Definice: Regulární zobrazení

Buď g zobrazení třídy alespoň C^1 pro každé $t \in \mathrm{Dom}\, g$.
Nechť $\det g'(t) \neq 0$.
Pak řekneme, že g je regulární.

Definice: Difeomorfismus

Zobrazení $g: E \to E$ se nazývá difeomorfismus, resp. q-difeomorfismus, platí-li: ① g je prosté
② g i g^{-1} jsou třídy C^1, resp. C^q

Definice: Otevřené zobrazení

Zobrazení g se nazývá otevřené, platí-li:
$(A \subset \mathrm{Dom}\, g \wedge A = A^\circ) \Rightarrow g(A) = g(A)^\circ$

Věta: ~~Věta~~

Je-li g regulární, je otevřené.

Důkaz:

- Uvažujme libovolnou množinu ~~...~~ $A = A^\circ$, $A \subset \mathrm{Dom}\, g$.
- Zvolme libovolné $x_0 \in g(A)$ a označme t_0 bod splňující:

$t_0 \in A$, $x_0 = g(t_0)$

Na zobrazení $g|_A$ můžeme aplikovat větu o inverzním zobrazení,
tedy $\exists H_{t_0} = (H_{t_0})^\circ$: $H_{t_0} \subset A$ a platí: $g(H_{t_0}) = g(H_{t_0})^\circ$

$x \in g(H_{t_0})$

$g(H_{t_0}) \subset g(A)$

2. Implicitné zobrazenie

Majme sústavu nelineárnych rovníc:

$$\Phi^1(x^1,\dots,x^r,y^1,\dots,y^m) = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\Phi^m(\underbrace{x^1,\dots,x^r}_{x},\underbrace{y^1,\dots,y^m}_{y}) = 0$$

Definícia: Implicitné zobrazenie

Buď $\Phi: \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$.

Potom riešením rovnice $\Phi^i(x,y)=0$, $\forall i \in \hat{m}$ rozumieme každé zobrazenie $\varphi: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$, že: $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}\,\varphi$

Veta: O existencii a jednoznačnosti

Buď $\Phi: \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m \in C^q$, $q,r,m \in \mathbb{N}$, že platí:

① existuje $(x_0,y_0) \in \mathrm{Dom}\,\Phi$: $\Phi(x_0,y_0) = 0$

② $\dfrac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}(x_0,y_0) \neq 0$

Potom existuje okolie H_{x_0}, že rovnicou $\Phi(x,y)=0$ je na H_{x_0} definované práve jedno zobrazenie $\varphi: H_{x_0} \to \mathbb{R}^m$, že platí:

① $\varphi(x_0) = y_0$

② $\varphi \in C^q$

③ $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall x \in H_{x_0}$

Dôkaz:

Tvrdenie bude dokázané v rámci nasledujúcej vety, nakoľko je obecnejšia.

Poznámky:

① $$\frac{\partial(\phi^1,\dots,\phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^m}{\partial y^m} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

② Buď $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n$ rostoucí r-tice
$1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_m \le n$ rostoucí m-tice

- Zavedíme: $\lambda := (i_1, \dots, i_r)$, (λ, μ) je $(r+m)$-tice
$\mu := (j_1, \dots, j_m)$

- Jestliže jsou μ takové, že λ doplní do $\hat{n}$, pak označíme $\mu := \lambda'$, $(\lambda, \lambda') = (1, \dots, n)$

Věta:

Nechť $q, n, m \in \mathbb{N}$. Buď $\phi: \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m \in C^q$, že platí:

① existuje $x_0 \in \operatorname{Dom} \phi : \phi(x_0) = 0$

② $h(\phi'(x_0)) = m$

Pak existuje okolí $H_{x_0} \subset \mathbb{R}^{r+m}$, r-tice λ a okolí $V_{x_0^\lambda} \subset \mathbb{R}^r$ a zobrazení $\varphi: V_{x_0^\lambda} \to \mathbb{R}^m \in C^q$, tak že platí:

$$\{x \in H_{x_0} \mid \phi(x_0) = 0\} = \{x \in H_{x_0} \mid x^\lambda \in V_{x_0^\lambda},\ x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\}$$

Důkaz:

$$\phi'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{r+m}} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x_0}$$

• Z hodnosti matice $\Phi'(x_0)$ plyne existence $\lambda' = (j_1, \dots, j_m)$, takové, že:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{j_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{j_m}} \end{vmatrix}_{x=x_0} \neq 0$$

a ze spojitosti plyne existence okolí U_{x_0}: $\forall x \in U_{x_0}$: $\mathbb{J}(\phi^{1,\dots,m}_{j_1,\dots,j_m})(x) \neq 0$

• Definujme $f^\lambda(x) = x^\lambda$, $f^{\lambda'}(x) = \phi(x)$ tj: $f: \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^{r+m} \in C^q$

$$\mathbb{J} f(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^r} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^r} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f^{r+m}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^{r+m}}{\partial x^r} & \cdots & \frac{\partial f^{r+m}}{\partial x^{r+m}} \end{vmatrix}_{x=x_0} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^r} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^m}{\partial x^r} & & \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{r+m}} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^{j_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi^m}{\partial x^{j_m}} \end{vmatrix} \neq 0$$

• f splňuje předpoklady věty o inverzním zobrazení, tedy existuje okolí H_{x_0}, takové, že:
- $f|_{H_{x_0}}$ je prosté
- $f(H_{x_0})$ je otevřené
- $g = (f|_{H_{x_0}})^{-1} \in C^q$

$$V := \{x^\lambda \in \mathbb{R}^r \,|\, (x^\lambda, 0^{\lambda'}) \in f(H_{x_0})\} = V^\circ$$

$$\{x \in H_{x_0} \,|\, \Phi(x) = 0\} = \{x \in H_{x_0} \,|\, f(x) = (x^\lambda, 0^{\lambda'})\} =$$

$$= \{x \in H_{x_0} \,|\, x = g(x^\lambda, 0^{\lambda'})\} =$$

$$= \{x \in H_{x_0} \,|\, x^\lambda \in V,\ x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\}$$

a $\varphi(x^\lambda) = g^{\lambda'}(x^\lambda, 0^{\lambda'})$

Poznámka:

$\Phi(x) = \Phi^p(x^\lambda, x^{\lambda'})$, $p \in \hat{m}$

$x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)$, $\lambda = (i_1, \ldots, i_r)$, $\lambda' = (j_1, \ldots, j_m)$

$\Phi^p(x^\lambda, \varphi(x^\lambda)) = 0$, $\forall p \in \hat{m}$, $\forall x^\lambda \in V$

Pro pevně zvolené $i_k \in \lambda$ a každé $p \in \hat{m}$ platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Phi^p(x^\lambda, \varphi(x^\lambda)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Phi^p(x_1, \ldots, x_r, \varphi_1(x^\lambda), \ldots, \varphi_m(x^\lambda)) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi^p}{\partial x_{i_k}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{i_k}} = 0$$

Což je soustava lineárních rovnic pro $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{i_k}}$.

Z Cramerova pravidla dostáváme:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{i_k}} = - \frac{\dfrac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^m)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, x_{i_k}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_m)}}{\dfrac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^m)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}}$$

3. Variety

Definice: Diferenciální Varieta

Buďte $m, n, r, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$,
$r = n - m$

Neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme diferenciální varietou třídy C^q dimenze r, pokud platí:

① $\forall x_0 \in M : \exists H_{x_0} \subset \mathbb{R}^n, \exists \Phi : H_{x_0} \to \mathbb{R}^m \in C^q$

② $M \cap H_{x_0} = \{x \in H_{x_0} \mid \Phi(x) = 0\}$

③ $\forall x \in H_{x_0} : h(\Phi'(x)) = m$

Poznámka:

① r-varieta je lokálně difeomorfní s množinami, které jsou izometrické s prvky topologie (otevřenými množinami) v $\mathbb{R}^m$

② varieta se nemůže křížit ani protínat. V takovém bodě x_0 by neplatila $h(\Phi'(x_0)) = m$, protože by nastal spor s tím, že $\{x \in H_{x_0} \mid \Phi(x) = 0\}$ je funkce

③ Buď $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in C^q$

Definujme $M := \{x \in \mathrm{Dom}\,\Phi \mid \Phi(x) = 0 \wedge h(\Phi'(x)) = m\}$

Pak M je varieta dimenze $r = n - m$ třídy C^q nebo prázdná množina

Důkaz:

Pokud M je neprázdná, zvolme libovolné $x_0 \in M$.
Pak platí, že: $h(\Phi'(x_0)) = m$ a protože Φ je třídy alespoň C^1, má derivace plnou hodnost i na nějakém okolí H_{x_0}.
Na tomto okolí pak platí: $x \in M \iff \Phi(x) = 0$

Definice: Tečný vektor

Buď M varieta, $x_0 \in M$.

Vektor $\vec{h} \in V^n$ nazveme tečným vektorem k varietě M v bodě x_0, existuje-li zobrazení $\psi: \mathbb{R} \to M$: ① $\psi(0) = x_0$
② $\psi'(0) = \vec{h}$

Definice: Tečný prostor

Tečným prostorem k varietě M v bodě x_0 rozumíme množinu všech tečných vektorů v x_0. Značíme $T_{x_0}M$.

Věta: Tečný prostor jako jádro derivace

Tečný prostor k varietě M v bodě x_0 je jádrem derivace $\Phi'(x_0)$.

Tj.: $T_{x_0}M = \ker \Phi'(x_0)$

Důkaz:

- $\Rightarrow$: Buď $\vec{h} \in T_{x_0}M$ libovolný tečný vektor
  $\Rightarrow \exists \psi: \mathbb{R} \to M : \psi(0) = x_0,\ \psi'(0) = \vec{h}$
  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \psi(-\delta, \delta) \subset H_{x_0} \subset M \wedge H_{x_0} \subset \mathrm{Dom}\, \Phi$
  - Definujme $\varphi := \Phi \circ \psi$,
  pak platí: $\forall t \in (-\delta, \delta) : \varphi(t) = 0$
  - $0 = \varphi'(0) = \Phi'(\psi(0)) \cdot \psi'(0) = \Phi'(x_0)\vec{h} \Rightarrow \vec{h} \in \ker \Phi'(x_0)$
- $\Leftarrow$: Buď $\vec{h} \in \ker \Phi'(x_0)$ libovolný vektor z jádra
  - Definujme $\psi: \mathbb{R} \to M : \psi(t) = g(x_0^1 + t\vec{h}^1, 0^1)$
  kde $g = f^{-1}$ je zobrazení z věty o implicitní funkci
  ① $\psi(0) = g(x_0^1, 0^1) = x_0$
  ② $\psi'(0) = g'(x_0^1, 0^1)(\vec{h}^1, 0^1) = \vec{h} \Leftrightarrow f'(x_0)\vec{h} = (\vec{h}^1, 0^1)$ a to platí

  tj: $\vec{h} \in T_{x_0}M$

Definice: Tečna

Tečnou k varietě M v bodě x_0 rozumíme lineární varietu $x_0 + T_{x_0}M$

Poznámka:

① Bod x je z tečny $\Leftrightarrow x - x_0 \in T_{x_0}M \Leftrightarrow \underleftarrow{\Phi'}(x_0)\overrightarrow{(x-x_0)} = 0$

Definice: Normálový prostor

Normálovým prostorem $N_{x_0}M$ rozumíme ortogonální doplněk k tečnému prostoru.

Tj.: $N_{x_0}M = (T_{x_0}M)^{\perp}$

Definice: Normála

Normálou k varietě M v bodě x_0 rozumíme lineární varietu $x_0 + N_{x_0}M$.

Poznámka:

① $\vec{n} \in N_{x_0}M \Leftrightarrow \forall \vec{h} \in T_{x_0}M : \langle \vec{n} \mid \vec{h} \rangle = 0$

② $\vec{h} \in T_{x_0}M \Leftrightarrow \underleftarrow{\Phi'}(x_0)\vec{h} = 0 \Leftrightarrow \langle \operatorname{grad}\Phi^i(x_0) \mid \vec{h} \rangle = 0, \forall i \in \hat{m}$

zároveň platí: $h(\Phi'(x_0)) = m \overset{?}{=} \cancel{\langle \operatorname{grad}\Phi^i(x_0) \mid \operatorname{grad}\Phi^j(x_0) \rangle = 0, \forall i,j \in \hat{m}}$

$\Rightarrow (\operatorname{grad}\Phi^i(x_0))_{i=1}^{m}$ tvoří bázi $N_{x_0}M$

4. Vázané extrémy

Definice: Lokální extrém vzhledem k varietě

Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in M$ lokální extrém vzhledem k varietě M, právě když:

$$\exists H_{x_0} : \forall x \in H_{x_0} \cap M : f(x) \geq f(x_0), \text{ resp.}: f(x) \leq f(x_0)$$

Věta: Nutná podmínka pro existenci extrému vzhledem k varietě

Buď M r-rozměrná varieta třídy C^1, $x_0 \in M$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce diferencovatelná v bodě x_0.

Nechť f má v bodě x_0 lokální extrém vzhledem k varietě M.

Potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, takové že x_0 je stacionárním bodem funkce:

$$\Lambda = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi^i$$

Důkaz:

Pro každý $\vec{h} \in T_{x_0}M$ existuje $\psi: \mathbb{R} \to M : \psi(0) = x_0 \wedge \psi'(0) = \vec{h}$

Definujme $\varphi := f \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

BÚNO nechť f má v bodě x_0 maximum:

$$\exists H_{x_0} : \forall x \in H_{x_0} \cap M : f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow \exists H_0 : \forall t \in H_0 : f(\psi(t)) \leq f(\psi(0))$$

$\Rightarrow \varphi$ má maximum v bodě $t = 0 \Leftrightarrow \varphi'(0) = 0$

$$0 = \varphi'(0) = f'(\psi(0)) \cdot \psi'(0) = f'(x_0)\vec{h} = \langle \operatorname{grad} f(x_0) | \vec{h} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) \in N_{x_0}M \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : \operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} \phi^i(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{grad}\left(f(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi^i(x_0)\right) = 0, \quad \Lambda := f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi^i$$

$$\Leftrightarrow \Lambda'(x_0) = 0$$

Věta: Postačující podmínka

Buď M varieta třídy C^2, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Nechť existuje $f''(x_0)$, $x_0 \in M$ a nechť existuje Λ a $\Lambda'(x_0) = 0$.

Potom:

① Má-li funkce $f|_M$ v x_0 lokální minimum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \geq 0$.

② Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} > 0$, má $f|_M$ v x_0 ostré lokální minimum.

③ Má-li funkce $f|_M$ v x_0 lokální maximum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \leq 0$.

④ Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} < 0$, má $f|_M$ v x_0 ostré lokální maximum.

⑤ Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M}$ indefinitní, nemá $f|_M$ v x_0 lokální extrém.

Důkaz:

① Buď $\vec{h} \in T_{x_0}M$.

Potom existuje $\Psi: \mathbb{R} \to M : \Psi(0) = x_0 \wedge \Psi'(0) = \vec{h}$.

Provedeme Taylorův rozvoj Λ v x_0 do druhého řádu:

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_0) + \underbrace{\Lambda'(x_0)(x-x_0)}_{0} + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x-x_0)^2 + \omega(x)\|x-x_0\|^2$$

$$\Lambda(\Psi(t)) = \Lambda(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(\Psi(t)-\Psi(0))^2 + \omega(\Psi(t))\|\Psi(t)-\Psi(0)\|^2$$

- Protože $\Psi(t)$ je z variety, kde splývá f s Λ vyjde:

$$\frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\left(\frac{\Psi(t)-\Psi(0)}{t}\right)^2 = \frac{1}{t^2}\left(f(\Psi(t)) - f(\Psi(0)) - \omega(\Psi(t))\|\Psi(t)-\Psi(0)\|^2\right)$$

- limitním přechodem $t \to 0$ dostáváme:

$$\frac{1}{t^2}\underbrace{\left(f(\Psi(t)) - f(\Psi(0))\right)}_{\geq 0} = \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}^2$$

② Buď $\Lambda''(x_0)\vec{h}^2 > 0$, $x \in M \cap H_{x_0}$

Potom: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x-x_0)^2 + \omega(x)\|x-x_0\|^2$

• Obecně však nemusí platit $x - x_0 \in T_{x_0}M$.

Položme $\vec{h} := x - x_0$

Potom lze vyjádřit $\vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$: $\vec{h}_1 \in T_{x_0}M$, $\vec{h}_2 \in N_{x_0}M$

• Z pozitivní definitnosti vyplývá: $\Lambda''(x_0)\vec{h}_1 \geq \alpha\|\vec{h}_1\|^2$

pro nějaké $\alpha > 0$, neboť $\vec{h}_1 \in T_{x_0}M$

• $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}_1^2 + \Lambda''(x_0)\vec{h}_1\vec{h}_2 + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}_2^2 + \omega(x)\|\vec{h}_1 + \vec{h}_2\|^2 \geq$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\|h_1\|^2 - \frac{\alpha}{8}\|\vec{h}\|^2 \geq \frac{\alpha}{4}\|\vec{h}\|^2 - \frac{\alpha}{8}\|\vec{h}\|^2 = \frac{\alpha}{8}\|\vec{h}\|^2$$

neboť $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{h}_2\|}{\|\vec{h}\|} = 0$, $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{h}_1\|}{\|\vec{h}\|} = 1$

a $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{1}{\|\vec{h}\|^2}\left(\Lambda''(x_0)\vec{h}_1\vec{h}_2 + \frac{1}{2}\Lambda''\vec{h}_2^2 + \omega(x)\|\vec{h}\|^2\right) = 0$,

takže lze volit $\alpha > 0$, aby:

$$\frac{1}{\|\vec{h}\|^2}\left(\Lambda''(x_0)\vec{h}_1\vec{h}_2 + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}_2 + \omega(x)\|\vec{h}\|^2\right) \leq \frac{\alpha}{8}$$

a díky ortogonalitě: (Pythagorova věta)

$\|h_1\|^2 = \|\vec{h}\|^2 - \|h_2\|^2 \wedge \lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{h}_2\|}{\|\vec{h}\|} = 0 \Rightarrow \|\vec{h}_1\|^2 \geq \|\vec{h}\|^2$

5. Diferenciální formy

Definice:

Zobrazení, které každému bodu z afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřadí objekt, nazveme:

1. Skalárním polem f na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
2. Vektorovým polem $\vec{F}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to (V^n)$
3. Kovektorovým polem ω na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\omega : \mathbb{R}^n \to (V^n)^{\#}$

Definice: Diferenciální 1-forma

Buď $(\underleftarrow{e}^1, \dots, \underleftarrow{e}^n)$ báze $(V^n)^{\#}$ a $\omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$.

Diferenciální 1-formou resp.: diferenciální formou stupně 1 rozumíme kovektorové pole ω, jehož složky jsou skalárními poli ω_i. Tj.:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underleftarrow{e}^i$$

Poznámka:

1. Bodový zápis: $\underleftarrow{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underleftarrow{e}^i$

Definice: Vnější derivace

Každé skalární pole $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferenciální 0-forma. Je-li funkce f diferencovatelná na celém definičním oboru, pak f' je diferenciální 1-forma a nazýváme ji vnější derivací diferenciální 0-formy f a s použitím totální derivace $f'(x)$ bodově definujeme:

$$(df)(x) = f'(x) \in (V^n)^{\#}$$

Poznámka:

① d je symbol.

Příkladem ~~4~~ vnější derivace je totální diferenciál, gradient, rotace, divergence či Laplaceův operátor.

② Nechť $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je báze V^n, $(\underleftarrow{e}^1, \dots, \underleftarrow{e}^n)$ báze k ní duální.
Mějme souřadnicový izomorfismus $\mathbb{R}^n \mapsto V^n$ vztahem:

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i$$

kde x je bod z afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\vec{x} \in V^n$ je vektor z přidruženého lineárního prostoru.

Dále pro každé $i \in \hat{n}$ mějme souřadnicový funkcionál $\underleftarrow{e}^i : V^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\underleftarrow{e}^i \vec{x} = x^i$$

Díky souřadnicovému izomorfismu můžeme tento souřadnicový funkcionál reprezentovat souřadnicovou funkcí $\chi^i(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\chi^i(x) = \underleftarrow{e}^i \vec{x},$$

která je zřejmě diferencovatelná.

Souřadnicové funkci říkáme projektor.

Pro vnější derivaci souřadnicové funkce χ^i v libovolném bodě x platí:

$$d\chi^i = \underleftarrow{e}^i$$

Proto lze psát:

$$\underleftarrow{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underleftarrow{e}^i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, d\chi^i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, d\chi^i \right)(x)$$

③ Máme-li diferenciální formu df, její složky $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ a označíme-li dx^i jako dx^i můžeme ji zapsat jako:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

④ Porovnejme totální diferenciál df s totální derivací $f'(x)\vec{h}$

- Máme-li funkce $V^n \mapsto V^m$, pojmy nemají společný význam, neboť totální derivace je lineární zobrazení $\mathcal{L}(V^n, V^m)$

- Máme-li funkce $V^n \mapsto \mathbb{R}$, totální derivace $f'(x)$ leží v $\mathcal{L}(V^n, \mathbb{R})$, $\mathcal{L}(V^n, \mathbb{R}) = (V^n)^{\#}$, je to tedy kovektor.

Totální diferenciál je zobrazení, které každému bodu přiřadí kovektor

- Pokud tedy df uchatníme v pevném bodě x_0, získáme kovektor, který má význam totální derivace,

Tj.. $df(x_0) = f'(x_0)$

Definice: Třídy diferenciálních forem

Diferenciální 1-forma ω je třídy C^q, právě když ω_i jsou třídy C^q pro všechna $i \in \hat{n}$

~~Věta~~ Definice:

Diferenciální 1-forma ω se nazývá:

① Uzavřená,

pokud platí: $\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$, $\forall i, j \in \hat{n}$

② Exaktní,

pokud existuje funkce f, taková že: $df = \omega$

Funkce f se nazývá primitivní funkce

Poznámka:

① Exaktní forma třídy C^1 je uzavřená.

Není-li při vhodné třídě forma uzavřená, není exaktní.

② Jestliže je množina, na které je forma ω definovaná jednoduše souvislá, pak je uzavřená 1-forma ω exaktní.

6. Křivkový integrál druhého druhu

Věta: Výpočet křivkového integrálu druhého druhu

Buď ω diferenciální 1-forma třídy C^0 a g dráha (křivka) třídy C^1, $[g] \subset \mathrm{Dom}\,\omega$.

Pak ω je integrabilní po dráze g a existuje integrál:

$$\int_g \omega = \int_a^b \underleftarrow{\omega(g(t))}\, \overrightarrow{g'(t)}\, dt$$

Důkaz:

Poznámka:

Buď $\omega = df$, pak:

$$\int_g \omega = \int_a^b df(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_a^b (f \circ g)'(t)\,dt = f(g(b)) - f(g(a))$$

Definice: Konečná aditivita

Buď $\omega \in C^0$, φ po částech C^1, taková že: $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i$, $\varphi_i \in C^1$,

pak:
$$\int_\varphi \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi_i} \omega$$

Definice: Konzervativní forma

Buď ω diferenciální 1-forma třídy C^0.

Řekneme, že ω je konzervativní, právě když pro každé dvě dráhy g_1, g_2 po částech C^1:
- $[g_1] \cup [g_2] \subset \mathrm{Dom}\,\omega$ platí:
- $g_1(a_1) = g_2(a_2)$
- $g_1(b_1) = g_2(b_2)$

$$\int_{g_1} \omega = \int_{g_2} \omega$$

Věta: Buď ω diferenciální 1-forma třídy C^0.

Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

① ω je exaktní

② pro libovolnou dráhu g uzavřenou a po částech C^1, platí: $\oint_g \omega = 0$

③ ω je konzervativní

Důkaz:

① => ② Buď $\omega = df$, $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ libovolná, $g_i \in C^1$

$$\int_g \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{g_i} \omega = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n) - f(x_0)$$

$$x_n = x_0 \Rightarrow \oint_g \omega = 0$$

② => ③ Buďte g_1, g_2 libovolné po částech C^1 dráhy se stejnými počátečními a koncovými body: $g := g_1 \dot{-} g_2$

$$0 = \oint_g \omega = \int_{g_1} \omega - \int_{g_2} \omega$$

③ => ① Rozdělme Dom ω na jednotlivé komponenty souvislosti:
Buď A souvislá komponenta Dom ω, $x_0 \in A$:

- V $\mathbb{R}^n$ je každá oblast lokálně lineárně souvislá a lze v ní každé dva body spojit lomenou čarou: $[g_x] \subset A$ $\forall x \in A$

- Položme $f(x) := \int_{g_x} \omega$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{e}_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{g(x+t\vec{e}_i)} \omega - \int_{g_x} \omega \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big(\underbrace{\int_{g(x+t\vec{e}_i)} \omega - \int_{g_x} \omega - \int_{g_i}}_{\text{uzavřená dráha}} + \int_{g_i} \omega \Big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{g_i} \omega =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(x + \vartheta \vec{e}_i) \vec{e}_i \, d\vartheta = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i (x + \vartheta \vec{e}_i) \, d\vartheta = \omega_i(x)$$

7. Křivkový integrál prvního druhu

Definice:

Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, g dráha; $[g] \subset \mathrm{Dom}\, f$, σ rozdělení g.

Potom klademe:

$$S(f, g, \sigma) := \sum_{i=1}^{p} f(g(\xi_i)) \| g(t_i) - g(t_{i-1}) \|, \text{ pro } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Definice: Křivkový integrál prvního druhu

Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, g dráha; $[g] \subset \mathrm{Dom}\, f$.

Nechť pro každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n=1}$ existuje vlastní limita:

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, g, \sigma) := \int_g f \, dt$$

Pak říkáme, že f je integrabilní po dráze g a tuto limitu nazýváme křivkovým integrálem prvního druhu

Věta: Aditivita, Homogenita

Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí:

① Aditivita

$$\int_g (f + h) \, dt = \int_g f \, dt + \int_g g \, dt$$

② Homogenita

$$\int_g (\alpha f) \, dt = \alpha \int_g f \, dt$$

Věta:

Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí:

① $$\int_{g_1 \dotplus g_2} f\,dt = \int_{g_1} f\,dt + \int_{g_2} f\,dt$$

② $$\int_{\dot{-}g} f\,dt = + \int_{g} f\,dt$$

③ $$\left|\int_g f\,dt\right| \leq K\, l(g) \quad , \text{kde } K = \sup_{\text{Dom}\, g} |f(x)|$$

Věta: Výpočet křivkového integrálu prvního druhu

Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^0$, $g \in C^1$: $[g] \subset \text{Dom} f$, $\text{Dom}\, g = [a,b]$.
Potom funkce f je integrabilní po dráze g a platí:

$$\int_g f\,dt = \int_a^b f(g(t))\, \|g'(t)\|\, dt$$

Důkaz: Obdobný jako u křivkového integrálu druhého druhu, není vyžadován na zkoušce

Poznámky:

Buď $w \in C^0$, $g \in C^1$: $[g] \subset \text{Dom}\, w$, $g'(t) \neq \underline{o}$, $\forall t \in [a,b]$

tj: g je lokálně prostá. Pro $x \in [g]$ definujeme:

$$\vec{\nu}(x) = \left.\frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}\right|_{x=g(t)}$$

Pak platí:

$$\int_g w = \int_a^b w(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_a^b w(g(t))\, \vec{n}(g(t))\, \|g'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_g \underleftarrow{w} \cdot \vec{n}\, dt = \int_g \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle\, dt$$

Převod křivkového integrálu druhého druhu na první druh

(31) 8. Stupňovité funkce

Definice: Stupňovitá funkce

Buď $f: I \mapsto \mathbb{R}$ omezená funkce na kompaktním intervalu I.
Řekneme, že f je stupňovitá na I, jestliže existuje rozdělení σ intervalu I, takové že f je konstantní na vnitřku každého částečného intervalu I podle σ

Věta: Vlastnosti stupňovitých funkcí

Označme $\mathcal{H}(I)$ množinu všech stupňovitých funkcí na I.
Pak platí:

① $h+k \in \mathcal{H}(I)$, $\forall h,k \in \mathcal{H}(I)$

② $\alpha h \in \mathcal{H}(I)$, $\forall h \in \mathcal{H}(I)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

③ $\min(h,k) \in \mathcal{H}(I)$, $\max(h,k) \in \mathcal{H}(I)$, $\forall h,k \in \mathcal{H}(I)$

④ $|h| \in \mathcal{H}(I)$, $\forall h \in \mathcal{H}(I)$

Důkaz:

① Buď σ_h rozdělení I, že h je stupňovitá
σ_k —//— k —//—

Označme $\sigma := \sigma_h \cup \sigma_k$, pak σ je zjemnění σ_h i σ_k
$\Rightarrow h+k$ je stupňovitá při rozdělení σ

② jasné

③ jasné

④ jasné

Věta:

Je-li funkce h stupňovitá při σ i při σ*, pak platí:

$$\sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i) = \sum_{i=1}^{m^*} h_i^* V(I_i^*)$$

Důkaz:

$$\sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i) = \sum_{k=1}^{m^*} \left(\sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i \cap I_k^*)\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m^*} h_i^* V(I_i^* \cap I_k)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m^*} h_i V(I_i^*)$$

Definice: Integrál

Buď h stupňovitá na I při rozdělení σ.

Pak definujeme funkcionál I:

$$Ih := \sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i)$$

Věta: Vlastnosti integrálu

① $I(h+k) = Ih + Ik \quad , \forall h,k \in \mathcal{H}(I)$

② $I(\alpha h) = \alpha Ih \quad , \forall h \in \mathcal{H}(I), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

③ $h \leq k \Rightarrow Ih \leq Ik \, , \; h,k \in \mathcal{H}(I)$

Důkaz:

Buď σ rozdělení při němž jsou h i k stupňovité:

① $I(h+k) = \sum_{i=1}^{m} (h_i + k_i) V(I_i) = \sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i) + \sum_{i=1}^{m} k_i V(I_i) = Ih + Ik$

② $I(\alpha h) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha h_i) V(I_i) = \alpha \sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i) = \alpha Ih$

③ $Ih = \sum_{i=1}^{m} h_i V(I_i) \leq \sum_{i=1}^{m} k_i V(I_i) = Ik$

Definice: Množina nulové míry

Buď $Z \subset I$.

Řekneme, že Z je Lebesgueovy míry nula: $\mu(Z) = 0$,

pokud:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše spočetný systém intervalů K_j, tak že:

$Z \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j^{\circ}$ a současně: $\sum_{j=1}^{+\infty} V(K_j) < \varepsilon$

Věta:

Sjednocení nejvýše spočetného systému množin nulové míry je množina nulové míry

Důkaz:

Buď $(Z_n)_{n \geq 1}$ množiny nulové míry

- $\forall$: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists (K_i^n)_{i \geq 1} : Z_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i^n : \sum_{i=1}^{+\infty} V(K_i^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Rightarrow Z := \bigcup_{n=1}^{+\infty} Z_n \subset \bigcup_{n,i=1}^{+\infty} K_i^n : \sum_{n,i=1}^{+\infty} V(K_i^n) < \varepsilon$

Poznámka:

- Jednobodová množina je míry nula $\Rightarrow \mu(\{a\}) = 0$

Věta:

Buď $Z \subset I$.

Z je míry nula, právě když:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists (h_n)_{n \geq 1}, h_n \geq 0 \wedge h_n \leq h_{n+1} :$ ① $\sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1, \forall x \in Z$

② $\forall n \in \mathbb{N} : I h_n < \varepsilon$

Důkaz:

$:\Rightarrow \mu(Z) = 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists (K_i)_{i \geq 1} :$ ① $Z \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$

② $\sum_{i=1}^{+\infty} V(K_i) < \varepsilon$

Definujme: $h_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in (\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cap I \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

- $h_n(x) \leq h_{n+1}(x), \forall x \in I$
- h_n jsou stupňovité a nezáporné $\forall n \in \mathbb{N}$
- $I h_n \leq \sum_{i=1}^{n} V(K_i) < \varepsilon$
- $\forall x \in Z : \exists m \in \mathbb{N} : x \in K_m \cap I \Rightarrow h_m(x) = 1 \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1$

$\Leftarrow:$ $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 : \exists (h_n)_{n \geq 1}, h_n \geq 0 \wedge h_n \leq h_{n+1} :$ ① $\sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1, \forall x \in Z$

② $\forall n \in \mathbb{N} : I h_n < \tilde{\varepsilon}$

- Buď K rozdělení I, že h_n jsou při něm stupňovité $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall x \in Z : \exists r_1 : x \in \bigcup_{j=1}^{r_1} K_j : \frac{1}{2} \leq h_1(x)$

  $\exists r_2 : x \in \bigcup_{j=1}^{r_2} K_j : \frac{1}{2} \leq h_2(x)$

  $\vdots$

$\frac{1}{2} \leq h_\ell(x), \forall \ell \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r_\ell} V(K_j) \leq \frac{1}{2} I h_\ell < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} V(K_j) < 2\tilde{\varepsilon} < \varepsilon, \varepsilon := 4\tilde{\varepsilon}$

Věta:

Buď $(h_n)_{n\geq 1}$ posloupnost nezáporných stupňovitých funkcí, $h_{n+1} \leq h_n$. Pak platí:

$$\lim_{n\to+\infty} I h_n = 0 \Leftrightarrow \mu\left(\left\{x\in I \mid \lim_{n\to+\infty} h_n(x) > 0\right\}\right) = 0$$

Důkaz: $\Rightarrow$:

Buď $Z_p := \left\{x\in I \mid \lim_{n\to+\infty} h_n(x) \geq \frac{1}{p}\right\}$

- pak platí, že $p h_n(x) \geq 1, \forall x\in Z_p$ neboť $(h_n)_{n\geq 1}$ je klesající posloupnost funkcí
- z předpokladů platí: $\lim_{n\to+\infty} I(p h_n) = p \lim_{n\to+\infty} I h_n = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n\in\mathbb{N} : I(p h_n) < \varepsilon \wedge p h_n(x) \geq 1, \forall x\in Z_p$

$\Rightarrow \mu(Z_p) = 0 \Rightarrow \mu(Z) = \mu\left(\bigcup_{p=1}^{+\infty} Z_p\right) = 0$

$\Leftarrow$: Nechť Z_1 je množina všech krajních bodů všech částečných intervalů při nichž jsou h_n stupňovité

$Z_2 := \left\{x\in I \mid \lim_{n\to+\infty} h_n(x) > 0\right\}$

$\Rightarrow \mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists (K_i)_{i\geq 1}$: ① $Z_1\cup Z_2 \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$

② $\sum_{i=1}^{+\infty} V(K_i) < \varepsilon$

Pro každé $x \in I \setminus (Z_1 \cup Z_2)$ platí, že $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = 0$

$\Rightarrow \exists m : I \to \mathbb{N}$:

$$h_m(x) < \varepsilon \quad , \forall m \geq m(x)$$

Protože x leží ve vnitřku nějakého částečného intervalu I_x, na němž je h_m stupňovitá platí dále:

$$h_{m(x)}(y) < \varepsilon \quad , \forall y \in I_x^\circ$$

· Systém intervalů $(K_i)_{i \geq 1} \cup (I_x)_{x \in I \setminus Z}$ pokrývá I.

Protože I je kompaktní, existuje konečné podpokrytí:

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{r} K_{j_i}^\circ \cup \bigcup_{k=1}^{s} I_{x_k}^\circ$$

Buď $m_0 = \max\{m(x_1), \dots, m(x_s)\}$, pak $\forall m > m_0$ platí:

$$I h_m \leq \sum_{i=1}^{r} h_i V(K_{j_i}) + \sum_{j=1}^{s} h_j V(I_{x_j}) \leq M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot V(I) < \tilde{\varepsilon} ,$$

$$\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{M + V(I)}$$

- $h_i \leq h_1 < M$
- $V(K_{j_i}) < \varepsilon$
- $h_j < \varepsilon$
- $\sum_{j=1}^{s} V(I_{x_j}) \leq V(I)$

Definice: Horní a dolní stupňovitá funkce k f při rozdělení σ

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu I a

a $(I_k)_{k=1}^{n}$ jsou částečné intervaly intervalu I při rozdělení σ.

Pak

$$\underline{h}^{f}_{\sigma} = m_k = \inf_{y \in I_k} f(y) \,, \quad \overline{h}^{\sigma}_{f} = M_k = \sup_{y \in I_k} f(y)$$

nazveme horní, resp. dolní stupňovitá funkce k f při rozdělení σ

Definice: Dolní, resp. horní funkce

Buď f omezená funkce na intervalu I.

Je-li $x_0 \in I$, definujeme:

$$\underline{f}(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \inf_{|x-x_0|<\delta} f(x)$$

$$\overline{f}(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \sup_{|x-x_0|<\delta} f(x)$$

Funkci $\underline{f}$, resp.: $\overline{f}$ nazýváme dolní, resp.: horní funkcí k funkci f na intervalu I

Věta:

Buď f omezená na kompaktním intervalu I.
Pak f je Riemannovsky integrabilní, právě když množina bodů nespojitosti má nulovou míru.

Důkaz:

Funkce f je Riemannovsky integrabilní právě tehdy, když:

$$\underline{\int} f = \overline{\int} f$$

$$\Leftrightarrow \exists (\sigma_n)_{n\geq 1}, |\sigma_n| \to 0 : \lim_{n\to+\infty} I\overline{h}^{\sigma_n} = \lim_{n\to+\infty} I\underline{h}^{\sigma_n}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} I(\overline{h}^{\sigma_n} - \underline{h}^{\sigma_n}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(Z) = \mu(\{x\in I \mid \lim_{n\to+\infty} (\overline{h}^{\sigma_n}_{(x)} - \underline{h}^{\sigma_n}_{(x)}) > 0\}) =$$

$$= \mu(\{x\in I \mid \overline{f}^{\sigma_n}(x) - \underline{f}^{\sigma_n}(x) > 0\}) = 0$$

Platí, že: $\overline{f}^{\sigma_n}(x) = \overline{f}(x)$, $\underline{f}^{\sigma_n}(x) = \underline{f}(x)$ až na množinu nulové míry.

Platí, že $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) \Leftrightarrow f$ je v x spojitá

Věta:

Buď f omezená na kompaktu I.

f je Riemannovsky integrabilní $\Leftrightarrow \exists (h_n)_{n\geq 1}, (k_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{Y}(I)$:

① $h_n(x) \leq h_{n+1}(x) : \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = f(x), \forall x \in I \setminus Z_1 : \mu(Z_1) = 0$

② $k_n(x) \geq k_{n+1}(x) : \lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = f(x), \forall x \in I \setminus Z_2 : \mu(Z_2) = 0$

③ $\forall x \in I : h_n(x) \leq f(x) \leq k_n(x)$

Důkaz:

- $\Rightarrow$ $h_n := \underline{h_n}, k_n := \overline{h_n}$
- $\Leftarrow$ Buď $(\sigma_n^{(1)})_{n\geq 1}$, resp. $(\sigma_n^{(2)})_{n\geq 1}$ posloupnost rozdělení při nichž jsou h_n, resp. k_n stupňovité
  $(\sigma_n^{(3)})_{n\geq 1}$ libovolná normální posloupnost rozdělení

$$h_n(x) \leq \underline{h_n}(x) \leq f(x) \leq \overline{h}_n(x) \leq k_n(x)$$

$$\Rightarrow I h_n \leq I \underline{h_n} \leq I \overline{h}_n \leq I k_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (k_n - h_n)(x) = 0, \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I(k_n - h_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I k_n = \lim_{n\to+\infty} I h_n = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f = \int f$$

9. Základní integrál

Definice: Soubor základních funkcí

Buď X libovolná množina.

Množinu $\mathcal{H}(X)$ reálných omezených funkcí $X \to \mathbb{R}$ nazveme třídou $\mathcal{H}$ (souborem základních funkcí), pokud platí:

1. $h+k \in \mathcal{H}(X), \forall h,k \in \mathcal{H}(X)$
2. $\alpha h \in \mathcal{H}(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathcal{H}(X)$
3. $|h| \in \mathcal{H}(X), \forall h \in \mathcal{H}(X)$

Poznámka:

1. Požadujeme tedy, aby $\mathcal{H}(X)$ byl vektorový prostor, který navíc s každou funkcí obsahuje i její absolutní hodnotu
2. $\min(h,k), \max(h,k) \in \mathcal{H}(X), \forall h,k \in \mathcal{H}(X)$

   Důkaz:

   $$\left.\begin{array}{l} \max(h,k) - \min(h,k) = |h-k| \\ \max(h,k) + \min(h,k) = h+k \end{array}\right\} \Rightarrow \min(h,k), \max(h,k) \in \mathcal{H}(X)$$

3. nulová funkce $\equiv 0 \in \mathcal{H}(X)$

   $\Rightarrow h^+ := \max(h,0) \in \mathcal{H}(X)$

   $h^- := \max(-h,0) \in \mathcal{H}(X)$

Definice: Základní integrál

Buď I funkcionál definovaný na $\mathcal{H}(X)$ a nechť platí:

① $\forall h,k \in \mathcal{H}(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}: I(\alpha h+k) = \alpha Ih + Ik$

② $\forall h \in \mathcal{H}(X): h \geq 0 \Rightarrow Ih \geq 0$

③ $\forall (h_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{H}(X), h_n \geq 0 \wedge h_n \geq h_{n+1}: \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} Ih_n = 0$

Pak I nazveme základním integrálem

Poznámka:

1. vlastnost: linearita
2. vlastnost: nezápornost
3. vlastnost ~~spojitost~~: spojitost

① $\left.\begin{array}{l} h \leq h^+ \leq |h| \\ -h \leq h^- \leq |h| \end{array}\right\} \Rightarrow Ih \leq I|h|,\ Ih \geq -I|h|$

② Buď $J \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní interval, $\mathcal{H}(J) := C^0(J)$, pak $Ih = R\int_J h$ je základní integrál.

- Linearita a nezápornost je jasná
- Spojitost plyne z Diniho věty

Definice: skoro všude

Řekneme, že výraz V platí μ-skoro všude na množině X, právě když existuje $Z \subset X$: $\mu(Z) = 0$ a výraz V platí pro každé $x \in X \setminus Z$

Věta:

Sjednocení nejvýše spočetného systému množin míry nula je opět množina nulové míry.

~~Poznámka:~~

Definice:

Buď $Z \subset X$.

Pak množina Z je nulové míry, tj: $\mu(Z) = 0$,

právě tehdy když:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists (h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}(X), h_n \geq 0 \wedge h_n \leq h_{n+1} :$ ① $\forall x \in Z : \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1$

② $\forall n \in \mathbb{N} : I h_n < \varepsilon$

Poznámka:

Termín skoro všude je závislý na volbě míry i na volbě základního integrálu

Věta:

Buď $(h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}(X), h_n \geq h_{n+1} \geq 0 : \lim_{n \to +\infty} h_n(x) = 0$ skoro všude na X.

Pak $\lim_{n \to +\infty} I h_n = 0$

Důkaz:

označme $Z = \{x \in X \mid \lim_{n \to +\infty} h_n(x) > 0\}$

pak $\mu(Z) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists (k_n)_{n \geq 1}, 0 \leq k_n \leq k_{n+1} :$ ① $I k_n < \frac{\varepsilon}{M}$

② $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n(x) \geq 1$,

kde $M := \sup_{x \in X} h_1(x)$

• Posloupnost $h_n - Mk_n$ klesá => existuje limita pro každé x a platí: $\lim_{n\to+\infty}(h_n - Mk_n)(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(h_n - Mk_n)^+(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I(h_n - Mk_n)^+ = 0$$

$$\Rightarrow I(h_n - Mk_n) \leq (h_n - Mk_n)^+ \Rightarrow I(h_n - Mk_n) \leq I(h_n - Mk_n)^+$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 :$

$$0 \leq I h_n \leq Mk_n \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I h_n = 0$$

Poznámka:

Položíme-li: $h_n = |h|, \forall n \in \mathbb{N}$, pak dostáváme, že je-li h skoro všude nulová pak $Ih = 0$

Nechť $h = k$ skoro všude, pak $Ih = Ik$

Věta:

Buď $(h_n)_{n\geq} \subset \mathcal{H}(X)$ a nechť platí:

① $h_n(x) \geq h_{n+1}(x) \geq 0$ skoro všude na X, $\forall n \in \mathbb{N}$

② $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = 0$ skoro všude na X

Pak:

$$\lim_{n\to+\infty} I h_n = 0$$

Důkaz:

- $k_1 := h_1^+$, $k_n = \max(h_n^+, k_{n-1})$

Posloupnost $(k_n)_{n\geq 1}$ neroste a platí: $k_n(x) = h_n(x)$ skoro všude na X a podle předchozí poznámky:

$$\lim_{n\to+\infty}(k_n - h_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Ik_n = \lim_{n\to+\infty} Ih_n = 0$$

$\Rightarrow$ • k_n má díky monotonii limitu

Definice: Označení

1) $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ skoro všude na X
2) $f \precsim g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ skoro všude na X
3) $h_n \nearrow \Leftrightarrow h_n \precsim h_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
4) $h_n \nearrow f \Leftrightarrow h_n \nearrow$ a $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = f(x)$ skoro všude na X
5) $h_n \searrow \Leftrightarrow h_n \succsim h_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
6) $h_n \searrow f \Leftrightarrow h_n \searrow$ a $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = f(x)$ skoro všude na X
7) $h_n \rightarrow \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$ skoro všude na X

Poznámka: Předchozí věta: $h_n \searrow 0 \Rightarrow Ih_n = 0$

Věta:
Buďte $(h_n)_{n\geq 1}, (k_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(X)$ a nechť platí: $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$ a $f \precsim g$, potom:

$$\lim_{n\to+\infty} Ih_n \leq \lim_{n\to+\infty} Ik_n$$

Důkaz:
$(h_n - k_m) \searrow (h_n - g) \precsim (f - g) \precsim 0 \Rightarrow (h_n - k_m)^+ \searrow (h_n - g)^+ \sim 0$
$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} I(h_n - k_m) \leq \lim_{m\to+\infty} I(h_n - k_m)^+ = 0$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Ih_n \leq \lim_{m\to+\infty} Ik_m$

10. Třída $\Lambda^+(\mathcal{L}^+)$

Definice: třída $\Lambda^+(X)$, $\mathcal{L}^+(X)$

Řekneme, že funkce $f: X \to \mathbb{R}^*$ je třídy $\Lambda^+(X)$, existuje-li $(h_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(X)$ $h_n \nearrow f$,

Existuje-li navíc $c > 0$: $Ih_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ říkáme, že f je třídy $\mathcal{L}^+(X)$

Poznámka:

Připouštíme i zobecněné funkce jako $f(x) = +\infty$, $\forall x \in X$

- $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{L}^+(X) \subset \Lambda^+(X)$

Věta

Funkce třídy $\mathcal{L}^+(X)$ jsou skoro všude konečné

Důkaz:

Buď $f \in \mathcal{L}^+(X)$

Potom existuje $(h_n)_{n\geq 1}$: $h_n \nearrow f$ takové, že $Ih_n \leq \frac{c}{2}$.

Definujme $Z := \{x \in X \mid \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty\}$

Buď: $h_1' = h_1$, $h_n' := \max(h_n, h_{n-1}')$, ~~$k_n =$~~

$k_n := h_n' - h_1$

Protože $h_n' \sim h_n$ je $Ih_n' = Ih_n \leq \frac{c}{2}$, $Ik_n \leq c$

- Zvolme $\varepsilon > 0$, pak pro každé $x \in Z$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $k_n(x) \geq \frac{c}{\varepsilon}$.

$\Rightarrow (\frac{\varepsilon}{c} k_n)_{n\geq 1}$: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{c} k_n \geq 1$

$\lim_{n\to+\infty} I \frac{\varepsilon}{c} k_n \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \mu(Z) = 0$

Definice:

Buď $f \in \Lambda^+(X)$

Pak definujeme: $If := \lim_{n \to +\infty} h_n$

Poznámka.

① $\forall f \in \Lambda^+(X): -\infty \leq If \leq +\infty$

② $f \in \mathcal{L}^+(X) \Leftrightarrow f \in \Lambda^+ \wedge If < +\infty$

③ Nezávislost definice na volbě $(h_n)_{n\geq 1}$:

Buď $f \in \Lambda^+(X)$, $(h_n)_{n\geq 1}: h_n \nearrow f$

$(k_n)_{n\geq 1}: k_n \nearrow f$

- $f \lesssim f: \lim_{n \to +\infty} Ih_n \leq \lim_{n \to +\infty} Ik_n$
- $f \gtrsim: \lim_{n \to +\infty} Ik_n \leq \lim_{n \to +\infty} Ih_n$

Věta:

Buďte $f, g \in \Lambda^+(X)$, potom platí:

① $f+g \in \Lambda^+(X)$

② $\alpha f \in \Lambda^+(X)$, $\alpha \geq 0$

③ $f^+, g^+, \max(f,g), \min(f,g) \in \Lambda^+$

Důkaz

- nechť platí: $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$

Pak:
- $(h_n + k_n) \nearrow f+g$
- $\alpha h_n \nearrow f$
- $\max(h_n, k_n) \nearrow \max(f,g)$
- $\min(h_n, k_n) \nearrow \min(f,g)$
- $\max(h_n, 0) \nearrow \max(f, 0) = f^+$

Věta:
Buďte $f, g \in \Lambda^+(X)$, $\alpha \geq 0$, pak platí:
① $I(f+g) = If + Ig$, má-li pravá strana smysl
② $I(\alpha f) = \alpha If$, Lebesgueova konvence: $0 \cdot \infty = 0$
③ $f \lesssim g \Rightarrow If \leq Ig$

Věta:
Buď $(f_n)_{n\geq 1} \subset \Lambda^+(X)$, $f_n \nearrow f$.
Pak platí:
$$f \in \Lambda^+(X) \text{ a } If = \lim_{n\to+\infty} If_n$$

Důkaz:
zvolme f_n, $n \in \mathbb{N}$: $\exists (h_m^{(n)})_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}(X)$: $h_m^{(n)} \nearrow f_n$

• položme $h_m := \max_{1\leq n\leq m} h_m^{(n)}$

pro $n \leq m$: $h_m^{(n)} \leq \underbrace{h_m}_{\nearrow f^*} \lesssim f_m \lesssim f \quad / m \to +\infty$

$$f_n \lesssim f^* \lesssim f \quad / n \to +\infty$$
$$f \lesssim f^* \lesssim f \Rightarrow f^* = f \in \Lambda^+$$

• $h_m \lesssim f_m \lesssim f$
$\Rightarrow Ih_m \leq If_m \leq If \quad / m \to +\infty$

$$\underbrace{If^*}_{If} \leq \lim_{n\to+\infty} If_m \leq If$$

Poznámka:
třída Λ^+ a $\mathcal{L}^+$ je uzavřená na operaci $\nearrow$

Věta:
Nechť $(g_k)_{k=1}$ je posloupnost funkcí z Λ^+ větších, než 0 skoro všude. Označme $f = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$
Pak $f \in \Lambda^+$ a $If = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$

Existuje-li navíc $c \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{m} g_k \le c$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$, pak $f \in \mathcal{L}^+$

Důkaz:
Aplikací předchozí věty na posloupnost částečných součtů.

11. Třída Λ, $\mathcal{L}$

Definice: Třída Λ, $\mathcal{L}$

Řekneme, že funkce φ je třídy $\Lambda(X)$, resp. $\mathcal{L}(X)$, právě když existují $f, g \in \Lambda^+(X)$, z nichž alespoň jedna je třídy $\mathcal{L}^+(X)$, resp.: $f, g \in \mathcal{L}^+(X)$, tak, že: $\varphi \sim f - g$

Věta: Vlastnosti

Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:

① $\varphi + \psi \in \mathcal{L}$

② $\alpha\varphi \in \mathcal{L}$

③ $|\varphi| \in \mathcal{L}$

Důkaz:

Označme: $\varphi \sim f_1 - g_1$, $\psi \sim f_2 - g_2$

① $\varphi + \psi \sim f_1 - g_1 + f_2 - g_2 = \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{(g_1 + g_2)}_{\in \mathcal{L}^+}$

② $\alpha\varphi \sim \alpha(f_1 - g_1) = \underbrace{\alpha f_1}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{\alpha g_1}_{\in \mathcal{L}^+}$, $\alpha \geq 0$

$\alpha\varphi \sim -\alpha f_1 + \alpha g_1 = \underbrace{\alpha g_1}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{\alpha f_1}_{\in \mathcal{L}^+}$, $\alpha < 0$

③ $|\varphi| \sim |f_1 - g_1| = \underbrace{\max(f_1, g_1)}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{\min(f_1, g_1)}_{\in \mathcal{L}^+}$

Poznámka:

① Analogicky platí i pro $\varphi \in \Lambda$, pokud: $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+$ nebo: $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$ nebo alespoň jedna z $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$

② $\mathcal{H}(X) \subset \Lambda^+ \subset \Lambda$

③ $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}$

Definice: Lebesgueův integrál
Nechť $\varphi \in \Lambda$, $\varphi \sim f - g$: $I\varphi = If - Ig$.
Pak I je Lebesgueův integrál

Věta: Vlastnosti
Buď $\varphi, \psi \in \Lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:
1) $I(\varphi + \psi) = I\varphi + I\psi$, má-li pravá strana smysl
2) $I\alpha\varphi = \alpha I\varphi$
3) $\varphi \gtrsim 0 \Rightarrow I\varphi \geq 0$

Důkaz:
Označme $\varphi \sim f_1 - g_1$, $\psi \sim f_2 - g_2$
platí-li: $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+ \vee g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$ má smysl $\varphi + \psi$ a
platí: $\varphi + \psi \in \Lambda$:
1) $I(\varphi + \psi) = I(f_1 + f_2) - I(g_1 - g_2) = I(f_1 - g_1) + I(f_2 - g_2) =$
$= I\varphi + I\psi$

2) $\varphi \in \Lambda \Rightarrow f_1 \in \mathcal{L}^+ \vee g_1 \in \mathcal{L}^+$;
$\alpha \geq 0$: $I\alpha\varphi = I\alpha f_1 - I\alpha g_1 = \alpha I\varphi$
$\alpha < 0$: $I(-\alpha\varphi) = -I\alpha f_1 + I\alpha g_1 = \alpha I\varphi$

3) $\varphi \gtrsim 0 \Rightarrow f \gtrsim g \Rightarrow If \geq Ig \Rightarrow I\varphi \geq 0$

Věta:
Funkce $\varphi \in \Lambda$, právě když $\varphi^+ \in \Lambda \wedge \varphi^- \in \Lambda$ a
$\varphi^+ \in \mathcal{L} \vee \varphi^- \in \mathcal{L}$

Důkaz
$\Rightarrow$ Buď $\varphi \in \Lambda$: $\varphi = f - g$, $f \in \Lambda^+, g \in \mathcal{L}^+$
$\varphi^+ \sim \max(\varphi, 0) \sim \max(f, g) - g \Rightarrow \varphi^+ \in \Lambda$
$\varphi^- \sim \max(-\varphi, 0) \sim g - \min(f, g) \Rightarrow \varphi^- \in \mathcal{L}$

$\Leftarrow$: $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $I\varphi^+ - I\varphi^- = I\varphi \Rightarrow \varphi \in \Lambda$

Lemma:
Buď $\varphi \in \Lambda$, nechť $I\varphi > -\infty$.
Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existují $f \in \Lambda^+, g \in \mathcal{L}^+$, že:
① $\varphi \sim f - g$
② $g \gtrsim 0$
③ $Ig < \varepsilon$

Důkaz:
Existují $f_1 \in \Lambda^+, g_1 \in \mathcal{L}^+$ takové, že $\varphi \sim f_1 - g_1$;
nechť $I\varphi > -\infty$.
· Existuje $(k_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}$: $k_n \nearrow g_1$: $\lim_{n \to +\infty} Ik_n = Ig_1$.
· Vezmu $\varepsilon > 0$, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že:
$0 \leq Ig_1 - Ik_n < \varepsilon$
Položme $f := f_1 - k_n$, $g := g_1 - k_n$

Potom $f \in \Lambda^+, g \in \mathcal{L}^+, g \gtrsim 0$ platí, že:

$$\varphi \sim \underbrace{(f_1 - k_n)}_{\in \Lambda^+} - \underbrace{(g_1 - k_n)}_{\in \mathcal{L}^+} \Rightarrow \varphi \sim f - g$$

· Ve třídě Λ^+ není možné násobit $\alpha < 0$) tedy ani odčítat.
Předchozí tvrzení se tudíž musí dokázat pomocí nové posloupnosti, která k nim konverguje!
$h_m := g_1 - k_m$, $k_m \to k_n$:

$$Ig = \lim_{m \to +\infty} I(g_1 - k_m) = Ig_1 - Ik_n < \varepsilon$$

Poznámka:
Věta vyjadřuje vztah mezi Λ^+ a Λ (něco jako $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$)

Věta: Levi
Buď $(\varphi_n)_{n=1} \subset \Lambda$; $\varphi_n \gtrsim 0$; $\varphi \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$

Pak $\varphi \in \Lambda$ a $I\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} I\varphi_n$

Důkaz:
Podle lemmatu:
Existují $f_n \in \Lambda^+$, $g \in \mathcal{L}^+$: ① $\varphi_n \sim f_n - g_n$
② $g_n \gtrsim 0$
③ $Ig_n \leq \frac{1}{2^n} = \varepsilon$

$\varphi_n \gtrsim 0 \Rightarrow f_n \gtrsim 0$

- platí: $If = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, $Ig = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 1 \Rightarrow g \in \mathcal{L}^+$

$\varphi \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n - g_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n - \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$

Protože je $g \in \mathcal{L}^+$, je skoro všude konečná a platí:

$\sum_{n=1}^{+\infty} I\varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} I(f_n - g_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} If_n - \sum_{n=1}^{+\infty} Ig_n = If - Ig = I\varphi$

Věta:
Buď $(\psi_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{L}$: $\psi_m \nearrow \psi$.
Pak $\psi \in \Lambda$ a $I\psi = \lim_{m\to+\infty} I\psi_m$.
Existuje-li navíc $C \in \mathbb{R}$: $|I\psi_m| \leq C$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pak $\psi \in \mathcal{L}$

Důkaz:
- $\psi_n \gtrsim 0$: Definujme $\varphi_1 := \psi_1$, $\varphi_n \sim \psi_n - \psi_{n-1}$ pro $n>1$, pak $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}$

$\Lambda \ni \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \sim \psi_1 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1}) \sim \lim_{n\to+\infty} \psi_n \sim \psi$

② $\psi_n - \psi_1 \gtrsim 0$: $\psi_n - \psi_1 \nearrow \psi - \psi_1$
podle předchozího bodu $\psi - \psi_1 \in \Lambda \Rightarrow \psi \in \Lambda$
$I(\psi - \psi_1) = \lim_{n \to +\infty} (\psi_n - \psi_1)$

③ pokud $|I\psi_n| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ potom $|I\psi| \leq c$ a $\psi \in \mathcal{L}$

Poznámka:
① V třídě $\mathcal{L}$ už platí axiomy základního souboru a I je základní integrál

Věta:
Buď $\varphi \gtrsim 0$, $\varphi \in \Lambda$
Pak $I\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \sim 0$

Důkaz:
Protože $\varphi^+ \sim \varphi$ a $I\varphi^+ = I\varphi = 0$, můžeme BÚNO omezit na funkce $\varphi \geq 0$
Definujme $\psi_n := n\varphi \in \mathcal{L} \Rightarrow \psi_n \nearrow \psi \in \Lambda$ a platí:

$I\psi = \lim_{n \to +\infty} I\psi_n = \lim_{n \to +\infty} nI\varphi = 0$
$\Rightarrow \psi \in \mathcal{L} \Rightarrow$ množina, kde ψ je nekonečná je množina nulové míry

12. Limitní přechody

Lemma:

Nechť $(\varphi_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{L}$: $|\varphi_n| \leq \varphi_0$, pak:

① $\alpha = \liminf\limits_{n\to+\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$

② $\beta = \limsup\limits_{n\to+\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$

③ $-I\varphi_0 \leq I\alpha \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} I\varphi_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} I\varphi_n \leq I\beta \leq I\varphi_0$

Důkaz:

$-\varphi_0 \leq \alpha_m^{(n)} := \min\limits_{n\leq k\leq m} \varphi_k$,

$\beta_m^{(n)} := \max\limits_{n\leq k\leq m} \varphi_k \leq \varphi_0$

$\cdot\ \alpha_m^{(n)}, \beta_m^{(n)} \in \mathcal{L}$: $\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf\limits_{k\geq n} \varphi_k$
$\beta_m^{(n)} \nearrow \beta_n = \sup\limits_{k\geq n} \varphi_k$

$\cdot\ \alpha_n, \beta_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha_n \nearrow \alpha \in \Lambda, \beta_n \searrow \beta \in \Lambda$

$I\alpha_n \leq I\varphi_0 \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}$

$I\beta_n \geq -I\varphi_0 \Rightarrow \beta \in \mathcal{L}$

Věta: Lebesgue
Buď $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a
$\exists \varphi_0 \in \mathcal{L}: |\varphi_n| \leq \varphi_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} I\varphi_n$

„Posloupnost integrabilních funkcí je integrabilní, jestliže existuje integrabilní majoranta"

Důkaz:

vyplývá z lemmatu, pokud položíme $\alpha = \beta$

Lemma:
Nechť $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}$, $I\varphi_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Pak platí:

$$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$$

$$0 \leq I\alpha \leq \liminf_{n\to+\infty} I\varphi_n \leq c$$

Důkaz:

$\alpha_m^{(n)} := \min\limits_{n\leq k\leq m} \varphi_k \in \mathcal{L}$
• zřejmě platí $I\alpha_m^{(n)} \leq c$ a platí se:

$\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf\limits_{k\geq n} \varphi_k$ a platí: $\alpha_n \in \mathcal{L}$
$I\alpha_n \leq c$

• $\alpha \in \mathcal{L}$ a $I\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} I\alpha_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \alpha_n \leq \varphi_n \Rightarrow 0 \leq I\alpha_n \leq I\varphi_n \leq c$
$0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} I\alpha_n = I\alpha \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} I\varphi_n \leq c$

Věta : Fatou
Buď $(\varphi_n)_{n=1} \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $I|\varphi_n| \leq C$.

Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I|\varphi| \leq C$

Důkaz :

Položme $\psi_n := |\varphi_n|$
Posloupnost ψ_n splňuje předpoklady lemmatu :
$\Rightarrow I|\varphi| \leq C$
Lebesgue : $\varphi_0 := |\varphi| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}$

Věta : L^1
Buď L^1 množina všech tříd rozkladu $\mathcal{L}$ podle ekvivalence $\sim$ s obvykle definovanými operacemi součtu a násobení číslem.
Je-li $[\varphi] \in L^1$, položme normu $\|[\varphi]\| := I|\varphi|$, $\varphi \in [\varphi]$
Potom L^1 je normovaný vektorový prostor

Důkaz :
~~Buď~~
Pro operace platí :
$$[\varphi] + [\psi] = \{\chi \in L^1 \mid \chi = \varphi_1 + \psi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi],\ \psi_1 \in [\psi]\}$$
$$\alpha[\varphi] = \{\chi \in L^1 \mid \chi = \alpha\varphi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi]\},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Axiomy lineárního prostoru zřejmě platí.
Norma je pozitivní
$\|[\varphi]\| = 0 \Rightarrow [\varphi] = [0]$ nulová funkce

Věta: Riesz-Fisher
Prostor L^1 je Banachův (úplný normovaný)

Věta:
Množina $\mathcal{H}$ je v $\mathcal{L}$ hustá,
tj: $\mathcal{H} \subset \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$

13. Měřitelné funkce

~~Řekneme, že~~

Definice: Měřitelná funkce

Řekneme, že φ je měřitelná ($\varphi \in M$) funkce $X \to \mathbb{R}^*$, jestliže existuje $(h_n)_{n=1} \subset \mathcal{H}(X)$: $h_n \to \varphi$

Poznámka:

$\mathcal{L}^+ \subset M$, $\mathcal{L} \subset M$

~~Věta:~~
~~Buď $\varphi \in$~~

Věta

Buď $\varphi \geq 0$, pak $\varphi \in \mathcal{M} \iff \varphi \in \mathcal{L}$

Důkaz

$\Leftarrow$ $\mathcal{L} \subset M$

$\Rightarrow$ Buď $\varphi \in \mathcal{M}$, tj. $\exists (h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}$: $h_n \to \varphi$

BÚNO: $h_n \geq 0$

Položme $\alpha_m^{(n)} := \min_{n \leq k \leq m} h_k$

$\alpha_n = \inf_{k \geq n} h_k$

? · přerovnáme posloupnost (h_n) aby $\tilde{h}_n \nearrow \varphi$
(limita se nemění)

Věta:

$\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists f, g \in \mathcal{L}^+ : \varphi \sim f - g$

Důkaz:

$\Leftarrow$: $(f_n - g_n) \longrightarrow \varphi$

$\Rightarrow$: $\varphi \sim \varphi^+ - \varphi^- \sim (f_1 + g_2) - (f_2 + g_1)$,

podle předchozí věty $\varphi^+, \varphi^- \in \mathcal{L}$

$\varphi^+ \sim f_1 - g_1$

$\varphi^- \sim f_2 - g_2$

$f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+ \Rightarrow g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$

Věta:

Jsou-li $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:

① $\varphi + \psi \in \mathcal{M}$, má-li součet smysl

② $\alpha\varphi \in \mathcal{M}$

③ $\max(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}$, $\min(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}$

④ $|\varphi| \in \mathcal{M}$

~~Důkaz~~:

Věta:

Buď $\varphi \in \mathcal{M}$

① Existuje-li $\psi \in \mathcal{L}$: $|\varphi| \lesssim \psi$, pak $\varphi \in \mathcal{L}$

② Existuje-li $\psi \in \mathcal{L}$: $I\psi = +\infty$ a $\varphi \gtrsim \psi$ pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I\varphi = +\infty$

③ Existuje-li $\psi \in \mathcal{L}$: $I\psi = -\infty$ a $\varphi \lesssim \psi$ pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I\varphi = -\infty$

Důkaz:

① $\exists (h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L}$: $h_n \to \varphi$ a $\exists \psi \in \mathcal{L}$: $|\varphi| < \psi \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}$

② $\varphi^+ \gtrsim 0 \Rightarrow \varphi^+ \in \mathcal{L}$ a platí: $\varphi^+ - \psi^+ \in \mathcal{L}$, $\varphi^+ - \psi^+ \gtrsim 0$

$\Rightarrow I\varphi^+ \geq I\psi^+ = +\infty$, $\psi^- \gtrsim \varphi^-$ tedy $I\psi^- \gtrsim I\varphi^-$

$\Rightarrow I\varphi^- < +\infty \Rightarrow \varphi^- \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow$ $\varphi \sim \underbrace{\varphi^+}_{\in \mathcal{L}} - \underbrace{\varphi^-}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{L}$, $I\varphi = +\infty$

Poznámka:
1) Rozšíření Lebesgueovy věty:

Buď $(\varphi_n)_{n=1} \subset \mathcal{M}$, $|\varphi_n| \leq \varphi_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \in \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$

Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $I\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$

) Rozšíření ~~Lebesgueovy věty~~ Leviovy věty

Buď $(\varphi_n)_{n=1} \subset \Lambda$, $\varphi_n \nearrow \varphi$, $I\varphi_1 > -\infty$
Pak $\varphi \in \Lambda$ a $I\varphi = \lim_{n\to+\infty} I\varphi_n$

Věta: Uzavřenost $\mathcal{M}$
Buď $(\varphi_n)_{n=1} \subset \mathcal{M}$, $\varphi_n \to \varphi$. Pak $\varphi \in \mathcal{M}$

14. Měřitelné množiny

Definice:
Buď $M \subset X$.
Položme : $\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in X \setminus M \end{cases}$

χ_M nazveme charakteristickou funkcí množiny M

Definice: měřitelná množina
Buď $M \subset X$, χ_M její charakteristická funkce.
Pak M je měřitelná $\Leftrightarrow$ χ_M je měřitelná

Poznámka: $\chi_M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \chi_M \in \mathcal{L}$

Věta:
Buď $(M_k)_{k=1}^{n, +\infty}$ nějaký nejvýše spočetný (měřitelných) systém množ
Pak platí:
① $M = \bigcup_{k=1} M_k$ je měřitelná
② $N = \bigcap_{k=1} M_k$ je měřitelná

③ $M_1 \setminus M_2$ je měřitelná

Důkaz:

① $\chi_M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \chi_{M_k}$

② $\chi_N := \inf_{k \in \mathbb{N}} \chi_{M_k}$

③ ~~$\chi_{M_1 \setminus M_2} = \chi_{M_1}$~~ $\chi_{M_1 \setminus M_2}(x) := \max(\chi_{M_1} - \chi_{M_2}, 0)(x)$

Věta:
Buď $(M_k)_{k=1}^{n,+\infty}$ systém měřitelných množin vzájemně disjunktních. Pak platí:

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcup_{k=1} M_k\right) = \sum_{k=1}^{n,+\infty} \mu(M_k)$$

Důkaz:

Díky disjunktnosti: $\chi_M = \sum_{k=1}^{n,+\infty} \chi_{M_k}$

~~① konečný případ~~ - plyne z Leviho

Definice:
Buď M měřitelná, pak $\mu(M) = I\chi_M$ nazveme mírou množiny

Věta:
Buď $(M_k)_{k=1}$ systém měřitelných množin

$$M = \bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k, \quad N = \bigcap_{k=1}^{+\infty} M_k$$

Pak platí:
1) $M_k \subset M_{k+1} \Rightarrow \mu(M) = \lim \mu(M_k)$
2) $M_{k+1} \subset M_k \wedge \exists n \in \mathbb{N}: \mu(M_n) < +\infty \Rightarrow \mu(N) = \lim \mu(M_k)$

Důkaz:
1) $\chi_M = \sup_{k \in \mathbb{N}} \chi_{M_k} = \lim_{m \to +\infty} \max_{1 \le k \le m} \chi_{M_k} = \lim \chi_{M_k}$

$\chi_{M_k} \nearrow \chi_M \quad , I\chi_{M_1} \geq 0 > -\infty$

Z rozšířené Leviho věty plyne: $\mu(M) = I\chi_M = \lim_{k \to +\infty} I\chi_{M_k} = \lim \mu(M_k)$

Věta:
Buď $(M_k)_{k=1}^{n,+\infty}$ nejvýše spočetný systém měřitelných množin, $M = \bigcup_k M_k$. Pak platí:

$$\mu(M) \leq \sum_{k=1}^{n,+\infty} \mu(M_k)$$

Důkaz:
Konečný případ:
indukcí: $M = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$

- $\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1) \leq \mu(M_1) + \mu(M_2)$

spočetný případ:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) \text{ platí}$$

, položme $A_n := \bigcup_{k=1}^{n} M_k$, pak $A_n \subset A_{n+1}$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(M_k)$$

15. Integrál na měřitelné množině

Definice:
Buď $A \subset X$ měřitelná, $f: X \to \mathbb{R}^*$, $A \subset \mathrm{Dom}\, f$.
Položme:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

Řekneme, že f je měřitelná na A, $f \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow f_A \in \mathcal{M}(X)$
Řekneme, že $f \in \Lambda(A)$, resp. $\mathcal{L}(A) \Leftrightarrow f_A \in \Lambda(X)$, resp. $f_A \in \mathcal{L}(X)$
Řekneme, že f je integrabilní na $A \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}(A)$
Řekneme, že f má integrál na $A \Leftrightarrow f \in \Lambda(A)$, $f \in \mathcal{M}(A)$

Poznámka: $\mathcal{L}(A) \subset \Lambda(A) \subset \mathcal{M}(A)$

Definice: Lebesgueův integrál
Buď $f \in \Lambda(A)$

$$\int_A f = I f_A$$

nazveme Lebesgueovým integrálem funkce f na množině A

Věta:
Buď B měřitelná podmnožina měřitelné množiny $A \subset \mathbb{R}$. Pak platí $f \in \Lambda(A) \Rightarrow f \in \Lambda(B)$

Důkaz:
- $f_B^+ = f_A^+ \chi_B \leq f_A^+ \in \Lambda$
- $f_B^- = f_A^- \chi_B \leq f_A^- \in \Lambda$

přičemž alespoň jedna je z $\mathcal{L}$, neboť f_A^+ nebo f_A^- je z $\mathcal{L}$

Věta:
Buď $f \in \mathcal{L}(A)$ a nechť $|f| \leq C \in \mathbb{R}^+$. Pak:

$$\left|\int_A f\right| \leq C\mu(A)$$

Důkaz: $|f_A| \leq C\chi_A$

Věta:
Buď $(A_k)_{k=1}^{n,+\infty}$ nejvýše spočetný systém vzájemně disjunktních měřitelných množin. $A = \bigcup_{m=1} A_m$, $f \in \mathcal{L}$
Potom:

$$\int_A f = \sum_{m=1} \int_{A_m} f$$

Důkaz:
① $f \geq 0$ Levi

② $f \sim f^+ - f^-$, aplikovaná na obě části zvlášť; jeden z integrálů bude konečný

Věta:
Buď $(B_k)_{k=1}^{n,+\infty}$: $B_k \subset B_{k+1}$, $B_i \subset \mathcal{M}$,
$A = \bigcup_{k=1} B_k$, $f(x) \geq 0$ na A, $f \in \mathcal{L}(B_k)$

Potom $f \in \mathcal{L}(A)$ a $\int_A f = \lim_{m \to +\infty} \int_{B_m} f$

Důkaz:
Levi: $f_m = f\chi_{B_m} \nearrow f$

Věta:
Buď $A \subset X$, $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}(A)$.
Potom platí:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left(B \subset A \wedge \mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f| < \varepsilon \right)$$

Důkaz:
$f \in \mathcal{L}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}(A)$

definujme ~~$f_n := \min(f, 0)$~~
$$f_n := \min(|f|, n), \; f_n \nearrow f$$
$$\int_A |f| = \lim \int_A |f_n|$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n > n_0 : 0 \leq \left(\int_A |f| - \int_A f_n \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro $B \subset A$ volíme $\delta < \frac{\varepsilon}{2n}$

$$\int_B |f| = \int_B f_n + \int_B (|f| - f_n) \leq n\mu(B) + \int_A (|f| - f_n) < \varepsilon$$

Věta:

Buď $f \in \mathcal{M}(A)$, nechť existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ skoro všude

Buď $g \geq 0$ skoro všude na A, $g \in \mathcal{L}(A)$. Potom:

① $fg \in \mathcal{L}(A)$: $\alpha \int_A g \leq \int_A fg \leq \beta \int_A g$

② existuje $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$: $\int_A fg \leq \gamma \int_A g$

③ Je-li navíc A kompaktní a souvislá, $f \in C^0(A)$, pak existuje $\xi \in A$, že:

$$\int_A fg = f(\xi) \int_A g$$

Důkaz:

① $|fg| \leq |\beta| g \Rightarrow |fg| \in \mathcal{L}$

② Je-li $\int_A g = 0$, pak $g \sim 0$ a $\int_A fg = 0$

pokud $\int_A g > 0$: $\alpha \leq \underbrace{\frac{\int_A fg}{\int_A g}}_{\gamma} \leq \beta$

16. Výpočet integrálu

Věta: Fubini
Buď $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, A, B měřitelné, $f \in \Lambda(A \times B)$.
Potom platí:
① Pro skoro všechna $x \in A$ je $f(x, \cdot) \in \Lambda(B)$

② $\int_B f(\cdot, y)\,dy \in \Lambda(A)$

③ $$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(\cdot, y)\,dy \right)(x)\,dx$$

Poznámka:
Buď $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$, A měřitelná.
Pak pro skoro všechna ~~j~~ $x \in \mathbb{R}^n$ je $A_x := \{ y \in \mathbb{R}^m \,|\, (x,y) \in A \}$ měřitelná v $\mathbb{R}^m$. Analogicky obráceně.

Věta:
Buď $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in \Lambda(A)$, pak:

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Věta: O substituci
Buď φ prosté a regulární zobrazení, $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \operatorname{Ran} \varphi$, ~~f~~
Pak platí:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\, \| \varphi'(t) \|\,dt$$

17. Parametrické integrály

Definujme funkci $F: A \to \mathbb{R}$ vztahem:

$$F(\alpha) := \int_M f(x,\alpha)\,dx$$

Věta: O spojitosti

Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ρ) metrický prostor, $A \subset P$

$f: M \times A \to \mathbb{R}$ a nechť platí:

① Pro skoro všechna $x \in M$: $f(x,\cdot) \in C^0(A)$

② $\forall \alpha \in A: f(\cdot,\alpha) \in \mathcal{M}(M)$

③ $\exists g \in \mathcal{L}(M): \forall \alpha \in A: |f(\cdot,\alpha)| \leq g$

Potom platí:

$$F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx \in C^0(A)$$

Důkaz:

Buď jde o izolované body, nebo platí následující věta o limitě, což dokazuje spojitost.

Věta: Záměna limity a integrálu

Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ρ) metrický prostor, $A \subset P$, $\alpha_0 \in A'$

$f: M \times A \to \mathbb{R}$ a nechť platí:

① Pro skoro všechna $x \in M$: $\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} f(x,\alpha) = \varphi(x)$

② $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}: f(\cdot,\alpha) \in \mathcal{M}(M)$

③ $\exists g \in \mathcal{L}(M): \forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}: |f(\cdot,\alpha)| \leq g$

Potom platí:

① $\varphi \in \mathcal{L}(M)$

② $$\int_M \varphi = \lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_M f(x,\alpha)\,dx$$

Důkaz:

· Z Heineovy věty plyne:

$\forall (\alpha_n)_{n=1} \subset A \setminus \{\alpha_0\} \; \alpha_n \to \alpha_0 : \quad \varphi_n(x, \alpha_n) \to \varphi(x)$

· $(\varphi_n)_{n=1} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}(M)$ a platí:

$$\int_M \varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_M f(x,\alpha_n)\,dx = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} \int_M f(x,\alpha)\,dx$$

Věta: Záměna derivace a integrálu

Buď M měřitelná množina, $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $J = J^\circ \subset \mathbb{R}$.
Nechť $f: M \times J \to \mathbb{R}$ je reálná funkce a platí:

① Existuje $\alpha_0 \in J$ taková, že $f(\cdot, \alpha_0) \in \mathcal{L}(M)$

② Pro každé $\alpha \in J$ platí, že $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{M}(M)$

③ Je-li $N \subset M$, $\mu(N) = 0$, pak $f(x, \cdot)$ je diferencovatelná na J, $\forall x \in M \setminus N$

④ existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že:

$$\forall x \in M \setminus N \; \forall \alpha \in J: \left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x)$$

Potom platí:

① $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{L}(M)$, $\forall \alpha \in J$

② $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{L}(M)$, $\forall \alpha \in J$

③
$$\frac{d}{d\alpha} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)\,dx$$

Důkaz:

① Buď $x \in M \setminus N$, pak: $f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi)\,|\alpha - \alpha_0|$

$$|f(x,\alpha)| \leq \underbrace{|f(x,\alpha_0)|}_{\in \mathcal{L}(M)} + \underbrace{g(x)\,|\alpha - \alpha_0|}_{\in \mathcal{L}(M)}$$

② Pro $\alpha \in J$: $\displaystyle \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \int_M \underbrace{\frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h}}_{\Psi(x,h)}\,dx$

Použijeme minulou větu: $A := \{h \mid \alpha + h \in J\}$, $0 \in A'$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in A}} \int_M \Psi(x,h)\,dx = \int_M \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in A}} \Psi(x,h)\,dx$$

$$\frac{d}{d\alpha} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$$

Věta: O záměně integrálů

Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $N \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná a $f: M \times N \to \mathbb{R} \in \mathcal{M}(M \times N)$.

Nechť alespoň jeden z integrálů:

$$\int_M \left(\int_N |f(x,y)|\,dy \right) dx, \quad \int_N \left(\int_M |f(x,y)|\,dx \right) dy$$

konverguje.

Pak:

$$\int_M \left(\int_N f(x,y)\,dy \right) dx = \int_N \left(\int_M f(x,y)\,dx \right) dy$$

Důkaz:

$f \in \mathcal{M} \Rightarrow |f| \in \Lambda$

z Fubiniho věty plyne, že $|f| \in \mathcal{L}$, což je majoranta f a zbytek plyne z Fubiniho

Definice: funkce Γ, funkce B
Buď $p, q > 0$.

Funkce Γ je Eulerův integrál druhého druhu jako funkce p, tj:

$$\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

Funkce B je Eulerův integrál prvního druhu jako funkce p, q, tj:

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx$$

Věta:
Funkce Beta je symetrická ve svých argumentech, tj:

$$B(p,q) = B(q,p)$$

Důkaz:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p), \text{ viz dále}$$

Věta:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad p \in (0,1)$$

Důkaz:

Věta:
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \ \forall p,q>0$$

Důkaz:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right)=\left|\begin{array}{l} x=s^2 \\ y=t^2 \\ dx=2s\,ds \\ dy=2t\,dt \end{array}\right|=$$

$$=2\int_0^{+\infty} s^{2p-1}e^{-s^2}ds\cdot 2\int_0^{+\infty} t^{2q-1}e^{-t^2}dt=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{2p-1}t^{2q-1}e^{-s^2-t^2}ds\,dt=\left|\begin{array}{l} s=\rho\cos\varphi \\ t=\rho\sin\varphi \\ |J|=\rho \end{array}\right|=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}(\cos\varphi)^{2p-1}(\sin\varphi)^{2q-1}d\rho\,d\varphi=$$

$$=\underbrace{\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\varphi))^{2p-1}(\sin(\varphi))^{2q-1}d\varphi\right)}_{B(p,q)}\underbrace{\left(2\int_0^{+\infty}\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)}_{\Gamma(p+q)}$$

$$*\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(\varphi))^{p-1}(1-\sin^2(\varphi))^{q-1}\cdot 2\cdot\cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi=\left|\begin{array}{l} \sin^2(\varphi)=x \\ 2\sin(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=dx \end{array}\right|$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=B(p,q)$$

Věta:

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

Důkaz:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^p & u' = p x^{p-1} \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx = p\,\Gamma(p)$$

Věta: Legendrův vzorec

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p)$$

Věta: Stirlingova formule

$$\Gamma(p) = \sqrt{2\pi}\, p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p}(1+r(p)), \text{ kde } |r(p)| \leq \left(e^{\frac{1}{12p}} - 1\right)$$

18. Newtonova formule v $\mathbb{R}^2$

Definice: Jordanova dráha
Buď $\varphi \in C^0(\langle\alpha,\beta\rangle)$, $\varphi: \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}^n$ a nechť platí:
① $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$
② φ je na $\langle\alpha,\beta)$ prostá
Pak φ nazveme Jordanovou dráhou.

Poznámky:
Jordanovy dráhy tedy jsou takové křivky, které jsou uzavřené a přitom se nikde neprotínají.

Definice: Elementární oblast typu $x(y)$
Buďte $f, g \in C^1(\langle\alpha,\beta\rangle)$.
Množinu $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (\alpha,\beta),\ g(x) < y < f(x)\}$
nazýváme elementární oblastí typu $x(y)$.

Poznámka:
Definujeme $\varphi := \varphi_g \dotplus \varphi_\beta \dot{-} \varphi_f \dot{-} \varphi_\alpha$, kde:

$\varphi_g(t) = (t, g(t))$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$
$\varphi_\beta(t) := (\beta, g(\beta) + t(f(\beta) - g(\beta)))$, $t \in \langle 0,1\rangle$
$\varphi_f(t) := (t, f(t))$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$
$\varphi_\alpha(t) = (\alpha, g(\alpha) + t(f(\alpha) - g(\alpha)))$, $t \in \langle 0,1\rangle$

Věta:
Buď $P: \overline{D} \to \mathbb{R}$ reálná spojitá funkce na $\overline{D}$ a třídy C^1 na D. Pak platí:

$$\oint_\varphi P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Důkaz:
Z Fubiniho věty a derivaci podle parametru:

$$\int_\varphi P\,dx + 0\cdot dy = \int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} P(t,g(t)) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ g'(t)\end{pmatrix}dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} P(\varphi_\beta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ f(\beta)-g(\beta)\end{pmatrix}dt -$$

$$-\int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} P(t,f(t)) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ f'(t)\end{pmatrix}dt - \int_0^1 \begin{pmatrix} P(\varphi_\alpha(t)) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ f(\alpha)-g(\alpha)\end{pmatrix}dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P(t,g(t)) - P(t,f(t)))\,dt = -\int_\alpha^\beta \left[P(x,y)\right]_{g(x)}^{f(x)}dx =$$

$$= -\int_\alpha^\beta\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx$$

Věta:
Buď $Q\in C^0(\bar{D})$, $Q\in C^1(D)$, kde D je oblast typu $y(x)$.
Buď φ zkonstruována jako v předchozím příkladu.
Pak platí:

$$\int_\varphi Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Důkaz: Analogicky

Věta: Jordan
Buď φ Jordanova dráha v $\mathbb{R}^2$.
Pak lze $\mathbb{R}^2$ jednoznačně disjunktně rozložit na tři komponenty souvislosti $\mathbb{R}^2 = A\cup[\varphi]\cup B$,
kde A je neomezená a B omezená.
Komponentu A označíme ext φ a nazveme ji vnější dráhy.
Komponentu B označíme int φ a nazveme ji vnitřek dráhy.

Věta: Greenova formule
Buď $D = D^{\circ} \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast a φ její hranice (kladně orientovaná Jordanova dráha) $P, Q \in C^1(D)$, $P, Q \in C^0(\overline{D})$. Potom platí:

$$\int_{\varphi} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Věta:
Vnitřek Jordanovy dráhy je jednoduše souvislý.

Poznámka:
Je-li forma $\omega = P\,dx + Q\,dy$ uzavřená na jednoduše souvislém uzavřeném definičním oboru, z definice platí: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
Z Greenovy formule pak plyne:

$$\int_{\varphi} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0$$

tedy forma ω je konzervativní, čili exaktní

19. Vícerozměrná integrace

Věta: Divergenční, zobecněná Stokesova
Buď $D \subset R^n$, a nechť jsou dány:
① k-rozměrná varieta $M \sim R^n$
② ∂D, tj: $(k-1)$ rozměrná varieta po částech C^0
③ σ-kompaktní množina $D \subset M$ ležící na jedné straně svého okraje ∂D

Potom pro každou diferenciální $(k-1)$-formu $\omega \in C^1(\bar{D})$ platí:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

20. Komplexní derivace

Definice:
Buď $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in (\mathrm{Dom} f)^\circ$.
Existuje-li konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

říkáme, že funkce f je v bodě z_0 (komplexně) diferencovatelná a příslušnou limitu značíme $f'(z_0)$

Věta: Cauchy-Riemann
Buď $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathrm{Dom} f$
Označme: $f(z) = f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$.
Pak f je diferencovatelná v bodě z_0, právě tehdy když: (1) f_1, f_2 je diferencovatelné

(2) $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

21. Holomorfní funkce

Definice: Holomorfní funkce
Funkci $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme holomorfní v bodě x, když je diferencovatelná na nějakém jeho okolí.

Věta:
Funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, holomorfní na souvislé množině $M \subset \mathbb{C}$ je na této množině konstantní!

Důkaz:
- $f_2 = 0$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Definice:
Buď $f: [a,b] \to \mathbb{C}$.
Pak definujeme:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

Definice:
Buď $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ dráha třídy C^1, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $[\varphi]$. Pak klademe:

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Věta: Cauchyho integrální

Buď φ po částech ~~spojitá~~ hladká Jordanova dráha a f holomorfní na $\text{int}\,\varphi$ a spojitá na $\overline{\text{int}\,\varphi}$.

Pak $\oint_\varphi f = 0$

Důkaz:

- naivní: $f \in C^1$
  Green!

Věta: Cauchyho integrální vzorec

Buď φ po částech hladká Jordanova dráha a nechť f je holomorfní na $\text{int}\,\varphi$ a spojitá na $\overline{\text{int}\,\varphi}$.

Pak pro každé $z \in \text{int}\,\varphi$ platí:

$$f(z) = \frac{\text{ind}_\varphi z}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Definice: Index bodu z_0 vzhledem k φ:

Buď φ po částech hladká uzavřená dráha, nechť $z_0 \notin [\varphi]$.

Index bodu z_0 vzhledem k φ definujeme:

$$\text{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z - z_0}$$

- $\text{int}\,\varphi = \{ z \in \mathbb{C} \setminus [\varphi] \mid \text{ind}_\varphi z \neq 0 \}$
- $\text{ext}\,\varphi = \{ z \in \mathbb{C} \setminus [\varphi] \mid \text{ind}_\varphi z = 0 \}$

Věta:
Buď $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$.
Pak pro každé $z \in B$ platí:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

$$\text{kde } a_n = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z_0}{2\pi i} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

Pro libovolnou Jordanovu drahu: $[\varphi] \subset B$, $z_0 \in \operatorname{int} \varphi$

Věta:
Za splnění předpokladů předchozí věty platí:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \operatorname{ind}_\varphi z_0 \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

22. Laurentovy řady

Definice: Laurentova řada
Buď $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom řadu:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

nazveme Laurentovou řadou a její součet definujeme jako

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{Regulární}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{-n}}_{\text{hlavní část}}$$

Věta: Laurentova
Nechť je funkce f holomorfní na mezikruží P

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} / r < |z-z_0| < R\}$$

Pak pro každé $z \in P$ platí:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z_0}{2\pi i} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

Definice: $P(z_0, R) := P(z_0, 0, R)$

Definice: Bod z_0 se nazývá izolovaným ~~bodem~~ singulárním bodem funkce f, jestliže f je holomorfní na $P(z_0, R)$ a v z_0 není.

Definice: Buď z_0 izolovaný singulární bod funkce f. Řekneme, že singularita je

① Odstranitelná
$\Leftrightarrow$ v Laurentově řadě je $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^-$

② P-tého řádu (pól p-tého stupně)
$\Leftrightarrow$ $a_{-p} \neq 0 \wedge a_n = 0$ pro $n < -p$

③ Podstatná
$\Leftrightarrow$ pro nekonečně mnoho a_n, $n<0$ platí $a_n \neq 0$

Definice: Reziduum funkce v bodě z_0
Buď z_0 singulární bod funkce f a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$ její Laurentova řada

Pak číslo $a_{-1} = \operatorname{rez}_{z_0} f$ nazýváme reziduum funkce v bodě z_0

Věta: Reziduová
Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \setminus M$. $M \subset G$ je množina jejích izolovaných singulárních bodů.
Nechť φ je po částech hladká Jordanova dráha neprocházející žádným singulárním bodem, $\operatorname{int} \varphi \subset G$.

Pak $$\oint_\varphi f(z)\,dz = \sum_{a \in M \cap \operatorname{int}\varphi} 2\pi i \operatorname{rez}_a f \operatorname{ind}_\varphi a$$