

MATEMATICKÁ ANALÝZA A4 - CVIČENÍ

WIKI SKRIPTUM FJFI 25. ZÁŘÍ 2021

1. KVADRIKY

Definice 1.1. (KVADRATICKÁ FUNKCE) Buďte $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická, $A \neq \Theta$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Pak zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^T A x - 2b^T x + c$$

se nazývá kvadratická funkce. Množina $\mathcal{Q} = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ se nazývá kvadrika s rovnicí $f(x) = 0$.

Poznámka 1.1. V této definici jsme použili značení standardního skalárního součinu pomocí sloupcových a řádkových vektorů. Zřejmě platí

$$x^T A x = (x, A x)$$

$$b^T x = (b, x)$$

Tohoto zápisu budeme zhusta používat.

Definice 1.2. (SOUŘADNÁ SOUSTAVA) Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$. Pak dvojici $(\mathcal{X}, s)$ nazýváme soustavou souřadnic s bází $\mathcal{X}$ a počátkem s .

Poznámka 1.2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

$$x = s + \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

když $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a souřadnice $y = (y_1, \dots, y_n)$. Pomocí matice přechodu $\mathbb{P}$ zapíšeme výše uvedený vztah jako $x = s + \mathbb{P}y$

Poznámka 1.3. V následujícím textu se tedy budeme snažit zjednodušit výraz pro $f(x)$ přechodem k jiné soustavě souřadné.

Máme tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= f(s + \sum_{i=1}^n y_i x_i) = f(s + \mathbb{P}y) = (s + \mathbb{P}y)^T \mathbb{A} (s + \mathbb{P}y) - 2b^T (s + \mathbb{P}y) + c = \\ &= s^T \mathbb{A} s + s^T \mathbb{A} \mathbb{P} y + (\mathbb{P}y)^T \mathbb{A} s + (\mathbb{P}y)^T \mathbb{A} \mathbb{P} y - 2b^T s - 2b^T \mathbb{P} y + c = \\ &= y^T \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P} y + 2(s^T \mathbb{A} - b^T) \mathbb{P} y + s^T \mathbb{A} s - 2b^T s + c = f_1(y) \end{aligned}$$

Odvození je správné, protože členy $s^T \mathbb{A} \mathbb{P} y$ a $(\mathbb{P}y)^T \mathbb{A} s$ se rovnají. (Jsou to vůči sobě transponovaná reálná čísla.) $f_1(y)$ je opět kvadratickou funkcí. Z odvozeného zápisu vyplývá několik zajímavých možností:

- Určitou záměnou můžeme zrušit konstantu (pokud $f(s) = 0$).
- Pro eliminaci lineárního členu je zapotřebí, aby $s^T \mathbb{A} - b^T = \Theta$.

Pokud $\mathbb{A}$ je symetrická pak existuje $\mathbb{P}$ tak, že $\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$ je diagonální a tedy

$$y^T \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P} y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

A tedy existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $s^T \mathbb{A} - b^T = \Theta$. Dosáhneme toho, že lineární člen vypadne, tj. $\mathbb{A}s = b$.

Definice 1.3. (STŘED KVADRIKY) Bod $s \in \mathbb{R}^n$ se nazývá středem kvadriky $\mathcal{Q}$ právě když $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(f(s+x) = f(s-x))$. Existuje-li alespoň jeden střed kvadratické funkce, pak se kvadrika nazývá centrální. Neexistuje-li, nazýváme ji necentrální. Označíme S_f množinu všech středů f .

Věta 1.1. Platí následující tvrzení:

- $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ je centrální právě tehdy, když existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A}s = b$.
- $S_f = \{s \in \mathbb{R}^n | \mathbb{A}s = b\}$ je varieta.
- $f|_{S_f} = \text{const.}$ (tzv. centrální hodnota)

Důkaz: ad (i) a (ii):

$$\begin{aligned} f(s \pm x) &= s^T \mathbb{A} s \pm 2s^T \mathbb{A} x + x^T \mathbb{A} x - 2b^T \mp 2b^T x + c = \\ &= x^T \mathbb{A} x \pm 2(s^T \mathbb{A} - b^T)x + f(s) \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že tvrzení č. 1 a 2 věty platí.

$$\text{ad(iii): Nechť } s_1, s_2 \in S = f, s_2 = x + s_1, x \neq 0$$

$$f(s_2) = f(s_1) = x^T \mathbb{A} x + 2(\mathbb{A} s_1 - b)^T x + f(s_1) = f(s_1)$$

První člen je nula, protože $\mathbb{A}x = \mathbb{A}(s_2 - s_1) = \mathbb{A}(s_2) - \mathbb{A}(s_1) = 0$, druhý člen je nula, protože $s_1 \in S_f$

Závěr: Pro centrální kvadriky existuje souřadný systém $(\mathcal{X}, s)$ tak, že (je-li y zápis souřadnic bodu x v systému $(\mathcal{X}, s)$):

$$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 + f_0, f_0 = f(s).$$

Poznámka 1.4. Některé zápisy

- Nechť f je centrální, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k = h(\mathbb{A}) \leq n$, $s \in S_f$, $\mathcal{X}$ je diagonální báze taková, že

$$(\forall j \in \hat{k})(\lambda_j \neq 0)(\forall j = k+1 \dots, n)(\lambda_j = 0).$$

Pak se $(\mathcal{X}, s)$ nazývá tzv. Kanonickou soustavou souřadnic. f má v této soustavě tvar

$$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i^2 + f_0.$$

- Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $p \geq k$ a $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_k < 0$. Potom podle hodnoty f_0 můžeme standardní tvar kvadriky $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ zapsat následujícími způsoby

(1) Pokud $f_0 = 0$ pak

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{y_i}{\alpha_i} \right)^2 - \sum_{i=p+1}^k \left(\frac{y_i}{\alpha_i} \right)^2 = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{\alpha_i^2}, & i \in \hat{p}, \\ \lambda_i &= -\frac{1}{\alpha_i^2}, & i = p+1, \dots, k. \end{aligned}$$

(2) Pokud $f_0 \neq 0$ pak

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{y_i}{\alpha_i} \right)^2 - \sum_{i=p+1}^k \left(\frac{y_i}{\alpha_i} \right)^2 = 1,$$

kde

$$\frac{1}{\alpha_i^2} = \pm \frac{1}{|f_0|} |\lambda_i|, i \in \hat{k}.$$

Definice 1.4. Reálné osy mají indexy $i \in \hat{p}$, imaginární osy $i \in \{p+1, \dots, k\}$. Hodnota $\mathbb{A}$ je rovna n , právě když je to regulární kvadrika.

1.1. Necentrální kvadriky.

Poznámka 1.5. Nyní nelze odstranit lineární člen (rovnice $\mathbb{A}s = b$ nemá řešení). Zkusíme tedy najít s tak, aby $f(s) = 0$.

Poznámka 1.6. Jestliže matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická pak $\ker \mathbb{A} \oplus \operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ ¹.

Věta 1.2. Nechť f je necentrální, $b = b_1 + b_2$, kde $b_1 \in \operatorname{Im} \mathbb{A}$ a $b_2 \in \ker \mathbb{A}$. Pak existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A}s = b_1$.

Definice 1.5. (VRCHOL) Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ takový, že $f(s) = 0$ se nazývá vrchol f . Množina vrcholů se označuje V_f .

Poznámka 1.7. (KANONICKÝ TVAR) Pokud $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná pomocí báze $\mathcal{X}$ (kanonická báze), $h(\mathbb{A}) = k$, $s \in V_f$ a označíme-li souřadnice v $(\mathcal{X}, s)$ y , kde

$$x_{k+1} = \frac{1}{\|b_2\|} b_2,$$

pak kanonický tvar $\mathbb{A}$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2 - 2\|b_2\| y_{k+1} = \mathcal{Q}.$$

Poznámka 1.8. (STANDARDNÍ TVAR)

1.2. Kvadriky v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ - kuželosečky. Následují příklady některých často se vyskytujících kvadrik, tyto naleznete v Tabulce č. 1.2.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	bod
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	parabola

TABULKA 1. Kvadriky v $\mathbb{R}^2$

Dále uvedeme některé kvadriky v $\mathbb{R}^3$, v této tabulce necht' $a, b, c > 0$. Ty jsou v Tabulce č. 2.

1.3. Kvadriky v $\mathbb{R}^3$.

1.4. Příklady. V následujícím textu se budeme zabývat kvadrikami v $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.1. Máme kvadriku o rovnici

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

¹Zde $\ker \mathbb{A} = \mathbb{A}^{-1}(\Theta)$ a $\operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elipsoid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	jednodílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	dvoudílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	střed (bod)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	kužel
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	eliptický válec
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbolický válec
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	přímka
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	eliptický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	hyperbolický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	rovina
$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	parabolický válec

 TABULKA 2. Kvadriky v R^3

Porovnáním s obecným tvare v $\mathbb{R}^2$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$$

dostaneme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \end{pmatrix}, c = 80.$$

Matice $\mathbb{A}$ je regulární a proto existuje právě jedno s tak, že $\mathbb{A}s = b$. Řešme proto

s

Příklad 1.2. Máme kvadriku o rovnici

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0.$$

Příklad 1.3. Máme kvadriku o rovnici

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

2. IMPLICITNÍ FUNKCE

Věta 2.1. (O INVERZI) Buďte splněny tyto předpoklady

- (i) $g : E \rightarrow E$, spojitě na okolí $y_0 \in E$,
- (ii) existuje g' na okolí y_0 spojitá v y_0 ,
- (iii) $g'(x_0)$ je regulární,
- (iv) $g(y_0) = x_0$.

Potom existuje H_{x_0} a H_{y_0} tak, že $(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(x = g(y))$. Tj. na H_{x_0} existuje g^{-1} a platí, že $(g^{-1})'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}$.

Věta 2.2. (O IMPLICITNÍCH FUNKCÍCH) Nechť $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a

- (i) $\exists(x_0, y_0) : \Phi(x_0, y_0) = \Theta$,
- (ii) Φ je spojitě na okolí (x_0, y_0) ,
- (iii) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ existuje na okolí (x_0, y_0) a je spojitá v (x_0, y_0) ,
- (iv) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ je regulární.

Pak

$$(\exists H_{x_0}, H_{y_0})(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(\Phi(x, y) = \Theta).$$

Vzniknuvší funkce (označme ji $Y = Y(x)$) je spojitá na H_{x_0} . Pokud Φ' existuje na okolí (x_0, y_0) pak i Y' existuje na H_{x_0} .

Příklad 2.1. Mějme zadanou množinu bodů splňujících vztah $x + y + z = e^z$, kde $x + y > 1$ a $z > 0$. Ptáme se, zda existuje závislost $z = z(x, y)$.

Příklad 2.2. Máme zadáno $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ po složkách takto:

$$\begin{aligned}\Phi^1(x, y, u, v) &= x + y^2 + u^3 - u - v = 0, \\ \Phi^2(x, y, u, v) &= x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0.\end{aligned}$$

Existují závislosti $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$?

Příklad 2.3. Je zadán vztah $y - \epsilon \sin y = x$, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Existuje závislost $y = y(x)$?

Poznámka 2.1. Věta o inverzi zaručuje lokální invertovatelnost. Nic víc.

Příklad 2.4. Je zadána $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vztahem

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

kde $x, y > 0$. Existuje F^{-1} ?

2.1. Extrémy implicitně zadaných funkcí. V následujících příkladech využijeme vědomostí nabytých o implicitních funkcích jakožto i minulého semestru.

Příklad 2.5. (Děmidovič 3651.) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 2.6. (Děmidovič 3652.) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 2.7. (Děmidovič 3653.) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

3. EXTRÉMY NA VARIETÁCH

Poznámka 3.1. Uvědomme si, že

- **Volný extrém** funkce $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jsme hledali na otevřeném $D_f \subset \mathbb{R}^n$
- **Vázaný extrém** funkce $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ hledáme na $D_f \subset \mathbb{R}^n$, který je varietou v $\mathbb{R}^n$.

Definice 3.1. (VÁZANÝ EXTRÉM) Úloha nalézt vázaný extrém funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na varietě $M \subset \mathbb{R}^n$ znamená nalézt body z M tak, že funkce f v nich má lokální extrém vzhledem k množině M .

Poznámka 3.2. (Zadání variety) Varietu M zadáme pomocí zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ následovně

$$M \equiv \Phi(x) = 0.$$

Dále pokud $\mathcal{J}\Phi$ je Jakobián zobrazení Φ , určíme dimenzi variety jako

$$\dim M = n - h(\mathcal{J}\Phi).$$

Definice 3.2. (TEČNÝ PROSTOR) Tečným prostorem k varietě M v bodě $x_0 \in M$ rozumíme

$$T_M(x_0) = [\mathcal{J}\Phi(x_0)]^{-1}(\Theta) = \ker(\mathcal{J}\Phi(x_0)).$$

Definice 3.3. (LAGRANGOVA FUNKCE) Lagrangeova funkce $\Lambda : (\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována vztahem

$$\Lambda(x) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi^j(x),$$

kde $\Phi^T(x) = (\Phi^1(x), \Phi^2(x), \dots, \Phi^m(x))$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory.

Věta 3.1. (NUTNÁ PODMÍNKA) Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in M$ lokální extrém vzhledem k varietě M . Pak

- $\exists f'(x_0) \Rightarrow (\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R})(x_0 \text{ je stacionárním bodem funkce } \Lambda),$
- $M, f \in C^{(2)} \Rightarrow \Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)}$ je semidefinitní.

Věta 3.2. (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA) Nechť $x_0 \in M$, $M, f \in C^{(2)}$ a existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že

- $\Lambda''(x_0) = \Theta,$
- $\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)}$ je PD, resp. ND.

Pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. maximum, vzhledem k varietě M .

Následující příklady byly spočteny na cvičeních, některé jsou z Děmidoviče.

Příklad 3.1. Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na varietě $M \equiv x + y = 1$.

Příklad 3.2. Nalezněte extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na varietě

$$\begin{aligned} M &\equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 3.3. Nalezněte extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na varietě

$$\begin{aligned} M &\equiv x^2 + y^2 = 2 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 3.4. Nalezněte extrémy funkce

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^p$$

na varietě

$$M \equiv \sum_{i=1}^n x_i = A > 0,$$

při $(x_i > 0)(\forall i \in \hat{n})$ a $p > 1$.

Příklad 3.5. Nalezněte extrémy funkce

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

kde $(\alpha_i, x_i > 0)(\forall i \in \hat{n})$ na varietě

$$M \equiv \sum_{i=1}^n x_i = A > 0.$$

3.1. Extrémy na kompaktech.

Poznámka 3.3. Funkce spojitá na kompaktu má globální maximum i minimum.

Příklad 3.6. Mějme funkci $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ a hledejme její extrémy vzhledem k varietě $M \equiv |x| + |y| \geq 1$.

Příklad 3.7. Hledejte extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - x - y - z - 2xy + 1,$$

na varietě

$$M \equiv \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle.$$

3.2. Příklady - Děmidovič. Následující příklady jsou z Děmidoviče [?], konkrétně od 3654 až po 3677 na stranách 339 až 341. Zde je uvádím v plném znění i s výsledky.

Najděte extrémy následujících funkcí více proměnných

P. 3.1. 3654. $z = xy$, když $x + y = 1$.

$$[z_{max} = 1/4, x = 1/2, y = 1/2]$$

P. 3.2. 3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, když $x^2 + y^2 = 1$.

$$[z_{min} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}, x_{min} = -\frac{b\epsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_{min} = -\frac{a\epsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}; z_{max} = -z_{min}, x_{max} = -x_{min}, y_{max} = -y_{min}]$$

P. 3.3. 3656. $z = x^2 + y^2$, když $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$$[z_{max} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}]$$

P. 3.4. 3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, když $x^2 + y^2 = 1$.

$$[z_{min} = \lambda_1, z_{max} = \lambda_2, \text{ kde } \lambda_1 < \lambda_2 \text{ a platí } (A - \lambda_{12})(C - \lambda_{12}) - B^2 = 0]$$

P. 3.5. 3657.1. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, když $4x^2 + y^2 = 25$.

$$[z_{max} = 106\frac{1}{4}, x = \pm 1\frac{1}{2}, y = \pm 4; z_{min} = -50, x = \pm 2, y = \mp 3]$$

P. 3.6. 3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, když $x - y = \frac{\pi}{4}$.

$$[\text{Extrém v } z = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}, x = \pi/8 + (\pi k)/2, y = -\pi/8 + (\pi k)/2, k \in \mathbb{Z}, \text{ k sudé max, k liché min}]$$

P. 3.7. 3659. $u = x - 2y + 2z$, když $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$[u_{min} = -3, x = -1/3, y = 2/3, z = -2/3; u_{max} = 3, x = 1/3, y = -2/3, z = 2/3]$$

P. 3.8. 3660. $u = x^m y^n z^p$, když $x + y + z = a$ a kde $m > 0, n > 0, p > 0$ a $a > 0$.

$$[u_{max} = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}, x/m = y/n = z/p = a/(m+n+p)]$$

P. 3.9. 3661. $u = x^2 + y^2 + z^2$, když

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde $a > b > c > 0$.

$$[u_{min} = c^2, x = 0, y = 0, z = \pm c; u_{max} = a^2, x = \pm a, y = 0, z = 0]$$

P. 3.10. 3662. $u = xy^2z^3$, když $x + 2y + 3z = a$, kde $x > 0, y > 0, z > 0$ a $a > 0$.

$$[u_{max} = (a/6)^6, x = y = z = a/6]$$

P. 3.11. 3663. $u = xyz$, když $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x + y + z = 0$.

$$[u_{min} = -1/(3\sqrt{6}), x = y = 1/\sqrt{6}, z = -2/\sqrt{6} \text{ a } x = z = 1/\sqrt{6}, y = -2/\sqrt{6}, \text{ a } y = z = 1/\sqrt{6}, x = -2/\sqrt{6}; u_{max} = 1/(3\sqrt{6}), x = y = -1/\sqrt{6}, z = 2/\sqrt{6} \text{ a } z = 2/\sqrt{6}, x = z = -1/\sqrt{6} \text{ a } y = 2/\sqrt{6}, y = z = -1/\sqrt{6} \text{ a } x = 2/\sqrt{6}]$$

P. 3.12. 3663.1. $u = xy + yz$, když $x^2 + y^2 = 2$ a $y + z = 2$, kde $x > 0, y > 0$ a $z > 0$.

$$[u_{max} = 2, x = z = y = 1]$$

P. 3.13. 3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, když $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ a kde $x > 0, y > 0$ a $z > 0$.

$$[u_{max} = 1/8, x = y = z = \pi/6]$$

P. 3.14. 3665.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

když $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 1$, kde $a > b > c > 0$ a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

$$[u_{min} = \lambda_1, u_{max} = \lambda_2, \text{ kde } \lambda_{12} - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c^2} \right) \lambda_{12} + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right), \lambda_1 < \lambda_2]$$

P. 3.15. 3666. $u = (x - \xi)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \zeta)^2$, když

$$Ax + By + Cz = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} + \frac{\mu}{\cos \beta} + \frac{\zeta}{\cos \gamma},$$

kde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

$$[u_{min} = \frac{R^2(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}, u_{max} = R^2; u_{max} = R^2]$$

P. 3.16. 3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ když

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1,$$

kde $a_i > 0, \forall i \in \hat{n}$.

$$[u_{min} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}, x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}, i \in \hat{n}]$$

P. 3.17. 3668. $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ když $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ a $p > 1, a > 0$.

$$[u_{min} = \frac{a^p}{n^{p-1}}, x_i = a/n, i \in \hat{n}]$$

P. 3.18. 3669.

$$u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}$$

když $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 1$ a $\alpha_i > 0, \beta_i > 0, x_i > 0 \forall i \in \hat{n}$.

$$[u_{min} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^2, x_i = \sqrt{\alpha_i / \beta_i} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{-1}, i \in \hat{n}]$$

P. 3.19. 3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ když $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$, kde $a > 0, \alpha_i > 1 \forall i \in \hat{n}$.

$$[u_{max} = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_n^{\alpha_n}, x_i / \alpha_i = x_j / \alpha_j]$$

P. 3.20. 3671. Najděte extrém symetrické ($a_{ij} = a_{ji}$) kvadratické formy

$$u = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i x_j,$$

na varietě

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

P. 3.21. 3672. Dokažte nerovnost

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n,$$

jsou-li $n \geq 1$, $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

NÁPOVĚDA: Zkoumejte minimum funkce $u = 1/2 \cdot (x^n + y^n)$ na varietě $x + y = s$.

P. 3.22. 3673. Dokažte *Hölderovu nerovnost*

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

NÁPOVĚDA: Zkoumejte minimum funkce

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'}\right)^{1/k'}$$

na varietě

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = A.$$

P. 3.23. 3674. Dokažte *Hadamardovu nerovnost*

$$\det(A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right).$$

4. ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

Definice 4.1. (REGULÁRNÍ ZOBRAZENÍ) Zobrazení $f : (\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá regulární, právě když platí

- (i) $(\text{def } f) = (\text{def } f)^\circ$,
- (ii) $f \in C^{(1)}(\text{def } f)$,
- (iii) $(\forall x \in \text{def } f)(f'(x) \text{ je regulární})$.

Poznámka 4.1. Regulární zobrazení je lokálně invertovatelné (jsou pro něj splněny požadavky Věty o inverzi 2.1). To znamená, že regulární zobrazení je lokálně prosté,

$$f, f' \in C^{(1)}.$$

Regulární zobrazení je též difeomorfismem.

4.1. Klasifikace záměn proměnných. V následujících odstavcích probereme záměny proměnných v obyčejných i parciálních diferenciálních výrazech.

4.2. Záměna proměnných v obyčejných diferenciálních výrazech. Nechť $y = y(x)$ je funkce $(y : (\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R})$. Pod obyčejným diferenciálním výrazem myslíme výrazy typu

$$F = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)), \quad m \geq 1.$$

Záměnou proměnných přecházíme od starých proměnných x, y k novým t a u .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

Což můžeme vystihnout pomocí zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární, tedy matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární.

Poznámka 4.2. V záměně popsané výše považujeme staré x a nové t za nezávislé proměnné. Naopak y a u za závislé, a tedy

$$\begin{aligned} y &= y(x), \\ u &= u(t). \end{aligned}$$

Pro přehled všech možností, které probereme, následuje malé schémátka

- I. Záměna nezávislých proměnných
 - a) Staré pomocí nových
 - b) Nové pomocí starých
 - c) Implicitně $\Phi(t, x) = 0$
- II. Záměna závislých a nezávislých proměnných
 - a) Staré pomocí nových
 - b) Nové pomocí starých
 - c) Implicitně $\Phi(t, u, x, y) = 0$

4.3. I. Záměna nezávislých proměnných. Zobrazení Ψ v tomto případě vypadá takto

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}.$$

4.3.1. I. a) *Staré pomocí nových.* Máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix} = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}, \\ x = \varphi(t).$$

φ musí být dostatečně diferencovatelné ($\varphi \in C^{(m)}$) vzhledem k povaze F . Zároveň je Φ regulární, neboť $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$. Nyní sestavíme tzv. ZÁKLADNÍ IDENTITU, která nám pomůže vyjádřit neznámé. V tomto případě má tvar

$$u(t) = y(\varphi(t)).$$

Tento vztah derivujeme podle t a získáme ²

$$\dot{u}(t) = y'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \Rightarrow y'(\varphi(t)) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)} \dot{u}(t). \quad (4.1)$$

Pokud chceme derivace vyššího řádu, nic nám nebrání derivovat identitu dál.

$$y''(\varphi(t)) = \frac{\dot{u}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^2} - \frac{\dot{u}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3} \quad \text{atd.} \quad (4.2)$$

Dále můžeme využít operátorového zápisu. Vyjdeme ze vztahu pro první derivaci (4.2). Operátorově se to dá přepsat následovně

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{dt}.$$

Rekurzivně zapíšeme derivaci k -tého řádu

$$\frac{d^k}{dx^k} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \right).$$

Pro náš případ druhé derivace v rovnici (4.2) dostaneme

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{\dot{\varphi}^2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3} \frac{d}{dt},$$

což souhlasí.

4.3.2. I. b) *Nové pomocí starých.* V tomto případě zaměňujeme

$$t = \alpha(x), \quad \alpha \in C^{(m)}, \alpha' \neq \Theta.$$

Sestrojíme základní identitu

$$y(x) = u(\alpha(x)).$$

Odtud snadno dostáváme derivace

$$\begin{aligned} y'(x) &= \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \\ y''(x) &= \ddot{u}(\alpha(x)) \cdot (\alpha'(x))^2 + \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha''(x). \end{aligned}$$

Operátorové zápisy jsou již patrný z výše uvedených derivací.

²Pozor! $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

4.3.3. *I. c) Implicitně $\Phi(t, x) = 0$. V tomto případě požadujeme $\partial_x \Phi, BPt\Phi \neq 0$.*

Případ **I. a)** dostaneme volbou $x = \varphi(t)$, pak máme $\Phi(t, \varphi(t)) = 0$ odkud derivací získáme

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial_t \Phi}{\partial_x \Phi}.$$

Druhou záměnu v **I. b)** dostaneme, pokud $t = \alpha(x)$, a tedy $\Phi(\alpha(x), x) = 0$. Odkud již snadno

$$\alpha'(x) = -\frac{\partial_x \Phi}{\partial_t \Phi}.$$

Poznámka 4.3. Celkem jsme převedli $F(x, y, y', \dots)$ na cosi jako $\tilde{F}(t, u, \dot{u}, \dots)$.

Příklad 4.1. *Ve výrazu*

$$F(x, y, y', y'') = x^2 y'' + x y' + y,$$

kde $x \in (0, +\infty)$ a $y \in C^{(2)}$, proveďte záměnu $x = e^t$.

Příklad 4.2. *Proveďte Keplerovu transformaci výrazu*

$$F(x, y, y', y'') = y'' - y' \frac{\epsilon \sin x}{1 - \epsilon \cos x} - y(1 - \epsilon \cos x)^2,$$

kde $\epsilon \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$ a $y \in C^{(2)}$. A

$$t = x - \epsilon \sin x.$$

4.4. II. Záměna závislých a nezávislých proměnných.

4.4.1. **II. a)** *Staré pomocí nových.* Narozdíl od předešlých případů máme pro záměnu

$$\begin{array}{ll} x = \varphi(t, u) & \text{staré: } y = y(x), \\ y = \psi(t, u) & \text{nové: } u = u(t). \end{array}$$

Pro další postup předpokládáme, že $\varphi, \psi \in C^{(n)}$, regulární. Sestrojíme základní identitu

$$\psi(t, u) = y(\varphi(t, u)).$$

Naší oblíbenou činností ³ vyjádříme

$$y' = (\partial_t \psi + \partial_u \psi \cdot \dot{u})(\partial_t \varphi + \partial_u \varphi \cdot \dot{u})^{-1}.$$

Další derivací bychom dostali výrazy pro vyšší řády.

4.4.2. **II. b)** *Nové pomocí starých.* Nyní platí

$$t = \alpha(x, y), \quad u = \beta(x, y),$$

kde $\alpha, \beta \in C^{(n)}$, regulární. Základní identita

$$\beta(x, y) = u(\alpha(x, y))$$

dává po derivaci podle x

$$y' = \frac{\dot{u} \cdot \partial_x \alpha - \partial_x \beta}{\partial_y \beta - \dot{u} \partial_y \alpha}.$$

³Derivováním podle t

4.4.3. **III. c)** *Implicitně.***Příklad 4.3.** *V rovnici*

$$(1 - x^2)^2 y'' = -y$$

proved'te substituci

$$\begin{aligned} x &= \tanh t, \\ y &= \frac{u}{\cosh t} \end{aligned}$$

*a uvidíte.***Příklad 4.4.** *V Stokesově rovnici*

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$$

proved'te záměnu

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x-b}, \\ t &= \ln \frac{x-a}{x-b}. \end{aligned}$$

4.5. **Záměna proměnných v parciálních diferenciálních výrazech.** Označme

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

a tzv. multiindex

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Jeho délka je rovna

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Parciální derivace jistho řádu se pak dá zapsat jako

$$D_Z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} Z}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Parciální diferenciální výraz m -tého řádu je výraz typu

$$F = F(x_1, \dots, x_n, z, \{D_Z^\alpha \mid |\alpha| \geq m\}).$$

V dalším textu se omezíme na funkci dvou proměnných $z = z(x, y)$. Analogicky záměnnám v obyčejných diferenciálních výrazech budeme studovat jisté případy.4.6. **I. Záměna nezávislých proměnných.****Poznámka 4.4.** Obecná záměna se provádí opět pomocí jistého zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární.Nyní v situaci I. platí, že $z = w$.

4.6.1. **I. a)** *Staré pomocí nových.* Máme

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$$

a

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ w \end{pmatrix}.$$

Základní identita má tvar

$$z(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = w(u, v).$$

Odtud (po trochu složitějším derivování podle u a v) dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_x z &= A(u, v) \partial_u w + B(u, v) \partial_v w, \\ \partial_y z &= C(u, v) \partial_u w + D(u, v) \partial_v w, \end{aligned}$$

nebo operátorově

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}.$$

4.6.2. **I. b)** *Nové pomocí starých.* V tomto případě jsou

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, y) \\ v &= \beta(x, y) \\ \Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Napišme si základní identitu

$$z(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y)).$$

Odtud již snadno derivací podle x a y vyjádříme hledané derivace.

4.6.3. **I. c)** *Implicitní funkce.*

Příklad 4.5. *Ve výrazu*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

proved'te Galileiho transformaci

$$\begin{aligned} u &= x - ct, \\ v &= x + ct. \end{aligned}$$

Příklad 4.6. *Proved'te záměnu*

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= wv, \end{aligned}$$

ve výrazu

$$x \partial_x z + y \partial_y z = z.$$

4.7. **II. Záměna nezávislých i závislých proměnných.**

4.7.1. **II. a)** *Staré pomocí nových.* Máme

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, v, w), \\y &= \psi(u, v, w), \\z &= \xi(u, v, w).\end{aligned}$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v, w) \\ \psi(u, v, w) \\ \xi(u, v, w) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$z(\varphi(u, v, w(u, v)), \psi(u, v, w(u, v))) = \xi(u, v, w(u, v))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

4.7.2. **II. b)** *Nové pomocí starých.* Máme

$$\begin{aligned}u &= \alpha(x, y, z), \\v &= \beta(x, y, z), \\w &= \gamma(x, y, z).\end{aligned}$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x, y, z) \\ \beta(x, y, z) \\ \gamma(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$w(\alpha(x, y, z(x, y)), \beta(x, y, z(x, y))) = \gamma(x, y, z(x, y))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

4.7.3. **II. c)** *Implicitní vazba. ...*

Příklad 4.7. *Ve výrazu*

$$(y - z)\partial_x z + (y + z)\partial_y z = 0,$$

proved'te záměnu proměnných

$$\begin{aligned}u &= y - z, \\v &= y + z, \\w &= x.\end{aligned}$$

4.8. **Polární transformace.** Polární transformace je transformace typu

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Zatím můžeme brát

$$\begin{aligned}\rho &\in < 0, +\infty), \\ \varphi &\in < -\pi, \pi),\end{aligned}$$

neboť pak máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Tyto obory budeme muset omezit, kvůli požadavku regularity zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Spočítejme derivaci zobrazení Ψ ,

$$\Psi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

A Jakobián (determinant matice Ψ') jest roven

$$\det \Psi' = \boxed{\mathcal{J}_{\text{polární}} = \rho}.$$

Požadavek nenulovosti Jakobiánu transformace a otevřenosti oboru ⁴ nás omezí na

$$\begin{aligned} \rho &\in (0, +\infty), \\ \varphi &\in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

Můžeme si povšimnout, že vypuštěním těchto hraničních bodů jsme z roviny xy odstranili tzv. Zápornou přímku (záporná část osy x), označme ji P_0 . Pak víme, že zobrazení Ψ je regulární jako

$$\Psi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - P_0.$$

4.8.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* V tomto odstavci si spočteme výrazy pro náhradu gradientu ∇ a Laplaciánu Δ . Pro zopakování, v kartézských souřadnicích v $\mathbb{R}^2$ máme

$$\nabla_{xyz} = (\partial_x, \partial_y), \quad (4.4)$$

$$\Delta_{xyz} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (4.5)$$

Sestrojme základní identitu

$$z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = w(\rho, \varphi),$$

z které derivací podle ρ a φ dostaneme následující vyjádření

$$\partial_x z = \cos \varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin \varphi}{\rho} \partial_\varphi w, \quad (4.6)$$

$$\partial_y z = \sin \varphi \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos \varphi}{\rho} \partial_\varphi w. \quad (4.7)$$

Prostým dosazením do vztahu (4.4) dostaneme gradient v polárních souřadnicích ⁵

$$\nabla_{\text{polární}} = \left(\cos \varphi \cdot \partial_\rho - \frac{\sin \varphi}{\rho} \partial_\varphi, \sin \varphi \cdot \partial_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} \partial_\varphi \right).$$

Pro odvození Laplaciánu je potřeba spočítat druhé derivace. to provedeme derivováním vztahů (4.6) a (4.7). Tyto výpočty jsou prostorově náročnější, takže je zde nebudeme vypisovat a je pouze na laskavém čtenáři, aby naše výsledky ověřil. Zjistí, že mnoho členů se dosazením do (4.5) vymílají. Pak Laplacián v polárních souřadnicích má tvar

$$\Delta_{\text{polární}} = \partial_{\rho\rho}^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} + \partial_{\varphi\varphi}^2 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\varphi\varphi}^2. \quad (4.8)$$

4.9. **Cylindrická (válcová) transformace.** Cylindrická transformace má tvar

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= \xi. \end{aligned}$$

Bez omezení zatím uvažujeme

$$\begin{aligned} \rho &\in (0, +\infty), \\ \varphi &\in (-\pi, \pi) \\ \xi &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

⁴viz. 4.1 a 4.2.

⁵Pozor! Jde o náhradu z kartézských souřadnic!

Zjistíme, kdy je zobrazení Ψ regulární. Máme

$$\Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Derivace dává

$$\Psi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jakobián cylindrické transformace

$$\boxed{\mathcal{J}_{\text{cylindr.}} = \rho}.$$

Odtud dostáváme omezení na obory

$$\begin{aligned} \rho &\in \mathbb{R}^+, \\ \varphi &\in (-\pi, \pi) \\ \xi &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Opět tedy vypouštíme zápornou přímku P_0 (teď je to rovina). Pro výpočet integrálu to nehraje žádnou roli, neboť $\nu(P_0) = 0$. Zobrazení Ψ je regulární při

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 - P_0 \times \mathbb{R}.$$

4.9.1. *Výpočet některých diferenciálních výrazů.* V tomto případě budeme derivovat základní identitu

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \xi) = w(\rho, \varphi, \xi)$$

podle x , y a z . Pokud si ovšem neuvědomíme, že hledané derivace jsou stejné jako v případě (4.6) a (4.7). Stačí jen spočítat derivaci podle z (derivováním základní identity podle ξ), která je však triviální

$$\partial_z f = \partial_\xi w.$$

Odtud dostáváme gradient v cylindrických souřadnicích

$$\nabla_{\text{cylindr.}} = \left(\cos \varphi \cdot \partial_\rho - \frac{\sin \varphi}{\rho} \partial_\varphi, \sin \varphi \cdot \partial_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} \partial_\varphi, \partial_\xi \right).$$

Stejně tak můžeme využít výsledků (4.8) a dostaneme Laplaceův v cylindrických souřadnicích

$$\Delta_{\text{cylindr.}} = \underbrace{\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2}_{\text{známe z polárních souř.}} + \partial_{zz}^2 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 + \partial_{\xi\xi}^2.$$

4.10. **Sférická transformace.** Pro sférickou transformaci platí

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= \rho \sin \vartheta, \end{aligned}$$

při zatím neomezených podmínkách

$$\begin{aligned} \rho &\in (0, +\infty), \\ \varphi &\in (-\pi, \pi), \\ \vartheta &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Regularita zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Po několika úpravách dostaneme

$$\det \Psi' = \boxed{\mathcal{J}_{\text{sférická}} = \rho \cos \vartheta}.$$

Regularitu tedy máme pro

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3 - P_0 \times \mathbb{R}.$$

4.10.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* Základní identita má tvar

$$f = f(\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = w(\rho, \varphi, \vartheta).$$

Derivováním této identity podle ρ , φ a ϑ dostaneme soustavu lineární vzhledem k členům $\partial_x f$, $\partial_y f$ a $\partial_z f$, které hledáme. Tuto soustavu vyřešíme pomocí Cramerova pravidla (viz. [?, p. 80, Věta 83.]) a zjistíme, že

$$\begin{aligned}\partial_x f &= \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin \varphi}{\rho \cos \vartheta} \partial_\varphi w - \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w, \\ \partial_y f &= \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\cos \varphi}{\rho \cos \vartheta} \partial_\varphi w - \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w, \\ \partial_z f &= \sin \vartheta \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos \vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w.\end{aligned}$$

Pak můžeme gradient zapsat jako

$$\nabla_{\text{sférické}} f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f).$$

Laplace...

Poznámka 4.5. Sférickou transformaci můžeme dostat jako složení dvou válcových.

4.11. **Zobecněná sférická transformace.**

Příklad 4.8. *Mějme množinu*

$$M \equiv x^3 + y^3 + z^3 = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Proveďte transformaci

$$x = \rho \cos^{2/3} \varphi \cos^{2/3} \vartheta, y = \rho \sin^{2/3} \varphi \cos^{2/3} \vartheta, z = \rho \sin^{2/3} \vartheta.$$

Příklad 4.9. *Ve výrazu*

$$\partial_{xx}^2 z + 2xy^2 \partial_x z + 2(y - y^3) \partial_y z + x^2 y^2 z = 0$$

proved'te záměnu

$$\begin{aligned}x &= uv, \\ y &= \frac{1}{v}, \\ z &= w.\end{aligned}$$

Příklad 4.10. *Ve výrazu*

$$\partial_{xx}^2 z + \partial_{yy}^2 z + cz = 0, \quad c > 0$$

proved'te záměnu

$$\begin{aligned}x &= e^u \cos v, \\ y &= e^u \sin v, \\ z &= w.\end{aligned}$$

Příklad 4.11. *V obyčejné diferenciální rovnici*

$$y' y''' - 3(y'')^2 = x$$

proved'te záměnu

$$t = y, \quad u = x.$$

4.12. **Příklady - Děmidovič.** V následujících výrazech proveďte zadané záměny.

P. 4.1. 3434. $x^2 + y'' + xy' + y = 0$, když $x = e^t$.

$$[\ddot{y} + y = 0]$$

P. 4.2. 3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, když $t = \ln |x|$.

$$[\dot{\ddot{y}} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 6y = 0]$$

P. 4.3. 3436. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, když $x = \cos t$.

$$[\ddot{y} + n^2y = 0]$$

P. 4.4. 3437. $y'' + y' \tanh x + \frac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, když $x = \ln \tan \frac{t}{2}$.

$$[\ddot{y} + m^2y = 0]$$

P. 4.5. 3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, když

$$y = ue^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi},$$

kde $p(x) \in C^1$.

$$[u'' + (q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x))u = 0]$$

P. 4.6. 3439. $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, když $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

$$[\ddot{u} + (u + 3)\dot{u} + 2u = 0]$$

P. 4.7. 3440. $(1 + x^2)^2y'' = y$, když $x = \tan t$ a $y = \frac{u}{\cos t}$, kde $u = u(t)$.

$$[\ddot{u} = 0]$$

P. 4.8. 3441. $(1 - x^2)^2y'' = -y$, když $x = \tanh t$ a $y = \frac{u}{\cosh t}$, kde $u = u(t)$.

$$[\ddot{u} = 0]$$

P. 4.9. 3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, když $x = u + t$ a $y = u - t$, kde $u = u(t)$.

$$[\ddot{u} + 8u\dot{u}^3 = 0]$$

P. 4.10. 3443. $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0$, když $x = \frac{1}{t}$ a $y = \frac{u}{t}$, kde $u = u(t)$.

$$[t^5\dot{\ddot{u}} + (3t^4 + 1)\ddot{u} + \dot{u} = 0]$$

P. 4.11. 3444. Proveďte záměnu v *Stokesově* rovnici

$$y'' = \frac{Ay}{(x - a)^2(x - b)^2},$$

pomocí

$$u = \frac{y}{x - b},$$

$$t = \ln \left| \frac{x - a}{x - b} \right|,$$

kde $u = u(t)$.

$$[u'' - u' = \frac{A}{(a - b)^2} u]$$

P. 4.12. 3445. Ukažte, že když rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

převědeme záměnou $x = \varphi(\xi)$ na tvar

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + P(\xi)\frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

pak platí, že

$$(2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi))(Q(\xi))^{-3/2} = (2p(x)q(x) + q'(x))(q(x))^{-3/2}$$

P. 4.13. 3446. Ve výrazu $\Phi(y, y', y'') = 0$, kde Φ je homogenní (adnarodnaja funkcija) funkce y, y', y'' , položte

$$y = e^{\int_{x_0}^x u dx}.$$

$$[\Phi(1, u, u' + u^2) = 0]$$

P. 4.14. 3447. Ve výrazu $F(x^2 y'', xy', y) = 0$, kde F je homogenní funkcí svých argumentů, položte

$$u = x \frac{y'}{y}.$$

$$[F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0]$$

5. LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Věta 5.1. (VĚTA O SUBSTITUCI) Buďte

- $G, H \subset \mathbb{R}^n$ otevřené,
- $\varphi : G \rightarrow H$ prosté a regulární,
- $M \subset G$ měřitelná, $\varphi(M) \subset \text{def } f$, f měřitelná.

Potom platí (pokud alespoň jedna strana má smysl)

$$\int_{\varphi(M)} f(x) dx = \int_M f(\varphi(t)) \cdot |\mathcal{J}_\varphi(t)| dt. \quad (5.9)$$

Věta 5.2. (VĚTA FUBINIOVA) Buďte $M \subset \mathbb{R}^{r+s}$, $M \subset \text{def } f$ a necht' $\int_M f$ existuje. Potom

$$\int_M f = \int_{\tilde{M}} \left(\int_{M_x} f(x, y) dy \right) dx, \quad (5.10)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid (x, y) \in M, y \in \mathbb{R}^s\}, \\ M_x &= \{y \in \mathbb{R}^s \mid (x, y) \in M\}. \end{aligned}$$

Poznámka 5.1. Smysl předešlého tvrzení spočívá v tom, že dokážeme převést více rozměrný Lebesgueův integrál na několik jednorozměrných.

Věta 5.3. (VZTAH 1-ROZMĚRNÉHO RIEMANNOVA A LEBESGUEOVA INTEGRÁLU)

- (i) Existuje-li vlastní Riemannův integrál na intervalu (a, b) , pak existuje Lebesgueův integrál a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{(a,b)} f(x) dx.$$

- (ii) Existuje-li absolutně konvergentní nevlastní Riemannův integrál, pak existuje Lebesgueův integrál a platí rovnost

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{(a,b)} f(x) dx.$$

Příklad 5.1. Proved'te záměnu pořadí integrování

$$\int_0^a dx \int_0^x dy f(x, y).$$

Vidíme (pokud si sestrojíme třeba obrázek), že (ve shodě s 5.2) platí

$$M_x = (0, x), \tilde{M} = (0, a).$$

Množina M je v kartézských souřadnicích vyjádřena jako trojúhelník. Dále budeme teď i v nejbližší budoucnosti předpokládat, že f je Lebesgueovsky integrabilní, a tedy $\int_M f$ existuje. Použijeme tedy Fubiniovu větu

$$\int_M f \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^x dy f(x, y) = \int_{(0,a)} dx \int_{(0,x)} dy f(x, y) = \int_{\tilde{M}} dy \int_{M_y} dx f(x, y),$$

kde $\tilde{M} = (0, a)$ a $M_y = (y, a)$, takže námi hledaný tvar je

$$\int_0^a dy \int_y^a dx f(x, y).$$

Příklad 5.2. Zaměňte pořadí integrace

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y).$$

Vidíme, že $\tilde{M} = (0, 2)$ a $M_x = (x, 2x)$. Z náčrtku je patrné, že $\tilde{M} = (0, 4)$ a

$$M_y = \begin{cases} (\frac{y}{2}, y), & y \leq 2 \\ (\frac{y}{2}, 2), & y > 2 \end{cases}$$

Takže

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} dy f(x, y) = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y dx f(x, y) + \int_2^4 dy \int_{y/2}^y dx f(x, y).$$

Příklad 5.3. Zaměňte pořadí integrace ve výrazu

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy f(x, y), \quad a > 0.$$

Opět vidíme, že $\tilde{M} = (0, 2a)$, $M_x = (\sqrt{2ax-x^2}, \sqrt{2ax})$.⁶ Meze pro záměnu pak jsou následující

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= (0, 2a) \\ M_y &= \begin{cases} (\frac{y^2}{2a}, a - \sqrt{a^2 - y^2}) \cup (a + \sqrt{a^2 - y^2}, 2a), & y < a \\ (\frac{y^2}{2a}, 2a), & y \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

Integrál v zadání je tedy roven

$$\int_0^a dy \left[\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} dx f(x, y) + \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} dx f(x, y) \right] + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} dx f(x, y).$$

Příklad 5.4. Spočítejte integrál

$$\int_M y^2 dx dy,$$

kde $M = \{(x, y) | x \in (0, 2\pi a), y \in (0, \varphi(x))\}$ kde $\varphi(x)$ je zadáno parametricky

$$x = a(t - \sin t) \quad (5.11)$$

$$y = a(1 - \cos t) \quad (5.12)$$

$$a > 0, t \in (0, 2\pi) \quad (5.13)$$

Množina M představuje jeden kopeček cykloidy.

$$\int_0^{2\pi a} dx \int_0^{\varphi(x)} dy \cdot y^2 = \int_0^{2\pi a} dx \frac{1}{3} \varphi(x)^3$$

nyní použijeme jako substituci (5.11) a dostaneme

$$\int_0^{2\pi} dt \frac{1}{3} \underbrace{(a(1 - \cos t))}_{\varphi(x)}^3 \cdot \underbrace{(a - a \cos t)}_{\text{Jakobián}} = \frac{35}{12} \pi a^4.$$

⁶Ve všech těchto typech příkladů je nejlepší si nakreslit obrázek, pokud to jde. Zde jen uvádím takovou kostřičku...

Příklad 5.5. *Spočtete*

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ a použijte vhodnou substituci.

Pod vhodnou substitucí si v tomto případě představují polární (4.3) transformaci. Kvůli požadavkům na substituci v integrálu 5.1 budeme integrovat přes novou množinu

$$\tilde{M} = M - (P_0 \cap K),$$

kde P_0 je záporná polopřímka a K je okraj kruhu. To nás ale vůbec nebolí, protože jde o množiny nulové míry. Můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\tilde{M}} f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{\text{VoS}}{=} \int_{(0, a) \times (-\pi, \pi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \stackrel{\text{F}}{=} \\ &\stackrel{\text{F}}{=} \int_{(0, a)} d\rho \, \rho \int_{(-\pi, \pi)} d\varphi f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \stackrel{\text{R}}{=} \int_0^a d\rho \, \rho \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \end{aligned}$$

Zde jsme v každém kroku označili, kterou větu používáme. Konkrétně 5.1, 5.2, 5.3. Ještě si můžeme s výsledkem lehce pohrát a zaměnit pořadí integrování, což není v tomto případě těžké, neboť integrujeme na obdélníku. Můžeme tedy dostat (pokračují z prvního řádku výše)

$$\stackrel{\text{F}}{=} \int_{(-\pi, \pi)} d\varphi \int_{(0, a)} d\rho \, \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \stackrel{\text{R}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \, \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

V dalších příkladech už budeme pokračovat rychleji. V tomto jsme problém rozebrali až do morku kosti.

Příklad 5.6. *Ve výrazu*

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$ proveďte vhodnou substituci.

Doplněním na čtverce získáme $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$, což představuje kruh s posunutým středem a jistým poloměrem. Za substituci proto zvolíme posunutou polární. To jest

$$\begin{aligned} x - \frac{a}{2} &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Jakobián se zřejmě nezměnil a meze volíme analogicky jako minule. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) \, dx \, dy &\stackrel{\text{VoS}}{=} \int_{(0, a/2) \times (-\pi, \pi)} f\left(\frac{a}{2} + \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi\right) d\varphi \, d\rho \stackrel{\text{F}}{=} \\ &\stackrel{\text{F}}{=} \int_{(0, a/2)} d\rho \, \rho \int_{(-\pi, \pi)} d\varphi f(\dots) \stackrel{\text{F}}{=} \int_{(-\pi, \pi)} d\varphi \int_{(0, a/2)} d\rho \, \rho f(\dots). \end{aligned}$$

Pokud bychom neodhalili symetrii dané množiny M a použili normální polární substituci (4.3), postupovali bychom následovně. Dosazením do nerovnice obdržíme

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \leq a \rho \cos \varphi,$$

po úpravě

$$0 \leq \rho \leq a \cos \varphi.$$

Odtud vidíme, že musíme brát $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ a $\rho \in (0, a \cos \varphi)$. Sestavení integrálu je již maličkost.

Příklad 5.7. Vypočítejte

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

That's easy! Polární substitute:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & \rho &\in (0, a), \\ y &= \rho \sin \varphi, & \varphi &\in (-\pi, \pi), \\ \mathcal{J} &= \rho. \end{aligned}$$

A vidíme, že

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \stackrel{\text{VoS}}{=} \int_{(0,a) \times (-\pi,\pi)} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \stackrel{\text{F}}{=} \dots \stackrel{\text{R}}{=} \int_0^a d\rho \, \rho^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Příklad 5.8. Vypočítejte

$$\int_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

Množina M je evidentně mezikružší, použijeme proto polární substituci a ihned můžeme psát

$$? = \int_{\pi}^{2\pi} d\rho \, \rho \sin \rho \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = -6\pi^2.$$

Příklad 5.9. Mějme množinu

$$S = (a, a+h) \times (b, b+h), \quad a, b, h > 0$$

a substituci

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}.$$

Spočítejte míru množiny S a míru množiny, která vznikne po substituci.

Máme transformaci

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2/x \\ \sqrt{xy} \end{pmatrix}.$$

Chceme tedy spočítat

$$\mu(S) = ?, \quad \mu(\tilde{S}) = \mu(\Phi(S)) = ?$$

Proto nejprve musíme zjistit, zda-li je transformace Φ korektní, tedy regulární a prostá. Regularitu ověříme výpočtem jakobiánu

$$\mathcal{J}_{\Phi} = \det \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$

což při našich parametrech, kterými je zadána S , je nenulový výraz, tedy transformace je regulární.

Prostotu musíme ověřit nalezením inverzního zobrazení. Neboť vyžadujeme globální prostotu, nikoli lokální ⁷, musíme to zbastlit takhle na koleně. Po chvíli pocení dostaneme

$$y = (uv^2)^{1/3}, \quad x = \left(\frac{v^4}{u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Nyní ty míry ⁸

$$\mu(S) = \int_S dx \, dy = h^2$$

⁷viz. 2.1

⁸90:50:90

a analogicky

$$\mu(\tilde{S}) = \int_{\tilde{S}} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \stackrel{\text{VoS}}{=} \int_S \underbrace{\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{3}{2}}}_{|\mathcal{J}_{\Phi}|} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\frac{6}{5} \left((a+h)^{-1/2} - a^{-1/2} \right) \left((b+h)^{5/2} - b^{5/2} \right).$$

5.1. Eulerovy integrály.

Definice 5.1. (GAMMA FUNKCE) Gamma funkce Γ je definována vztahem

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \quad p > 0.$$

Definice 5.2. (BETA FUNKCE) Beta funkce $\mathcal{B}$ je definována následovně

$$\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathrm{d}t, \quad p, q > 0.$$

Poznámka 5.2. Některé užitečné vlastnosti Gama funkce:

- (1) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$,
- (2) $\Gamma(p + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$,
- (3) $\Gamma(n+1) = n!$,
- (4) $\Gamma(1) = 1$.

Poznámka 5.3. A vlastnosti Beta funkce:

$$\mathcal{B}(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\mathcal{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad p \in (0, 1).$$

Příklad 5.10. Ukážeme souvislost jistého notoricky známého integrálu s Beta funkcí a to

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x, \quad m, n > -1.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \left| \text{subst. } t = \sin x \right| = \int_0^1 t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}t = \left| \text{subst. } u = t^2 \right| = \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \mathcal{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \quad (5.15)$$

Příklad 5.11. Spočtete integrál

$$\iint_{x^4+y^4 \leq 1} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Příklad 5.12. Vyčíslete integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} \mathrm{d}x, \quad m \neq n.$$

Příklad 5.13. Vyjádřete

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy,$$

kde Ω je oblas vymezená křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$ a $4x = y$.

Příklad 5.14. Vypočtěte plochu ohraničenou křivkami

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2), \\ x^2 + y^2 &\geq a^2. \end{aligned}$$

Příklad 5.15. Spočtěte objem útvaru

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{n} \left(\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \right).$$

Příklad 5.16. Mějme

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) \leq 1\},$$

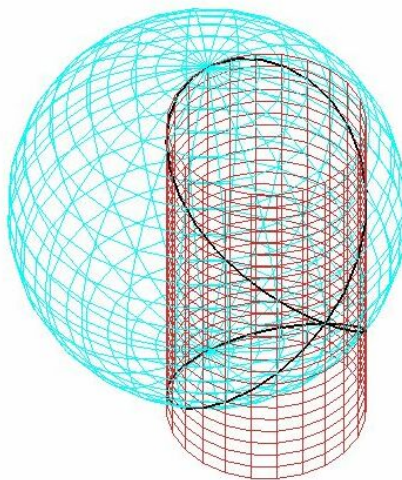
kde Q je pozitivně definitní kvadratická forma. Vypočtěte míru množiny M .

Příklad 5.17. Vypočtěte objem prostoru ohraničeného plochami

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2, \\ z &= x + y. \end{aligned}$$

Příklad 5.18. Vypočítejte objem omezený těmito plochami (Vivianioho těleso) :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x^2 + y^2 &= ax. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 1. Vivianioho těleso

Příklad 5.19. Spočtěte objem n -simplexu v $\mathbb{R}^n$. Tedy

$$\begin{aligned} M &= [x_0, x_1, \dots, x_n]_{\kappa}, \quad x_j \in \mathbb{R}^n, \quad \forall j \in \hat{n}, \\ \nu(M) &=? \end{aligned}$$

Příklad 5.20. Vypočtěte Eulerův integrál

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = I.$$

Tento integrál není lehké spočítat, neboť primitivní funkce existuje pouze ve formě řady, ani nemůžeme použít funkční posloupnost $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n$, protože stejnoměrná konvergence $f_n(x) \xrightarrow{A} e^{-x^2}$ platí pouze pro omezenou A .⁹

Zkoumejme integrál podobného tvaru, zdánlivě složitější, a provedme jednoduché úpravy.

$$\tilde{I} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \stackrel{F}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = I^2.$$

Dále také můžeme provést v $\tilde{I}$ polární substituci (4.3). Obdržíme

$$\tilde{I} \stackrel{R}{=} \int_0^{+\infty} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\rho^2} \rho d\varphi = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi.$$

Shrneme-li výsledky, vidíme, že

$$\tilde{I} = \pi = I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$

5.2. Příklady z Děmidoviče. V následujících integrálech zaměňte pořádek integrace.

P. 5.1. 3924.

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$$

$$[\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx]$$

P. 5.2. 3925.

$$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$$

$$[\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx]$$

P. 5.3. 3926.

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$$

$$[\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} f(x, y) dx]$$

P. 5.4. 3927.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

$$[\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx]$$

P. 5.5. 3928.

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$$

$$[\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx]$$

⁹Nejsme tedy schopni zaměnit limitu a integrál.

P. 5.6. 3929.

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad a > 0$$

$$\left[\int_0^a dy \left[\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right] + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx \right]$$

P. 5.7. 3930.

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$$

$$\left[\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \right]$$

P. 5.8. 3931.

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$$

$$\left[\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x, y) dx \right]$$

P. 5.9. 3932. Vypočtete integrál

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy,$$

jestliže oblast Ω je ohraničena křivkami $y^2 = 2px$ a $x = \frac{p}{2}$, kde $p > 0$.

$$\left[\frac{p^5}{21} \right]$$

P. 5.10. 3933. Vypočtete integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}, \quad a > 0,$$

když oblast Ω je ohraničena kružnicí se středem v (a, a) a poloměrem a .¹⁰

$$\left[(2\sqrt{2} - 8/3)a\sqrt{a} \right]$$

5.3. Parametrické integrály. Začneme příkladem.

Příklad 5.21. *Určete*

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx, \quad |\alpha| < 1.$$

Evidentně

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{-\alpha} x dx = \frac{1}{2} \mathcal{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \pi(\frac{\alpha+1}{2})}.$$

Příklad 5.22. *Následující integrál sice není parametrickým, ale naučí nás, že za vším musíme vidět Γ a $\mathcal{B}$ funkce, se kterými se pracuje daleko lépe, než kdybychom použili naše staré konvenční zbraně.*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx,$$

$$I = \mathcal{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

¹⁰Asi tak nějak, moc neumím rusky...

Příklad 5.23. *A ještě jeden podobného ražení*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Proveďme substituci $t = x^3$ a obdržíme

$$\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t} dt = \frac{1}{3} \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.3.1. *Teoretická vsuvka - Operace s parametrickými integrály.*

Věta 5.4. (O LIMITĚ A PARAMETRICKÉM INTEGRÁLU) Můžeme zaměnit limitu a integrál

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_M f(x, \alpha) dx = \int_M \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx,$$

platí-li následující předpoklady

- (i) $f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{M}(M)$, $\forall \alpha \in A$,¹¹
- (ii) $(\forall x \in M)(\exists \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha))$,
- (iii) Existuje integrabilní majoranta, tj. $(\forall x \in M)(\forall \alpha \in A)(|f(x, \alpha)| \leq g(x))$, kde $g \in L(M)$.¹²

Věta 5.5. (O SPOJITOSTI A PARAMETRICKÉM INTEGRÁLU) Podobně jako v předešlé větě, můžeme za analogických předpokladů tvrdit, že

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_M f(x, \alpha) dx = \int_M f(x, \alpha_0) dx.$$

Věta 5.6. (O DERIVACI A PARAMETRICKÉM INTEGRÁLU) Necht' $A = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Potom můžeme zaměnit integraci a derivaci

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_M f(x, \alpha) dx \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \int_M \partial_\alpha f(x, \alpha_0) dx,$$

platí-li následující podmínky

- (i) $(\exists \alpha_0 \in A)(f(\cdot, \alpha_0) \in L(M))$,
- (ii) $(\forall x \in M)(\forall \alpha \in A)(\exists \partial_\alpha f(x, \alpha))$,
- (iii) $(\forall \alpha \in A)(f(\cdot, \alpha) \in \mathcal{M}(M))$,
- (iv) Existuje integrabilní majoranta, tj. $(\forall x \in M)(\forall \alpha \in A)(|\partial_\alpha f(x, \alpha)| \leq g(x))$, kde $g \in L(M)$.

Příklad 5.24. *Spočtete*

$$I(A) = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \right) \cdot \frac{1}{\cos x} dx, \quad |a| < 1.$$

Označme si pro přehlednost integrand jako $f(x, a)$. Jeho derivací podle parametru získáme

$$\partial_a f(x, a) = \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x}.$$

Při našich podmínkách $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $|a| < 1$ s můžeme při derivování omezit na $A = (a_0 - \epsilon, a_0 + \epsilon)$, kde $A \subset (-1, 1)$. Nyní vidíme, že

$$\frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x} \leq \frac{2}{1 - \max\{(a_0 - \epsilon)^2, (a_0 + \epsilon)^2\} \cos^2 x}.$$

Ostatní body věty 5.6 vyplývají ze spojitosti f .

¹¹Symbolem $\mathcal{M}(M)$ označujeme množinu všech měřitelných funkcí na M .

¹²Symbolem $L(M)$ označujeme množinu všech integrabilních funkcí (s konečným integrálem) na M .

Pokračujeme ve výpočtu

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}},$$

kde jsme použili substituci $t = \operatorname{tg} x$. A teď stačí už jen spočítat I :

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \arcsin a + C,$$

kde ze znalosti $I(0) = 0$ vyplývá, že $C = 0$.

Příklad 5.25. *Vypočtěte*

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Co jiného, než derivování integrandu by nás mohlo napadnou...

$$\partial_a f(n, x, a) = -(n+1) \cdot (x^2 + a)^{-n-2}.$$

Vezmeme-li $A = (a_0 - \epsilon, a_0 + \epsilon)$ pak můžeme tvrdit, že

$$|\partial_a f(n, x, a)| \leq \frac{n+1}{x^2 + a_0 - \epsilon}.$$

Proto máme

$$I'_n(a) = -(n+1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+2}} = -(n+1)I_{n+1}(a).^{13}$$

Snadno nahlédneme, že

$$I_0(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$$

a dále

$$I_n(a) = -\frac{I'_{n-1}(a)}{n} = \frac{(2n-1)!!}{n!} \frac{\pi}{2^{n+1}} a.$$

Příklad 5.26. *Vypočtěte*

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln(1 - \alpha^2 x^2) \cdots \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

Příklad 5.27. *Určete*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) \cdot \operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Označme integrand symbolem $f(x, \alpha, \beta)$. Zřejmě je f spojitá, tedy měřitelná vzhledem k x . Spočítejme si

$$\partial_\alpha f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{x} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{1 + (\alpha x)^2}.$$

Snadno nahlédneme, že

$$|\partial_\alpha f| \leq \frac{\mathcal{K}}{1 + x^2(\alpha_0 - \epsilon)^2},$$

kde $\mathcal{K}$ je konstanta omezující podíl arcustangens a x a $\alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon)$. Kdybychom nyní zkusili vypočítat původní $I(\alpha, \beta)$,

$$\partial_\alpha I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{x(1 + \alpha^2 x^2)} dx. \quad (5.16)$$

¹³Kozubova diferenciálně diferenční rovnice s nekonstantními koeficienty alias KDDRNK.

zjistili bychom, že to není tak snadné. Vidíme ale, že můžeme derivovat dál, neboť máme další parametrický integrál (5.16). Obdržíme

$$\partial_{\beta\alpha}^2 f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{(1 + (\alpha x)^2)(1 + (\beta x)^2)}.$$

Tento výraz v absolutní hodnotě můžeme omezit stejným způsobem jako v případě α . Dostali jsme tedy integrál

$$\partial_{\beta\alpha}^2 I(\alpha\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2 x^2)(1 + \beta^2 x^2)},$$

který již snadno spočítáme rozkladem na parciální zlomky a postupně získáme

$$\partial_{\alpha} I(\alpha\beta) = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \beta) - \frac{\pi}{2} \ln \alpha.$$

Odkud opět integrací dostaneme již konečný výsledek

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}} \right).$$

Příklad 5.28. *Vypočítejte*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx \quad a > 0.$$

Příklad 5.29. *Vypočtěte*

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.30. *Vypočtěte*

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$$

5.4. Křivkový integrál 1. a 2. druhu.

5.4.1. *Konstrukce křivkového integrálu 1. druhu.* Mějme funkci $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, kde C je křivka v $\mathbb{R}^n$, tj.

$$(\exists \psi :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^n)(\psi \text{ je spojitá a } \psi(] \alpha, \beta[) = C).$$

Tuto křivku rozdělíme na dílky. V l -tém úseku délky Δl vybereme reprezentanta x_l . Provedeme součet přes všechny dílky

$$\sum f(x_l) \Delta l.$$

Pokud tento pro všechna zjemnění rozdělení a libovolné reprezentanty jde ke stejné hodnotě, pak tuto hodnotu nazveme křivkovým integrálem 1. druhu a značíme

$$\int_C f(x) dl.$$

Pro výpočet použijeme vhodnou parametrizaci φ křivky C , evidentně integrál nezávisí na volbě parametrizace. Máme tedy

$$\int_C f(x) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\|\dot{\varphi}(t)\|}_{\text{Euklidovská norma}} dt.$$

5.4.2. *Konstrukce křivkového integrálu 2. druhu.* Křivkový integrál 2. druhu se od křivkového integrálu 1. druhu liší tím, že uvažuje i orientaci křivky. Bud' proto $\vec{C}$ orientovaná křivka, tj.

$$(\exists \psi : C \rightarrow \mathbb{R})(C = \psi(< a, b >)), \text{ a navíc} \\ (\exists o : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}^n),$$

kde $o(t)$ je tečný vektor v bodě $\psi(t)$ a o se nazývá orientace. Dále je zadáno tenzorové pole 2. řádu

$$F : C \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Křivku opět rozdělíme na malé úseky a v každém vybereme reprezentanta x_l , definujeme

$$\vec{\Delta}_l = \Delta_l \cdot o(x_l),$$

kde Δ_l je délka l -tého úseku v němž je také x_l . Nyní sestojíme součet

$$\sum F(x_l) \cdot \vec{\Delta}_l.$$

Pokud pro všechna zjemnění a libovolnou volbu reprezentantů jde tento součet vždy ke stejnému číslu řekneme, že existuje křivkový integrál 2. druhu a značíme

$$\int_C F(x) \cdot d\vec{l} = \int_C F^1(x) dx^1 + \dots + F^n(x) dx^n.$$

Pro výpočet opět zavedem parametrizaci φ a platí

$$\int_C F(x) d\vec{l} = \pm \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt$$

kde znaménko $\pm$ určuje v jakém směru integrujeme. Shoduje-li se směr $\dot{\varphi}$ a o pak platí plus, v opačném případě minus.

Příklad 5.31. *Vypočítejte křivkový integrál 1. druhu*

$$I = \int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl,$$

kde křivka L je dána následovně

$$L \equiv x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Použijeme zobecněnou sférickou transformaci

$$x(t) = \rho(t) \cos^3 t, \\ y(t) = \rho(t) \sin^3 t.$$

Potom ze zadání křivky dostáváme

$$\rho(t) = a.$$

Dále máme parametrizaci

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{pmatrix}, \quad t \in (-\pi, \pi)$$

a

$$||\dot{\Psi}||^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

Původní integrál v zadání převedeme na tvar

$$\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl = \int_{-\pi}^{\pi} (a^{4/3} \cos^4 t + a^{4/3} \sin^4 t) \cdot 3a |\sin t| \cdot |\cos t| dt.$$

Vzhledem k periodicitě integrandu se omezíme na $(0, \frac{\pi}{2})$, čímž se zbavíme absolutních hodnot a přidáme 4.

$$I = 4 \cdot 3a^{7/3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt.$$

Snadno nahlédneme, že

$$I = 12a^{7/3} \frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(4)} = 4a^{7/3}.$$

Příklad 5.32. Spočtěte integrál

$$I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl,$$

kde

$$L \equiv (x^2 + y^2)^{3/2} = a^2(x^2 - y^2).$$

Příklad 5.33. Vypočtěte

$$\int_C y^2 dl,$$

kde C je oblouk cykloidy s parametrizací

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

Příklad 5.34. Spočtěte integrál

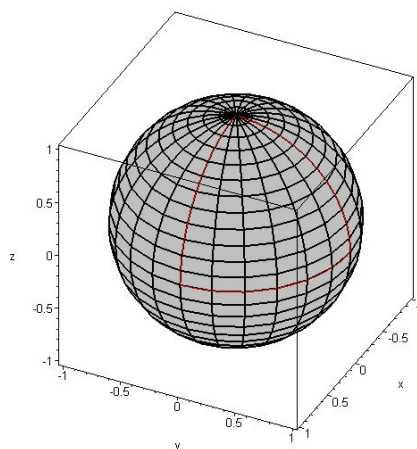
$$\int_{AB} (2xy \, dx + x^2 \, dy),$$

kde AB je křivka v $\mathbb{R}^2$, zadaná dále, spojující body $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$. Uvažujte přímku, parabolu a lomenou čáru jdoucí po ose x a pak kolmo nahoru k bodu A .

Příklad 5.35. Spočtěte křivkový integrál v $\mathbb{R}^3$

$$\int_L (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz,$$

kde L je křivka vzniknuvší průnikem kulové plochy s poloměrem 1 a středem v počátku s rovinami x, y, x, z a y, z v kladném kvadrantu. Názorný náčrt je na obrázku 5.4.2



OBRÁZEK 2. Křivka L

5.5. Greenova formule.

Věta 5.7. (GREEN) Buď C uzavřená, kladně orientovaná ¹⁴ křivka, $D = \text{Int } C$, $F, G \in C^1$ na H_D . Potom

$$\int_C F \, dx + G \, dy = \int_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right). \quad (5.17)$$

Příklad 5.36. Pomocí Greenovy formule určete

$$\int_L (e^x \sin y - py) \, dx + (e^y \cos y - p) \, dy,$$

kde křivka L je půlkružnice se středem v bodě $(a/2, 0)$ a poloměrem a .

Příklad 5.37. Spočítejte integrál

$$I = \int_L \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2},$$

kde L je libovolná po částech spojitá, uzavřená křivka omotávající počátek s orientací proti hodinovým ručičkám.

5.6. Plošné integrály.

5.6.1. *Plošný integrál 1. druhu.* Náš problém spočívá v ploše $S \subset \mathbb{R}^3$, na které je definováno $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Myšlenka je asi taková, že plochu rozsekáme na malé kousíčky ΔS , ve kterých vybereme reprezentanta x_0 a zkoumáme

$$\sum f(x_0) \Delta S.$$

Pokud tyto součty při různých zjemnění jdou ke stejnému číslu, nazveme ho plošný integrál 1. druhu a značíme

$$\int_S f(x) \, dS.$$

Tento integrál opět počítáme pomocí parametrizace $\varphi : M \rightarrow S$, $M \subset \mathbb{R}^2$, pak totiž

$$\int_S f(x) \, dS = \int_M f(\varphi(u, v)) \cdot \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, du \, dv.$$

5.6.2. *Plošný integrál 2. druhu.* Analogicky jako u křivkového 2. druhu zde uvažujeme nyní orientaci plochy. Hned na začátek poznamenejme, že ne každá plocha má orientaci. Například Möbiův proužek a Leidenská láhev. Mějme opět plochu $S \subset \mathbb{R}^3$, tentokrát orientovanou, tzn. pro každý bod $x \in S$ je definována její normála $\vec{o}(x)$. Dále máme nějaké vektorové pole $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Plochu rozsekáme na elementy ΔS a v každém vybereme bod x_0 , dostaneme

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \cdot \vec{o}(x_0)$$

a sestrojíme součet

$$\sum F(x_0) \cdot \Delta \vec{S},$$

kde suma jde přes všechny elementy ΔS . Pokud konverguje ke stejnému číslu pro libovolné zjemnění, pak ono číslo nazýváme plošným integrálem 2. druhu a značíme

$$\int_S F(x) \cdot d\vec{S},$$

nebo pomocí diferenciální 2-formy

$$\int_S F(x) \cdot d\vec{S} = \int_S F^1(x, y, z) \, dy \, dz + F^2(x, y, z) \, dz \, dx + F^3(x, y, z) \, dx \, dy.$$

¹⁴...něco jako proti směru hodinových ručiček

Pro výpočet můžeme použít parametrizaci φ stejně jako v předešlých případech

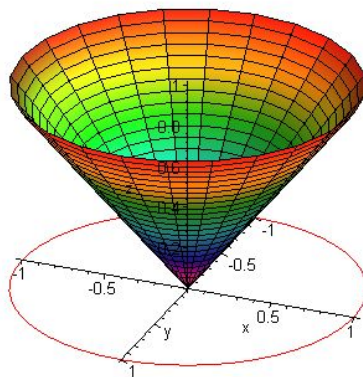
$$\int_S F(x) \cdot d\vec{S} = \pm \int_M F(\varphi(u, v)) \cdot (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi) du dv,$$

kde kladné znaménko volíme při stejné orientaci $\vec{o}$ a vektorového součinu derivací parametrizace, v opačném případě volíme minus.

Příklad 5.38. Vypočítejte povrch koule o poloměru $a > 0$.

Příklad 5.39. Vypočítejte povrch pláště kužele o výšce 1,

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2, \quad a > 0.$$



OBRÁZEK 3. Kužel s průmětem

Příklad 5.40. Spočítejte povrch Vivianiho tělesa.

Příklad 5.41. Určete

$$I = \int_M \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^4}{c^4}} dS,$$

kde

$$M \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

Příklad 5.42. Spočítejte

$$I = \int_M (x^2 + y^2) dx dy,$$

kde

$$M \equiv x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0, \quad \vec{o} = (0, 0, -1)$$

je kruh v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 5.43. Vypočítejte

$$I = \int_M x dx dz + y dz dx + z dx dy,$$

kde M je koule se středem v počátku a poloměrem a , orientovaná vně.

5.7. Stokesovy věty.

Věta 5.8. (GREENOVA VĚTA) Ta sem též patří, viz (5.17). Jen pro úplnost

$$\int_{\partial A} F \, dx + G \, dy = \int_A \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

kde A je plocha v $\mathbb{R}^2$ a ∂A je její hranice, tedy křivka, orientovaná proti směru hodinových ručiček a $F, G \in C^1(H_A)$.

Věta 5.9. (KLASICKÁ STOKESOVA VĚTA)

$$\int_{\partial B} (F \, dx + G \, dy + H \, dz) = \int_B \operatorname{rot} \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}. \quad (5.18)$$

Věta 5.10. (GAUSSOVA-OSTROGRADSKÉHO VĚTA)

$$\int_{\partial A} (F \, dy \, dz + G \, dz \, dx + H \, dx \, dy) = \int_A \operatorname{div} \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \, dx \, dy \, dz, \quad (5.19)$$

kde A je nějaká nedegenerovaná podmnožina $\mathbb{R}^3$ a její hranice ∂A je orientovaná vně.

Příklad 5.44. *Tentýž příklad jako výše, jiným způsobem.*

$$\int_M (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy),$$

kde $M \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ je orientovaná vně.

Máme vektorové pole

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad F, M \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^3).$$

Vidíme, že

$$\operatorname{div} F = 3,$$

a použijeme-li Gaussovu větu (5.19) dostaneme

$$\int_{B(0,a)} 3 \, dx \, dy \, dz = 4\pi a^3.$$

Příklad 5.45. *Spočtěte plochu elipsy*

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hledáme tedy

$$\mu(E) = \int_E 1 \, dx \, dy.$$

Zvolme vektorové pole následovně

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad F \in C^{(\infty)}.$$

Pak

$$\mu(E) = \int_E 1 \, dx \, dy = \int_{\partial E} (F^1 \, dx + F^2 \, dy) = \int_E \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 2\mu(E).$$

Dále zvolme transformaci

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Provedem substituci

$$\mu(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial E} F^1 \, dx + F^2 \, dy = \frac{1}{2} ab \int_{-\pi}^{\pi} dt = \pi ab.$$

Příklad 5.46. *Najděte*

$$\int_C (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz,$$

kde křivka C je tzv. šroubovice daná parametrizací

$$C : \varphi(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}, \quad t \in]-\pi, \pi[.$$

6. FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Poznámka 6.1. Bude se nám hodit Eulerova formule

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Poznámka 6.2.

Příklad 6.1. Ukázka komplexního logaritmu:

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln_0(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \arg_0(\sqrt{3} + i).$$

Snadno nahlédneme, že

$$\arg_0(\sqrt{3} + i) = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

A

$$\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{6}.$$

Poznámka 6.3. Některé elementární funkce komplexní proměnné:

- polynomy: $\sum_{i=0}^p x_i z^i$,
- exponenciála: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- sinus: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
- cosinus: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Příklad 6.2. Řešte

$$\cos z = 2,$$

$z \in \mathbb{C}$.

Poznámka 6.4. O diferencovatelnosti $f(z)$. Problém můžeme formulovat následovně

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z = x + iy,$$

$$f(x) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Platí tzv. Riemann-Cauchyho podmínky :

$f'(z_0)$ existuje, právě když platí

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

(ii)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

A dále platí, že

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x_0, y_0).$$

Příklad 6.3. Má následující funkce derivaci?

$$f(z) = y + ix$$

Příklad 6.4. Má funkce

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

derivaci?

6.1. Křivkový integrál v $\mathbb{C}$.

Poznámka 6.5. Křivkový integrál 1. druhu (málo používaný)

$$\int_C |f(z)| \, dz = \int_C u(x, y) \, dl + i \int_C v(x, y) \, dl,$$

zřejmě

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Křivkový integrál 2. druhu (C je orientovaná)

$$\int_C f(z) \, dz = \int_C (u(x, y) \, dx - v(x, y) \, dy) + i \int_C (v(x, y) \, dx + u(x, y) \, dy).$$

Opět definován pomocí reálného křivkového integrálu 2. druhu.

Definice 6.1. (HOLOMORFNÍ FUNKCE) Funkce f je na $A \subset \mathbb{C}$ holomorfní právě když $(\forall z \in A)(f'(z)$ existuje).

Věta 6.1. (CAUCHYHO INTEGRÁLNÍ VĚTA) f je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $A = A^\circ$, $C \subset A$ křivka se stopou v A právě když integrál

$$\int_C f(z) \, dz$$

nezávisí na cestě integrace.

Poznámka 6.6. Je-li C uzavřená a f holomorfní pak $\int_C f(z) \, dz = 0$.

Poznámka 6.7. (NEWTONOVA FORMULE) Necht f je holomorfní na A , $z_0, z_1 \in A$ pak

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz = F(z_1) - F(z_0),$$

kde $F'(z) = f(z)$.

Příklad 6.5. Výpočet křivkového integrálu $\int_C z \, dz$, kde $C: \varphi(t) = t + 2it$, $t \in (0, 1)$.

máme

$$u(x, y) = x, v(x, y) = -y,$$

$$\varphi_{Re}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \varphi_{Im}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Takže náš integrál

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt + i \int_0^1 \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^1 5t dt + i \int_0^1 0 dt = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 6.6. Spočítejte integrál

$$\int_C f(z) \, dz, \quad f(z) = y + 1 - ix,$$

pomocí Newtonovy formule.

Vidíme, že

$$f(z) = 1 - iz,$$

a primitivní funkce

$$F(z) = C + z - \frac{i}{2}z^2.$$

Newtonova formule 6.7 nám pak dává

$$I = F(-i) - F(1) = -1.$$

Příklad 6.7. Spočtěte integrál

$$\int_C \frac{dz}{z-a}, \quad a \in \mathbb{C},$$

kde C je uzavřená, kladně orientovaná, po částech hladká křivka a $a \notin [C]$.

Vidíme, že

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $a \notin A$.

Rozebereme dva případy, které mohou nastat.

1) $a \in \text{Ext } C$: Tedy a je vně C , pak je f na A holomorfní a

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 0.$$

2) $a \in \text{Int } C$: Nenajdeme vhodnou A , kde bychom mohli použít Cauchyho integrální větu 6.1.

Poznámka 6.8. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

má primitivní funkci

$$\ln_{\Theta}(z-a)$$

na libovolné množině A takové, že $P_{\Theta \text{ not}} \subset A$ (záporná polopřímka).

Dále k příkladu...