množina $M \subset \mathcal{V}$ je je *konvexní* ve $\mathcal{V}$, jestliže pro každé dva body $\vec{x}, \vec{y} \in M$ platí $\leftrightarrow \vec{x}\vec{y} \subset M$.

6.4.20 Věta

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ a metrika $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ generovaná uvedenou normou. Nechť jsou dány body $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$ tak, že bod $\vec{z}$ leží na úsečce $\leftrightarrow \vec{x}\vec{y}$. Pak platí

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y}).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť $\vec{z} \in \leftrightarrow \vec{x}\vec{y}$
- pak existuje $t \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že $\vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})$
- tudíž
$$\varrho(\vec{x}, \vec{z}) = \|\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) - \vec{x}\| = \|t(\vec{y} - \vec{x})\| = |t| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\| = |t|\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = t\varrho(\vec{x}, \vec{y})$$
- dále
$$\varrho(\vec{y}, \vec{z}) = \|\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) - \vec{y}\| = \|(t-1)(\vec{y} - \vec{x})\| = |t-1| \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\| = |t-1|\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = (1-t)\varrho(\vec{x}, \vec{y})$$
- odtud pak
$$\varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y}) = t\varrho(\vec{x}, \vec{y}) + (1-t)\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{y})$$

6.4.21 Poznámka

Upozorňujeme, že předešlé tvrzení platí pouze pro metriky generované normou. Např. pro triviální metriku tvrzení neplatí, neboť pro body $\vec{x} = (0,0)$, $\vec{y} = (2,0)$ a $\vec{z} = (1,0)$, jež zjevně leží na jedné přímce, platí

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \neq \tau(\vec{x}, \vec{z}) + \tau(\vec{z}, \vec{y}) = 1 + 1 = 2.$$

6.4.22 Věta

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ a metrika $\varrho(\vec{x},\vec{y}) : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ generovaná uvedenou normou. Nechť jsou dány body $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathcal{V}$ tak, že platí rovnost

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \varrho(\vec{x},\vec{z}) + \varrho(\vec{z},\vec{y}).$$

Pak $\vec{z}$ leží na úsečce $\leftrightarrow \vec{x}\vec{y}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- z předpokladů věty platí
$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\|$$
- označme $\vec{a} := \vec{x}-\vec{y}$, $\vec{b} := \vec{z}-\vec{x}$
- pak tedy $\vec{z}-\vec{y} = \vec{b}+\vec{a}$ a platí $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| + \|\vec{b}+\vec{a}\|$
- podle věty 6.3.14 tedy existuje $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ takové, že $\vec{b} = \lambda\vec{a}$
- pak ale $\vec{z}-\vec{x} = \lambda(\vec{x}-\vec{y})$
- položme $t = -\lambda$
- pak $\vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y}-\vec{x})$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$, což bylo dokázat

6.4.23 Důsledek

Nechť je dán normovaný prostor $\{\mathcal{V}, \|.\|\}$ a metrika $\varrho(\vec{x},\vec{y}) : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ generovaná uvedenou normou. Nechť jsou dány body $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathcal{V}$. Pak

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \varrho(\vec{x},\vec{z}) + \varrho(\vec{z},\vec{y})$$

právě tehdy, když bod $\vec{z}$ leží na úsečce s krajními body $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

6.5 Hilbertovy prostory

Budeme nyní definovat tzv. Hilbertovy prostory, jejichž užitečnost zhodnotíme již v úvodních partiích funkcionální analýzy, dále při řešení parciálních diferenciálních rovnic nebo např. v základním kurzu kvantové mechaniky. Nejprve ale rozšíříme pojem konvergence do obecných metrických prostorů.

6.5.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M *konverguje* k prvku $a \in M$, a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Je-li splněna předchozí vlastnost, říkáme, že *posloupnost* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* rovnou prvku a. Posloupnost, která má, resp. nemá limitu nazýváme *konvergentní*, resp. *divergentní*.

6.5.2 Věta

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ. Pak každá posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M má nejvýše jednu limitu.

<u>*Důkaz:*</u>

- předpokládejme pro spor, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ a $a \neq b$
- z axiomu nulovost metriky vyplývá, že $\varrho(a,b) > 0$

- z faktu, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ plyne

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbf{N}): \qquad n > n_1 \Rightarrow \varrho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- z faktu, že $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ plyne

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2 \in \mathbf{N}): \qquad n > n_2 \Rightarrow \varrho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- položme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$
- pak pro jakékoli $n \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(a,b) \leqslant \varrho(a, x_n) + \varrho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- tedy $\varrho(a,b) < \varepsilon$ pro jakékoliv kladné ε
- tudíž $\varrho(a,b) = 0$, což je ale spor s předpokladem, že $a \neq b$

6.5.3 Příklad

Rozhodněme o limitě posloupnosti

$$\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou a v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ s triviální metrikou. V prvním případě lze limitu přímo vypočítat, jde totiž o standardní limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = (0,0).$$

Ověřme ovšem výsledek užitím definice. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geqslant n_0$ platilo

$$\varrho_e\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (0,0)\right) < \varepsilon,$$

tedy aby

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} < \epsilon,$$

tj. $n^2 > 2/\epsilon^2$. Za n_0 tedy stačí zvolit

$$n_0 := \left\lceil \frac{2}{\epsilon^2} \right\rceil,$$

kde $\lceil . \rceil$ reprezentuje horní celou část. V případě triviální metriky však tatáž posloupnost limitu nemá. Ukážeme, že např. bod $(0,0)$ onou limitou skutečně není. Kdyby byl, pak by např. pro $\varepsilon = 1/2$ muselo existovat $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geqslant n_0$ platilo

$$\tau\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (0,0)\right) < \epsilon,$$

tedy aby $1 < \epsilon$, což zcela jistě možné není. Na tomto místě je dobré si uvědomit, že v $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ konvergují pouze konstantní posloupnosti nebo neryze konstantní posloupnosti, tj. posloupnosti, které jsou konstantní až od jistého členu .

6.5.4 Příklad

V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ nalezněme limitu posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{4}{n}\right).$$

Pravděpodobnou hodnotou limity se zdá být

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}, \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\right) = (0,1,0) =: \vec{a}.$$

Ověřme to podle definice. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n \geqslant n_0$ platila nerovnost

$$\sigma(\vec{x}_n, \vec{a}) = \max\left\{\frac{1}{n} - 0, \frac{n+1}{n} - 1, \frac{4}{n} - 0\right\} < \epsilon,$$

tedy

$$\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{4}{n}\right\} = \frac{4}{n} < \varepsilon.$$

Za n_0 tedy postačí volit

$$n_0 := \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Limitou hledané posloupnosti tedy skutečně je bod $(0, 1, 0)$.

6.5.5 Definice

Nechť je dána posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z metrického prostoru $\{M, \varrho\}$. Řekneme, že prvek $a \in M$ je *hromadným prvkem (bodem)* posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ splňuje nerovnost $\varrho(x_n, a) < \varepsilon$ nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbf{N}$.

6.5.6 Věta

Je-li prvek $a \in M$ limitou posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, je prvek a také hromadným prvkem posloupnosti této posloupnosti.

Důkaz:

- plyne ihned z příslušných definic

6.5.7 Poznámka

Obrácené tvrzení obecně neplatí. Např. číslo -1 je hromadným bodem posloupnosti $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ v $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$, ale limitou není.

6.5.8 Věta

Je-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho_e\}$, pak má alespoň jeden hromadný prvek.

Důkaz:

- je ponechán čtenáři

6.5.9 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(x, y)$. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M je *cauchyovská* v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

6.5.10 Věta

Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je cauchyovská.

Důkaz:

- uvažme posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- předpokládejme tedy, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$
- z tohoto faktu plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $m \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \varrho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pak pro jakékoli $n \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(x_n, x_m) \leqslant \varrho(x_n, a) + \varrho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

6.5.11 Poznámka

Obrácené tvrzení k tvrzení 6.5.10 ale obecně neplatí. Mohou tedy existovat posloupnosti, jež jsou cauchyovské, ale přesto nejsou konvergentní. Takovou posloupností je například posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou. Snadno se lze přesvědčit, že se o cauchyovskou posloupnost skutečně jedná. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a zkoumejme rozdíl

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right| \leqslant \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| + \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \mathrm{e}\right|.$$

Protože ale $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, jsou výrazy na pravé straně stlačitelné libovolně blízko k nule, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \geqslant n_0$ a $m \geqslant n_0$ platí

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \mathrm{e}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right| < \varepsilon.$$

Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je zjevně posloupností racionálních čísel, ale limita v $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ neexistuje, neboť e je iracionální číslo.

6.5.12 Definice

Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(x, y)$ nazveme *úplným*, jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

6.5.13 Poznámka

Metrický prostor $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou není podle poznámky 6.5.11 úplný.

6.5.14 Poznámka

V předešlých sekcích jsem se seznámili s obecnými normami a obecnými metrikami. Přitom některé normy byly generovány skalárním součinem a jiné ne. Podobně také některé metriky byly generovány normami a jiné ne. My v dalším textu přejdeme ke speciálním prostorům, ve kterých bude zaveden obecný skalární součin, dále norma generovaná tímto součinem a metrika generovaná předešlou normou. Upozorňujeme ale, že mohou existovat i prostory jiného typu, v nichž je např. zavedena metrika nebo norma jiného typu. Zužujeme tedy oblast zkoumání na výše citované prostory, u nichž navíc budeme požadovat úplnost. Korektně je zavedeme v další definici.

6.5.15 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a $\varrho(x, y)$ metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc $\{\mathcal{V}, \varrho\}$ je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle, \|.\|, \varrho\}$$

nazýváme *Hilbertovým* prostorem.

6.5.16 Poznámka

Frekventovaným případem Hilbertova prostoru je prostor $\mathbf{C}^r$ uspořádaných r–tic komplexních čísel definovaný společně se skalárním součinem $\langle .|. \rangle$, jež je zaveden hermitovskou bilineární formou, tj. $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = qq(\vec{x},\vec{y})$, normou $\|\vec{x}\| = \sqrt{qq(\vec{x},\vec{x})}$ a metrikou $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{qq(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y})}$. Podobně také $\mathbf{R}^r$ s výše uvedenými vlastnostmi je Hilbertovým prostorem. Speciálně: je-li matice formy $qq(\vec{x},\vec{y})$ jednotková, vzniká tak nejznámější případ Hilbertova prostoru, prostor Euklidův.

6.5.17 Definice

Euklidovským r–*dimenzionálním prostorem* budem rozumět množinu uspořádaných r–tic $\mathbf{R}^r$ společně se standardním skalárním součinem

$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle_s := \sum_{i=1}^{r} x_i y_i,$$

normou generovanou tímto součinem, tj.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} x_i^2},$$

a metrikou generovanou touto normou, tj. euklidovskou metrikou

$$\varrho_e(\vec{x},\vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i)^2}.$$

Tento r–dimenzionální euklidovský prostor budeme označovat souhrnným symbolem $\mathbf{E}^r$.

6.5.18 Věta

Nechť jsou dány Hilbertovy prostoru $\mathcal{H}_1$a $\mathcal{H}_2$ zkonstruované nad stejným vektorovým prostorem $\mathcal{V}$, jež je konečnědimenzionální. Pak pro libovolnou posloupnost $\left(\vec{x}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathcal{V}$ jsou tvrzení $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_1$ a $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_2$ ekvivalentní.

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť dle předpokladu $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_1$
- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ taková, že $n \geqslant n_0$ platí

$$\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_1 < \varepsilon$$

- přitom symbol $\|.\|_1$ chápeme jako normu na $\mathcal{H}_1$
- z tvrzení věty 6.3.10 plyne, že norma $\|.\|_2$ na $\mathcal{H}_2$ je s normou $\|.\|_1$ ekvivalentní
- existuje tedy (podle definice ekvivalentních metrik) $\alpha \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in V$ platí nerovnost $\|\vec{x}\|_1 \leqslant \alpha\,\|\vec{x}\|_2$
- od výše řečeného n_0 tedy pro indexy n platí

$$\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_2 \leqslant \alpha\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_1 < \alpha\,\varepsilon =: \tilde{\varepsilon}$$

- to dokazuje, že $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ v $\mathcal{H}_2$
- dokázat druhou ekvivalenci je nyní již snadné

6.6 Klasifikace množin a jejich bodů

V této sekci zavedeme obecný pojem okolí a navazující topologické pojmy, jako jsou otevřená, uzavřená či kompaktní množina. Dále budeme klasifikovat vlastnosti bodů vzhledem k vybraným množinám a vyložíme základní pojmy teorie množin, jako jsou konečnost, spočetnost a nespočetnost.

6.6.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{E, \varrho\}$ s libovolnou metrikou ϱ a číslo $\varepsilon > 0$. Okolím o poloměru ε nebo *ε-okolím* bodu $x \in E$ (při metrice ϱ) rozumíme množinu

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in E : \varrho(x, y) < \varepsilon\} .$$

Redukovaným okolím bodu x nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^\star(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\} .$$

Je-li důležité zvýraznit, při jaké metrice se dané okolí chápe, užíváme symboly ${}^{(\varrho)}U_\varepsilon(x)$, resp. ${}^{(\varrho)}U_\varepsilon^\star(x)$.

6.6.2 Věta

Nechť ${}^{(\varrho)}U_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak pro každé dva body $x, y \in {}^{(\varrho)}U_\varepsilon(a)$ platí nerovnost

$$\varrho(x, y) < 2\varepsilon.$$

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 6.18)

6.6.3 Věta

Všechna okolí v Hilbertově prostoru jsou konvexními množinami.

Důkaz:

- označme $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor
- zvolme libovolně $a \in \mathcal{H}$ a $\varepsilon > 0$
- uvažujme okolí $U_\varepsilon(a)$ a dokažme jeho konvexitu
- proto zvolíme ve $U_\varepsilon(a)$ libovolně dva různé body y a z a dokážeme, že všechny body úsečky $\leftrightarrow \vec{yz}$ leží v okolí $U_\varepsilon(a)$
- předpokládejme pro spor, že existuje bod x úsečky $\leftrightarrow \vec{yz}$ tak, že

$$x \notin U_\varepsilon(a) \tag{6.28}$$

- nechť například $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(y, x)$
- díky předpokladu pro spor lze s jistotou tvrdit, že bod a jistě neleží na úsečce y, z
- kdyby totiž ležel, pak by pro libovolný bod x úsečky $\leftrightarrow ay$ (nebo $\leftrightarrow az$) podle důsledku 6.4.23 platilo $\varrho(a, x) + \varrho(x, y) = \varrho(a, y) < \varepsilon$
- odtud $\varrho(a, x) < \varepsilon$, resp. $x \in U_\varepsilon(a)$, což je spor z předpokladem (6.28)
- dokázali jsme tedy (opět aplikací tvrzení 6.4.23), že

$$\varrho(x, y) < \varrho(a, x) + \varrho(a, y)$$
$$\varrho(x, z) < \varrho(a, x) + \varrho(a, z)$$

- odečtením těchto vztahů získáváme

$$\varrho(x, y) - \varrho(x, z) < \varrho(a, y) - \varrho(a, z)$$

- po přičtení čísla $\varrho(x, z)$ k oběma stranám této nerovnosti odsud vychází

$$\varepsilon + \varrho(z, y) < \varepsilon + 2\varrho(x, z)$$
$$\varrho(z, y) < 2\varrho(x, z)$$

- posledně uvedený vztah společně s předpokladem $-\varrho(y, x) \leqslant -\varrho(x, z)$ vede ke sporu $\varrho(x, y) < \varrho(x, y)$
- proto $x \in U_\varepsilon(a)$

6.6.4 Poznámka

Zkoumejme podobu okolí v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s triviální metrikou. Zvolme tedy $\vec{a} \in \mathbf{R}^2$ a zkoumejme okolí ${}^{(\tau)}U_{1/2}(\vec{a})$, ${}^{(\tau)}U_1(\vec{a})$ a ${}^{(\tau)}U_2(\vec{a})$. Z definice triviální metriky vyplývá, že okolí ${}^{(\tau)}U_{1/2}(\vec{a}) = {}^{(\tau)}U_1(\vec{a}) = \{\vec{a}\}$ jsou jednoprvková, zatímco okolím bodu $\vec{a}$ o poloměru $\varepsilon = 2$ je celý prostor $\mathbf{R}^2$.

6.6.5 Příklad

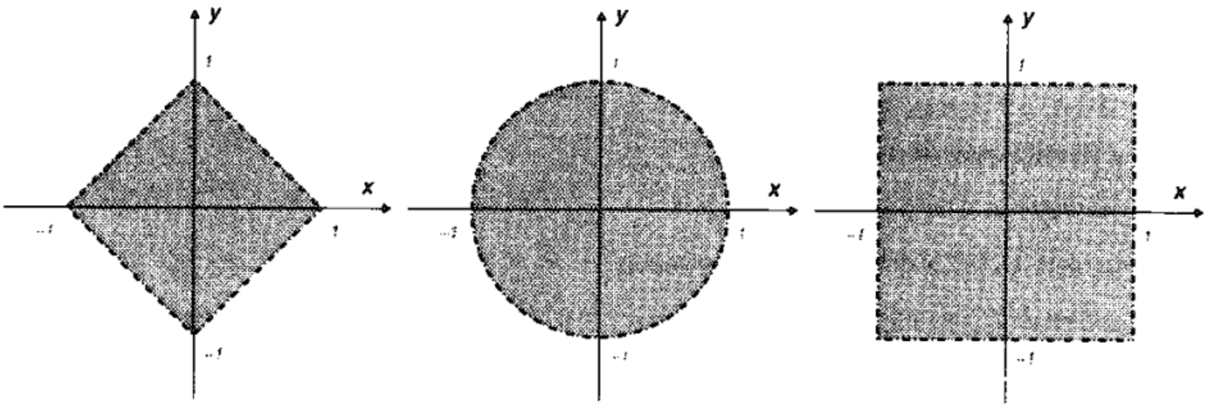
Zkoumejme tvary okolí v metrických prostorech $\mathbf{R}^2$ se síťovou metrikou, euklidovskou metrikou a $\sigma-$metrikou. Zvolme např. $\vec{a} = (0,0)$ a znázorněme $U_1(\vec{a})$ při zmíněných metrikách. Pro body síťového okolí podle definice síťové metriky platí

$$|x - 0| + |y - 0| < 1.$$

Z důvodu symetrie postačí vyšetřovat tvar okolí pouze v prvním kvadrantu, kde platí $y < 1 - x$, tj. množinou ${}^{(\varrho_1)}U_1(\vec{a})$ je otevřený čtverec (viz obrázek dole vlevo). Pro body euklidovského okolí musí platit $x^2 + y^2 < 1$ a jedná se tudíž o otevřený kruh. Nakonec pro body $\sigma-$okolí platí

$$\max\{|x|, |y|\} < 1,$$

tj. množinou ${}^{(\sigma)}U_1(\vec{a})$ je otevřený čtverec (viz obrázek dole vpravo).



Obrázek 6.3
Síťové okolí, euklidovské okolí a $\sigma-$okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 1$.

Přejmeme-li k $p-$metrice, kde $p = 4$, budou body množiny ${}^{(\varrho_4)}U_1(\vec{a})$ vyhovovat rovnici $x^4 + y^4 < 1$, tj. v prvním kvadrantu má hranice zkoumaného okolí rovnici

$$y = \sqrt[4]{1 - x^4}$$

(viz obrázek 6.4 vpravo). Připomínáme, že definiční vztah (6.26) není pro $p < 1$ metrikou (viz obrázek 6.4 vlevo). Demonstrujme to na příkladě $p = 1/2$ a $\vec{x} = (0,4)$, $\vec{y} = (4,0)$ a $\vec{z} = (0,0)$. Za těchto okolností by platilo

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \left((x_1 - y_1)^{1/2} + (x_1 - y_1)^{1/2}\right)^2 = (2+2)^2 = 16$$

a zároveň

$$\varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{y}, \vec{z}) = 4 + 4 = 8.$$

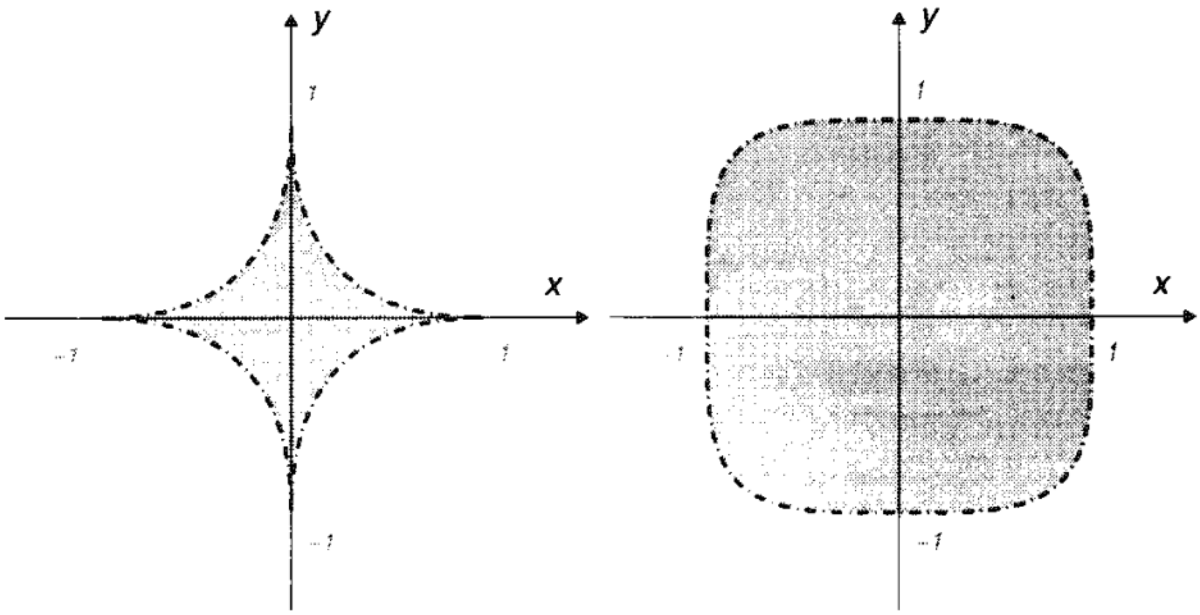
Tím pádem by ale neplatila trojúhelníková nerovnost, neboť

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) > \varrho(\vec{x}, \vec{z}) + \varrho(\vec{z}, \vec{y}).$$

To odporuje třetímu axiomu metriky. Tedy množina

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt[4]{|x|} + \sqrt[4]{|y|} < 1\right\}$$

(viz obrázek vlevo dole) není okolím.



Obrázek 6.4
Grafická reprezentace ϱ_p–okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 1$. Vlevo $p = 1/2$ (nejedná se o okolí), vpravo $p = 4$ (jedná se okolí).

Z poznámky 6.4.12 vyplývá, že pro jakékoliv $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$, $\varepsilon > 0$ a $p > 2$ platí série inkluzí

$$^{(\varrho_1)}U_\varepsilon(\vec{a}) \subset {}^{(\varrho_e)}U_\varepsilon(\vec{a}) \subset {}^{(\varrho_p)}U_\varepsilon(\vec{a}) \subset {}^{(\sigma)}U_\varepsilon(\vec{a}).$$

6.6.6 Úmluva

V celé sekci předpokládáme, že je dán metrický prostor $\{E, \varrho\}$ s obecnou metrikou ϱ.

6.6.7 Definice

Bod $x \in M$ nazveme *vnitřním bodem množiny* $M \subset E$, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(x)$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů M nazýváme *vnitřkem množiny* M a značíme M°. Bod $x \in E$ nazveme *hraničním bodem* množiny M, jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(x)$ existují $y, z \in U_\varepsilon(x)$ takové, že $y \in M$ a zároveň $z \notin M$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí množiny* M a značíme $\mathrm{bd}(M)$. Množinu $\overline{M} := M \cup \mathrm{bd}(M)$ nazýváme *uzávěrem množiny* M.

6.6.8 Definice

Řekneme, že množina M je *otevřená* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže $M = M^\circ$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže $M = \overline{M}$.

6.6.9 Poznámka

Pojmy otevřenosti a uzavřenosti nejsou z matematického hlediska doplňkové. Existují totiž množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené. Jde například o množinu $\mathbf{R}$ v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$. Navíc významně záleží na tom, jakou metriku uvažujeme. Tak zvaný uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ je v prostoru $\mathbf{R}$ s euklidovskou metrikou skutečně uzavřený, ale v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou metrikou je otevřený i uzavřený zároveň.

6.6.10 Věta

Nechť je množina M otevřená v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak $E \setminus M$ je v $\{E, \varrho\}$ uzavřenou množinou. Nechť je množina N uzavřená v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak $E \setminus N$ je v $\{E, \varrho\}$ otevřenou množinou.

Důkaz:

- postačí si uvědomit, že $\mathrm{bd}(M) = \mathrm{bd}(E \setminus M)$
- podobně $\mathrm{bd}(N) = \mathrm{bd}(E \setminus N)$
- jelikož pro jakoukoli množinu X platí rovnost $\mathrm{bd}(X) \cap X^\circ = \emptyset$, je tvrzení dokázáno

6.6.11 Věta

Nechť A a B jsou otevřené množiny v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak také $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou v $\{E, \varrho\}$ otevřené.

Důkaz:

- Pro průnik:
  - nechť $A = A^\circ$ a $B = B^\circ$
  - zvolme $x \in A \cap B$, tedy $x \in A$ a $x \in B$
  - jelikož $A = A^\circ$, existuje $\varepsilon_1 > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_1}(x) \subset A$
  - jelikož $B = B^\circ$, existuje $\varepsilon_2 > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_2}(x) \subset B$
  - položme $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$
  - pak $U_\varepsilon(x) \subset (A \cap B)$
  - x je tedy vnitřním bodem průniku $A \cap B$
- Pro sjednocení:
  - nechť $A = A^\circ$ a $B = B^\circ$
  - zvolme $x \in A \cup B$, tedy $x \in A$ nebo $x \in B$
  - nechť tedy např. $x \in A$
  - pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U_\varepsilon(x) \subset A \subset (A \cup B)$
  - našli jsme tedy okolí bodu x, které celé leží ve sjednocení $A \cup B$
  - tím je důkaz proveden

6.6.12 Věta

Nechť A a B jsou uzavřené množiny v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak také $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou v $\{E, \varrho\}$ uzavřené.

Důkaz:

- plyne z vět 6.6.10 a 6.6.11

6.6.13 Důsledek

Sjednocení a průnik konečného počtu otevřených množiny je množina otevřená. Sjednocení a průnik konečného počtu uzavřených množin je množina uzavřená.

6.6.14 Věta

Sjednocení spočetného počtu otevřených množiny je množina otevřená. Průnik spočetného počtu uzavřených množin je množina uzavřená.

Důkaz:

- je ponechán čtenáři (viz cvičení 6.11)

6.6.15 Poznámka

Povšimněte si například, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \langle 0, 1 \rangle, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle = (0, 1).$$

6.6.16 Věta

Každé okolí je otevřenou množinou.

<u>*Důkaz:*</u>

- uvažme bod a a jeho okolí $U_\varepsilon(a)$
- zvolme libovolně $x \in U_\varepsilon(a)$ a označme $\mu := \varrho(a, x)$
- je-li $\mu = 0$, pak přímo $U_\varepsilon(x)$ je oním hledaným okolím, které celé leží v $U_\varepsilon(a)$
- je-li $\mu \neq 0$, pak položme $\delta := \varepsilon - \mu > 0$
- tvrdíme, že $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$ a to dokážeme
- vezměme $c \in U_\delta(x)$ a ukažme, že $c \in U_\varepsilon(a)$
- z axiomu trojúhelníkové nerovnosti metriky platí

$$\varrho(a, c) < \varrho(a. x) + \varrho(x, c) < \mu + \delta = \varepsilon$$

- všechny body c tudíž leží v $U_\varepsilon(a)$, a tedy skutečně $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$

6.6.17 Důsledek

Hranicí okolí ${}^{(\varrho)}U_\varepsilon(a)$ je množina $\{x \in E : \varrho(x, a) = \varepsilon\}$.

6.6.18 Poznámka

V Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ konečné dimenze jsou podle věty 6.3.10 každé dvě normy ekvivaletní. Proto také vlastnosti otevřenosti či uzavřenosti zůstávají při změně výchozího skalárního součinu, který generuje normu i metriku na $\mathcal{H}$, v platnosti.

6.6.19 Definice

Bod $x \in M$ nazveme *izolovaným bodem* množiny M, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(x)$ tak, že

$$U_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}.$$

Bod $x \in M$ nazveme *hromadným bodem* množiny M, není-li v ní bodem izolovaným. Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme *derivací množiny* M a značíme $\mathrm{der}(M)$.

6.6.20 Definice

Množina $M \subset E$ se nazývá *omezenou* v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, jestliže existuje $y \in E$ a existuje $\mathsf{K} \in \mathbf{R}^+$ tak, že nerovnost $\varrho(x, y) \leqslant \mathsf{K}$ platí pro všechna $x \in M$.

6.6.21 Poznámka

Při zjišťování, zda je množina M omezená, je opět zcela zásadní, při jaké metrice tuto vlastnost vyšetřujeme. Například interval $(0, \infty)$ zcela jistě neomezený v $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$, je v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou omezený, neboť například pro $y = 0$ a $\mathsf{K} = 2$ je nerovnost $\varrho(x, y) \leqslant \mathsf{K}$ splněna pro všechna $x \in (0, \infty)$.

6.6.22 Definice

Řekneme, že množina M je *kompaktní* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže z každé posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků $x_n \in M$ lze vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží M.

6.6.23 Příklad

Množina $(0, 2\rangle$ není kompaktní v euklidovském prostoru $\mathbf{E}^1$, neboť z posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ nelze vybrat žádnou jinou konvergentní posloupnost než takovou, jejíž limitou v $\{\mathbf{E}^1, \varrho_e\}$ je nula. Nula ale do množiny $(0, 2\rangle$ nepatří, tudíž $(0, 2\rangle$ není v $\{\mathbf{E}^1, \varrho_e\}$ kompaktní.

6.6.24 Věta

Nechť M je kompaktní množina v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Pak M je omezená a uzavřená v $\{E, \varrho\}$.

Důkaz:

- nechť tedy M je kompaktní v $\{E, \varrho\}$
- Dokážeme nejprve omezenost M :
  - zvolme $y \in E$ libovolně
  - předpokládejme pro spor, že M není omezená
  - pak pro každé $\mathtt{K} > 0$ existuje jisté $x \in M$ tak, že $\varrho(x, y) > \mathtt{K}$
  - vyberme touto procedurou pro každé $\mathtt{K}$ rovné po řadě hodnotám $1, 2, 3, \dots$ takové x_1, x_2, $x_3, \dots$
  - pak jistě $\lim_{n\to\infty} x_n$ neexistuje a nelze z ní ani vybrat žádnou nekonečnou podposloupnost $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ takovou, aby pro nějaké $a \in E$ od jistého indexu platilo $\varrho(x_m, a) < \varepsilon$
  - to je ale spor
- Dokážeme dále uzavřenost M :
  - předpokládejme pro spor, že M není uzavřená
  - pak ale jistě existuje nějaké $a \in \mathrm{bd}(M)$ takové, že $a \notin M$
  - a je tedy v M hraničním bodem a tudíž v každém jeho okolí lze nalézt nějaký bod z M
  - nechť tedy x_ℓ je libovolný bod ležící v $U_\varepsilon(a) \cap M$, kde $\varepsilon = \ell^{-1}$ pro $\ell = 1, 2, 3, \dots$
  - posloupnost $(x_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ je zjevně konvergentní a platí $\lim_{\ell\to\infty} x_\ell = a$, ale $a \notin M$
  - z posloupnosti $(x_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ již nelze vybrat žádnou podposloupnost, jež by měla jinou limitu než a
  - to je očekávaný spor

6.6.25 Poznámka

Obrácené tvrzení k předešlému neplatí. Existuje tedy množina, jež je omezená a uzavřená v $\{E, \varrho\}$, ale přesto není kompaktní. Uvažme například $M = \langle 0, 1)$ v prostoru $\mathbf{R}$ s triviální metrikou. M je zcela jistě omezená a uzavřená, neboť všechny množiny z $\{\mathbf{R}, \tau\}$ tyto dvě vlastnosti splňují. Z posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ však nelze v $\{\mathbf{R}, \tau\}$ vybrat konvergentní. Za určitých okolností však obrácené tvrzení k předešlému platí, jak uvidíme v následující větě.

6.6.26 Věta

Množina M je kompaktní v Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^r$ právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz:

- díky ekvivalentnosti všech norem v Hilbertově prostoru postačí dokázat, že dané tvrzení platí v eukli-dovském prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho_e\}$
- implikace zprava doleva je univerzální a byla již dokázána ve větě 6.6.24
- předpokládejme tedy, že M je omezená a uzavřená v $\{\mathbf{R}^r, \varrho_e\}$
- vyberme libovolně posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků $x_n \in M$
- je-li $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, označme $a := \lim_{n\to\infty} x_n$
- ukažeme, že $a \in M$
- kdyby $a \notin \overline{M}$, pak by jistě existovalo okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$
- pak by ale a jistě nemohlo být limitou posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- proto $a \in \overline{M}$, a protože $M = \overline{M}$, je $a \in M$

- je-li $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentní, označme a libovolný hromadný bod posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- jelikož M je omezená, je také posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená, a tudíž podle věty 6.5.8 má jistě hromadný bod, který leží v $\mathbf{R}^r$
- dále analogicky
- kdyby $a \notin \overline{M}$, pak by jistě existovalo okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$
- pak by ale a jistě nemohlo být hromadným bodem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$
- proto $a \in \overline{M}$, a protože $M = \overline{M}$, je $a \in M$
- tím je důkaz dokončen

6.6.27 Definice

Nechť jsou dány dvě množiny M_1 a M_2 v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$. Řekneme, že množiny M_1, M_2 jsou *oddělené* v $\{E, \varrho\}$, jestliže

$$M_1 \cap \overline{M}_2 = \emptyset \quad \wedge \quad \overline{M}_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

6.6.28 Poznámka

Je třeba si uvědomit, že pojem oddělené množiny je silnějším pojmem než pojem disjunktní množiny. Tedy každé dvě oddělené množiny jsou nutně disjunktní, ale ne každé dvě disjunktní množiny jsou nutně oddělené. Navíc také záleží na tom, při jaké metrice vlastnost oddělenosti zkoumáme.

6.6.29 Definice

Řekneme, že množina M je *souvislá* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, jestliže neexistují žádné dvě neprázdné oddělené množiny $M_1, M_2 \subset E$ takové, že $M_1 \cup M_2 = M$.

6.6.30 Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}^r$ je *oblastí* v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$, je-li v $\{E, \varrho\}$ otevřená a souvislá. Uzávěr oblasti pak nazýváme *uzavřenou oblastí.*

6.6.31 Definice

Řekneme, že množiny A, B jsou *ekvivalentní* a označíme symbolem $A \sim B$, existuje-li mezi nimi bijektivní zobrazení.

6.6.32 Poznámka

Např. množina $(0, \pi/2)$ je ekvivalentní množině $(0, \infty)$, neboť bijektivní zobrazení $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ zobrazuje interval $(0, \pi/2)$ na $(0, \infty)$.

6.6.33 Definice

Množinu A nazveme *konečnou*, je-li buď prázdná nebo existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $A \sim \widehat{n}$. Množinu, jež není konečná, nazveme *nekonečnou*. Množinu A nazveme *spočetnou*, je-li buď prázdná nebo existuje-li množina $M \subset \mathbf{N}$, taková, že $A \sim M$. Množinu, jež není spočetná, nazveme *nespočetnou*.

6.6.34 Věta

Každá konečná množina je spočetná. Každá podmnožina konečné množiny je konečná. Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.

Důkaz:

- plyne přímo z definice

6.6.35 Příklad

Množina $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ je konečná, a tedy spočetná. Naproti tomu množina $\mathbf{Q}$ je sice rovněž spočetná, neboť $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$, ale není konečná. Množina $\mathbf{R}$, a tudíž i $\mathbf{C}$, je nespočetná a tedy nekonečná.

6.6.36 Věta

Množina $\mathbf{Q}$ racionálních čísel je spočetná.

Důkaz:

- ukážeme nejprve, že množina P všech uspořádaných dvojic $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je spočetná
- uspořádané dvojice (m, n) budeme z pochopitelných důvodů ztotožnovat se zlomky tvary $\frac{m}{n}$
- to lze nahlédnout z následující tabulky

	1	2	3	4	5	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	
$\vdots$						$\ddots$

- začneme-li jednotlivým buňkám přiřazovat přirozená čísla v pořadí $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$ atd., vytvoříme tím bijektivní zobrazení mezi množinou P a množinou $\mathbf{N}$
- tedy P je spočetná
- nyní si pouze uvědomíme, že množina kladných racionálních čísel je ekvivalentní s jistou podmnožinou R množiny P
- jelikož ale R je také spočetná (podle věty 6.6.34), je zřejmě i množina $\mathbf{Q}^+$ spočetná
- navíc $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$ a podle výsledku cvičení 6.37 tedy i sama množina $\mathbf{Q}$ je spočetná

6.6.37 Věta

Množina $\mathbf{R}$ reálných čísel je nespočetná.

Bez důkazu.

6.7 Cvičení

Cvičení 6.1
Dokažte větu 6.1.4.

Cvičení 6.2
Dokažte větu 6.1.6.

Cvičení 6.3
Dokažte větu 6.1.8.

Cvičení 6.4
Dokažte větu 6.2.2.

Cvičení 6.5
Dokažte větu 6.4.14.

Cvičení 6.6
Rozhodněte, zda zobrazení $\|.\| : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$, definované pro $\vec{x} = (x_1, x_2)$ rovností

$$\|\vec{x}\| := \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

zadává na $\mathbf{R}^2$ normu.

Cvičení 6.7
Nechť jsou v množině $\mathbf{R}^2$ pevně zvoleny body $\vec{c} = (-e, 0)^\mathsf{T}$ a $\vec{d} = (e, 0)^\mathsf{T}$. Rozhodněte, jaký útvar představuje množina bodů

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 : \varrho(\vec{x}, \vec{c}) + \varrho(\vec{x}, \vec{d}) = 2a\},$$

je-li ϱ a) euklidovská metrika, nebo b) síťová metrika. Čísla $a > e > 0$ nechť jsou parametry. Načrtněte obrázky pro volbu $a = 5$ a $e = 3$.

Cvičení 6.8
Na množině $\mathbf{R}^3$ je zadán skalární součin předpisem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle := 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2.$$

Nechť $\|.\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a ϱ metrika generovaná touto normou. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho\}$ detailně popište množinu $U_4(\vec{0})$.

Cvičení 6.9
Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru λ, pro něž funkce

$$s = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 25x_3y_3 + \lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + (3\lambda - 8 + 2\lambda^2)x_2y_3 + (3\lambda - 8 + 2\lambda^2)x_3y_2$$

definuje na množině $\mathbf{R}^3$ skalární součin.

Cvičení 6.10
Nechť jsou v množině $\mathbf{R}^2$ dány dva body $\vec{x} = (2, 1)^\mathsf{T}$ a $\vec{y} = (4, 3)^\mathsf{T}$. Nalezněte bod $\vec{z}$ z metrického prostoru $\{\mathbf{R}^2, \sigma\}$ se $\sigma-$metrikou tak, aby $U_2(\vec{x}) \cap U_2(\vec{y}) = U_1(\vec{z})$. Rozhodněte, zda jsou množiny $U_2(\vec{x})$ a $U_2(\vec{y})$ oddělené v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_1\}$ se síťovou metrikou.

Cvičení 6.11
Dokažte větu 6.6.14.

Cvičení 6.12
Na množině $\mathbf{R}^2$ je zadána funkce $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$ předpisem $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Rozhodněte, zda funkce

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := \big|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\big|$$

zadává na $\mathbf{R}^2$ metriku.

Cvičení 6.13
Dokažte, že množina $\mathbf{Q}$ je spočetná.

Cvičení 6.14
Ukažte, že jakýkoli bod množiny $\mathbf{R}$ je hraničním bodem množiny $\mathbf{Q}$ a dále že $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Cvičení 6.15
Dokažte následující tvrzení: Nechť $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je metrika na $\mathbf{C}^r$ vyhovující pro každé $k \in \mathbf{C}$ podmínkám

- $\varrho(k\vec{x}, k\vec{y}) = |k|\, \varrho(\vec{x}, \vec{y})$,
- $\varrho(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) = \varrho(\vec{x}, \vec{0})$.

Pak zobrazení $\varrho(\vec{x}, \vec{0})$ je normou na vektorovém prostoru $\mathbf{C}^r$ nad tělesem $\mathbf{C}$.

Cvičení 6.16
Ukažte, že posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!},$$

je cauchyovská v prostoru $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ racionálních čísel s euklidovskou metrikou, ale není ve $\{\mathbf{Q}, \varrho_e\}$ konvergentní.

Cvičení 6.17
Rozhodněte, je-li zobrazení $\varrho(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$ metrikou na množině reálných čísel.

Cvičení 6.18
Dokažte větu 6.6.2.

Cvičení 6.19
Vyslovte tvrzení o kompaktnosti množiny $A = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \setminus \{(1,1)\}$ v prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou.

Cvičení 6.20
Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení o bodu $\vec{a} = (1,1)^{\mathsf{T}}$ a množině A z úlohy 6.19.

- Bod $\vec{a}$ je izolovaným bodem množiny A.
- Bod $\vec{a}$ je hromadným bodem množiny A.
- Bod $\vec{a}$ je vnitřním bodem množiny A.
- Bod $\vec{a}$ je hraničním bodem množiny A.
- Bod $\vec{a}$ je bodem množiny A.

Cvičení 6.21
Pro množiny

$$A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \bigcup \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$$
$$B = A \setminus \{(1,1)\}$$
$$C = \langle 0, 2 \rangle \times \{1\}$$

z metrického prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou vyplňte následující tabulku.

	A	B	C
souvislá			
kompaktní			
omezená			
otevřená			
uzavřená			
oblast			

Jak se změní výsledek, změní-li se metrika na síťovou, $\sigma-$metriku či triviální metriku?

Cvičení 6.22
Nechť $\|.\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ je libovolná norma zavedená na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Ukažte, že zobrazení $r(\vec{x}, \vec{y}) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$, definované předpisem

$$r(\vec{x}, \vec{y}) := 2\, \|\vec{y} - \vec{x}\|,$$

splňuje všechny axiomy metriky.

Cvičení 6.23
Nechť jsou v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho_e\}$ s euklidovskou metrikou dány množiny $A = (0,5)$, $B = \langle 5,8\rangle$ a $C = \{9,10\}$. Rozhodněte (a označte v tabulce), která z množin A, B, C, $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$ a $A\cup B\cup C$ je:

	A	B	C	$A\cup B$	$A\cup C$	$B\cup C$	$A\cup B\cup C$
spočetná							
uzavřená							
omezená							
oblast							
konečná							
otevřená							
kompaktní							
souvislá							

Jak se změní výsledek, změní-li se metrika na síťovou, $\sigma-$metriku či triviální metriku?

Cvičení 6.24
Rozhodněte, zda zobrazení

$$\langle f|g\rangle := \int_0^1 4f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

představuje skalární součin na prostoru všech spojitých funkcí. Je-li ϱ metrika generovaná tímto skalárním součinem, vypočtěte $\varrho(x, x^2)$.

Cvičení 6.25
V rovině $\mathbf{R}^2$ jsou dány body $\vec{a} = (0,1)^\top$ a přímka $P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = -1\}$. Popište a graficky znázorněte množinu všech bodů v rovině, které mají od bodu $\vec{a}$ a přímky P stejnou vzdálenost při

- eukleidovské metrice
- síťové metrice
- $\sigma-$metrice
- triviální metrice.

Cvičení 6.26
Rozhodněte, zda je zobrazení

$$s(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

skalárním součinem na vektorovém prostoru $\mathbf{C}^2$. V kladném případě označte symbolem $\|\cdot\|$ normu generovanou tímto skalárním součinem a vypočtěte $\|(2,1)\|$. Nechť $\varrho(\vec{x},\vec{y})$ je metrika generovaná touto normou. Analyzujte tvar okolí ${}^{(\varrho)}U_1(\vec{0})$ a jeho tvar načrtněte do vhodného obrázku.

Cvičení 6.27
Nechť je v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ se síťovou metrikou dána množina

$$A = \langle 1,6\rangle \times \langle 2,4\rangle \setminus \{(5,3)\}.$$

Podle definice rozhodněte, je-li bod $(2,3)$ vnitřním bodem množiny A. Podle definice dále rozhodněte, je-li bod $(5,3)$ hraničním bodem množiny A. Vypočtěte dále síťovou vzdálenost bodu $\vec{a} = (8,5)^\top$ od množiny A.

Cvičení 6.28
Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^2$, kde

$$\overline{x_n} = \left(\frac{4}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$$

- a) v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho_1\}$ se síťovou metrikou
- b) v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \tau\}$ se triviální metrikou.

Cvičení 6.29
Nechť je zadán metrický prostor $\mathbf{R}^r$ se síťovou metrikou. Dokažte, že tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x} = \vec{a}$$

pro posloupnost $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^r$ je ekvivalentní tvrzení

$$\forall k \in \widehat{r}: \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a_k.$$

Přitom symbol x_{n_k} reprezentuje $k-$tou souřadnici vektoru $\overline{x_n}$.

Cvičení 6.30
Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\overline{x_n} = \left(1, \frac{2n+5}{n}, \frac{4}{n^2}\right)$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ se $\sigma-$metrikou.

Cvičení 6.31
Rozhodněte o limitě posloupnosti $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\overline{x_n} = \left(1, \frac{2n+5}{n}, \frac{4}{n^2}\right)$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho_4\}$ s $p-$metrikou, kde $p = 4$.

Cvičení 6.32
Nechť je předpisem

$$\vec{x}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 11 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot y$$

zadán na množině $\mathbf{R}^5$ skalární součin. Nechť $\|\cdot\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nalezněte všechny vektory, které jsou kolmé ke všem vektorům $\vec{u}_1^{\mathsf{T}} = (1,0,0,0,0)$, $\vec{u}_2^{\mathsf{T}} = (0,1,0,0,0)$, $\vec{u}_3^{\mathsf{T}} = (-3,-1.1,0,0)$ a $\vec{u}_4^{\mathsf{T}} = (0,1,0,1,0)$ a jsou normovány, tj. jejich norma je jednotková.

Cvičení 6.33
Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin na vektorovém prostoru V. Nechť je pevně zvolen vektor $\vec{w} \in V$. Ukažte, že množina všech vektorů $\vec{x} \in V$, pro něž je splněna rovnost $\langle \vec{x}|\vec{w}\rangle = 0$, tvoří vektorový prostor.

Cvičení 6.34
Rozhodněte, je-li posloupnost

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

- cauchyovská v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \tau\}$ s triviální metrikou
- cauchyovská v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}, \varrho\}$ se síťovou metrikou.

Cvičení 6.35

Co nejpřesněji načrtněte okolí ${}^{(\varrho_4)}U_1(2,3)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s $p-$metrikou, kde $p = 4$. Studujte uzavřenost, otevřenost, konvexitu této množiny a podobně. Pro srovnání do stejného obrázku vykreslete také ${}^{(\varrho_e)}U_1(2,3)$.

Cvičení 6.36

Nechť je dán metrický prostor $\{\mathbf{E}^3, \varrho\}$ s euklidovskou metrikou ϱ. Rozhodněte, která z množin splňuje citované vlastnosti. Označte symbolem + pozitivní odpověď.

	souvislá	omezená	kompaktní	uzavřená	otevřená	oblast
$\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x+y+3z=1\}$						
$\emptyset$						
$\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$						
$\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2+y^2+z^2<1\}$						
$\mathbf{E}^3$						

Cvičení 6.37

Dokažte, že sjednocení dvou spočetných (resp. konečných) množin je množina spočetná (resp. konečná).

Kapitola 7

Výsledky cvičení

1.1 $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **1.2** $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$, $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **1.5** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbf{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$ **1.6** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **1.7** $\mathcal{O} = \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ pro $|x| < 1$, $f(x) = 1/2$ pro $|x| = 1$ a $f(x) = 1$ pro $|x| > 1$ – posloupnost nekonverguje na $\mathcal{O}$ stejnoměrně **1.8** $f(x) = 0$, $\mathcal{O} = \mathbf{R}^+$ **1.9** $\mathcal{O} = \mathbf{R}$, $f(x) = 1$ pro $x \in (-1, 1)$, $f(x) = 0$ pro $x = -1$ a $f(x) = x$ pro $|x| > 1$ – posloupnost nekonverguje na $\mathcal{O}$ stejnoměrně **1.10** $f(x) = |x|$, $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **1.11** na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ konverguje stejnoměrně k limitní funkci $f(x) = 1$ pro $x \geqslant 0$ a $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pro $x < 0$ **1.12** stejnoměrně **1.13** a) ano, b) ne **1.14** ano **1.15** ne **1.16** a) ano, b) ne **1.17** ano **1.18** a) ne, b) ano **1.19** ano **1.20** ano **1.21** a) ano, b) ne **1.22** ano **1.23** ano **1.26** ne **1.27** ne **1.28** platí **1.29** a) ano, b) ne **1.30** ano **1.31** ano, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^n}{2n}$ stejnoměrně konverguje na $\langle -1, 1\rangle$ **1.32** ano **1.33** ano **1.34** ne **1.35** ano **1.36** ano **1.37** ano **1.38** 18 **1.39** ano

2.4 stejnoměrně na $\mathbf{R}$ **2.5** stejnoměrně na $\mathbf{R}$ **2.6** stejnoměrně na $\mathbf{R}^+$ **2.7** stejnoměrně na $(-\infty, c)$ pro $c < 0$, ale $\mathcal{O} = (-\infty, 0)$ **2.10** $\mathcal{O} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ **2.11** stejnoměrně na $\mathbf{R}^+$ podle Abelova kritéria **2.12** stejnoměrně na $\mathbf{R}$ **2.13** stejnoměrně **2.14** stejnoměrně **2.15** nekonverguje stejnoměrně **2.16** nekonverguje stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ a $s(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ pro $x \neq 0$ a $s(0) = 0$ **2.17** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ podle Dirichletova kritéria **2.18** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **2.19** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **2.20** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **2.21** $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$ a $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathbf{R}$ **2.22** stejnoměrně na $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ **2.23** stejnoměrně **2.24** nekonverguje stejnoměrně na $\langle 0, 1\rangle$ **2.25** ano **2.26** ano **2.28** tvrzení neplatí **2.29** $\frac{1}{2}\ln(2)$ **2.30** $\frac{\pi^2}{6}$ **2.31** $\frac{\pi^3}{12}$ **2.32** užijte Dirichletova kritéria **2.34** pro $p > 1$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$, pro $p \in (0, 1\rangle$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1)$ a pro $p \leqslant 0$ je $\mathcal{O} = (-1, 1)$ **2.35** $\mathcal{O} = (-4, 4)$ **2.36** $\mathcal{O} = (-1, 1)$ **2.37** pro $a \in (0, 1)$ je $\mathcal{O} = \mathbf{R}$, pro $a = 1$ je $\mathcal{O} = (-1, 1)$ a pro $a > 1$ je $\mathcal{O} = \{0\}$ **2.38** $\mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$ **2.39** $\mathcal{O} = (-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$ **2.40** $\mathcal{O} = \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ **2.41** pro $b \leqslant a$ je $\mathcal{O} = \langle -a^{-1}, a^{-1})$ a pro $a < b$ je $\mathcal{O} = \langle -b^{-1}, b^{-1}\rangle$ **2.42** pro $\beta \in (0, 1\rangle$ je $\mathcal{O} = \langle -1, 1)$ a pro $\beta > 1$ je $\mathcal{O} = (-\beta, \beta)$ **2.43** pro $a \geqslant b$ je $\mathcal{O} = (-a, a)$ a pro $b \geqslant a$ je $\mathcal{O} = (-b, b)$ **2.44** $\mathcal{O} = \langle -1, 1)$ **2.45** $\mathcal{O} = \langle 2, 4\rangle$ **2.46** $\mathcal{O} = \langle -8, 2\rangle$ **2.47** $\mathcal{O} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **2.48** lze derivovat člen po členu **2.49** $\ln(\sqrt{2})$ **2.51** $\pi/4$ **2.52** konverguje stejnoměrně **2.53** nekonverguje stejnoměrně **2.54** konverguje stejnoměrně na $\langle -1, 1\rangle$ **2.55** konverguje stejnoměrně **2.56** konverguje stejnoměrně **2.57** $\mathcal{O} = \langle -2, 2)$ **2.58** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n)} \frac{2x}{n^2+x^2}$ **2.59** $\mathcal{O} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ **2.60** $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\ln(2)$ **2.61** konverguje stejnoměrně na M **2.62** $\mathcal{O} = \langle 1/2, 3/2\rangle$ **2.63** návod: užijte větu o záměně sumy a limity **2.64** konverguje stejnoměrně na M **2.65** konverguje stejnoměrně na M

2.66 konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$

3.1 má totální diferenciál **3.3** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$ **3.4** $x-\frac{x^3}{3}$ **3.5** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+x)^{2n}}{n}$ **3.6** $-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$ a $\mathcal{O}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **3.7** pro $x\in(-1,1)$: $s(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ **3.8** pro $x\in(-1,1)$: $s(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ **3.10** pro $x\in(-1,1)$: $s(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ **3.12** pro $x\in(-1,1)$: $s(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$ **3.13** $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ **3.14** 1 **3.15** $\delta<\frac{1}{11}$ **3.16** $\operatorname{tg}(x)\approx x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7$ **3.17** ≈ 0.24489, zbytek: $R_4\leqslant\frac{1}{42\cdot 4^7}$ **3.18** $\frac{1}{6}$ **3.19** $\ln(5)=1.606\pm0.006$ **3.20** -0.921 ± 0.008 **3.21** $s(x)=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$ pro $x\in\mathbf{R}$ **3.22** $\mathrm{e}^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)$ pro $x\in\mathbf{R}$ **3.23** $1/2$ **3.24** $\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ **3.25** $s(x)=-3\frac{x^2}{(3+x)^2}$ pro $x\in(-3,3)$ **3.26** $-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!}\,x^{2n+2}$ pro $\mathcal{O}=\langle-1,1\rangle$ **3.27** $\frac{19}{90}$ **3.28** $30\,\mathrm{e}^5$ **3.29** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ na $\mathcal{O}=\langle-1,1\rangle$ **3.30** $\frac{1}{4}$ **3.31** $\frac{1}{3}$ **3.32** $\frac{2}{3}\ln(2)-\frac{5}{18}$ **3.33** $-\frac{1}{6}$ **3.34** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n$ na $I=(-1,1)$ **3.35** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{8}$ **3.36** $2\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ **3.37** 6 **3.38** $1.057\,250\,873\pm2\cdot10^{-9}$ **3.39** $\mathcal{O}=\langle-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\rangle$ a součet: $s(x)=(1+3x)^{\alpha/3}-1$ **3.40** 10 **3.41** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ **3.42** $\frac{1}{4}$ **3.44** $5.143\,72\pm0.000\,04$ **3.45** platí, ačkoliv řada $\sum_n f_n(x)$ nekonverguje na intervalu $\langle 0,1\rangle$ stejnoměrně **3.47** $s(x)=-\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$ **3.49** $s(x)=\mathrm{e}^x(x^4+7x^3+10x^2+2x)$, $\mathcal{O}=\mathbf{R}$ **3.50** $s(x)=\frac{1}{2}(\sinh(x)-\sin(x))$, $\mathcal{O}=\mathbf{R}$ **3.51** $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ **3.52** $s(x)=x\ln(1+\frac{x+x^2}{2})$, $\operatorname{Dom}(s)=\langle-2,1\rangle$ **3.53** -202 **3.54** $s(x)=\frac{x}{4}(2+x)\mathrm{e}^{x/2}$, $\operatorname{Dom}(s)=\mathbf{R}$ **3.55** $s(x)=2x-2\ln(1+x)-x\ln(1+x)$, $\operatorname{Dom}(s)=(-1,1\rangle$ **3.56** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(x-5)^n}{3^n}$ **3.57** $f(x)=1-\frac{x}{4}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\frac{x^n}{4^n}$, $\mathcal{O}=\langle-4,4\rangle$ **3.58** $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-16)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $\mathcal{O}=\langle-1/2,1/2\rangle$

4.1 $(x-2y+1)^2+(y+1)^2=1$ – elipsa se středem v bodě $(-3,-1)$ **4.2** $y_{1,2}(x)=\pm\sqrt{C_1+x^2}+C_2$ s definičním oborem $I=\mathbf{R}$ pro $C_1>0$ a $I=(\sqrt{-C_1},\infty)$ nebo $I=(-\infty,-\sqrt{-C_1})$ pro $C_1<0$, pro $C_1=0$ je $y_{1,2}(x)=\pm x+C_2$ **4.3** $y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x}+C_3\mathrm{e}^{3x}+1$ s definičním oborem $I=\mathbf{R}^+$ nebo $I=\mathbf{R}^-$ pro $C_1\neq0$ nebo $C_2\neq0$, pro $C_1=C_2=0$ je $I=\mathbf{R}$ **4.4** $y(x)=2x$, $I=\mathbf{R}$ **4.5** $y(x)=(x+1)^{-1}$, $I=(-1,\infty)$ **4.6** $y(x)=\operatorname{tg}(4x)-4x-1$, $I=(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8})$ **4.7** $y(x)=C_1x+C_2\sqrt{x^2-1}$, $I=(1,\infty)$ **4.8** $(x-K)^2+(y-K)^2=2K^2$ – kružnice o poloměru $\sqrt{2}K$ se středem v bodě (K,K) **4.9** $y'''-5y''+7y'+13y=32\mathrm{e}^x$ **4.10** $y(x)=2(x+1)\mathrm{e}^{3x}\sin x$, $I=\mathbf{R}$ **4.11** $2x^3+5xy^2+2x^2y+4x^2-4xy-2x=C$ a pro $C=0$ jde o elipsu **4.12** $y(x)=\mathrm{e}^x(1+\frac{x}{2})\sin(2x)$, $I=\mathbf{R}$ **4.13** $(x-y)^2+x^2=C$ – elipsa **4.14** $y(x)=4x-2x\ln(-x)+4\sqrt{-x}$, $I=R^-$ **4.15** $y(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+C_3\cos(x)+C_4\sin(x)+x\mathrm{e}^{2x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.16** $y_{1,2}(x)=\pm\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}+C_2$, $I=\mathbf{R}$ pro $C_1\geqslant0$ a $I=(\sqrt{-C_1},\infty)$ pro $C_1<0$ **4.17** $y(x)=x+\frac{1}{x}$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.18** $4\ln(2y-6x-3)+y-4x+7=0$ **4.19** $y(x)=-2x-6$, $I=\mathbf{R}$ **4.20** $y=\sqrt{x}$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.21** $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2x}-8x^2\mathrm{e}^x$, $I=\mathbf{R}$ **4.22** $x^3y'''+3x^2y''-6xy'-6y=0$ **4.23** $y(x)=C_1x^3\mathrm{e}^{2x}+C_2x^{-7}\mathrm{e}^{2x}+C_3\mathrm{e}^{2x}+x^2\mathrm{e}^{2x}$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.24** $y_{1,2}(x)=x-3\pm\sqrt{d-10x}$, $I=(-\infty,\frac{d}{10})$ pouze pro $d>0$ – jde o systém parabol vzešlých z formálního řešení $y^2-2xy+x^2+4x+6y=C$ **4.25** $y(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+\cos(x)\ln|\cos(x)|+x\sin(x)$, $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ **4.26** elipsa: $y^2+4xy+8x^2=Cx$ **4.27 a** $y(x)=\frac{8}{x}\mathrm{e}^{-x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.27 b** $y(x)=4\mathrm{e}^{-x/2}$, $I=\mathbf{R}$ **4.28** $y(x)=(1+\frac{\sqrt{2}}{\sin(x)})^3$, $I=(4\pi,5\pi)$ **4.29** $y(x)=\mathrm{e}^x(\ln(x)+C)$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.30** $y(x)=C\mathrm{e}^{x^2}-x^2-1$, $I=\mathbf{R}$ **4.31** $y(x)=C\mathrm{e}^{-\sin(x)}+\sin(x)-1$, $I=\mathbf{R}$ **4.32** $y(x)=(C\mathrm{e}^{-x^2}+1)^2$, $I=\mathbf{R}$ **4.33** $y(x)=(x+\frac{\pi}{2})\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $I=(-\pi,\pi)$ **4.34** $y_{12}(x)=\pm\sqrt{\frac{C}{x}-1}$, $I=(0,C)$ pro $C>0$ a $I=(C,0)$

forma $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $\mathrm{sg}(q) = (2,1,0)$ a $\mathcal{B}_P = \{(-1,0,0)^\intercal, (1,-1,0)^\intercal, (\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^\intercal\}$ **5.20** $\mathcal{B}_P = \{(-1,2,1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal, (-2,5,1)^\intercal\}$ a $x_1 = -y_1 - 2y_3$, $x_2 = 2y_1 + y_2 + 5y_3$ a $x_3 = y_1 + y_3$, pak $q(\vec{y}) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ **5.21** $a \in (2,4)$ **5.22** hyperbolický válec $z_1^2 - z_2^2 = 1$ s hlavní signaturou $(1,2,1)$ a vedlejší signaturou $(1,1,1)$, polární bází je např. množina $\{(1,0,0)^\intercal, (0.5,1,0)^\intercal, (-2,-3,1)^\intercal\}$ **5.23** kužel $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$ **5.24** $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ – pozitivně semidefinitní, $\mathrm{sg}(q) = (3,0,1)$, parabolický typ **5.25** $\vec{u}_{4_{12}} = \pm(12,-4,-1,1)^\intercal$ vede na normální tvar $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2$ se $\mathrm{sg}(q) = (2,2,0)$ **5.26** pouze a) a c) **5.27** $a \in (-3,0)$ **5.29** neplatí **5.30** $\beta \in (3,+\infty)$ **5.31** $\mu > 0$ jednodílný hyperboloid, $\mu = 0$ kužel, $\mu < 0$ dvoudílný hyperboloid **5.33** hyperbolický paraboloid s polární bází obsahující např. vektory $(1,0,0)^\intercal$ $(-5,1,0)^\intercal$ a $(-13,3,1)^\intercal$, jde o necentrální kvadriku **5.34** $(a,b,c) = (-20,4,-56)$ **5.35** buď $(-7,-2,1,-5)^\intercal$ nebo $(7,2,-1,5)^\intercal$, signatura: $(3,1,0)$ **5.36** $\beta = -12$ **5.37** $x = 2r + 3s/2$ a $y = s/2$, kanonický tvar: $q(r,s) = 4r^2 - 2s^2$ **5.38** $\ell = -1$, vztahy: $x_1 = y_1 - 7y_2 - 28y_3$, $x_2 = y_2 + 9y_3$ a $x_3 = y_3$ **5.39** $x_1 = y_1 - 2y_2 + 14y_3 - 8y_4$, $x_2 = y_2 - 3y_3 + 2y_4$, $x_3 = y_3$ a $x_4 = y_4$ **5.40** $\ell = -1$ **5.41** $(8,1,5)$

6.1 dokazuje se analogicky jako věta 6.1.3 **6.2** dokazuje se analogicky jako věta 6.1.5 **6.3** dokazuje se analogicky jako věta 6.1.7 **6.6** ano **6.7 a** elipsa o poloosách a, b a středu $(0,0)$ **6.7 b** šestiúhelník s vrcholy $(-5,0)$, $(-3,2)$, $(3,2)$, $(5,0)$, $(3,-2)$, $(-3,-2)$ **6.8** rotační elipsoid: $x_1^2 + x_3^2 + 2(x_1 - x_2 - x_3)^2 < 16$ **6.9** $\lambda \in (-2,0) \cup (0,2)$ **6.10 a** $\vec{z} = (3,2)^\intercal$ **6.10 b** jsou oddělené **6.12** nejde o metriku **6.16** návod: nalezněte limitu uvedené posloupnosti a dokažte, že není racionální **6.17** ano **6.19** není kompaktní **6.20** není izolovaný, není hromadný, není vnitřní, je hraniční a není bodem A **6.24** je skalárním součinem, $\varrho(x, x^2) = \frac{2}{\sqrt{30}}$ **6.26** je skalárním součinem, hodnota normy: $\sqrt{17}$. okolím je otevřená elipsa s osami, jež nejsou rovnoběžné se souřadnými osami **6.27** $(2,3)$ je vnitřním bodem, $(5,3)$ je hraničním bodem, $\mathrm{dist}(A, \{\vec{a}\}) = 3$ **6.28** limitou je bod $(0,1)$, $n_0 = \lceil 5/\varepsilon \rceil$, v prostoru $\{\mathbf{R}, \tau\}$ posloupnost limitu nemá **6.30** konverguje k $(1,2,0)$ **6.31** konverguje k $(1,2,0)$ **6.32** buď $(-7,-2,2,0,1)^\intercal$ nebo $(7,2,-2,0,-1)^\intercal$ **6.34** v $\{\mathbf{R}, \tau\}$ není cauchyovská, v $\{\mathbf{R}, \varrho\}$ je cauchyovská **6.35** konvexní ovál se středem v bodě $(2,3)$, okolí ${}^{(\varrho_e)}U_1(2,3)$ je jeho podmnožinou

$I=\mathbf{R}^+$ **4.96 b** $y(x)=x^2\mathrm{e}^{x^2}$, $I=\mathbf{R}$ **4.97** $y(x)=-\frac{5\pi}{\sin(x)}+2x+(2-x^2)\operatorname{cotg}(x)$, $I=(2\pi,3\pi)$ **4.98** $y(x)=C_1+C_2(x-\operatorname{arctg}(x))+x$, $I=\mathbf{R}$ **4.99** $y(x)=C_1\arcsin(x)+C_2+3x-x^3$, $I=(-1,1)$ **4.100** $y(x)=1+(2x+1)\ln|2x+1|$, $I=(-\infty,-0.5)$ **4.101** $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2x\mathrm{e}^{-2x}+C_3\mathrm{e}^{3x}+3x^2\mathrm{e}^{-2x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.102** $y(x)=C_1\sin(x)+C_2-2\cos(x)+\frac{1}{\cos(x)}$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$ **4.103** $y(x)=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3x^2+x\ln(x)$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.104** $y(x)=2x+(x+1)\arcsin(C(x+1))$, kde $I=(-C^{-1}-1,C^{-1}-1)$ pro $C>0$, $I=(-1,\infty)$ pro $C=0$ a $I=(C^{-1}-1,-C^{-1}-1)$ pro $C<0$, **4.105** $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)+C_2\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)+x\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)+\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\ln(\cos(x))$, $I=(-\pi/2,\pi/2)$ **4.106** $y_1(x)=\frac{x^2}{x-C}$, kde $I=(C,\infty)$ pro $C\neq 0$, $y_2(x)=x$, kde $I=\mathbf{R}$ pro $C=0$ a $y_3(x)=0$, kde $I=\mathbf{R}$ **4.107** $y(x)=C_1x\mathrm{e}^{2x}+C_2x+4x^2\mathrm{e}^{2x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.108** $y''-4y=0$ **4.109** $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^{2x}-x^2\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.110** $y(x)=\frac{C_1}{2-x}+C_2(2-x)^3-\frac{2}{3}+\frac{2-x}{4}$, $I=(-\infty,2)$ **4.111** $y(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+C_3\cos(2x)+C_4\sin(2x)-\frac{1}{2}x\cos(x)$, $I=\mathbf{R}$ **4.112** $y(x)=x\sqrt{2\ln(Cx)}$, $I=(1/C,\infty)$ pouze pro $C>0$ **4.113** $y(x)=x\,(x^4/2+8)^{-1/2}$, $I=\mathbf{R}$ **4.114** $y(x)=C_1+C_2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+x$, $I=(1,\infty)$ **4.115** $y(x)=C_1x^3+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{x}(2\ln^2|x|+\ln|x|)$, $I=\mathbf{R}^-$ **4.116** $y(x)=C_1(1+x\operatorname{tg}(x))+C_2\operatorname{tg}(x)$, $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ **4.117** $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2x^3\mathrm{e}^{-2x}+C_3x^4\mathrm{e}^{-2x}+2x^2\mathrm{e}^{-2x}$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.118** $y(x)=\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$, $I=(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2})$ **4.119** $y(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin(x)+2x\mathrm{e}^{x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.120** $y(x)=C_1\operatorname{cotg}(x)+C_2(1-x\operatorname{cotg}(x))$, $I=(0,\pi)$ **4.121** $y(x)=C_1x^2\mathrm{e}^{x}+C_2x^2\mathrm{e}^{-x}+C_3x^2+2x^2\mathrm{e}^{2x}$, $I=\mathbf{R}$ **4.122** $y(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2(x^2-1)}\right)^{-1/2}$, $I=\mathbf{R}$ **4.123** $y^{(4)}-4y'''+24y''-40y'+100y=0$ **4.124** $y''x^2-2y'x+y(2-x^2)=0$ **4.125** $y(x)=C_1+C_2\ln(x)+C_3x^3+2x^3\ln(x)$, $I=\mathbf{R}^+$ **4.126** $y(x)=x\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $I=(\pi,3\pi)$ **4.127** $y(x)=\frac{1}{x+1}$, $I=(-1,\infty)$ **4.128** $y(x)=x$ **4.129** $y(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2/2}$ **4.130** $y(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ **4.131** $y(x)=x\,\mathrm{e}^{x}$ **4.132** $F_S=\left\{\frac{1}{1-x^2},\frac{x}{1-x^2}\right\}$ **4.134** $y_1(x)=4x+1$, $y_2(x)=1-x$, $y-4x-1=C(y+x-1)^3$ **4.135** $y'''-3y''+4y=4x$ **4.136 a** $y(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-5x}$ **4.136 b** $y(x)=(ax+b)x$ **4.136 c** $y(x)=(ax+b)x\mathrm{e}^{3x}$ **4.136 d** $y(x)=(ax+b)x\mathrm{e}^{-5x}\cos(2x)+(cx+d)x\mathrm{e}^{-5x}\sin(2x)$ **4.136 e** $y(x)=(ax+b)\cos(2x)+(cx+d)\sin(2x)$

5.1 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $\mathcal{B}_P=\{(1,0,0)^\mathsf{T},(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0)^\mathsf{T},(0,0,1/\sqrt{3})^\mathsf{T}\}$ **5.2** viz např. výsledek cvičení 5.1 **5.3 a** $(2,\infty)$ **5.3 b** $\emptyset$ **5.4** $\operatorname{sg}(q)=(3,0,0)$ – eliptický typ, regulární s normálním tvarem $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $\mathcal{B}_P=\{(1,0,0)^\mathsf{T},(0,0,1)^\mathsf{T},(-1,1,-1)^\mathsf{T}\}$, transformace: $x_1=y_1-y_3$, $x_2=y_3$ a $x_3=y_2-y_3$ **5.5** $\mathcal{B}_P=\{(0,-\sqrt{3}/3,0),(\sqrt{2}/2,0,-\sqrt{2}/2),(\sqrt{3/2},-2\sqrt{3/2}/3,\sqrt{3/2})\}$ **5.6** $\lambda\in(-4/5,0)$ **5.7** $x_1=y_1-3y_2-6y_3$, $x_2=y_2+3y_3$ a $x_3=y_3$ **5.8** $\mathcal{B}_P=\{(-\sqrt{2}/2,0,0),(-2,1,0),(-1,1,1)\}$ **5.9** elipsa: $z_1^2+z_2^2-1=0$, kde $x_1=z_1-z_2/3+2/3$ a $x_2=2z_2/3-1/3$ **5.10** imaginární různoběžky: $z_1^2+z_2^2=0$, **5.11** $(-1,1)$ **5.12 a** hyperbolický paraboloid $z_1^2-z_2^2-2z_3=0$ **5.12 b** eliptický kužel $z_1^2+z_2^2-z_3^2=0$ **5.12 c** elipsoid $z_1^2+z_2^2+z_3^2-1=0$ **5.12 d** jednodílný hyperboloid $z_1^2+z_2^2-z_3^2-1=0$ **5.12 e** hyperbolický válec $z_1^2-z_2^2-1=0$ **5.12 f** jednodílný hyperboloid $z_1^2+z_2^2-z_3^2-1=0$ **5.12 g** dvoudílný hyperboloid $z_1^2+z_2^2-z_3^2+1=0$ **5.12 h** jednodílný hyperboloid $z_1^2+z_2^2-z_3^2-1=0$ **5.12 i** imaginární kužel $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ **5.12 j** parabolický válec $z_1^2-2z_2=0$ **5.12 k** kužel $z_1^2+z_2^2-z_3^2=0$ **5.12 l** válec $z_1^2+z_2^2-1=0$ **5.13** regulární **5.14** dvoudílný hyperboloid: $z_1^2+z_2^2-z_3^2+1=0$ **5.16** $\operatorname{sg}(q)=(5,0,0)$, $\vec{u}_5=(-7,-2,2,0,1)^\mathsf{T}$ nebo $\vec{u}_5=(7,2,-2,0,-1)^\mathsf{T}$ **5.17** hyperbolický paraboloid $z_1^2-z_2^2-2z_3=0$, který je regulární a má signatury $\operatorname{sg}(Q)=(1,1,1)$ a $\operatorname{SG}(Q)=(2,2,0)$ **5.18** $\lambda=3$ **5.19** hyperbolická

Literatura

[1] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Vybrané kapitoly z matematické fyziky*, Státní pedagogické nakladateltsví, Praha 1975

[2] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova – vydavatelství Karolinum, Praha 1993

[3] B. Budínský a J. Charvát: *Matematika I*, SNTL/Alfa, Praha 1987

[4] B. Budínský: *Matematika III*, Ediční středisko ČVUT, Praha 1982

[5] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Praha 2004

[6] S. Fučík: *Příklady z matematické analýzy*, Státní pedagogické nakladateltsví, Praha 1977

[7] http://tjn.fjfi.cvut.cz/~humhal/ALGEBRA1.pdf

[8] http://tjn.fjfi.cvut.cz/~humhal/ALGEBRA2.pdf

[9] V. Jarník: *Úvod do počtu diferenciálního*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1946

[10] V. Jarník: *Pokračování úvodu do počtu diferenciálního*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1953

[11] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 1998

[12] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 1999

[13] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFFUK, Praha 2003

[14] M. Krbálek: *Matematická analýza IV*, Ediční středisko ČVUT, Praha 2006

[15] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - vydavatelství ČVUT, Praha 2008

[16] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha 1995

[17] J. Seibert: *Matematická analýza IV*, Gaudeamus, Hradec Králové 1992

Index