TURISTICKÝ PRŮVODCE MATEMATICKOU ANALÝZOU 4

WIKI SKRIPTUM FJFI

Obsah

Date: 24. září 2020.

Značení

Značka	**Popis**
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{X}_0$	$\mathbb{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbb{X}$ je číselná množina
$\widehat{n}$	$\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
$\operatorname{Dom} f$	definiční obor zobrazení f
$\operatorname{Ran} f$	obor hodnot zobrazení f
$\mathcal{P}(X) = 2^X$	potenční množina X (systém všech podmnožin X)
$\{x_n\}_1^\infty$	posloupnost jdoucí od 1 do $+\infty$
$\lfloor k \rfloor$	dolní celá část čísla k
(c, d)	otevřený interval
$[c, d]$	uzavřený interval
$\sim$	ekvivalence matic, množin či funkcí
$[\varphi]$	třída ekvivalence φ
$\to$	bodová konvergence
$\mapsto$	přiřazení
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
A°	vnitřek množiny A
$\dot{A}$	hranice množiny A
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
A^{i}	izolátor množiny A
A'	derivace množiny A
$\overline{A}^Y$	množina A uzavřená v množině Y
$A^{\circ Y}$	množina A otevřená v množině Y
$\langle \varphi \rangle = \operatorname{Ran} \varphi$	stopa dráhy φ
H_x, U_x, A_x	okolí bodu x
$\overrightarrow{V} = V^n$	lineární vektorový prostor dimenze n
$\underset{\leftarrow}{V} = V^\#$	lineární kovektorový prostor (algebraický duál)
$\mathrm{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$	normovaný prostor spojitých lineárních zobrazení $\overrightarrow{X} \mapsto \overrightarrow{Y}$
$\|b\rangle = \vec{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^r)^{\mathrm{T}}$	sloupcový vektor
$\langle a\| = \underset{\leftarrow}{a} = a^\# = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$	řádkový vektor (lineární funkcionál, kovektor)
$\underset{\leftarrow}{a}\vec{b} = \langle a\|b\rangle$	akce kovektoru na vektor (funkcionál $\underset{\leftarrow}{a}$ v bodě $\vec{b}$)
$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$	skalární součin vektorů
$\\|\vec{x}\\|_p$	p–norma vektoru $\vec{x}$
$\mathrm{d}f$	totální diferenciál funkce f
$\boldsymbol{\omega}$	diferenciální forma libovolného stupně
$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\zeta}$	vnější součin forem
$\star\vec{x}$	Hodgeův duál
$\mathcal{C}^p(M)$	třída všech funkcí na množině M spojitě diferencovatelných do řádu p
$L^p(M, \mathrm{d}\mu)$	prostor všech Lebesgueovsky integrabilních funkcí na množině M s p-normou a mírou μ
$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$	operátor parciální derivace podle k–té složky
$\mathbb{J}_f(x_0)$	Jacobiho matice zobrazení f v bodě x_0 (první derivace)
$\mathbf{i}$	imaginární jednotka
$\mathbf{Re}(z)$	reálná část komplexního čísla z
$\mathbf{Im}(z)$	imaginární část komplexního čísla z

14. Regulární zobrazení

Připomeneme si Banachovu větu o pevném bodě:

(1) Zobrazení $f : (X, \varrho) \to (X, \varrho)$ se nazývá **kontrahující**, právě když
$$(\exists k \in (0,1))(\forall x, y \in X)(\varrho(f(x), f(y)) \le k\varrho(x,y)).$$
(2) Každé kontrahující zobrazení na úplném prostoru má právě jeden pevný bod, tj. existuje takové x, že platí $f(x) = x$.

Věta 14.1 (o inverzním zobrazení)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $g : E \to E \in \mathcal{C}^q$, $t_0 \in (\operatorname{Dom} g)^\circ$, $\det g'(t_0) \neq 0$. Potom existuje $\mathrm{H}_{t_0} = (\mathrm{H}_{t_0})^\circ$ takové, že

(i) zúžení $g|_{\mathrm{H}_{t_0}}$ je prosté,
(ii) $U = g(\mathrm{H}_{t_0}) = U^\circ$, tj. obraz otevřeného okolí je otevřený,
(iii) $f = (g|_{\mathrm{H}_{t_0}})^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

Důkaz. Buď $x_0 = g(t_0)$, $x = g(t)$. Pak $x - g(t) = 0$, $t = x + (t - g(t)) = \varphi_x(t)$.

I) Předpokládejme, že $g'(t_0) \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E})$, $g'(t_0) = \mathrm{id}_E$
$$\varphi_x'(t_0) = \mathrm{id}_{\vec{E}} - g'(t_0) = \underset{\leftarrow}{0}$$
$$\left|\varphi_x^i(t_2) - \varphi_x^i(t_1)\right| = \left|(\varphi_x^i)'(\xi)(t_2 - t_1)\right|$$
S využitím spojitosti g existuje $\overline{B}(t_0, r)$ taková, že $(\forall t \in B)\ \|\varphi_x'(t)\| \le k \in (0,1)$ a zároveň $\overline{B}$ je úplný prostor (je uzavřená v úplném prostoru).

Musíme ještě ověřit, zda $\varphi_x : \overline{B}(t_0, r) \to \overline{B}(t_0, r)$.
$$\begin{aligned}\|\varphi_x(t) - t_0\| &= \|x + t - g(t) - (x_0 + t_0 - g(t_0))\| = \\ &= \|(x - x_0) + (x + t - g(t)) - (x + t_0 - g(t_0))\| \le \\ &\le \|x - x_0\| + \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t_0)\| \le (1-k)r + kr \le r\end{aligned}$$
Jestliže je $x \in B(x_0, (1-k)r)$, pak φ_x na $\overline{B}(t_0, r)$ kontrahuje a φ_x je $\overline{B} \to \overline{B}$. Z toho vyplývá, že má právě jeden pevný bod pro každé $x \in B(x_0, (1-k)r)$ a tedy zvolím-li si $x \in B$, pak existuje právě jedno $t \in B(t_0, r)$ tak, že platí $x = g(t)$. Tedy $g|_{\mathrm{H}}$ je prosté.

Definujeme tímto zobrazení $f(x) = t$. Nejprve ukážeme spojitost f.
$$\begin{aligned}\|g(t_2) - g(t_1)\| &= \|x + t_2 - \varphi_x(t_2) - (x + t_1 - \varphi_x(t_1))\| \ge \\ &\ge \|t_2 - t_1\| - \|\varphi_x(t_2) - \varphi_x(t_1)\| \ge (1-k)\,\|t_2 - t_1\|\end{aligned}$$
a tedy pro každé $x_1, x_2 \in g(\mathrm{H})$ platí:
$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \le \frac{1}{1-k}\,\|x_2 - x_1\|\,,$$
tedy zobrazení f je lipschitzovské, tedy i spojité. Vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřený. Proto $U = g(\mathrm{H}) = f^{-1}(\mathrm{H}) = U^\circ$. Zbývá dokázat, že $f = (g|_{\mathrm{H}})^{-1} \in \mathcal{C}^q$.
$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \mu(t)\,\|t - t_0\|$$
$$x - x_0 = g'(t_0)(f(x) - f(x_0)) + \mu(f(x))\,\|f(x) - f(x_0)\|$$
$$f(x) - f(x_0) = (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) - (g'(t_0))^{-1}(\mu(f(x))\,\|f(x) - f(x_0)\|)$$
$$\|f(x) - f(x_0)\| \le \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\,\|x - x_0\| + \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\,\|\mu(f(x))\|\,\|f(x) - f(x_0)\|$$
$$\|f(x) - f(x_0)\| \le \frac{\left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\,\|x - x_0\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\|\,\|\mu(f(x))\|}$$
a tedy
$$f(x) = f(x_0) + (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) + \omega(x)\,\|x - x_0\|$$
a
$$\|\omega(x)\| \le \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\,\|\mu(f(x))\|\,\frac{\left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\|\,\|\mu(f(x))\|}$$

Existuje $f'(x_0) = (g'(t_0))^{-1}$. Pro $x \in U$, $t \in \mathrm{H}$

$$f'(x) = (g'(t))^{-1}$$

II) Pokud $g'(t_0) \neq \mathrm{id}_{\vec{E}}$: Definujeme

$$h(x) = x_0 - g'(t_0)^{-1}(x - x_0).$$

Platí, že $G = (h \circ g) \in \mathcal{C}^q$, $G(t_0) = x_0$, $G'(t_0) = (h \circ g)'(t_0) = (g'(t_0))^{-1} \circ g'(t_0) = \mathrm{id}_{\vec{E}}$. □

Poznámka. (1) $g^{-1} = f$ (funkce k sobě inverzní)
(2) $\mathbb{J}f(x_0) = (\mathbb{J}g(t_0))^{-1}$ (Jacobiho matice k sobě inverzní)
(3) $\det f'(x_0) = \frac{1}{\det g'(t_0)}$ (determinanty k sobě inverzní)

Definice 14.2. Buď g zobrazení třídy alespoň $\mathcal{C}^1$ pro každé $t \in \operatorname{Dom} g$. Nechť $\det g'(t) \neq 0$ (tj. g má regulární derivaci). Pak řekneme, že g je **regulární**.

Poznámka. Regulární zobrazení splňuje předpoklady 14.1, takže je **lokálně prosté**, tj. $(\forall t)(\exists \mathrm{H}_t)$ takové, že g je na něm prosté.

Definice 14.3. Zobrazení $g : E \to E$ se nazývá **difeomorfismus**, resp. q**-difeomorfismus**, platí-li

(I) g je prosté,
(II) g i g^{-1} jsou třídy $\mathcal{C}^1$ resp. $\mathcal{C}^q$.

Poznámka. (1) Regulární zobrazení je **lokálně difeomorfní**.
(2) Homeomorfismus je 0-difeomorfismus.

Definice 14.4. Zobrazení g se nazývá **otevřené**, platí-li

$$(A \subset \operatorname{Dom} g \wedge A = A^\circ) \Rightarrow g(A) = g(A)^\circ.$$

Věta 14.5. Je-li g regulární, je otevřené.

Důkaz. Vezměme si libovolnou otevřenou množinu A, která leží v definičním oboru g; chceme ukázat, že $g(A)$ je otevřená množina. Zvolme libovolné $x_0 \in g(A)$. Hledáme nějaké jeho okolí, které by patřilo do $g(A)$. Označme t_0 bod splňující $t_0 \in A$ a zároveň $g(t_0) = x_0$. Na zobrazení $g|_A$ můžeme aplikovat větu 14.1. Z ní dostaneme, že existuje otevřené okolí bodu t_0 splňující $H_{t_0} \subset A$, jehož obraz $g(H_{t_0})$ je opět otevřený. Přitom ale zjevně $x \in g(H_{t_0}) \subset g(A)$. Nalezli jsme tedy okolí bodu x_0 ležící v $g(A)$. □

Poznámka. Zobrazení regulární a prosté je difeomorfní.

15. Implicitní zobrazení

Mějme soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} \Phi^1(x^1,\dots,x^r,y^1,\dots y^m) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \Phi^m(\underbrace{x^1,\dots,x^r}_{x},\underbrace{y^1,\dots y^m}_{y}) & = & 0 \end{array}.$$

Očekávám, že za jistých podmínek z této soustavy dostanu

$$\begin{array}{rcl} y^1 & = & \varphi^1(x^1,\dots,x^r) \\ \vdots & & \\ y^m & = & \varphi^m(x^1,\dots,x^r) \end{array}.$$

Definice 15.1. Buď $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$. Potom řešením rovnice $\Phi^j(x,y) = 0$, $j \in \widehat{m}$, rozumíme každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ takové, že $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom}\varphi$.

Poznámka. Říkáme, že φ je zadáno **implicitně**.

Věta 15.2 (o existenci a jednoznačnosti)**.** Buď $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in \mathcal{C}^q$, $q, r, m \in \mathbb{N}$ a platí:

(I) existuje $(x_0\ y_0) \in \operatorname{Dom}\Phi$ takové, že $\Phi(x_0\ y_0) = 0$,

(II)

$$\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}(x_0\ y_0) \neq 0.$$

Potom existuje okolí V_{x_0}, že rovnicí $\Phi(x,y) = 0$ je na V definováno právě jedno zobrazení $\varphi : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ takové, že platí:

(1) $\varphi(x_0) = y_0$,
(2) $\varphi \in \mathcal{C}^q$,
(3) $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$ na V_{x_0}.

Důkaz. Bude proveden v následující větě, která je obecnější. □

Poznámka. (1)

$$\left.\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}\right|_{(x_0,y_0)} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial y^m} \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

(2) Stačí $\Phi \in \mathcal{C}^0$, musí být třídy $\mathcal{C}^1$ vůči $y^1,\dots,y^m$. Pak $\varphi \in \mathcal{C}^0$.
(3) $\Phi(x^1,\dots,x^n,y)$ stačí $\Phi \in \mathcal{C}^0$ a monotonie vůči y.
(4) Buď $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$ rostoucí r-tice, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$ rostoucí m-tice. Zaveďme $\lambda = (i_1,\dots,i_r)$, $\mu = (j_1,\dots,j_m)$, (λ,μ) je $(r+m)$-tice. Jestliže μ jsou zrovna takové, že λ doplní do $\widehat{n}$, pak označíme $\mu = \lambda'$. $(\lambda,\lambda') = (1,\dots,n)$.

Věta 15.3. Nechť $q, r, m \in \mathbb{N}$. Buď Φ zobrazení třídy $\mathcal{C}^q$ z $\mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$ a platí:

(1) existuje $x_0 \in \operatorname{Dom}\Phi$ takové, že $\Phi(x_0) = 0$,
(2) $\mathrm{h}(\Phi'(x_0)) = m$.

Pak existuje okolí $\mathrm{H}_{x_0} \subset \mathbb{R}^{r+m}$, r-tice λ, okolí $\mathrm{V}_{x_0^\lambda} \subset \mathbb{R}^r$ a zobrazení $\varphi : \mathrm{V}_{x_0^\lambda} \to \mathbb{R}^m$ třídy $\mathcal{C}^q$ tak, že platí $\{x \in \mathrm{H}_{x_0} | \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathrm{H}_{x_0} | x^\lambda \in \mathrm{V}_{x_0^\lambda},\ x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\}$

Důkaz. Matice $\Phi'(x_0)$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^{r+m}} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

Z hodnosti plyne existence $\lambda' = (j_1, \dots, j_m)$ taková, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{j_m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^{j_m}} \end{vmatrix}_{x=x_0} \neq 0$$

a ze spojitosti $\forall x \in U_{x_0}$ je $\mathbb{J}(\Phi^{1,\dots,m}_{j_1,\dots,j_m})(x) \neq 0$.

Definujeme $f^\lambda(x) = x^\lambda$, $f^{\lambda'}(x) = \Phi(x)$. $f : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^{r+m} \in \mathcal{C}^q$.

$$\mathbb{J}f(x_0) = \begin{vmatrix} \Phi^1_{j_1} & \dots & \Phi^1_{j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi^m_{j_1} & \dots & \Phi^m_{j_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

(Plyne z rozvoje determinantu.) f splňuje předpoklady 14.1, tedy existuje H_{x_0} takové, že $f|_\mathrm{H}$ je prosté, $f(\mathrm{H})$ je otevřené, $g = f^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

$$\mathrm{V} = \{x^\lambda \in \mathbb{R}^r | (x^\lambda\ 0^{\lambda'}) \in f(\mathrm{H})\} = \mathrm{V}^\circ$$

$$\begin{aligned} \{x \in \mathrm{H} | \Phi(x) = 0\} &= \{x \in \mathrm{H} | f(x) = (x^\lambda, 0^{\lambda'})\} = \{x \in \mathrm{H} | x = g(x^\lambda, 0^{\lambda'})\} = \\ &= \{x \in \mathrm{H} | x^\lambda \in \mathrm{V},\ x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\} \end{aligned}$$

a $\varphi(x^\lambda) = g^{\lambda'}(x^\lambda, 0^{\lambda'})$. □

Poznámka. Tvrzení věty zapsal Vrána i ve stručné podobě: $\exists H, \{x \in \mathrm{H} | \Phi(x) = 0\} \in \mathcal{C}^q$ a označil ho za „nejkrásnější vyjádření". V tomto případě je množina považována za zobrazení (přesněji to je obraz zobrazení na H).

Poznámka. $\Phi(x) = \Phi^p(x^\lambda, x^{\lambda'})$, $p \in \widehat{m}$, $x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)$, $\lambda = (i_1, \dots, i_r)$, $\lambda' = (j_1, \dots, j_m)$. $\Phi^p(x^\lambda, \varphi(x^\lambda)) = 0$, $x^\lambda \in \mathrm{V}$.

Pro pevně zvolené i_k, $k \in \widehat{r}$ a každé $p \in \widehat{m}$ platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Phi^p(x^\lambda, \varphi^{\lambda'}(x^\lambda)) = 0$$

$$\Phi^p_{i_k} + \sum_{l=1}^{m} \Phi^p_{j_l} \varphi^l_{i_k} = 0,$$

což je soustava lineárních rovnic pro $\varphi^l_{i_k}$ Z Cramerova pravidla pak dostáváme

$$\varphi^l_{i_k} = -\frac{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_{l-1}},x^{i_k},x^{j_{l+1}},\dots,x^{j_m})}}{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_m})}}.$$

Zapsáno „klasicky":

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^k} = -\frac{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_{l-1}},x^{i_k},y^{j_{l+1}},\dots,y^{j_m})}}{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_m})}}$$

Pokud už mám (x, y), pro které $\Phi(x, y) = 0$, můžu určit hodnotu derivace v tom bodě.

16. Variety

Definice 16.1. Buďte $m, n, r, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$, $r = n - m$. Neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **diferenciální varietou** třídy $\mathcal{C}^q$ dimenze r, platí-li:

(I) $(\forall x_0 \in M)(\exists \mathrm{H}_{x_0},\ \Phi : \mathrm{H}_{x_0} \mapsto \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}^q)$,
(II) $M \cap H_{x_0} = \{x \in \mathrm{H}_{x_0} \mid \Phi(x) = 0\}$,
(III) $(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0})(\mathrm{h}(\Phi'(x)) = m)$.

Poznámka. (1) Přívlastek *diferenciální* budeme vynechávat, neboť bude z kontextu vždy jasné, že se nejedná o varietu algebraickou. Taktéž budeme r-rozměrnou varietou (popř. r-varietou) rozumět varietu dimenze r a zapisujeme $\dim M = r$ podobně jako u lineárních prostorů.

(2) Zobrazením Φ říkáme **vazby**. Jsou-li třídy $\mathcal{C}^q$, o příslušné varietě říkáme, že je též třídy $\mathcal{C}^q$.

(3) Variety nazýváme dle dimenze r: $r = 0$ bod, $r = 1$ křivka, $r = 2$ plocha, $r = n-1$ nadplocha. Pro korektnost je třeba dodat, že varietu dimenze 0 jsme dodefinovali.

(4) r-varieta je **lokálně difeomorfní** s množinami, které jsou izometrické s prvky topologie (otevřenými podmnožinami) v $\mathbb{R}^m$. (Což se dá „lidsky“ říct tak, že r-varieta je v podstatě zakřivená plocha dimenze r.)

(5) Varieta se nemůže křížit nebo protínat. (V tomto případě neplatí $(\mathrm{h}(\Phi'(x)) = m)$, protože jinak by nastal spor s tím, že $\{x \in \mathrm{H}_{x_0} \mid \Phi(x) = 0\}$ je funkce dle věty 15.3)

(6) Variety nemají kraj. Pouze kompaktní variety (tj. uzavřené a *omezené*) jsou uzavřené v geometrickém (intuitivním) smyslu.

(7) Například otevřená ani uzavřená koule v $\mathbb{R}^3$ není varieta. Povrch koule varietou je a nazývá se sféra, značíme S^2. Podobně je varietou povrch toru, značíme T^2, ne však torus samotný (včetně vnitřku). (Koule a torus včetně vnitřku nesplňují $m < n$, navíc by museli být definovány nerovnicí. Obecně musí být dimenze variety r menší než n.)

(8) Buď $\Phi \in \mathcal{C}^q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujme

$$M = \{x \in \mathrm{Dom}\,\Phi \mid \Phi(x) = 0 \wedge \mathrm{h}(\Phi'(x)) = m\}.$$

Pak M je varieta dimenze $r = n - m$ třídy $\mathcal{C}^q$ (nebo prázdná množina).

Důkaz. Pokud je M neprázdná, zvolme libovolné $x \in M$. Platí $\mathrm{h}(\Phi'(x)) = m$, a protože je Φ třídy alespoň $\mathcal{C}^1$, má derivace plnou hodnost i na nějakém okolí x (příslušný subdeterminant řádu m totiž bude nenulový). Na tomto okolí tedy platí ekvivalence $x \in M \Leftrightarrow \Phi(x) = 0$. □

Varietu je tedy možno zadat jako soustavu vazeb, je však nutno prověřit jejich nezávislost (ve smyslu LN jejich derivací).

(9) Příkladem variety je povrch jednotkové koule. Definujeme-li zobrazení Φ vztahem $\Phi(x) = \|x\|_2^2 - 1$, má jeho derivace $\Phi'(x) = (2x^1, \ldots, 2x^n)$ hodnost jedna pro každé $x \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0 \wedge \Phi'(x) \neq \underset{\leftarrow}{0}\}.$$

(10) Lineární varieta W o dimenzi r je r-rozměrnou varietou.

Důkaz. Buď $x_0 \in W$. Pak $W = x_0 + Z(W)$, $\dim Z(W) = r$. Existuje $L : V^n \to V^m$ takové, že $Z(W) = \ker L$, $\mathrm{h}(L) = m$.

$$\begin{aligned} M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x - x_0) = \vec{0}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0 \wedge \mathrm{h}(\Phi'(x)) = m\}. \end{aligned}$$

□

Definice 16.2. Buď M varieta, $x_0 \in M$. Vektor $\vec{h} \in V^n$ nazveme **tečným vektorem** k varietě M v bodě x_0, existuje-li zobrazení $\psi : \mathbb{R} \to M$ takové, že $\psi(0) = x_0$ a $\psi'(0) = \vec{h}$.

Poznámka. Označme $x_t = x_0 + t\vec{h}$, $y_t = \psi(t)$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{|x_t - y_t|}{|x_t - y_0|} = \lim_{t \to 0} \left| \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} - \vec{h} \right| = 0.$$

Definice 16.3. Tečným prostorem k varietě M **v bodě** x_0 budeme rozumět množinu všech tečných vektorů v x_0, značit ho budeme $T_{x_0}M$.

Věta 16.4. Při značení z 16.1 platí: Tečný prostor k varietě M v x_0 je **jádrem derivace** $\Phi'(x_0)$, tj. $T_{x_0}M = \ker \Phi'(x_0)$.

Důkaz. (1) $(\Rightarrow)$ $\vec{h} \in T_{x_0}M \Rightarrow (\exists \psi : \mathbb{R} \to M)(\psi(0) = x_0 \wedge \psi'(0) = \vec{h})$. Pak existuje δ takové, že $\psi(-\delta, \delta) \subset \mathrm{H} \subset M$ a na H je definováno Φ. Definujme $\varphi = \Phi \circ \psi$ a platí, že $(\forall t \in (-\delta, \delta))(\varphi(t) = 0)$.

$$0 = \varphi'(0) = \Phi'(\psi(0))\psi'(0) = \Phi'(x_0)\vec{h} = 0,$$

tedy $\vec{h}$ je z jádra.

(2) $(\Leftarrow)$ Buď $L = \Phi'(x_0)$, $L\vec{h} = 0$. Definujme $\psi : \mathbb{R} \mapsto M$ vztahem

$$\psi(t) = g(x_0^\lambda + t\vec{h}^\lambda, 0^{\lambda'}),$$

kde $g = f^{-1}$ je zobrazení z věty o implicitní funkci. Ověříme vlastnosti ψ:

$$\psi(0) = g(x_0^\lambda, 0^{\lambda'}) = x_0$$

$$\psi'(0) = g'(x_0^\lambda, 0^{\lambda'})(\vec{h}^\lambda, 0^{\lambda'}) = \vec{h} \Leftrightarrow f'(x_0)\vec{h} = (\vec{h}^\lambda, \vec{0}^{\lambda'})$$

Pro f platí: $f^\lambda = x^\lambda$, $f^{i_k}(x) = x^{i_k}$; $f^{\lambda'} = \Phi$, $f^{j_l}(x) = \Phi(x)$;

$$f^{i_k\prime}(x)\vec{h} = \vec{h}^{i_k} \Leftrightarrow (f'(x_0)\vec{h})^\lambda = \vec{h}^\lambda,$$

$$f^{j_l\prime}(x)\vec{h} = \Phi^{l\prime}(x)\vec{h} = L^l\vec{h} = 0 \Leftrightarrow (f'(x_0)\vec{h})^{\lambda'} = 0^{\lambda'}.$$

Sestrojili jsme tedy ψ s náležitými vlastnostmi, $\vec{h}$ je tečný vektor. □

Poznámka.
Tečný prostor má stejnou dimenzi jako varieta.
Z této a Frobeniovy věty (LA1) plyne, že je $T_{x_0}M$ lineární prostor.

Definice 16.5. Tečnou k varietě v bodě x_0 rozumíme lineární varietu $x_0 + T_{x_0}M$.

Poznámka. Bod x je z tečny, právě když

$$x - x_0 \in T_{x_0}M \Leftrightarrow \overleftarrow{\Phi'(x_0)}\overrightarrow{(x - x_0)} = 0.$$

Poznámka. Kuželosečky jako speciální případ variet: Buď

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x^i x^j + 2\sum_{i=1}^n b_i x^i + c = 0 \right\}.$$

Každou matici, tedy i $\mathbb{A} = (a_{ij})$, lze rozložit na její symetrickou a antisymetrickou část

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}).$$

Protože pro každou reálnou antisymetrickou matici $\mathbb{B}$ a libovolný vektor x platí

$$\langle x, \mathbb{B}x \rangle = x^T\mathbb{B}x = (\mathbb{B}^T x)^T x = -\langle \mathbb{B}x, x \rangle, \text{ a tedy } x^T\mathbb{B}x = 0,$$

lze bez újmy na obecnosti předpokládat $a_{ij} = a_{ji}$.

Diskriminantem kuželosečky nazýváme determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c \end{vmatrix}.$$

Jestliže $\Delta \neq 0$, pak hovoříme o **nedegenerované kuželosečce**, jinak o **degenerované**. Nedegenerovaná kuželosečka je varieta.

Důkaz.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0 \wedge \mathrm{h}(\Phi'(x)) = 1\} = \\ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0 \wedge \Phi'(x) \neq \underset{\leftarrow}{0}\},$$

takže pokud $\Phi'(x) \neq \underset{\leftarrow}{0}$ tak M je nadplocha. □

Derivací podle x_k se získá

$$\Phi_k(x) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x^i + 2b_k = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

Musí se ověřit jestli $\Phi'(x_0) \neq 0$. Pro $\mathrm{h}(a_{ij}) \neq \mathrm{h}(a_{ij}|b_i)$ je to v pořádku, pro $\mathrm{h}(a_{ij}) = \mathrm{h}(a_{ij}|b_i)$ existuje x_0 takové, že $\Phi'(x_0) = 0$. Ukážeme, že x_0 není ve varietě.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_0^i x_0^j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_0^i + c = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_0^i + b_k = 0 \quad (\forall k \in \widehat{n})$$

Vynásobením x_0^k a odečtením vyjde

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_0^i + c = 0$$

Kdyby x_0 byl ve varietě, vznikl by spor, neboť (derivace v $x_0 \in M$: $\underset{\longleftarrow}{\Phi'(x_0)}\overrightarrow{(x - x_0)} = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_0^i + b_k\right)(x^k - x_0^k) = 0,$$

pak s využitím $x_0 \in M$ platí

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_0^i x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k(x^k - x_0^k) - c = 0.$$

Definice 16.6. Normálovým prostorem $N_{x_0}M$ rozumíme ortogonální doplněk k tečnému prostoru, tj. $N_{x_0}M = (T_{x_0}M)^{\perp}$.

Definice 16.7. Normálou k varietě M v bodě x_0 rozumíme varietu $x_0 + N_{x_0}M$.

Poznámka. (1) $\vec{n} \in N_{x_0}M$, právě když $(\forall \vec{h} \in T_{x_0}M)(\left\langle \vec{n}, \vec{h} \right\rangle = 0)$.

(2) $\vec{h} \in T_{x_0}M \Leftrightarrow \Phi'(x_0)\vec{h} = 0 \Leftrightarrow (\forall l \in \widehat{m})(\operatorname{grad}\Phi^l(x_0)\vec{h} = \Phi^{l\prime}(x_0)\vec{h} = 0)$.

(3) $(\forall l \in \widehat{m})(\operatorname{grad}\Phi^l(x_0) \in N_{x_0}M)$. Gradienty tvoří bázi normálového prostoru.

(4) Buď $f'(x_0) \neq \underset{\leftarrow}{0}$, $\vec{n} = \operatorname{grad} f(x_0)$, $f \in \mathcal{C}^1$. Díky tomu, že $f \in \mathcal{C}^1$, platí

$$M = \{x \in \mathrm{H} \mid f(x) = f(x_0)\} = \{x \in \mathrm{H} \mid f(x) = f(x_0) \wedge f'(x_0) \neq 0\}.$$

$\Phi(x) = f(x) - f(x_0)$ a také $\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad} f$. Ekvipotenciální plochy jsou tedy varietami na takovém okolí, které splňuje $f'(x) \neq 0$.

17. Vázané extrémy

Definice 17.1. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in M$ **lokální extrém vzhledem k varietě** M, právě když

$$(\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \geq f(x_0)), \text{ resp. } (\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \leq f(x_0)).$$

Věta 17.2 (nutná podmínka pro existenci extrému vzhledem k varietě)**.** Buď M r-rozměrná varieta třídy $\mathcal{C}^1$, $x_0 \in M$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce diferencovatelná v x_0. Nechť f má v x_0 lokální extrém vzhledem k varietě M. Potom existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ taková, že x_0 je stacionárním bodem funkce

$$\Lambda = f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l$$

při značení z kapitoly 17. Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se nazývají **Lagrangeovy multiplikátory** a Λ **Lagrangeova funkce**.

Důkaz. Pro každý $\vec{h} \in T_{x_0}M$ existuje $\psi : \mathbb{R} \to M$ takové, že $\psi(0) = x_0$ a $\psi'(0) = \vec{h}$. Definujme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem $\varphi = f \circ \psi$. BÚNO nechť f má v x_0 maximum, tedy:

$$(\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \leq f(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \mathrm{H}_0)(\forall t \in \mathrm{H}_0)(f(\psi(t)) \leq f(\psi(0)))$$

tedy φ má v 0 maximum. Pak $\varphi'(0) = 0$, a platí

$$0 = \varphi'(0) = f'(x_0) \cdot \psi'(0) = f'(x_0)\vec{h} = \left\langle \operatorname{grad} f(x_0), \vec{h} \right\rangle = 0.$$

Z toho dále vyplývá, že $\operatorname{grad} f(x_0) \in N_M(x_0)$ a dále existence $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takových, že

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \operatorname{grad} \Phi^l(x_0),$$

a tedy

$$\operatorname{grad} \left(f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l \right) = 0$$

a z Rieszovy věty pak vyplývá nulovost derivace Λ. $\square$

Poznámka. Derivace vzhledem k varietě: $f'_M(x_0) = f'(x_0)|_{T_{x_0}M}$, tj. derivace zúžená na tečný prostor.

Věta 17.3 (postačující podmínka)**.** Buď M varieta třídy $\mathcal{C}^2$, nechť existuje $f''(x_0)$, $x_0 \in M$, existuje Λ a $\Lambda'(x_0) = 0$. Potom

(i) Má-li funkce $f|_M$ v x_0 lokální minimum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \geq 0$.
(ii) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} > 0$, má $f|_M$ v x_0 ostré lokální minimum.
(iii) Má-li funkce $f|_M$ v x_0 lokální maximum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \leq 0$.
(iv) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} < 0$, má $f|_M$ v x_0 ostré lokální maximum.
(v) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M}$ indefinitní, nemá $f|_M$ v x_0 lokální extrém.

Důkaz. (i) Buď $\vec{h} \in T_{x_0}M$. Potom existuje $\psi : \mathbb{R} \to M$ takové, že $\psi(0) = x_0$, $\psi'(0) = \vec{h}$. Provedeme Taylorův rozvoj Λ v x_0 do druhého řádu (to můžeme, protože $f''(x_0)$ existuje a $M \in \mathcal{C}^2$)

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_0) + \underbrace{\Lambda'(x_0)(x - x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x - x_0)^2 + \omega(x) \left\| x - x_0 \right\|^2,$$

$$\Lambda(\psi(t)) = \Lambda(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(\psi(t) - \psi(0))^2 + \omega(\psi(t)) \left\| \psi(t) - \psi(0) \right\|^2.$$

Protože $\psi(t)$ je z variety, kde splývá f s Λ, vyjde

$$\frac{1}{t^2} \left(f(\psi(t)) - f(\psi(0)) - \omega(\psi(t)) \left\| \psi(t) - \psi(0) \right\|^2 \right) = \frac{1}{2}\Lambda''(\psi(0)) \left(\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \right)^2.$$

Limitním přechodem $t \to 0$ dostáváme

$$\frac{1}{t^2} \underbrace{f(\psi(t)) - f(\psi(0))}_{\geq 0} = \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}^2.$$

(ii) Buď $\Lambda''(x_0)\vec{h}^2 > 0$, $x \in M \cap H$. Potom

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x - x_0)^2 + \omega(x)\left\|x - x_0\right\|^2.$$

Problém je v tom, že $x - x_0$ nemusí být obecně z $T_{x_0}M$. Položme $\vec{h} = x - x_0$, potom $\vec{h}$ lze vyjádřit jako $\vec{h} = \vec{h_1} + \vec{h_2}$, kde $\vec{h_1} \in T_{x_0}M$, $\vec{h_2} \in N_M(x_0)$. Potom z pozitivní definitnosti Λ'' vyplývá

$$\Lambda''(x_0)\vec{h_1}^2 \geq \alpha \left\|\vec{h_1}\right\|^2$$

pro nějaké $\alpha > 0$, neboť $\vec{h_1} \in T_{x_0}M$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h_1}^2 + \Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h_2}^2 + \omega(x)\left\|\vec{h_1} + \vec{h_2}\right\|^2 \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\left\|\vec{h_1}\right\|^2 - \frac{\alpha}{8}\left\|\vec{h}\right\|^2 \geq \frac{\alpha}{4}\left\|\vec{h}\right\|^2 - \frac{\alpha}{8}\left\|\vec{h}\right\|^2 = \frac{\alpha}{8}\left\|\vec{h}\right\|^2, \end{aligned}$$

neboť

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\|\vec{h_2}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0, \quad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\|\vec{h_1}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = 1$$

a

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{1}{\left\|\vec{h}\right\|^2}\left(\Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''\vec{h_2}^2 + \omega(x)\left\|\vec{h}\right\|^2\right) = 0,$$

takže lze zvolit takové $\alpha > 0$, aby

$$\frac{1}{\left\|\vec{h}\right\|^2}\left(\Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''\vec{h_2}^2 + \omega(x)\left\|\vec{h}\right\|^2\right) \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Konečně díky ortogonalitě $\vec{h_1}$ a $\vec{h_2}$

$$\left\|\vec{h_1}\right\|^2 = \left\|\vec{h}\right\|^2 - \left\|\vec{h_2}\right\|^2 \wedge \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\|\vec{h_2}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0 \Rightarrow \left\|\vec{h_1}\right\|^2 \geq \frac{1}{2}\left\|\vec{h}\right\|^2.$$

□

Poznámka. Metodika hledání extrémů:

(1) Nechť f, $\Phi^1, \ldots, \Phi^m \in \mathcal{C}^2$.
(2) Ověříme, zda $M = \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi(x) = 0 \wedge \mathrm{h}(\Phi'(x)) = m\}$, tj. je varieta.
(3) Sestavím funkční předpis

$$\Lambda = f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l,$$

kde λ zatím neznám.
(4) Položím $\Lambda'(x_0) = \Theta$, $\Lambda_j(x_0) = 0$ pro $j \in \widehat{n}$, $\Phi^l(x_0) = 0$ pro $l \in \widehat{m}$. Dostanu $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých.
(5) Vyberu si jeden bod x_0, určím λ_j a dosadím do Λ.
(6) $\Lambda''(x_0)\vec{h}^2 = Q(\vec{h})$.
(7) Pokud je $Q(\vec{h})$ PD nebo ND, pak je to minimum, případně maximum.
(8) Jinak musím nalézt tečný prostor ($T_{x_0}M = \ker \Phi'(x_0)$) a zúžím $Q(\vec{h})$ na $T_{x_0}M$.

Tedy nalézám $q(\vec{h}) = Q(\vec{h})|_{T_{x_0}M}$. $\Phi'(x_0)\vec{h} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^l_i(x_0)\vec{h}^i = 0 \text{ pro } l \in \widehat{m}.$$

Prověřím definitnost Q. Je nutno hlídat dimenze.

Poznámka. Důkaz nerovnosti $f(x) \leq g(x)$: $f(x) = a$ je varieta, např. uzavřená dráha. Najdu extrém $g(x)$ na varietě $f(x) = a$, to provedu pro každé a.

18. Diferenciální 1-formy

Definice 18.1. Zobrazení, které každému bodu z afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřadí objekt, nazveme:

(I) **skalárním polem** f na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
(II) **vektorovým polem** $\vec{F}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\vec{F} : \mathbb{R}^n \mapsto (V^n)$.
(III) **kovektorovým polem** $\boldsymbol{\omega}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R}^n \mapsto (V^n)^\#$.

Definice 18.2. Nechť $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ báze $(V^n)^\#$ a $\omega_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. **Diferenciální 1-formou** (resp. diferenciální formou stupně 1) rozumíme kovektorové pole $\boldsymbol{\omega}$, jehož složky jsou skalárními poli ω_i, tj.

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underset{\leftarrow}{e}^{i}.$$

Poznámka. (1) Bodový zápis diferenciální 1-formy je

$$\underset{\leftarrow}{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underset{\leftarrow}{e}^{i},$$

diferenciální 1-forma v bodě je tedy lineární kombinace kovektorů, tedy kovektor, jinými slovy **(lineární) 1-forma**.

(2) Součet diferenciálních forem bodově definujeme $\underleftarrow{(\omega + \eta)}(x) = \underset{\leftarrow}{\omega}(x) + \underset{\leftarrow}{\eta}(x)$.
(3) Násobení číslem z tělesa bodově definujeme $\underleftarrow{(t\omega)}(x) = t\underset{\leftarrow}{\omega}(x)$.
(4) Součin se skalárním polem bodově definujeme $\underleftarrow{(f\omega)}(x) = f(x)\underset{\leftarrow}{\omega}(x)$.

Definice 18.3. Každé skalární pole $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je diferenciální 0-forma. Je-li funkce f diferencovatelná na celém definičním oboru, pak f' je diferenciální 1-forma a nazýváme ji **vnější derivací** diferenciální 0-formy f a s použitím totální derivace $f'(x)$ bodově definujeme

$$(\mathrm{d}f)(x) = f'(x) \in (V^n)^\#$$

Poznámka. (1) d je symbol. Příkladem vnější derivace je totální diferenciál, gradient, rotace, divergence či Laplaceův operátor. Více později v 33.13.

(2) Buďte soubor $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze V^n, soubor $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ k ní duální báze $(V^n)^\#$. Mějme (z LAA) souřadnicový izomorfismus $\mathbb{R}^n \mapsto V^n$ vztahem

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je bod z afinního prostoru a $\vec{x} \in V^n$ je vektor z přidruženého lineárního prostoru. Dále pro každé $i \in \widehat{n}$ mějme (z LAA) souřadnicový funkcionál $\underset{\leftarrow}{e}^{i} : V^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\underset{\leftarrow}{e}^{i} \vec{x} = x^i.$$

Díky souřadnicovému izomorfismu můžeme tento souřadnicový funkcionál reprezentovat souřadnicovou funkcí $\chi^i(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\chi^i(x) = \underset{\leftarrow}{e}^{i} \vec{x},$$

která je zřejmě diferencovatelná. Souřadnicové funkci říkáme (zejména ve fyzice) též projektor. Pro vnější derivaci souřadnicové funkce χ^i v libovolném bodě x platí

$$\mathrm{d}\chi^i(x) = \underset{\leftarrow}{e}^{i}.$$

To je důvod, proč se ve funkčních předpisech diferenciálních forem nepíše $\underset{\leftarrow}{e}^{i}$, nýbrž $\mathrm{d}x^i$ (viz příští bod). Pro diferenciální formu $\boldsymbol{\omega}$ z linearity platí

$$\underset{\leftarrow}{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underset{\leftarrow}{e}^{i} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \mathrm{d}\chi^i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}\chi^i \right)(x).$$

Diferenciální forma $\boldsymbol{\omega}$ je tedy obecně „lineární kombinace“ derivací souřadnicových funkcí. Lineární kombinace to dle definice není, neboť koeficienty ω_i nejsou čísla z tělesa, nýbrž reálné funkce.

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}\chi^i.$$

(3) Máme-li diferenciální formu $\mathrm{d}f$, její složky $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ a označíme-li $\mathrm{d}\chi^i$ jako $\mathrm{d}x^i$, můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

Tuto formu nazýváme **totální diferenciál**, správněji **exaktní diferenciální forma**.

(4) Porovnejme totální diferenciál $\mathrm{d}f$ s totální derivací $f'(x)\vec{h}$.
  (a) Máme-li funkce $V^n \mapsto V^m$, pojmy nemají společný význam, neboť totální derivace je lineární zobrazení $\mathcal{L}(V^n, V^m)$.
  (b) Máme-li funkce z $V^n \mapsto \mathbb{R}$, totální derivace $\underleftarrow{f'(x)}$ leží v $\mathcal{L}(V^n, \mathbb{R}) = (V^n)^{\#}$, je to tedy kovektor (zobrazuje V^n do $\mathbb{R}$).
  (c) Totální diferenciál je zobrazení, které každému bodu přiřadí kovektor (zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do $(V^n)^{\#}$.

Pokud tedy $\mathrm{d}f$ ukotvíme v pevném bodě t_0, získáme kovektor, který má význam totální derivace, tj.

$$\mathrm{d}f(t_0) = \underleftarrow{f'(t_0)}.$$

Dle Riezsovy věty pro každý kovektor $\underleftarrow{f'(t_0)}$ existuje vektor grad f. Vztah mezi gradientem a totálním diferenciálem ukazuje věta 33.22. Tím je otázka rozdílnosti $\mathrm{d}f$ a $\underleftarrow{f'(x)}\vec{h}$ vyřešena.

(5) $xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ je tedy formálně blbost — správně je

$$\omega_1(x,y) = xy,\ \omega_2(x,y) = y :\ \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathrm{d}x + \omega_2 \mathrm{d}y$$

nebo

$$\omega(x,y) = xy\underleftarrow{e}^1 + y\underleftarrow{e}^2.$$

Protože je však tento špatný zápis zvyklostí, budeme se ho držet i my.

(6) Následující definice platí pro diferenciální formy všech stupňů. O diferenciálních k-formách později v 33.12.

Definice 18.4. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je **třídy** $\mathcal{C}^q$, právě když ω_i jsou třídy $\mathcal{C}^q$ pro všechna $i \in \hat{n}$.

Definice 18.5. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ se nazývá

(I) **uzavřená**, jestliže platí

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \forall i, j \in \hat{n},$$

(II) **exaktní**, jestliže existuje funkce f taková, že $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\omega}$.

Funkce f se nazývá **primitivní funkce**.

Poznámka (1) Exaktní forma třídy $\mathcal{C}^1$ je uzavřená. Není-li při vhodné třídě forma uzavřená, není exaktní (neexistuje primitivní funkce).

(2) V mechanice se obvykle setkáváme s exaktními 1-formami typu $F = \mathrm{d}U$. O funkci U pak říkáme, že je **potenciál** pole F a pole F pak nazýváme potenciální, resp. nevírové:
Buď $\boldsymbol{\omega} =\in \mathcal{C}^1$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$, $f \in \mathcal{C}^2$, $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Pak

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} f = 0.$$

(3) 1-formám se v termodynamice tradičně říká **Pfaffovy formy**, správněji lineární diferenciální formy. Exaktním 1-formám tvaru $\mathrm{d}F$ se pak říká **úplné diferenciály**, kde F je **stavová veličina**. Formy, které nejsou exaktní, se značí $\eth W$, $\eth Q$, říkáme, že W a Q nejsou úplnými diferenciály. Proto zavádíme stavovou veličinu S, díky níž je $\eth Q = T\mathrm{d}S$ již úplným diferenciálem.

Příklad.

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

takže $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená. Zkusíme najít kandidáta na primitivní funkci, pak bude $\boldsymbol{\omega}$ i exaktní.

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{|y|}{x^2+y^2}\ \forall x,y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2},$$

$$P_\pi = \{(x,0) \mid x \leq 0\}$$

$$\omega(x,y) = \varphi'(x,y) = d\varphi(x,y)$$

Aby byla $\boldsymbol{\omega}$ exaktní, musí platit $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\varphi'(x,y) = f'(x,y)$ na oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus P_\pi$. Liší se o konstantu: $f = \varphi + C$ a to je spor kvůli skoku na P_π. f musí být spojitá, ale φ není.

Poznámka. Jestliže je množina jednoduše souvislá, pak je uzavřená 1–forma exaktní.

Poznámka. Připomeneme, že oblast je jednoduše souvislá, právě když ona i její doplněk jsou souvislé, tj. „množina bez děr“.

19. Křivkový integrál druhého druhu

Na přednášce se křivkový integrál druhého druhu definuje větou 19.7 a vynechává se zde uvedená konstrukce. Takto je to vyžadováno i na zkoušce.

Definice 19.1. Buďte g_1, g_2 dráhy v $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Dom} g_\iota = [a_\iota, b_\iota]$.

(i) Jestliže $g_1(b_1) = g_2(a_2)$, pak

$$(g_1 \dot{+} g_2)(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{na } [a_1, b_1] \\ g_2(t - b_1 + a_2) & \text{na } [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

je **orientovaný součet drah g_1 a g_2**.

(ii) $(\dot{-}\, g_1)(t) = g_1(-t)\ \forall t \in [-b_1, -a_1]$ je **opačně orientovaná dráha**.

(iii) $g_1 \dot{-} g_2 = g_1 \dot{+} (\dot{-}\, g_2)$ je **orientovaný rozdíl drah g_1 a g_2**

Definice 19.2. Je dána dráha g. Jestliže

$$g = \dot{\sum_{i=1}^{m}} g_i,$$

pak $\sigma = (g_1, \dots, g_m)$ nazveme **rozdělením dráhy** g.

Definice 19.3. Dráha g **má délku** (je schopna rektifikace), jestliže množina

$$\left\{ l(\sigma) \,\middle|\, l(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \right\}$$

je omezená. Délka je potom $\sup_\sigma l(\sigma)$.

Poznámka. (1) Ke každému rozdělení dráhy existuje rozdělení intervalu $[a, b]$.

(2) Číslo $\|\sigma_g\| = \sup_i \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|$ nazýváme **norma rozdělení**.

Příklad.

$$g(t) = \begin{cases} -t \cos \frac{1}{t} & t \in \left[-\frac{1}{\pi}, 0\right) \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\sigma = \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \dots, -\frac{1}{p\pi} \right)$$

$$l(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{p} \left| g\left(\frac{1}{(i+1)\pi}\right) - g\left(\frac{1}{i\pi}\right) - \right| = \sum_{i=1}^{p} \left| \frac{1}{(i+1)\pi} + \frac{1}{i\pi} \right| \to +\infty$$

Definice 19.4 (křivkový integrál druhého druhu)**.** Buď g dráha v $\mathbb{R}^n$, σ její rozdělení $(g_0, \dots, g_m)$, $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální 1-forma taková, že $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} \omega(x_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \text{ kde } x_i \in [g_i] \text{ pro } i \in \widehat{m}$$

nazveme **integrálním součtem** diferenciální formy $\boldsymbol{\omega}$ po dráze g při rozdělení σ.

Buď $\{\sigma\}_1^\infty$ normální posloupnost rozdělení dráhy g. Nechť pro každou takovou posloupnost existuje limita

$$\lim_{m \to \infty} \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_m) \overset{\text{def.}}{=} \int_g \boldsymbol{\omega}.$$

Pak říkáme, že $\boldsymbol{\omega}$ je **integrabilní** po dráze g a tuto limitu nazýváme **integrálem** diferenciální formy $\boldsymbol{\omega}$ po dráze g, resp. **křivkovým integrálem druhého druhu**.

Věta 19.5. Buďte $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}$ integrabilní diferenciální formy po dráze g. Má-li jedna strana smysl, platí

(i) (aditivita)

$$\int_g (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta}) = \int_g \boldsymbol{\omega} + \int_g \boldsymbol{\zeta},$$

(ii) (homogenita) $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_g (c\boldsymbol{\omega}) = c \int_g \boldsymbol{\omega}.$$

Důkaz.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma) = \sum_{i=1}^{p} \omega(x_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

Z linearity $\boldsymbol{\omega}$ v této sumě vyplývá linearita integrálu. □

Věta 19.6. Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální forma. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i)

$$\int_{g_1 \dot{+} g_2} \boldsymbol{\omega} = \int_{g_1} \boldsymbol{\omega} + \int_{g_2} \boldsymbol{\omega},$$

(ii)

$$\int_{\dot{-}g} \boldsymbol{\omega} = -\int_g \boldsymbol{\omega}.$$

(iii) Buď $l(g)$ délka dráhy g. Jestliže $(\forall x \in [g])(|\omega(x)| < K)$, pak

$$\left| \int_g \boldsymbol{\omega} \right| \leq K l(g).$$

Důkaz. (i) Nechť existuje $\int_g \boldsymbol{\omega}$, $g = g_1 \dot{+} g_2$. Předpokládejme, že $\int_{g_1} \boldsymbol{\omega}$ neexistuje. Pak existují integrální součty $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ takové, že $\mathcal{S}_1(\boldsymbol{\omega}, g_1, \sigma_1^{(m)}) \to S_1$ a $\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\omega}, g_1, \tilde{\sigma}_1^{(m)}) \to S_2$, $S_1 \neq S_2$. Vezmu g_2, $\sigma_2^{(m)}$, sjednocením získám rozdělení g, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \cup \sigma_2$ a hned vyleze spor s jednoznačností limity. Důkaz rovnosti:

$$S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma^{(m)}) = S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_1^{(m)}) + S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_2^{(m)}).$$

(ii)

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, \dot{-}\, g, \sigma^{(m)}) = \sum_{i=1}^{p} \omega(x_i)(-g(t_i) + g(t_{i-1})).$$

□

Věta 19.7 (výpočet křivkového integrálu druhého druhu)**.** Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální 1-forma třídy $\mathcal{C}^0$ a g dráha třídy $\mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$. Pak $\boldsymbol{\omega}$ je integrabilní po dráze g a existuje integrál

$$\int_g \boldsymbol{\omega} = \int_a^b \underleftarrow{\omega(g(t))}\, \overrightarrow{g'(t)} \mathrm{d}t.$$

Poznámka. (1) V integrandu se skrývá působení kovektoru na vektor, tedy skalární součin!

(2) Uvědomme si, že výraz $\overrightarrow{g'(t)}$ neznačí totální derivaci zobrazení g, nýbrž (jednořádkovou) Jacobiho matici dráhy g, tedy $\overrightarrow{g'(t)} = (\partial_1 g(t) \dots \partial_n g(t))$. Šipka tedy značí řádkový vektor. Pro korektnost dodáváme, že je nutné jej transponovat, abychom získali vektor sloupcový. Transpozici však pro zjednodušení zápisu neuvádíme.

(3) Pojmy křivka a dráha se často libovolně zaměňují, integrál je však téměř vždy křivkový, nikoli drahový. Křivkový integrál druhého druhu je **orientovaný**, je tedy závislý na parametrizaci dráhy.

Důkaz. Platí, že $\left\|\sigma_g^{(m)}\right\| \to 0$, díky spojitosti můžeme zajistit, že $\left|\sigma^{(m)}\right| \to 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_g^{(m)}) &= \sum_{i=1}^{p_m} \omega(g(\xi_i^{(m)}))(g(t_i^{(m)}) - g(t_{i-1}^{(m)})) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))g^{j\prime}(\eta_{ij}^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}) = \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))(g^j)'(\xi_i^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)})}_{A_m} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))((g^j)'(\eta_{ij}^{(m)}) - (g^j)'(\xi_i^{(m)}))(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)})}_{B_m}\end{aligned}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_1)(\forall m > m_1)\left(\left|\int_a^b \omega(g(t))g'(t)\mathrm{d}t - A_m\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$(\forall \delta > 0)(\exists m_2)(\forall m > m_2)\left(\left\|\sigma^{(m)}\right\| < \delta\right)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall t', t'' \in [a, b], \forall j \in \widehat{n})\left(|t' - t''| < \delta \Rightarrow \left|(g^j)'(t') - (g^j)'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{2k(b-a)n}\right)$$

$$|B_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Využijeme kompaktnost $[a, b]$, spojitost g', omezenosti ω, $m > \max m_1, m_2$. $\square$

Poznámka. Buď $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$, pak (tečka značí násobení čísel, nikoliv skalární součin)

$$\int_g \boldsymbol{\omega} = \int_a^b \mathrm{d}f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ g)'(t)\,\mathrm{d}t = f(g(b)) - f(g(a)),$$

tj. integrál exaktní diferenciální formy nezávisí na průběhu dráhy, jen na počátečním a koncovém bodě.

Odsud vidíme, že určitý integrál z funkce f, tj. $\int_a^b f = f(b) - f(a)$ je vlastně křivkový integrál z 0-formy f. Z exaktnosti 0-formy poté plyne závislost pouze na koncových bodech dráhy (tj. mezích určitého integrálu).

Definice 19.8. Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, φ po částech $\in \mathcal{C}^1$, taková, že

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\dot{m}} \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathcal{C}^1$$

pak (konečná aditivita)

$$\int_\varphi \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi_i} \boldsymbol{\omega}.$$

Definice 19.9. Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální forma třídy $\mathcal{C}^0$. Řekneme, že $\boldsymbol{\omega}$ je **konzervativní**, právě když pro každé dvě dráhy g_1, g_2 po částech $\mathcal{C}^1$ splňující podmínku $[g_1] \cup [g_2] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$, $g_1(a_1) = g_2(a_2)$, $g_1(b_1) = g_2(b_2)$ platí

$$\int_{g_1} \boldsymbol{\omega} = \int_{g_2} \boldsymbol{\omega},$$

tj. integrál závisí jen na počátečním a koncovém bodě, ne na dráze.

Poznámka. Integrál po uzavřené dráze se v matematice i fyzice často značí s kroužkem, tj.

$$\oint_g \boldsymbol{\omega}.$$

Věta 19.10. Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\boldsymbol{\omega}$ je exaktní.

(ii) pro libovolnou dráhu g uzavřenou a po částech $\mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$ platí $\oint_g \boldsymbol{\omega} = 0$,

(iii) $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní.

Důkaz. 1) $1 \Rightarrow 2$: Buď $\omega = \mathrm{d}f$,

$$g = \sum_{i=1}^{p} g_i$$

libovolná dráha po částech $\mathcal{C}^1$, $g_i \in \mathcal{C}^1$.

$$\int_g \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{p} \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_p) - f(x_0).$$

Platí

$$x_p = x_0 \Rightarrow \oint_g \boldsymbol{\omega} = 0.$$

2) $2 \Rightarrow 3$: Buďte g_1, g_2 libovolné po částech $\mathcal{C}^1$, stejnými počátečními a koncovými body, definujme $g = g_1 \dot{-} g_2$. Pak

$$0 = \oint_g \boldsymbol{\omega} = \int_{g_1} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_2} \boldsymbol{\omega}.$$

3) $3 \Rightarrow 1$: Definiční obor nemusí být souvislý a proto se rozdělí na jednotlivé komponenty souvislosti a pro každou se definuje funkce f zvlášť. Buď A souvislá podmnožina $\operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$, zvolím pevně $x_0 \in A$. Když si zvolím jiný bod, výsledná funkce se liší o konstantu (křivkový integrál z $\boldsymbol{\omega}$ mezi původním a novým bodem). V $\mathbb{R}^n$ (lineární prostor) je každá oblast lokálně lineárně souvislá a lze v ní každé dva body spojit lomenou čarou: $x \in A$; $[g_x] \subset A$.

Definujme $f(x) = \int_{g_x} \boldsymbol{\omega}$ (definice je jednoznačná, neboť $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní). f je reálná funkce na A, dokážeme, že $f'(x) = \omega(x)$:

$$f_i(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\vec{e_i}) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{g_{(x+t\vec{e_i})}} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_x} \boldsymbol{\omega} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\underbrace{\int_{g_{(x+t\vec{e_i})}} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_x} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_i} \boldsymbol{\omega}}_{\text{uzavřená dráha}} + \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} \right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(x + \tau\vec{e_i})\vec{e_i} \,\mathrm{d}\tau = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\omega_i(x + \tau\vec{e_i})}_{\text{spojité}} \,\mathrm{d}\tau = \omega_i(x)$$

$g_{(x+t\vec{e_i})}$ je libovolná křivka z bodu x_0 do $x + t\vec{e_i}$, nemusí se s g_x shodovat v jediném bodě. Poslední krok plyne z věty o střední hodnotě. (Případně se na to dá nahlížet jako na derivaci integrálu jako funkce horní meze v bodě 0, stačí si domyslet odečtení integrálu od 0 do 0.) $\omega_i(x)$ je spojité a f má tedy spojité parciální derivace a proto je diferencovatelná, takže $\omega_i(x) = f_i(x)$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$.

□

Poznámka. (1) V případě, že $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^1$ na jednoduše souvislé množině, je s uvedenými tvrzeními ekvivalentní i (iv) $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená.

(2) Z Riezsovy věty: $\underset{\leftarrow}{\omega}(x)\vec{h} = \left\langle \vec{F}, \vec{h} \right\rangle$ víme, že pro každou složku ω_i existuje složka F^i v eukleidovském standardním skalárním součinu (zvednutí indexu přes jednotkovou matici).

(3) Nechť $\cdot$ značí standardní skalární součin a $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)^T$. Práci po dráze g lze vyjádřit
$$A = \int\limits_g \boldsymbol{\omega} = \int\limits_g \sum_{i=1}^{3} \omega_i \,\mathrm{d}x^i = \int\limits_g \sum_{i=1}^{3} F^i \,\mathrm{d}x^i = \int\limits_g \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$
(4) Pole je konzervativní (a práce nezávisí na dráze), právě když diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní.
(5) Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$, taková, že $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, je konzervativní, právě když existuje funkce f taková, že $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f = f'$.
(6) Říkáme, že vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ je konzervativní, pokud existuje $\operatorname{grad} U(x)$ tak, že $\operatorname{grad} U(x) = \vec{F}(\vec{r})$. Jinými slovy, $\vec{F}(\vec{r})$ má potenciál $U(x)$.

20. Křivkový integrál prvního druhu

Definice 20.1. Buď f reálná funkce $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, g dráha, $[g] \subset \operatorname{Dom} f$, σ rozdělení g. Potom klademe

$$S(f,g,\sigma) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\xi_i))\,\|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \text{ pro } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Definice 20.2 (křivkový integrál prvního druhu)**.** Buď f reálná funkce $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, g dráha,$[g] \subset \operatorname{Dom} f$. Nechť pro každou normální posloupnost rozdělení $\{\sigma_n\}_1^\infty$ existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} S(f,g,\sigma_n) \overset{\text{ozn.}}{=} \int_g f\mathrm{d}s.$$

Pak říkáme, že funkce f je **integrabilní** po dráze g a tuto limitu nazýváme křivkovým **integrálem funkce f po dráze** g, resp. **křivkovým integrálem prvního druhu**.

Věta 20.3. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i) (aditivita)

$$\int_g (f+h)\mathrm{d}s = \int_g f\mathrm{d}s + \int_g h\mathrm{d}s,$$

(ii) (homogenita)

$$\int_g (\alpha f)\mathrm{d}s = \alpha \int_g f\mathrm{d}s.$$

Věta 20.4. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i)

$$\int_{g_1 \dot{+} g_2} f\mathrm{d}s = \int_{g_1} f\mathrm{d}s + \int_{g_2} f\mathrm{d}s,$$

(ii)

$$\int_{\dot{-}g} f\mathrm{d}s = + \int_g f\mathrm{d}s,$$

(iii)

$$\left| \int_g f\mathrm{d}s \right| \le K\ l(g), \quad \text{kde } K \ge \sup_{\operatorname{Dom} g} |f(x)|.$$

Věta 20.5 (výpočet křivkového integrálu prvního druhu)**.** Buď $f \in \mathcal{C}^0, g \in \mathcal{C}^1, [g] \in \operatorname{Dom} f, \operatorname{Dom} g = [a,b]$. Potom funkce f je integrabilní a platí

$$\int_g f\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t))\,\|g'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Obdobný důkazu 19.7, není vyžadován na zkoušce. □

Poznámka. (1) Křivkový integrál prvního druhu je **neorientovaný**, je tedy nezávislý na parametrizaci dráhy.

(2) Vzorec na výpočet délky křivky: $l(g) = \int_g \mathrm{d}s$.

(3) Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom} \omega$, $g'(t) \ne \underset{\leftarrow}{o}$ pro každé $t \in [a,b]$, tedy g je lokálně prostá. Pro $x \in [g]$ definujme

$$\vec{v}(x) = \left.\frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}\right|_{x=g(t)}.$$

Pak platí (převod křivkového integrálu druhého druhu na první druh)

$$\int\limits_g \boldsymbol{\omega} = \int\limits_a^b \boldsymbol{\omega}(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \boldsymbol{\omega}(g(t))\vec{v}(g(t))\,\|g'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int\limits_g \underset{\leftarrow}{\omega}\vec{v}\;\mathrm{d}s = \int\limits_g \left\langle \vec{F}, \vec{v} \right\rangle \mathrm{d}s.$$

Práci po dráze (křivkový integrál druhého druhu) můžeme tedy vyjádřit jako křivkový integrál prvního druhu (tečka $\cdot$ značí standardní skalární součin):

$$\int\limits_g \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_g \vec{F} \cdot \vec{r}\;\mathrm{d}s.$$

Proto se ve fyzice často používá užitečný, ale formálně nesprávný zápis $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\;\mathrm{d}s$.

21. Riemannův integrál jako elementární integrál

Tuto kapitolu Vrána zkouší pouze na A, slouží spíše pro shrnutí dosavadních poznatků o Riemannově konstrukci integrálu, na níž budeme následně budovat integrál Lebesgueův.

Definice 21.1. Buď $\mathcal{I}$ kompaktní uzavřená množina taková, že

$$\mathcal{I} = \bigtimes_{i=1}^{n} \left[a^i, b^i\right].$$

Množinu $\mathcal{I}$ nazveme **n-rozměrným intervalem**.

Definice 21.2. Objemem n-rozměrného intervalu $\mathcal{I}$ nazveme číslo

$$V(\mathcal{I}) = \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i).$$

Definice 21.3. Buďte σ^i, $i \in \widehat{n}$ rozdělení intervalu $\left[a^i, b^i\right]$. Pak množinu

$$\sigma = \bigtimes_{i=1}^{n} \sigma^i$$

nazveme **kartézským rozdělením n-rozměrného intervalu** $\mathcal{I}$.

Definice 21.4. Číslo $\|\sigma\| = \max_{i\in\widehat{n}} \left\|\sigma^i\right\|$ nazveme **norma rozdělení** σ. Rozdělení, pro které platí $\|\sigma\| < \delta$, nazveme **δ-rozdělení**. Posloupnost rozdělení $\{\sigma_m\}_1^\infty$ nazveme **normální**, právě když $\|\sigma_m\| \to 0$.

Definice 21.5. Buď $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$, σ rozdělení $\mathcal{I}$, buďte

$$M_i = \sup_{\mathcal{I}_i} f(x), \quad m_i = \inf_{\mathcal{I}_i} f(x).$$

Pak číslo

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{p} M_i V(\mathcal{I}_i)$$

nazveme **horním Darbouxovým součtem funkce f na** J a číslo

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{p} m_i V(\mathcal{I}_i)$$

nazveme **dolním Darbouxovým součtem**. σ^* zjemnění σ: σ_i^* je zjemnění σ_i pro každé $i \in \widehat{n}$.

Definice 21.6. Buď $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$. Pak označíme

$$\underline{\int_{\mathcal{I}}} f = \sup_{(\sigma)} s(f, \sigma), \quad \overline{\int_{\mathcal{I}}} f = \inf_{(\sigma)} S(f, \sigma).$$

Poznámka. (1)

$$mV(\mathcal{I}) \le s(f, \sigma) \le S(f, \sigma) \le MV(\mathcal{I})$$
$$s(f, \sigma) \le s(f, \sigma^*) \le S(f, \sigma^*) \le S(f, \sigma)$$

(2) Pro σ_1, σ_2 existuje zjemnění obou σ^*, z čehož vyplývá

$$s(f, \sigma_1) \le s(f, \sigma^*) \le S(f, \sigma^*) \le S(f, \sigma_2).$$

Věta 21.7. Buď f omezená na $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$. Pak $(\forall\varepsilon)(\exists\delta > 0)$, že pro všechna δ–rozdělení σ, tj. $(\forall\sigma)(\|\sigma\| < \delta)$, platí

$$\overline{\int_{\mathcal{I}}} f \le S(f, \sigma) < \overline{\int_{\mathcal{I}}} f + \varepsilon \quad \wedge \quad \underline{\int_{\mathcal{I}}} f \ge s(f, \sigma) > \underline{\int_{\mathcal{I}}} f - \varepsilon.$$

Důkaz. Platnost nerovností plyne z definice suprema, resp. infima za využití zjemnění. Hledání δ viz Vránova skripta. □

Důsledek. Je-li $\|\sigma_m\| \to 0$, pak

$$\lim_{m\to\infty} S(f,\sigma_m) = \overline{\int_{\mathcal{I}}} f, \quad \lim_{m\to\infty} s(f,\sigma_m) = \underline{\int_{\mathcal{I}}} f.$$

Definice 21.8. Buď f omezená na $\mathcal{I}$. Řekneme, že f je **Darbouxovsky integrabilní**, právě když

$$\underline{\int_{\mathcal{I}}} f = \overline{\int_{\mathcal{I}}} f = \mathcal{D}\int_{\mathcal{I}} f$$ . . . nazýváme **Darbouxův integrál**

Poznámka. (1) Funkce je darbouxovsky integrabilní, právě když $(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall\sigma, \|\sigma\| < \delta)$ $(\Omega(f,\sigma) = S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon)$, kde

$$\Omega = \sum_{j=1}^{p} (M_j - m_j) V(\mathcal{I}_j)$$

je **oscilace funkce**.

(2) Funkce spojitá na intervalu je darbouxovsky integrabilní.

Definice 21.9. Mějme libovolnou reálnou funkci f na kompaktu $\mathcal{I}$.

$$\Xi(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i) V(\mathcal{I}_i), \quad \xi_i \in \mathcal{I}_i \ \forall i \in \widehat{p}$$

nazveme **Riemannovým integrálním součtem**.

Funkci nazveme **Riemannovsky integrabilní**, právě když pro každou normální posloupnost $\{\sigma_m\}_1^\infty$ a pro každý systém ξ_i existuje vlastní limita

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(f,\sigma_m) = \mathcal{R}\int_{\mathcal{I}} f.$$

Poznámka. $s(f,\sigma_m) \le \Xi(f,\sigma_m) \le S(f,\sigma)$. Má-li funkce Darbouxův integrál, má i Riemannův.

Věta 21.10. Následující dva výroky jsou ekvivalentní:

(1) Existuje Darbouxův integrál (a funkce je tedy omezená)

$$\mathcal{D}\int_{\mathcal{I}} f$$

(2) Existuje normální posloupnost $\{\sigma_m\}_1^\infty$ tak, že pro jakoukoli posloupnost Riemannových integrálních součtů existuje limita

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(f,\sigma_m) \in \mathbb{R}$$

Důkaz. 1) $1 \Rightarrow 2$: Nejenže existuje $\{\sigma_m\}_1^\infty$, ale dokonce pro každou.

2) $2 \Rightarrow 1$, resp. $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$: $\mathcal{D}\int f$ neexistuje, tedy posloupnost částečných součtů není omezená (tj. funkce není omezená) nebo $\underline{\int} f \neq \overline{\int} f$.

a) Funkce není omezená:

Vezmu libovolnou $\|\sigma_m\| \to 0$. Pak (alespoň) v jednom částečném intervalu (k-tém) je funkce neomezená. Naleznu $\xi_{k'}$ tak, aby

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq k'}}^{p_m} f(\xi_k^m) \mathrm{V}(\mathcal{I}_k^m) + f(\xi_{k'}^m) \mathrm{V}(\mathcal{I}_k^m) > m$$

b) $\underline{\int} f \neq \overline{\int} f$: Konstrukce ξ_k:

$$m_k^{(m)} \le f(\xi_k^{(m)}) < m_k^{(m)} + \varepsilon \text{ pro } m \text{ liché}$$
$$M_k^{(m)} - \varepsilon < f(\xi_k^{(m)}) \le M_k^{(m)} \text{ pro } m \text{ sudé}$$

a mám vybrané posloupnosti konvergující k různým limitám $\underline{\int}$ a $\overline{\int}$, takže limita neexistuje.

□

Důsledek. Darbouxův a Riemannův integrál se shodují. Darboux ovšem potřebuje omezenou funkci, Riemann si ji nese v definici Riemannova integrálního součtu. Darboux se hodí na existenci integrálu, Riemann se hodí na výpočet hodnoty integrálu.

Z Darbouxe například okamžitě plyne integrabilita součtu, násobku a součinu funkcí:

$$\Omega(\alpha f + \beta g, \sigma) \leq |\alpha| \, \Omega(f, \sigma) + |\beta| \, \Omega(g, \sigma),$$
$$\Omega(fg, \sigma) \leq K\Omega(f, \sigma) + M\Omega(g, \sigma),$$

kde $|f| \leq K$, $|g| \leq M$. Z Riemanna zase plyne

$$\lim_{m \to \infty} \Xi(\alpha f + \beta g, \sigma) = \alpha \mathcal{R} \int f + \beta \mathcal{R} \int g.$$

Věta 21.11. Buď $\mathcal{I}$ kompaktní. Pak $\mathcal{C}^0(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{I}) = \mathcal{R}(\mathcal{I})$, funkce spojitá na $\mathcal{I}$ je darbouxovsky integrabilní na kompaktu.

Důkaz. Díky stejnoměrné spojitosti f

$$\Omega(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i) V(\mathcal{I}_i) < \varepsilon V(\mathcal{I})$$

□

Definice 21.12. Množina Z je **Jordanovy míry nula**, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém $\{\mathcal{K}_j\}_{j=1}^r$ takový, že pokrývá Z ($Z \subset \bigcup_{j=1}^r \mathcal{K}_j^\circ$) a současně platí

$$\sum_{j=1}^{r} V(\mathcal{K}_j) < \varepsilon$$

Poznámka. Konečná množina je Jordanovy míry nula, množina s konečným počtem hromadných bodů je Jordanovy míry nula.

Věta 21.13. Má-li množina bodů nespojitosti omezené funkce f na $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ Jordanovu míru nula, pak je funkce f Riemannovsky integrabilní.

22. Stupňovité funkce

Definice 22.1. Buď $f : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ omezená funkce na (kompaktním) intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že f je **stupňovitá** na $\mathcal{I}$, jestliže existuje rozdělení σ intervalu $\mathcal{I}$ takové, že f je konstantní na vnitřku každého částečného intervalu $\mathcal{I}$ podle σ.

Věta 22.2. Označme $\mathcal{H}(\mathcal{I})$ množinu všech stupňovitých funkcí na $\mathcal{I}$. Pak platí:

(i) Je-li $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $h + k \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$.
(ii) Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $\alpha h \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$.
(iii) Je-li $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $\min(h, k) \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $\max(h, k) \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$.
(iv) Je-li $h \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $|h| \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$.

Důkaz. Určitě platí, že funkce stupňovitá při σ je stupňovitá i při zjemnění σ^*. □

Věta 22.3. Je-li funkce h stupňovitá při σ i při σ^+, pak platí:

$$\sum_{j=1}^{p} h_j V(\mathcal{I}_j) = \sum_{j=1}^{p^+} h_j^+ V(\mathcal{I}_j^+)$$

Důkaz. Provedeme společné zjemnění. □

Definice 22.4. Buď h stupňovitá na $\mathcal{I}$, σ rozdělení $\mathcal{I}$, při kterém je h stupňovitá. Pak definujeme

$$\mathbf{I}h = \sum_{k=1}^{p} h_k V(\mathcal{I}_k)$$

Poznámka. Díky minulé větě je $\mathbf{I}h$ nezávislé na σ.

Věta 22.5. (1) Je-li $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $\mathbf{I}(h + k) = \mathbf{I}h + \mathbf{I}k$.
(2) Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, pak $\mathbf{I}(\alpha h) = \alpha \mathbf{I}h$.
(3) Je-li $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$, $h \leq k$, pak $\mathbf{I}h \leq \mathbf{I}k$.

Důkaz. Platí z definice — rozdělení volíme tak, aby při něm byly h i k stupňovité. □

Definice 22.6. Buď $Z \subset \mathcal{I}$. Řekneme, že Z **je Lebesgueovy míry nula** (zapisujeme $\mu(Z) = 0$), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše spočetný systém intervalů $\mathcal{K}_j$ tak, že $Z \subset \bigcup_j \mathcal{K}_j^\circ$ a současně

$$\sum_j V(\mathcal{K}_j) < \varepsilon$$

Poznámka. (1) Množiny Jordanovy míry nula jsou Lebesgueovy míry nula.
(2) Odteď budeme předpokládat pouze Lebesgueovu míru. V literatuře se můžete pro zdůraznění Lebesgueovy míry setkat se zápisem $\lambda(Z)$ namísto $\mu(Z)$.
(3) Stačí předpokládat právě spočetný systém. Buď $\mathcal{K}_p$ poslední interval, $\alpha = \sum_1^p V(\mathcal{K}_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$\mathcal{K}_{p+j} = \bigtimes_{i=1}^{n} [-\eta_j, \eta_j],$$

zvolme

$$V(\mathcal{K}_{p+j}) = (2\eta_j)^n < \frac{\varepsilon - \alpha}{2^{j+1}}.$$

Pak

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(\mathcal{K}_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon - \alpha}{2} < \varepsilon.$$

(4) Stačí, aby $Z \subset \bigcup_j \mathcal{K}_j$, bez vnitřků a otevřenosti se obejdu:

$$\mathcal{K}_j = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_j^i, b_j^i] \quad \mathcal{K}_j \subset \mathcal{I}_j^\circ \quad \mathcal{I}_j = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_j^i - \eta_j, b_j^i + \eta_j]$$

$$\sum_j^\infty V(\mathcal{I}_j) = \sum_j^\infty \underbrace{(V(\mathcal{I}_j) - V(\mathcal{K}_j))}_{\substack{\text{spojitý polynom} \\ p(\eta_j)-p(0)}} + \underbrace{\sum_j^\infty V(\mathcal{K}_j)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Zvolím η_j tak, aby

$$p(\eta_j) - p(0) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Věta 22.7. Nejvýše spočetné sjednocení množin míry nula je opět míry nula.

Důkaz. Buď $Z_1, Z_2, \dots, Z_m, \dots$ Máme dokázat, že $Z = \bigcup_{j=1}^\infty Z_j$ je míry nula.
Z_m pokryji systémem $\left\{K_j^m\right\}_{j=1}^\infty$.

$$Z_m \subset \bigcup_{j=1}^\infty \left(K_j^m\right)^\circ; \quad \sum_{j=1}^\infty V(K_j^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$$Z \subset \bigcup_{m,j=1}^\infty K_j^m; \quad \sum_{m,j=1}^\infty V(K_j^m) < \varepsilon$$

□

Poznámka. (1) Jednobodová množina je míry nula, takže i $\mathbb{Q}$ je míry nula.
(2) Příkladem množiny míry 0, která má mohutnost kontinua (je tedy nespočetná) je tzv. **Cantorovo diskontinuum**: Začneme s intervalem $[0, 1]$ a iterativně odstraňujeme prostřední třetinu intervalů z předchozího kroku. Cantorovo diskontinuum vznikne průnikem všech těchto intervalů. Součet délek intervalů tvořící sjednocení má délku $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, tj. je nulové míry, a Cantorovo diskontinuum je jeho podmnožina. Že je Cantorovo diskontinuum nespočetné dokážeme pomocí diagonálního schématu, protože obsahuje čísla, jejichž vyjádření v trojkové soustavě obsahuje pouze číslice 0 a 2.

Věta 22.8. Buď $Z \subset \mathcal{I}$. Z je míry nula, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rostoucí posloupnost nezáporných stupňovitých funkcí ($h_n \geq 0$, $h_n \leq h_{n+1}$, $h_n \in \mathcal{H}(\mathcal{I})$) taková, že platí:
(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \geq 1$ pro každé $x \in Z$,
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{I}\, h_n < \varepsilon)$.

Důkaz. 1) ($\Rightarrow$) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje systém $\{\mathcal{K}_j\}_{j=1}^\infty$ takový, že

$$Z \subset \bigcup_{j=1}^\infty (\mathcal{K}_j)^\circ \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^\infty V(\mathcal{K}_j) < \varepsilon.$$

Sestrojíme posloupnost funkcí:

$$h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \left(\bigcup_{j=1}^m \mathcal{K}_j\right) \cap \mathcal{I} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Posloupnost je rostoucí pro každé $x \in \mathcal{I}$, funkce jsou stupňovité a nezáporné, sup ≥ 1. Dále platí

$$\mathbf{I}\, h_m \leq \sum_{j=1}^m V(K_j) < \varepsilon$$

a je-li $x \in Z$, potom existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in \mathcal{K}_m \cap \mathcal{I}$, tudíž $h_m(x) = 1$ a $\sup_{m\in\mathbb{N}} h_m(x) \geq 1$.
2) ($\Leftarrow$) Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje rostoucí posloupnost $\{h_m\}_1^\infty$ nezáporných stupňovitých funkcí taková, že $\mathbf{I}\, h_m \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Buď dále σ_m rozdělení, při kterém je h_m stupňovitá pro každé $m \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že σ_m je posloupnost zjemňujících se rozdělení. Buď Z' množina všech hraničních bodů všech částečných intervalů všech rozdělení σ_m. Platí, že $\mu(Z') = 0$.
Zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby funkční hodnota funkce h_k již byla ve vnitřku některého částečného intervalu rozdělení σ_k alespoň $\frac{1}{2}$. Označme $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{r_k}$ částečné intervaly rozdělení σ_k, na jejichž vnitřcích má funkce h_k funkční hodnotu větší nebo rovnu $\frac{1}{2}$. Označme dále $\mathcal{K}_{r_k+1}, \dots, \mathcal{K}_{r_{k+1}}$ částečné intervaly rozdělení σ_{k+1}, na jejichž vnitřcích má funkce h_k funkční hodnotu větší nebo rovnu $\frac{1}{2}$, ale které

nejsou obsaženy v $\bigcup_{j=1}^{r_k} \mathcal{K}_j$. Získáme tak rostoucí posloupnost $\{r_m\}_{m=k}^{\infty}$ a nejvýše spočetný systém intervalů $\{\mathcal{K}_j\}_{j=1}^{r}$, kde $r = \lim_{m\to\infty} r_m$ s vzájemně disjunktními vnitřky.
Protože $\sup_{m\in\mathbb{N}} h_m(x) \geq 1$ pro všechna $x \in Z$, je $Z'' = Z \setminus Z' \subset \bigcup_{j=k}^{r} \mathcal{K}_j^\circ$. Přitom pro všechna $m \geq k$ platí

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_m} V(\mathcal{K}_j) \leq \mathbf{I}\, h_m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

V limitě pak

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} V(\mathcal{K}_j) \leq \mathbf{I}\, h_m \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

tedy Z'' je nulové míry.

□

Věta 22.9. Buď $\{h_n\}_1^\infty$ posloupnost nezáporných stupňovitých funkcí, $h_{n+1} \leq h_n$. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\, h_n = 0 \Longleftrightarrow \mu\left(\left\{x \in \mathcal{I} \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} h_n(x) > 0\right\}\right) = 0.$$

Důkaz. 1) $(\Rightarrow)$ Buď

$$Z_p = \left\{x \in \mathcal{I} \,\middle|\, \lim_{m\to\infty} h_m(x) \geq \frac{1}{p}\right\}$$

pak platí $ph_m(x) \geq 1$ pro všechna $x \in Z_p$ a všechna $m \in N$. Protože $\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}(ph_m) = p\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}\, h_m = 0$, lze při libovolném $\varepsilon > 0$ nalézt $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathbf{I}(ph_m) < \varepsilon$ a $(ph_m)(x) \geq 1$ pro všechna $x \in Z_p$. Z toho vyplývá, že $\mu(Z_p) = 0$ a protože

$$Z = \bigcup_{p=1}^{\infty} Z_p,$$

je i $\mu(Z) = 0$.

2) $(\Leftarrow)$ Nechť Z_1 je množina všech hraničních bodů všech částečných intervalů, při nichž jsou všechny h_m stupňovité, buď $Z_2 = \{x \in \mathcal{I} | \lim_{m\to\infty} h_m(x) > 0\}$. Potom, protože množina Z_1 má nulovou míru, je $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$.
Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje systém intervalů $\{\mathcal{K}_j\}_1^\infty$ takový, že platí

$$Z_1 \cup Z_2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_j \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^{\infty} V(\mathcal{K}_j) < \frac{\varepsilon}{M + V(\mathcal{I})},$$

kde $M > h_1(x)$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.
Pro každé $x \in \mathcal{I} \setminus (Z_1 \cup Z_2)$ platí, že $\lim_{m\to\infty} h_m(x) = 0$, tedy existuje $m(x)$ takové, že

$$h_m(x) < \frac{\varepsilon}{M + V(\mathcal{I})} \quad \text{pro každé } m \geq m(x).$$

Protože x leží ve vnitřku nějakého částečného intervalu $\mathcal{I}_x$ rozdělení, při němž je h_m stupňovitá, platí dále

$$h_{m(x)}(y) < \frac{\varepsilon}{M + V(\mathcal{I})} \quad \text{pro každé } y \in \mathcal{I}_x^\circ.$$

Systém intervalů $\{\mathcal{K}_j\}_1^\infty \cup \{\mathcal{I}_y\}_{y\in\mathcal{I}\setminus Z}$ pokrývá množinu $\mathcal{I}$. Protože $\mathcal{I}$ je kompaktní, existuje konečné podpokrytí

$$\mathcal{I} \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{K}_{j_i}^\circ \cup \bigcup_{k=1}^{s} \mathcal{I}_{x_k}^\circ.$$

Buď $m_0 = \max(m(x_1), \ldots, m(x_s))$. Pak pro každé $m > m_0$ platí

$$\mathbf{I}\, h_m \leq M\frac{\varepsilon}{M + V(\mathcal{I})} + \frac{\varepsilon}{M + V(\mathcal{I})} V(\mathcal{I}) = \varepsilon,$$

tedy pro každé ε existuje m_0, od kterého je $\mathbf{I}\, h_m < \varepsilon$.

□

Definice 22.10 (*horní a dolní stupňovitá funkce k f při rozdělení σ*)**.** Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\mathcal{I}$ a $\{\mathcal{I}_k\}_{k=1}^{p}$ jsou částečné intervaly intervalu $\mathcal{I}$ při rozdělení σ. Pak

$$\underline{h}_{\sigma}^{f} = m_k = \inf_{y\in\mathcal{I}_k} f(y), \quad \overline{h}_{f}^{\sigma}(x) = M_k = \sup_{y\in\mathcal{I}_k} f(y)$$

nazvu **horní, resp. dolní stupňovitá funkce k f při rozdělení σ**

Definice 22.11. Buď f omezená funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Je-li $x_0 \in \mathcal{I}$, položme

$$\underline{f}(x_0) = \lim_{\delta\to 0+} \inf_{|x-x_0|<\delta} f(x), \quad \overline{f}(x_0) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{|x-x_0|<\delta} f(x).$$

Funkci $\underline{f}$ resp. $\overline{f}$ nazýváme **dolní** resp. **horní funkcí** k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$.

Věta 22.12. Buď f omezená na kompaktním intervalu $\mathcal{I}$. Pak f je riemannovsky integrabilní, právě když množina bodů nespojitosti má nulovou Lebesgueovu míru.

Důkaz. Funkce f je riemannovsky integrabilní právě tehdy, je-li $\underline{\int}_{\mathcal{J}} f = \overline{\int}_{\mathcal{J}} f$. Tato rovnost je splněna právě tehdy, existuje-li posloupnost zjemňujících se rozdělení $\{\sigma_m\}_1^\infty$ taková, že

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}\overline{h}_{f}^{\sigma_m} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}\underline{h}_{\sigma_m}^{f},$$

tj.

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}\left(\overline{h}_{f}^{\sigma_m} - \underline{h}_{\sigma_m}^{f}\right) = 0.$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, má-li množina

$$Z = \left\{x \in \mathcal{I} \,\middle|\, \lim_{m\to\infty}\left(\overline{h}_{f}^{\sigma_m}(x) - \underline{h}_{\sigma_m}^{f}(x)\right) > 0\right\} = \{x \in \mathcal{I} | \overline{f}^{\sigma}(x) - \underline{f}_{\sigma}(x) > 0\}$$

nulovou míru.

Platí, že $\overline{f}^{\sigma}(x) = \overline{f}(x)$ a $\underline{f}_{\sigma}(x) = \underline{f}(x)$ až na množinu nulové míry. Platí, že $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$, právě když f je v x spojitá. □

Věta 22.13. Buď f omezená na kompaktním intervalu $\mathcal{I}$. f je riemannovsky integrabilní na $\mathcal{I}$, právě když existují posloupnosti $\{k_m\}_1^\infty$ a $\{l_m\}_1^\infty$ stupňovitých funkcí takové, že platí:

(i) $\{k_m\}_1^\infty$ je rostoucí a

$$(\forall x \in \mathcal{I} \setminus Z_1)\left(\lim_{m\to\infty} k_m(x) = f(x)\right), \text{ kde } \mu(Z_1) = 0,$$

(ii) $\{l_m\}_1^\infty$ je klesající a

$$(\forall x \in \mathcal{I} \setminus Z_2)\left(\lim_{m\to\infty} l_m(x) = f(x)\right), \text{ kde } \mu(Z_2) = 0,$$

(iii) $(\forall x \in \mathcal{I})(k_m(x) \le f(x) \le l_m(x))$.

Důkaz. 1) ($\Rightarrow$) Buď f riemannovsky integrabilní na $\mathcal{I}$, (σ_m) posloupnost zjemňujících se rozdělení. Pak $k_m = \underline{h}_{\sigma_m}$ a $l_m = \overline{h}_{\sigma_m}$.

2) ($\Leftarrow$) Buď $\left\{\sigma_m^{(1)}\right\}_1^\infty$ posloupnost, rozdělení, při nichž jsou k_m stupňovité, $\left\{\sigma_m^{(2)}\right\}_1^\infty$ posloupnost, rozdělení, při nichž jsou stupňovité l_m, $\left\{\sigma_m^{(3)}\right\}_1^\infty$ libovolná normální posloupnost rozdělení. Definujme $\sigma_1 = (\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_1^{(3)})^*$, $\sigma_{m+1} = (\sigma_m, \sigma_{m+1}^{(1)}, \sigma_{m+1}^{(2)}, \sigma_{m+1}^{(3)})^*$ (společné zjemnění těch v závorce). Pak platí

$$k_m \le \underline{h}_{\sigma_m} \le f \le \overline{h}^{\sigma_m} \le l_m,$$

tedy

$$\mathbf{I}k_m \le \mathbf{I}\underline{h}_{\sigma_m} \le \mathbf{I}\overline{h}^{\sigma_m} \le \mathbf{I}l_m$$

a

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}k_m \le \underline{\int_{\mathcal{I}}} f \le \overline{\int_{\mathcal{I}}} f \le \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}l_m.$$

k_m je klesající, l_m je rostoucí a platí, že

$$\lim_{m\to\infty}(l_m - k_m)(x) = 0$$

pro všechna $x \in \mathcal{I}$ až na množinu nulové míry. Z toho vyplývá

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}(l_m - k_m) = 0,$$

tedy

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}k_m = \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}l_m = \underline{\int_{\mathcal{I}}} f = \overline{\int_{\mathcal{I}}} f = \int_{\mathcal{I}} f.$$

□

Poznámka. K existenci Riemanna jsou tedy nutné existence dvou posloupností stupňovitých funkcí. Lebesguovi stačí jen jedna. Tím odstraní problém normy na prostoru funkcí:

$$\int f^2 = 0 \not\Rightarrow f = 0$$

je seminorma, norma je to pouze na prostoru spojitých funkcí, který ale není úplný.

23. Základní integrál

Definice 23.1. Buď X libovolná množina. Množinu $\mathcal{H}(X)$ reálných omezených funkcí $X \to \mathbb{R}$ nazveme **třídou $\mathcal{H}$ (souborem základních funkcí)**, platí-li

(I) Je-li $h, k \in \mathcal{H}(X)$, pak $h + k \in \mathcal{H}(X)$;
(II) je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{H}(X)$, pak $\alpha h \in \mathcal{H}(X)$;
(III) je-li $h \in \mathcal{H}(X)$, pak $|h| \in \mathcal{H}(X)$.

Poznámka. (1) Požadujeme tedy, aby $\mathcal{H}(X)$ byl vektorový prostor, který navíc s každou funkcí obsahuje i její absolutní hodnotu.
(2) Protože obecně platí $\max(h, k) - \min(h, k) = |h - k|$ a také $\max(h, k) + \min(h, k) = h + k$, pak pro $h, k \in \mathcal{H}$ patří i $\max(h, k)$ a $\min(h, k)$ do $\mathcal{H}$.
(3) Definujeme-li kladnou a zápornou část funkce pomocí vztahů $h^+ = \max(h, 0)$ a $h^- = \max(-h, 0)$, pak pro $h \in \mathcal{H}$ patří do $\mathcal{H}$ i h^+, h^-. Nulová funkce totiž v $\mathcal{H}$ leží díky (II).
(4) Lze psát $h = h^+ - h^-$; $|h| = h^+ + h^-$.

Definice 23.2. Buď $\mathbf{I}$ funkcionál definovaný na $\mathcal{H}(X)$ a nechť platí:

(I) $(\forall h, k \in \mathcal{H}(X), \forall \alpha \in \mathbb{R})(\mathbf{I}(\alpha h + k) = \alpha \mathbf{I} h + \mathbf{I} k)$,
(II) $(\forall h \in \mathcal{H}(X))(h \geq 0 \Rightarrow \mathbf{I} h \geq 0)$,
(III)
$$(\forall \{h_n\}_1^\infty \in \mathcal{H}(X), h_n \geq 0 \wedge h_n \geq h_{n+1}) \left(\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{I} h_n = 0 \right),$$

pak $\mathbf{I}$ nazýváme **základní integrál**.

Poznámka. (1) První vlastnost se nazývá linearita a neříká nic jiného, než že se opravdu jedná o lineární funkcionál na vektorovém prostoru $\mathcal{H}$. Druhé vlastnosti říkáme nezápornost a třetí spojitost.
(2) Je-li $h \leq k$, pak $\mathbf{I} h \leq \mathbf{I} k$. To snadno plyne z axiomů I a II.
(3) Platí, že $h \leq h^+ \leq |h|$, $-h \leq h^- \leq |h|$. Tedy $\mathbf{I} h \leq \mathbf{I}\,|h|$, $\mathbf{I} h \geq -\mathbf{I}\,|h|$.
(4) Zvolím-li interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}(\mathcal{I})$ stupňovité funkce, $\mathbf{I} h$ jako v předchozím odstavci, je $\mathbf{I}$ základní integrál.
(5) Buď $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní interval, $\mathcal{H}(\mathcal{I}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$, pak $\mathbf{I} h = \mathcal{R}\int_{\mathcal{I}} h$ je základní integrál. Linearita a pozitivnost je jasná, (III) plyne z Diniovy věty.
(6) Nevlastní integrál: Buď $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ jakýkoli interval, třeba neomezený. Pak řekneme, že $h \in \mathcal{H}(\mathcal{J})$ je stupňovitá na $\mathcal{J}$, jestliže existuje $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ kompakt tak, že $h|_{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}(\mathcal{I}) \wedge h(x) = 0$ pro $x \in \mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{I}$. Zavedu $\mathbf{I}$ vztahem $\mathbf{I} h = \mathbf{I}(h|_{\mathcal{I}})$.

Definice 23.3. Buď $Z \subset X$. Pak množina Z je nulové míry ($\mu(Z) = 0$), právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rostoucí posloupnost nezáporných základních funkcí $\{h_n\}_1^\infty \in \mathcal{H}(X)$ tak, že platí:

(1) $(\forall x \in Z)(\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \geq 1)$,
(2) $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbf{I} h_n < \varepsilon)$.

Definice 23.4. Řekneme, že výrok V platí **μ-skoro všude** na množině X, právě když existuje $Z \subset X$ taková, že $\mu(Z) = 0$ a výrok V platí pro každé $x \in X \smallsetminus Z$.

Věta 23.5. Sjednocení nejvýše spočetného systému množin míry nula je opět množina míry nula.

Poznámka. Termín skoro všude je závislý na volbě míry i na volbě základního integrálu!

(1) Volíme-li $\mathbf{I}$ stejně jako v předchozím odstavci, pak lze tvrdit např.:
  (a) Skoro každé číslo je iracionální.
  (b) Omezená monotonní funkce je spojitá skoro v každém bodě.
(2) Volíme-li $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ a definujeme $\mathbf{I} h = h(0)$, pak je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ míry nula. Funkcionálu $\mathbf{I}$ pak říkáme **Diracova $\boldsymbol{\delta}$-funkce**, ačkoliv se nejedná o funkci v klasickém pojetí, nýbrž o tzv. distribuci (více v MMF).

Nemůže-li dojít k záměně s jinou mírou, namísto *μ-skoro všude* budeme psát pouze *skoro všude*, resp. *s.v.*

Věta 23.6. Buď $\{h_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí z $\mathcal{H}$; $h_n \geq h_{n+1} \geq 0$. Nechť $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ s.v. na X. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n = 0.$$

Důkaz. Buď

$$Z = \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} h_n(x) > 0\right\},$$

pak $\mu(Z) = 0$. Označme $M = \sup_{x\in X} h_1(x)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost $\{k_m\}_1^\infty \in \mathcal{H}$, $0 \leq k_n \leq k_{n+1}$ taková, že $\mathbf{I}k_n < \frac{\varepsilon}{M}$ a pro každé $x \in Z$ je $(\sup_{n\in\mathbb{N}} k_n(x) \geq 1)$.

Posloupnost $h_n - Mk_n$ klesá, má tedy limitu pro každé x. Současně pro každé x platí

$$\lim_{n\to\infty}(h_n - Mk_n)(x) \leq 0,$$

tedy

$$\lim(h_n - Mk_n)^+(x) = 0.$$

Podle axiomu (III) je $\lim \mathbf{I}(h_n - Mk_n)^+ = 0$. Protože $h_n - Mk_n \leq (h_n - Mk_n)^+$, je i $\mathbf{I}(h_n - Mk_n) \leq \mathbf{I}(h_n - Mk_n)^+$, takže $\exists n_0$, že pro $n > n_0$ platí

$$0 \leq \mathbf{I}h_n \leq M\mathbf{I}k_n \leq \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n = 0.$$

$\square$

Poznámka. (1) Položím–li za členy posloupnosti $h_n = |h|, \forall n \in \mathbb{N}$, dostanu, že z h je skoro všude 0 plyne $\mathbf{I}h = 0$.

(2) Nechť $h = k$ skoro všude, pak $\mathbf{I}h = \mathbf{I}k$. Dostanu to aplikací předchozího bodu na rozdíl $h - k$ a z linearity.

Věta 23.7. Buď $\{h_n\}_1^\infty \in \mathcal{H}$. Nechť platí:

(I) $h_n(x) \geq h_{n+1}(x) \geq 0$ s.v. na X pro každé $n \in \mathbb{N}$,

(II) $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ s.v. na X. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n = 0.$$

Důkaz. Zvolím $k_1 = h_1^+$, $k_n = \min(h_n^+, k_{n-1})$. Posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ neroste, platí $k_n(x) = h_n(x)$ s.v. na X a podle předchozí poznámky

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}(k_n - h_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}k_n = 0.$$

Poslední rovnítko platí, protože k_n má díky monotonii limitu. $\square$

Definice 23.8. (1) Dvě funkce jsou ekvivalentní, značíme $f \sim g$, právě když $f(x) = g(x)$ s.v. na X.

(2) $f \lesssim g$, právě když $f(x) \leq g(x)$ s.v. na X.

(3) $h_n \nearrow$, právě když $h_n \lesssim h_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(4) $h_n \nearrow f$, právě když $h_n \lesssim h_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navíc $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$ s.v. na X.

(5) $h_n \searrow$, právě když $h_{n+1} \lesssim h_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(6) $h_n \searrow f$, právě když $h_{n+1} \lesssim h_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a navíc $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$ s.v. na X.

(7) $h_n \rightarrow$, právě když $\exists \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ s.v. na X.

Poznámka. Předchozí věta: $h_n \searrow 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n = 0$.

Věta 23.9. Buďte $h_n, k_n \in \mathcal{H}$. Nechť $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$ a $f \lesssim g$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}k_n.$$

Důkaz. Platí, že

$$(h_n - k_m) \searrow (h_n - g) \lesssim (f - g) \lesssim 0, \quad \text{kde } n \text{ je pevné}$$

tedy

$$(h_n - k_m)^+ \searrow (h_n - g)^+ \sim 0.$$

Podle axiomů

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{I}(h_n - k_m) \leq \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}(h_n - k_m)^+ = 0,$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I} h_n \leq \lim_{m\to\infty} \mathbf{I} k_m.$$

□

24. Třída Λ^+ ($\mathcal{L}^+$)

Definice 24.1. Řekneme, že funkce $f : X \mapsto \mathbb{R}^*$ je **třídy** $\Lambda^+(X)$, existuje-li $(h_n) \in \mathcal{H}$, $h_n \nearrow f$. Existuje-li navíc $c > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbf{I}h_n \leq c$, pak $f \in \mathcal{L}^+(X)$.

Poznámka. (1) Připouštíme i „zobecněné funkce“ jako $f(x) = +\infty\ \forall x \in X$.
(2) $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^+(X) \subset \Lambda^+(X)$.

Věta 24.2. Funkce třídy $\mathcal{L}^+$ jsou skoro všude konečné.

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{L}^+(X)$. Potom existuje $h_n \nearrow f$ taková, že $\mathbf{I}h_n \leq \frac{c}{2}$. Definujme

$$Z = \left\{ x \in X \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} h_n(x) = +\infty \right\},$$

dokážeme, že $\mu(Z) = 0$: Buď $h'_1 = h_1$, $h'_n = \max(h_n, h'_{n-1})$, $k_n = h'_n - h_1$. Protože $h'_n \sim h_n$, je $\mathbf{I}h'_n = \mathbf{I}h_n \leq \frac{c}{2}$, $\mathbf{I}k_n \leq c$.

Zvolím $\varepsilon > 0$, pak pro každé $x \in Z$ existuje n takové, že $k_n(x) \geq \frac{c}{\varepsilon}$. Sestrojil jsem nezápornou posloupnost $\left\{\frac{\varepsilon}{c}k_n\right\}_1^\infty$ tak, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{c}k_n \geq 1$ a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\frac{\varepsilon}{c}k_n \leq \varepsilon,$$

takže Z je nulové míry. □

Věta 24.3. (i) Jsou-li $f, g \in \Lambda^+$, pak $f + g \in \Lambda^+$.
(ii) Jsou-li $\alpha \geq 0$, $f \in \Lambda^+$, pak $\alpha f \in \Lambda^+$.
(iii) Jsou-li $f, g \in \Lambda^+$, pak $f^+, \max(f, g), \min(f, g) \in \Lambda^+$.

Důkaz. (i) Buďte $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$, pak $(h_n + k_n) \nearrow f + g$. $f + g$ nemusí mít smysl, ale to se může stát pouze na množině nulové míry.
(ii) Protože $\alpha \geq 0$, platí, že $(\alpha h_n) \nearrow \alpha f$.
(iii) $\max(h_n, k_n) \nearrow \max(f, g)$, $\min(h_n, k_n) \nearrow \min(f, g)$.

□

Definice 24.4. Buď $f \in \Lambda^+(X)$. Pak definujeme

$$\mathbf{I}f = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n,$$

kde h_n je posloupnost z definice 24.1. $\mathbf{I}f$ je **integrál funkce f na X**.

Poznámka. (1) Pro všechna $f \in \Lambda^+$ platí $-\infty < \mathbf{I}f \leq +\infty$.
(2) $f \in \mathcal{L}^+$, právě když $f \in \Lambda^+$ a $\mathbf{I}f < +\infty$.
(3) Aby byla předchozí definice korektní, je třeba prověřit nezávislost na volbě h_n:

Důkaz. Buď $f \in \Lambda^+(X)$, $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow f$. Protože $f \lesssim f$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}k_n.$$

Zároveň $f \gtrsim f$, takže

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}h_n \geq \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}k_n.$$

Na volbě h_n proto hodnota $\mathbf{I}f$ nezávisí. □

Věta 24.5. Buďte $f, g \in \Lambda^+(X)$, $\alpha \geq 0$. Pak platí
(i) $\mathbf{I}(f + g) = \mathbf{I}f + \mathbf{I}g$, má-li pravá strana smysl.
(ii) $\mathbf{I}(\alpha f) = \alpha\mathbf{I}f$, Lebesgueova konvence $0 \cdot \infty = 0$.
(iii) Je-li $f \lesssim g$, pak $\mathbf{I}f \leq \mathbf{I}g$.

Věta 24.6. Buď $\{f_n\}_1^\infty \in \Lambda^+(X)$, $f_n \nearrow f$. Pak

$$f \in \Lambda^+ \quad \text{a} \quad \mathbf{I}f = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}f_n.$$

Důkaz. Buď $\{f_n\}_1^\infty \in \Lambda^+(X)$, existuje posloupnost $\left\{h_m^{(n)}\right\}_{m=1}^\infty \nearrow f_n$. Definujeme

$$h_m = \max_{1\leq n\leq m} h_m^{(n)}.$$

Platí, že $h_m \nearrow$ k nějakému $f^* \in \Lambda^+$. Buď $n \leq m$, pak

$$h_m^{(n)} \leq h_m \lesssim \max_{1\leq n\leq m} f_n \sim f_m \lesssim f.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme

$$f_n \lesssim f^* \lesssim f,$$

limitním přechodem $n \to \infty$

$$f \lesssim f^* \lesssim f,$$

tedy limitní funkce f^* je v Λ^+.

$$h_m \lesssim f_m \lesssim f.$$

Dále platí

$$\mathbf{I}h_m \leq \mathbf{I}f_m \leq \mathbf{I}f,$$

limitním přechodem $m \to \infty$

$$\mathbf{I}f^* \leq \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}f_m \leq \mathbf{I}f$$

$$\mathbf{I}f^* = \mathbf{I}f$$

□

Poznámka. Předchozí věta znamená uzavřenost tříd Λ^+ a $\mathcal{L}^+$ na operaci $\nearrow$

Věta 24.7. Nechť je $\{g_k\}_1^\infty$ posloupností funkcí z Λ^+ větších než 0 *s.v.*. Nechť $f = \sum_{k=1}^\infty g_k$. Pak $f \in \Lambda^+$ a $\mathbf{I}f = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{I}g_k$. Existuje-li navíc $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{I}\sum_{k=1}^n g_k \leq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pak $f \in \mathcal{L}^+$

Důkaz. Aplikací předchozí věty na posloupnost částečných součtů. □

25. Třída Λ ($\mathcal{L}$)

Definice 25.1. Řekneme, že funkce φ je třídy $\Lambda(X)$ (resp. $\mathcal{L}(X)$), právě když existují $f, g \in \Lambda^+(X)$, z nichž alespoň jedna je třídy $\mathcal{L}^+(X)$ (resp. $f, g \in \mathcal{L}^+(X)$) tak, že $\varphi \sim f - g$.

Poznámka. (1) Funkce $f \in \mathcal{L}$ jsou skoro všude konečné. (Plyne z věty pro $\mathcal{L}^+$.)
(2) Omezení s $\mathcal{L}^+$ je tam, aby nevzniklo $\infty - \infty$. Teď vzniknout sice může, ale jen na množině míry nula.

Věta 25.2. Buďte $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí:
(i) $\varphi + \psi \in \mathcal{L}$,
(ii) $\alpha\varphi \in \mathcal{L}$,
(iii) $|\varphi| \in \mathcal{L}$.

Důkaz. Buď $\varphi \sim f_1 - g_1$, $\psi \sim f_2 - g_2$, $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{L}^+$.
1)
$$\varphi + \psi \sim f_1 - g_1 + f_2 - g_2 = \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\in\mathcal{L}^+} - \underbrace{(g_1 + g_2)}_{\in\mathcal{L}^+}.$$
2)
$$\alpha\varphi \sim \underbrace{\alpha f}_{\in\mathcal{L}^+} - \underbrace{\alpha g}_{\in\mathcal{L}^+} \quad \text{pro } \alpha \geq 0,$$
$$\alpha\varphi \sim \underbrace{(-\alpha g)}_{\in\mathcal{L}^+} - \underbrace{(-\alpha f)}_{\in\mathcal{L}^+} \quad \text{pro } \alpha < 0.$$
3)
$$|\varphi| \sim \underbrace{\max(f, g)}_{\in\mathcal{L}^+} - \underbrace{\min(f, g)}_{\in\mathcal{L}^+}.$$
□

Poznámka. (1) Platí i pro $\varphi \in \Lambda$, pokud $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+$ nebo $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$, resp. alespoň jedno z $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$.
(2) $\mathcal{H} \subset \Lambda^+ \subset \Lambda$,
(3) $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}$.

Definice 25.3. Nechť $\varphi \in \Lambda$, $\varphi \sim f - g$, $\mathbf{I}\varphi = \mathbf{I}f - \mathbf{I}g$. Pak $\mathbf{I}$ je **Lebesgueův integrál**.

Poznámka. (1) Značení:
$$\mathbf{I}\varphi = \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \varphi = \int \varphi$$
(2) $\mathbf{I}\varphi$ nezávisí na volbě f, g: Vezmu $\varphi \sim f_1 - g_1$. Protože jsem v $f, g, f_1, g_1 \in \Lambda$, je $f + g_1 \sim f_1 + g$ a $\mathbf{I}f + \mathbf{I}g_1 = \mathbf{I}f_1 + \mathbf{I}g$.

Věta 25.4. Jestliže $\varphi, \psi \in \Lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:
(i) $\mathbf{I}(\varphi + \psi) = \mathbf{I}\varphi + \mathbf{I}\psi$, má-li pravá strana smysl.
(ii) $\mathbf{I}(\alpha\varphi) = \alpha\mathbf{I}\varphi$.
(iii) Je-li $\varphi \gtrsim 0$, je $\mathbf{I}\varphi \geq 0$.

Důkaz. (i) Jsou-li $\varphi, \psi \in \Lambda$, potom $\varphi \sim f_1 - g_1$, $\psi \sim f_2 - g_2$. Výraz $\mathbf{I}\varphi + \mathbf{I}\psi$ má smysl právě tehdy, je-li buď $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+$ nebo $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$. Potom ovšem $\varphi + \psi \sim (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ je třídy Λ a $\mathbf{I}(\varphi + \psi) = \mathbf{I}(f_1 + f_2) - \mathbf{I}(g_1 + g_2) = \mathbf{I}(f_1 - g_1) + \mathbf{I}(f_2 - g_2) = \mathbf{I}\varphi + \mathbf{I}\psi$.
(ii) Je-li $\varphi \in \Lambda$, potom $\varphi \sim f - g$, kde $f, g \in \Lambda^+$ a alespoň jedna z nich je třídy $\mathcal{L}^+$.
a) $\alpha \geq 0$: $\alpha\varphi = \alpha f_1 - \alpha g_1$, $\mathbf{I}(\alpha\varphi) = \alpha\mathbf{I}f_1 - \alpha\mathbf{I}g_1 = \alpha\mathbf{I}\varphi$.
b) $\alpha < 0$: $\alpha\varphi = (-\alpha)g_1 - (-\alpha f_1)$, $\mathbf{I}(\alpha\varphi) = \mathbf{I}(-\alpha g_1) - \mathbf{I}(-\alpha f_1) = -\alpha\mathbf{I}g_1 + \alpha\mathbf{I}f_1 = \alpha\mathbf{I}\varphi$.
(iii) Je-li navíc $\varphi \gtrsim 0$, potom $f \gtrsim g$ a tedy je $\mathbf{I}f \geq \mathbf{I}g$ a $\mathbf{I}\varphi = \mathbf{I}f - \mathbf{I}g \geq 0$.
□

Věta 25.5. Funkce $\varphi \in \Lambda$, právě když $\varphi^+ \in \Lambda \wedge \varphi^- \in \Lambda$ a $\varphi^+ \in \mathcal{L} \vee \varphi^- \in \mathcal{L}$.

Důkaz. (1) ($\Rightarrow$) Buď $\varphi \in \Lambda$, $\varphi = f - g$, $f \in \Lambda^+$, $g \in \mathcal{L}^+$.

$$\varphi^+ \sim \max(\varphi, 0) \sim \max(f, g) - g \Rightarrow \varphi^+ \in \Lambda,$$

$$\varphi^- \sim \max(-\varphi, 0) \sim g - \min(f, g) \Rightarrow \varphi^- \in \mathcal{L}.$$

(2) ($\Leftarrow$) $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $\mathbf{I}\varphi^+ - \mathbf{I}\varphi^- = \mathbf{I}\varphi$.

□

Lemma 25.6. Buď $\varphi \in \Lambda$, nechť $\mathbf{I}\varphi > -\infty$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existují $f \in \Lambda^+$, $g \in \mathcal{L}^+$ tak, že platí:

(i) $\varphi \sim f - g$,
(ii) $g \gtrsim 0$,
(iii) $\mathbf{I}g < \varepsilon$.

Důkaz. Existují $f_1 \in \Lambda^+$, $g_1 \in \mathcal{L}^+$ takové, že $\varphi \sim f_1 - g_1$, neboť $\mathbf{I}\varphi > -\infty$. Existuje $k_n \nearrow g_1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}k_n = \mathbf{I}g_1$. Vezmu $\varepsilon > 0$, potom existuje n takové, že $0 \leq \mathbf{I}g_1 - \mathbf{I}k_n < \varepsilon$. Položme $f = f_1 - k_n$, $g = g_1 - k_n$. Potom je $f \in \Lambda^+$, $g \in \mathcal{L}^+$, $g \gtrsim 0$. Platí, že

$$\varphi \sim \underbrace{(f_1 - k_n)}_{\in\Lambda^+} - \underbrace{(g_1 - k_n)}_{\in\mathcal{L}^+} \Rightarrow \varphi \sim f - g,$$

čímž je dokázáno (i) a (ii). (Ve třídě Λ^+ není možné násobit $\alpha < 0$, tudíž ani odčítat. Předchozí tvrzení se tudíž musí dokázat pomocí nově vytvořené posloupnosti, která k nim konverguje! To však snadno dokážeme sestrojením posloupnosti $f_1 - k_m$, kde m poroste k n.) Dále platí

$$\mathbf{I}g = \mathbf{I}(g_1 - k_n) = \mathbf{I}g_1 - \mathbf{I}k_n < \varepsilon,$$

čímž je dokázán bod (iii). □

Poznámka. Věta vyjadřuje vztah mezi Λ^+ a Λ (něco jako $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$).

Věta 25.7 (Levi)**.** Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda$, $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi \sim \sum_{n=1}^\infty \varphi_n$. Pak $\varphi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}\varphi_n$.

Důkaz. Buď $\varphi_n \gtrsim 0$. Podle předchozí věty je $\varphi_n \sim f_n - g_n$, kde $g_n \gtrsim 0$ a $\mathbf{I}g_n < \frac{1}{2^n} = \varepsilon$. Protože je $\varphi_n \gtrsim 0$, je $f_n \gtrsim 0$, $f_n, g_n \in \Lambda^+$,

$$g \sim \sum_{n=1}^\infty g_n, \quad f \sim \sum_{n=1}^\infty f_n \in \Lambda^+.$$

Víme, že

$$\mathbf{I}f = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}f_n, \quad \mathbf{I}g = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}g_n \leq 1,$$

takže $g \in \mathcal{L}^+$.

$$\varphi \sim \sum_{n=1}^\infty \varphi_n = \sum_{n=1}^\infty (f_n - g_n) = \sum_{n=1}^\infty f_n - \sum_{n=1}^\infty g_n.$$

Protože je $g \in \mathcal{L}^+$, je skoro všude konečné a

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}\varphi_n = \sum_{n=1}^\infty (\mathbf{I}f_n - \mathbf{I}g_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}f_n - \sum_{n=1}^\infty \mathbf{I}g_n = \mathbf{I}f - \mathbf{I}g = \mathbf{I}\varphi.$$

□

Věta 25.8. Buď $\{\psi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\psi_n \nearrow \psi$. Pak $\psi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\psi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\psi_n$. Existuje-li navíc číslo $c \in \mathbb{R}$, aby $\forall n \in \mathbb{N}$ platilo $|\mathbf{I}\psi_n| \leq c$, tak je $\psi \in \mathcal{L}$

Důkaz. (1) Nechť jsou $\psi_n \gtrsim 0$: Definujme $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_n \sim \psi_n - \psi_{n-1}$ pro $n > 1$. Pak $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}$.

$$\Lambda \ni \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \sim \psi_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) \sim \lim_{n\to\infty} \psi_n \sim \psi$$

$$\mathbf{I}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\psi_n$$

(2) Je $\psi_n - \psi_1 \gtrsim 0$, takže $\psi_n - \psi_1 \nearrow \psi - \psi_1$. Podle předchozího je $\psi - \psi_1 \in \Lambda$ a tedy $\psi \in \Lambda$.

$$\mathbf{I}(\psi - \psi_1) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}(\psi_n - \psi_1).$$

(3) Je-li $\forall n \in \mathbb{N}\ |\mathbf{I}\psi_n| \leq c$, potom také $|\mathbf{I}\psi| \leq c$ a $\psi \in \mathcal{L}$

□

Poznámka. (1) Je-li $\{\psi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\psi_n \searrow \psi$, pak $\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\psi_n = \mathbf{I}\psi$ díky linearitě.

(2) V třídě $\mathcal{L}$ už platí axiomy základního souboru a hlavně $\mathbf{I}$ už je základní integrál.

(3) Problém s existencí množiny míry nula: $\mu(Z) = 0$, právě když $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \{\varphi_n\}_1^\infty)(\varphi_n \in \mathcal{L} \wedge 0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1})$ a platí
 1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \mathbf{I}\varphi_n < \varepsilon$,
 2) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(x) \geq 1$ pro $\forall x \in Z$.

 Důkaz. a) $(\Rightarrow)$ Zvolím $\varphi_n = h_n$.

 b) $(\Leftarrow)$ Volím $\varepsilon = \frac{1}{n}$, potom existuje posloupnost $\varphi_m^{(n)}$ taková, že $0 \leq \varphi_m^{(n)} \leq \varphi_{m+1}^{(n)}$, $\mathbf{I}\varphi_m^{(n)} \leq \frac{1}{n}$ a $\sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_m^{(n)} \geq 1$ pro $x \in Z$.
 Platí, že $\varphi_m^{(n)} \nearrow \varphi_n \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi_n = \lim \mathbf{I}\varphi_m^{(n)} \leq \frac{1}{n}$, takže $\varphi_n \in \mathcal{L}$ a protože $\varphi_m^{(n)}$ roste, je $\varphi_n \geq 1$.
 Položme $1 \leq \psi_n := \min_{1\leq k\leq n} \varphi_k$, potom $\psi_n \searrow \psi \in \mathcal{L}$, $\mathbf{I}\psi = 0$. Protože $\mathbf{I}\psi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\psi_n = 0$ a $\psi \geq 0$, musí být $\psi \sim 0$. Protože $\psi \geq 1$ pro všechna $x \in Z$, je Z míry nula.

□

Věta 25.9. Buď $\varphi \gtrsim 0$, $\varphi \in \Lambda$. Pak $\mathbf{I}\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \sim 0$.

Důkaz. Protože $\varphi^+ \sim \varphi$ a $\mathbf{I}\varphi^+ = \mathbf{I}\varphi = 0$, můžeme se bez újmy na obecnosti omezit se na funkce všude nezáporné: $\varphi \geq 0$, $\psi_n := n\varphi \in \mathcal{L}$, $\psi_n \nearrow \psi$, takže $\psi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\psi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\psi_n = \lim_{n\to\infty} n\mathbf{I}\varphi = 0$ takže $\psi \in \mathcal{L}$ a tedy množina, kde ψ je nekonečná, je množina, kde φ je nenulová, a ta je podle věty 24.2 míry nula. □

Poznámka. Je-li $\varphi \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\,|\varphi| = 0$, pak $\varphi \sim 0$.

26. Limitní přechody

Lemma 26.1. Nechť φ_0, $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $|\varphi_n| \lesssim \varphi_0$. Pak

(i) $\alpha = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$

(ii) $\beta = \limsup_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$

(iii)
$$-\mathbf{I}\varphi_0 \leq \mathbf{I}\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \mathbf{I}\beta \leq \mathbf{I}\varphi_0.$$

Důkaz. Buďte
$$\alpha = \liminf_{k\to\infty} \varphi_k, \quad \beta = \liminf_{k\to\infty} \varphi_k.$$
$$-\varphi_0 \lesssim \alpha_m^{(n)} := \min_{n\leq k\leq m} \varphi_k, \quad \beta_m^{(n)} := \max_{n\leq k\leq m} \varphi_k \lesssim \varphi_0.$$
Zřejmě je $\alpha_m^{(n)} \in \mathcal{L}$, $\beta_m^{(n)} \in \mathcal{L}$ a
$$\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf_{k\geq n} \varphi_k, \quad \beta_m^{(n)} \nearrow \beta_n = \sup_{k\geq n} \varphi_k.$$
Podle věty 25.8 jsou α_n a $\beta_n \in \mathcal{L}$ a současně $\alpha_n \nearrow \alpha \in \Lambda$, $\beta_n \searrow \beta \in \Lambda$. Protože $\mathbf{I}\alpha_n \leq \mathbf{I}\varphi_0$ a $\mathbf{I}\beta_n \geq -\mathbf{I}\varphi_0$, jsou i $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$. Platí: $-\varphi_0 \lesssim \alpha_n \lesssim \varphi_n \lesssim \beta_n \lesssim \varphi_0$. Integrací dostaneme
$$-\mathbf{I}\varphi_0 \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\beta_n \leq \mathbf{I}\varphi_0.$$
Protože limity
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\beta_n$$
existují, vyplývá odtud již tvrzení věty. □

Věta 26.2 (Lebesgue)**.** Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(\forall n \in \mathbb{N})(|\varphi_n| \lesssim \varphi_0)$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a
$$\mathbf{I}\varphi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n.$$
Posloupnost integrabilních funkcí je integrabilní, jestliže existuje integrabilní majoranta.

Důkaz. Vyplývá z minulé věty, pokud položíme $\limsup = \liminf$. □

Poznámka. (1) Weierstrass:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad |f_n(x)| \leq c_n,$$
analogicky
$$\int \varphi_n(x), \quad |\varphi_n(x)| \leq \varphi_0(x).$$
(2) Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \in \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$, $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(|\varphi| \lesssim \varphi_0)$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$.

Důkaz. φ_n se oříznou pomocí φ_0. $\psi_n = \max(-\varphi_0, \min(\varphi_0, \varphi_n)) \in \mathcal{L}$, $|\psi_n| \leq \varphi_0$, $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_n \to \varphi$, tedy podle předchozí věty $\varphi \in \mathcal{L}$. □

Lemma 26.3. Nechť $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\varphi_n \leq c$ pro každé n. Pak
$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$$
a platí
$$0 \leq \mathbf{I}\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq c.$$
Důkaz. Položme
$$\alpha_m^{(n)} = \min_{n\leq k\leq m} \varphi_k \in \mathcal{L},$$
zřejmě je $\mathbf{I}\alpha_m^{(n)} \leq c$ a platí, že
$$\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf_{k\geq n} \varphi_k,$$

podle věty 25.8 je $\alpha_n \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\alpha_n \leq c$. Protože je $\alpha_n \nearrow \alpha$, podle Leviovy věty je $\alpha \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n$. Pro $\forall n$ platí $0 \lesssim \alpha_n \lesssim \varphi_n$, tedy $0 \leq \mathbf{I}\alpha_n \leq \mathbf{I}\varphi_n \leq c$ a $0 \leq \lim \mathbf{I}\alpha_n = \mathbf{I}\alpha \leq \liminf \mathbf{I}\varphi_n \leq c$. □

Poznámka. Z existence integrabilní majoranty plyne omezenost $\mathbf{I}\varphi_n$, opačně to platit nemusí.

Věta 26.4 (Fatou)**.** Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $\mathbf{I}\,|\varphi_n| \leq c$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\,|\varphi| \leq c$.

Důkaz. Položíme $\psi_n = |\varphi_n|$. Posloupnost ψ_n splňuje předpoklady předchozí věty a tedy platí, že $\mathbf{I}\,|\varphi| \leq c$. Z poznámky 26.2.2, kde bude $\varphi_0 := |\varphi| \in \mathcal{L}$ plyne, že $\varphi \in \mathcal{L}$ □

Věta 26.5. Buď L^1 množina všech tříd rozkladu $\mathcal{L}$ podle ekvivalence $\sim$ s obvykle definovanými operacemi součtu a násobení číslem. Je-li $[\varphi] \in L^1$, položme normu $\|[\varphi]\| = \mathbf{I}\,|\psi|$, kde $\psi \in [\varphi]$. Potom L^1 je normovaný lineární prostor.

Důkaz. Pro operace platí
$$[\varphi] + [\psi] = \left\{\chi \in L^1 \mid \chi = \varphi_1 + \psi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi], \psi_1 \in [\psi]\,\right\},$$
$$\alpha[\varphi] = \left\{\chi \in L^1 \mid \chi = \alpha\varphi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi]\,\right\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
Axiomy lineárního prostoru zřejmě platí. Norma je pozitivní $\|[\varphi]\| \geq 0$ a platí, že $\|[\varphi]\| = 0 \Rightarrow [\varphi] = [o]$ (nulová funkce). Norma je tedy skutečně normou splňující axiom pozitivní definitnosti. □

Poznámka. (1) Prostor L^1 neobsahuje funkce, nýbrž třídy ekvivalence funkcí. Vzhledem k definici tedy neexistuje pojem funkční hodnota, neboť funkce v rámci třídy se od sebe liší na množině míry nula. Budeme-li tedy brát prvek z L^1, budeme tím mít na mysli reprezentanta dané třídy. Ne každá třída má však spojitého reprezentanta! To platí v tzv. Sobolevově prostoru.
(2) Důvod zavedení tohoto prostoru tkví v tom, že jsme takto získali prostor, z němž základní integrál generuje normu. V $\mathcal{L}$ sice normu můžeme zavést stejným způsobem, nesplňuje však třetí axiom normy — nejen nulová funkce má nulovou normu. (jedná se tedy o seminormu).

Věta 26.6 (Riesz, Fischer)**.** Prostor L^1 je Banachův (úplný normovaný vektorový prostor)

Důkaz. Vezmu posloupnost tříd $\{[\varphi_n]\}_1^\infty \subset L^1$. Nechť $\{[\varphi_n]\}_1^\infty$ je cauchyovská, tj.
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(m, n > n_0)\left(\|[\varphi_n]\| - [\varphi_m] < \varepsilon\right).$$
Položme
$$\varepsilon = \frac{1}{2^k},$$
tedy
$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k)(\forall m > n_k)\left(\|[\varphi_m] - [\varphi_{n_k}]\| < \frac{1}{2^k}\right).$$
Vytvořím z n_k rostoucí posloupnost, stačí dokázat, že konverguje vybraná posloupnost φ_{n_k}.
$$\mathbf{I}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right| = \left\|[\varphi_{n_{k+1}}] - [\varphi_{n_k}]\right\| \leq \frac{1}{2^k}$$
a proto
$$\mathbf{I}\sum_{k=1}^{m}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right| \leq 1$$
pro každé $m \in \mathbb{N}$. Podle Leviho má řada
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right|$$
integrabilní součtovou funkci a proto skoro všude absolutně konverguje, a tedy konverguje skoro všude i řada
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right).$$

Současně platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\right)\sim\underbrace{\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}}_{\varphi}-\varphi_{n_1}.$$

Posloupnost φ_{n_k} tedy skoro všude konverguje k funkci

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\varphi=\varphi_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\right).$$

Dokážeme, že φ je integrabilní. Buď $k\in\mathbb{N}$ pevné, $p>k$,

$$\mathbf{I}\left|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\right|\le\frac{1}{2^k},$$
$$\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\to\underbrace{\varphi-\varphi_{n_k}}.$$

Podle věty 26.4 je $|\varphi-\varphi_{n_k}|\in\mathcal{L}$ a tedy $\varphi\in\mathcal{L}$ a $[\varphi]\in L^1$. Teď má smysl psát

$$\|\varphi-\varphi_{n_k}\|=\mathbf{I}\left|\varphi-\varphi_{n_k}\right|\le\frac{1}{2^k}.$$

Sestrojili jsme tak podposloupnost, která konverguje k integrabilní funkci, tedy cauchyovská posloupnost konverguje. □

Věta 26.7. Množina $\mathcal{H}$ je v $\mathcal{L}$ hustá, tj. $\mathcal{H}\subset\mathcal{L}\wedge\mathcal{L}\subset\overline{\mathcal{H}}$.

Důkaz. Buď $\varphi\in\mathcal{L}$, $\varphi\sim f-g$, $f,g\in\mathcal{L}^+$, h_n,k_n posloupnosti $h_n\nearrow f$, $k_n\nearrow g$. Sestrojím $l_n=h_n-k_n$, pak

$$\left\|\widetilde{l_n}-[\varphi]\right\|=\mathbf{I}\left|l_n-\varphi\right|\le\mathbf{I}\left|h_n-f\right|+\mathbf{I}\left|k_n-g\right|=(\mathbf{I}f-\mathbf{I}h_n)+(\mathbf{I}g-\mathbf{I}k_n)\to 0,$$

tedy $\mathcal{L}\subset\overline{\mathcal{H}}$. □

27. Měřitelné funkce

Definice 27.1. Řekneme, že φ je **měřitelná** ($\varphi \subset \mathcal{M}$) funkce $X \mapsto \mathbb{R}^*$, jestliže existuje $\{h_n\}_1^\infty \in \mathcal{H}(X)$ taková, že $h_n \to \varphi$.

Poznámka. (1) $\Lambda^+ \subset \mathcal{M}$, $\Lambda \subset \mathcal{M}$.
(2) Je-li $\varphi \gtrsim 0$, pak existuje $h_n \geq 0$, $h_n \to \varphi$.

Důkaz. $k_n \to \varphi$, $k_n^+ \to \varphi$. □

Věta 27.2. Buď $\varphi \gtrsim 0$, pak $\varphi \in \mathcal{M}$, právě když $\varphi \in \Lambda$.

Důkaz. (1) ($\Leftarrow$) $\Lambda \subset \mathcal{M}$ zřejmé.
(2) ($\Rightarrow$) Buď $\varphi \in \mathcal{M}$, pak existuje $h_n \to \varphi$, $h_n \geq 0$, $h_n \in \mathcal{H}$. Položme $\alpha_m^{(n)} = \min_{n \leq k \leq m} h_k$, $\alpha_n = \inf_{k \geq n} h_k$. Protože $\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n$, je podle Leviho $\alpha_n \in \Lambda$. Vzhledem k nerovnosti $0 \leq \mathbf{I}\alpha_n \leq \mathbf{I}\alpha_n^{(n)}$, je $\alpha_n \in \mathcal{L}$. Protože ale $\alpha_n \nearrow \alpha = \liminf_{n\to\infty} h_n$, je znovu podle Leviho $\alpha \in \Lambda$. Protože $h_n \to \varphi \Rightarrow \alpha \sim \varphi$, tvrzení věty platí. □

Věta 27.3. $\varphi \in \mathcal{M}$, právě když existuje dvojice funkcí $f,\ g \in \Lambda^+$ taková, že $\varphi \sim f - g$.

Důkaz. (1) ($\Leftarrow$) $(g_n - f_n) \to \varphi$.
(2) ($\Rightarrow$) $\varphi \sim \varphi^+ - \varphi^- \sim (f_1 + g_2) - (f_2 + g_1)$. Podle předchozí věty $\varphi^+, \varphi^- \in \Lambda$. $\varphi^+ \sim f_1 - g_1$, $\varphi^- \sim f_2 - g_2$, $f_1, f_2 \in \Lambda^+$ a protože φ^+, φ^- musí mít integrál, pak $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+$. □

Věta 27.4. Jsou-li $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí
(i) $\varphi + \psi \in \mathcal{M}$, má-li součet smysl.
(ii) $\alpha\varphi \in \mathcal{M}$,
(iii) $\max(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}$, $\min(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}$,
(iv) $|\varphi| \in \mathcal{M}$.

Věta 27.5. Buď $\varphi \in \mathcal{M}$.
(i) Existuje-li $\psi \in \mathcal{L}$ tak, že $|\varphi| \lesssim \psi$, pak $\varphi \in \mathcal{L}$.
(ii) Existuje-li $\psi \in \Lambda$ tak, že $\mathbf{I}\psi = +\infty$ a $\varphi \gtrsim \psi$, pak $\varphi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi = +\infty$.
(iii) Existuje-li $\psi \in \Lambda$ tak, že $\mathbf{I}\psi = -\infty$ a $\varphi \lesssim \psi$, pak $\varphi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi = -\infty$.

Důkaz. (i) $h_n \to \varphi$ a $|\varphi| \leq \psi$, tedy z poznámky 26.2.2 $\varphi \in \mathcal{L}$.
(ii) $\varphi^+ \gtrsim \psi^+$, tedy $\mathbf{I}\varphi^+ \geq \mathbf{I}\psi^+ = +\infty$. $\varphi^- \lesssim \psi^-$, tedy $\mathbf{I}\varphi^- \leq \mathbf{I}\psi^- < +\infty$. $\mathbf{I}\varphi^+ = +\infty$, protože $\varphi^- \in \mathcal{L}$. □

Poznámka. (1) Rozšíření Lebesgueovy věty: Buď $\varphi_n \in \mathcal{M}$, $|\varphi_n| \lesssim \varphi_0$, $\varphi_0 \in \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\varphi = \lim \mathbf{I}\varphi_n$.

Důkaz. φ i φ_n jsou podle předchozí věty integrabilní, protože mají integrabilní majorantu. Můžeme tedy aplikovat klasického Lebesgua 26.2. □

(2) Rozšíření Leviovy věty: Buď $\varphi_n \nearrow \varphi$, $\varphi_n \in \Lambda$, $\mathbf{I}\varphi_1 > -\infty$. Pak $\varphi \in \Lambda$ a $\mathbf{I}\varphi = \lim \mathbf{I}\varphi_n$.

Důkaz. Pokud jsou všechny $\varphi_n \in \mathcal{L}$, pak použiji klasickou Leviovu větu. Nechť tedy $(\exists m \in \mathbb{N})(\varphi_m \in \Lambda \setminus \mathcal{L})$. Pak je $\mathbf{I}\varphi_m = +\infty$, což implikuje $\mathbf{I}\varphi_m^+ = +\infty$ a $\varphi_m^- \in \mathcal{L}$. Rozepíšeme-li $\varphi_n \sim \varphi_n^+ - \varphi_n^-$, pak $\varphi_n^+ \nearrow \varphi^+$ a $\varphi_n^- \searrow \varphi^-$, což implikuje $(\forall n \geq m)(\mathbf{I}\varphi_m^+ = +\infty)$. Protože je $\varphi^+ \in \mathcal{M} \wedge \varphi^+ \geq \varphi_n^+$, je dle věty 27.5 (ii) $\mathbf{I}\varphi^+ = +\infty$ a dále $(\varphi_n^- \in \mathcal{L}) \Rightarrow (\varphi^- \in \mathcal{L})$ (Levi pro posloupnost). Platí tudíž $\varphi \sim \varphi^+ - \varphi^-$ a $\mathbf{I}\varphi = +\infty$. □

(3) V rozšířené Leviově větě je předpoklad $\mathbf{I}\varphi_1 > -\infty$ nutný: Posloupnost $\{\psi_n\}_1^\infty$, kde $\psi_n(x) = 0$ pro $\forall x \in (-n, n)$ a $-\infty$ jinde má limitu $\psi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{I}\psi \neq \lim_{n\to+\infty} \mathbf{I}\psi_n$.

Věta 27.6. Jestliže $\varphi_n \in \mathcal{M}$ a $\varphi_n \to \varphi$, pak $\varphi \in \mathcal{M}$. (uzavřenost $\mathcal{M}$)

Důkaz. (1) Buď nejdříve $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \gtrsim 0$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost $\left\{h_n^{(m)}\right\}_1^\infty$ nezáporných základních funkcí(omezených) takových, že $h_n^{(m)} \to \varphi_m$. Položme

$$\varphi_0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^2} \frac{h_n^{(m)}}{\mathbf{I} h_n^{(m)} + 1}.$$

Z Leviho plyne, že $\varphi_0 \in \mathcal{L}$. Potom skoro všude platí $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi_0(x) > 0$. Pokud položíme $\psi_n := \min(\varphi, n\varphi_0)$, je $\psi_n \nearrow \varphi$. Z Leviho poté dostaneme $\varphi \in \Lambda$, pokud platí, že $\psi_n \in \mathcal{L}$. Pro $\psi_n \sim \lim_{m\to\infty} \min(\varphi_m, n\varphi_0)$ a $|\min(\varphi_m, n\varphi_0)| \lesssim n\varphi_0$, ψ_n je limitní funkce posloupnosti měřitelných funkcí s integrabilní majorantou, tudíž z rozšíření Lebesgua je $\psi_n \in \mathcal{L}$.

(2) Buď nyní $\{\varphi_n\}_1^\infty$ libovolná posloupnost měřitelných funkcí a nechť $\varphi_n \to \varphi$. Potom platí $\varphi_n^+ \to \varphi^+$ a $\varphi_n^- \to \varphi^-$. Odtud a z předcházejícího bodu vyplývá, že $\varphi^+ \in \Lambda$ a $\varphi^- \in \Lambda$ a proto je $\varphi \in \mathcal{M}$.

$\square$

28. Měřitelné množiny

Definice 28.1. Buď $M \subset X$. Položme

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \in X \setminus M \end{cases}$$

χ_H nazveme **charakteristickou funkcí množiny** M.

Definice 28.2. Buď $M \subset X$, $\chi_M(x)$. Pak M je **měřitelná**, právě když χ_M je měřitelná.

Poznámka. $\chi_M \in \mathcal{M}$, právě když $\chi_M \in \Lambda$ (χ je nezáporná).

Definice 28.3. Buď M měřitelná množina, pak míru množiny M definujeme $\mu(M) = \mathbf{I}\chi_M$.

Poznámka.

(1) $\mu(Z) = 0 \Leftrightarrow Z$ je nulové míry $\Leftrightarrow \chi_Z \sim 0 \Leftrightarrow \chi_Z$ je nulová skoro všude, nenulová na množině nulové míry $\Leftrightarrow Z$ je množina nenulových bodů.

(2) Pomocí axiomu výberu lze zkonstruovat neměřitelnou množinu a tedy i neměřitelnou funkci. (Vrána skripta str. 59)

Věta 28.4. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ nějaký spočetný systém měřitelných množin. Pak platí:

(i) $M = \bigcup_k M_k$ je měřitelná,
(ii) $N = \bigcap_k M_k$ je měřitelná,
(iii) $M_1 \setminus M_2$ je měřitelná.

Důkaz.

$$\chi_M(x) = \sup_k \chi_{M_k}(x),$$
$$\chi_N(x) = \inf_k \chi_{M_k}(x),$$

kde sup a inf jsou měřitelné funkce podle definice měřitelnosti množiny a z věty 27.6

$$\chi_{M_1 \setminus M_2} = \chi_{M_1} \setminus \chi_{M_1 \cap M_2},$$

protože

$$\chi_{M_1 \setminus M_2}(x) = \max(\chi_{M_1} - \chi_{M_2}, 0)(x).$$

□

Poznámka.

(1) V $\mathbb{R}^n$ jsou prvky topologie (tj. otevřené množiny) měřitelné.

Důkaz. Buď $A = A^\circ$. Víme, že $\mathcal{I} \in \mathcal{M}$. Ke každému bodu $\in A$ najdu interval $\mathcal{I}_r$ s racionálním středem a délkou hrany. Intervaly tvoří spočetný systém, takže podle předchozí věty je A měřitelná. Kompaktní interval je měřitelný a $A = \bigcup \mathcal{I}$. □

(2) Uzavřené množiny jsou též měřitelné.

Důkaz. Buď $A = \overline{A}$, pak $A = \mathbb{R}^n \setminus B$, kde $B = B^\circ$, takže podle předchozí věty je A měřitelná. □

(3) Množiny typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin) a F_σ (spočetné sjednocení uzavřených množin) jsou měřitelné. Díky tomu jsou měřitelné i polouzavřené intervaly.

Věta 28.5. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ systém měřitelných množin, $M = \bigcup_k M_k$ a nechť $M_j \cap M_i = \emptyset$ pro navzájem různá i, j. Pak

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcup_k M_k\right) = \sum_{i=1}^{n,\infty} \mu(M_i).$$

Důkaz. Díky disjunktnosti M_k platí

$$\chi_M = \sum_k \chi_{M_k}.$$

(1) konečný případ: aditivita integrálu

$$\mathbf{I}\chi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}\chi_{M_i}.$$

(2) spočetný případ: Leviova věta

$$\mathbf{I}\chi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}\chi_{M_i}.$$

□

Poznámka. Lebesgueova míra je σ-aditivní (spočetně aditivní).

Věta 28.6. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ systém měřitelných množin, buďte

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \quad N = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Pak platí:

(i) Je-li $M_k \subset M_{k+1}$, pak $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.
(ii) Je-li $M_{k+1} \subset M_k$ a $\exists n \in \mathbb{N}$, že $\mu(M_n) < +\infty$, pak $\mu(N) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.

Důkaz. (i)

$$\chi_M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{M_k} = \lim_{m\to\infty} \max_{1\le k\le m} \chi_{M_k} = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_k}$$

$$\chi_{M_k} \nearrow \chi_M, \quad \mathbf{I}\chi_{M_1} \ge 0 > -\infty$$

Z rozšíření Leviovy věty plyne

$$\mu(M) = \mathbf{I}\chi_M = \lim_{k\to\infty} \mathbf{I}\chi_{M_k}$$

(ii)

$$\chi_M = \inf_{k\in\mathbb{N}} \chi_{M_k} = \lim_{m\to\infty} \min_{1\le k\le m} \chi_{M_k} = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_k}$$
$$\chi_{M_k} \searrow \chi_M, \quad \mathbf{I}\chi_{M_1} < +\infty$$
$$\mu(N) = \mathbf{I}\chi_N = \lim_{k\to\infty} \mathbf{I}\chi_{M_k}$$

□

Příklad. $(-\infty, -n) \cup (n, +\infty) = A_n$, $\mu(A_n) = +\infty$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$; bez podmínky $\mu(M_i) \le +\infty$ to nejde.

Věta 28.7. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ nejvýše spočetný systém měřitelných množin $M = \bigcup_k M_k$. Platí

$$\mu(M) \le \sum_k \mu(M_k).$$

Důkaz. (1) Konečný případ: indukcí: $M = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$;
$\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1) \le \mu(M_1) + \mu(M_2)$.

(2) Spočetný případ:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k),$$

z 1. bodu minulé věty plyne

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k),$$

neboť

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} M_k\right)$$

množinově „roste“.

□

Poznámka. Buď $M \subset N$. Pak $\mu(M) \le \mu(N)$ a dokonce $\mu(M) < +\infty \Rightarrow \mu(N) - \mu(M) = \mu(N \setminus M)$.

Důkaz. $N = M \cup (N \setminus M)$, proto $\mu(N) = \mu(M) + \mu(N \setminus M) \ge \mu(M)$. □

29. Integrál na měřitelné množině

Definice 29.1. Buď $A \subset X$ měřitelná, $f : X \mapsto \mathbb{R}^*$, $A \subset \operatorname{Dom} f$. Položme

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in X \smallsetminus A \end{cases}.$$

Řekneme, že f je **měřitelná** na A ($f \in \mathcal{M}(A)$), právě když $f_A \in \mathcal{M}$. Řekneme, že $f \in \Lambda(A)$ (resp. $\mathcal{L}(A)$), právě když $f_A \in \Lambda$ (resp. $\mathcal{L}$). Řekneme, že f je integrabilní na A, právě když $f \in \mathcal{L}(A)$. Řekneme, že f má integrál na A, právě když $f \in \Lambda(A)$. $f \in \mathcal{M}(A)$.

Poznámka. $\mathcal{L}(A) \subset \Lambda(A) \subset \mathcal{M}(A)$.

Definice 29.2. Buď $f \in \Lambda(A)$.

$$\int\limits_A f = \mathbf{I} f_A$$

nazveme **Lebesgueovým integrálem** funkce f na množině A.

Poznámka. Budeme předpokládat, že $X = \mathbb{R}^n$. Toto omezení musíme zavést, neboť potřebujeme, aby $\exists \int_A f \Rightarrow \exists \int_{B \subset A} f$ a to obecně neplatí. V $\mathbb{R}^n$ však platí $f_B^+ = f_A^+ \chi_B \leq f_A^+ \in \Lambda$, $f_B^- = f_A^- \chi_B \leq f_A^- \in \Lambda$, přičenž jedna z nich je $\in \mathcal{L}$, neboť jedna z f_A^+, f_A^- je z $\mathcal{L}$.

Věta 29.3. Buď B měřitelná podmnožina měřitelné množiny $A \subset \mathbb{R}$. Jestliže $f \in \Lambda(A)$, pak $f \in \Lambda(B)$.

Důkaz. Viz předchozí poznámku. □

Věta 29.4. Nechť $f \in \mathcal{L}(A)$ a nechť pro skoro všechna $x \in A$ platí $|f(x)| \leq C$. Pak

$$\left| \int\limits_A f \right| \leq C\mu(A).$$

Důkaz. $|f_A| \lesssim C\chi_A$. □

Věta 29.5. Buď $\{A_m\}_{m=1}^{n,\infty}$ nejvýše spočetný systém vzájemně disjunktních měřitelných množin, $A = \bigcup_m A_m$ a $f \in \Lambda(A)$. Potom

$$\int\limits_A f = \sum_m \int\limits_{A_m} f.$$

Důkaz.
(1) $f \gtrsim 0$,

$$f_A = \sum_m f_{A_m}$$

konečné i nekonečné (Levi).
(2) $f \sim f^+ - f^-$ aplikováno na obě části zvlášť, jeden z integrálů bude konečný.
(3) $(\forall m)(f \in \Lambda(A_m))$.

□

Věta 29.6. Buď $\{A_m\}_{m=1}^{n,\infty}$ nejvýše spočetný systém vzájemně disjunktních měřitelných množin, buď dále $f(x) \gtrsim 0$ na A a $f \in \Lambda(A_m)$. Potom $f \in \Lambda(A)$ a platí

$$\int\limits_A f = \sum_m \int\limits_{A_m} f.$$

Důkaz. Triviální. (z definice měřitelnosti a Leviho) □

Věta 29.7. Buď $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost měřitelných množin $B_m \subset B_{m+1}$. Buď $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Buď dále $f(x) \gtrsim 0$ na A a $f \in \Lambda(B_m)$. Potom $f \in \Lambda(A)$ a

$$\int\limits_A f = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} f.$$

Důkaz. Vyplývá přímo z rozšířené Leviovy věty pro posloupnosti. □

Věta 29.8. Buď $A \subset X$, $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}(A)$. Potom platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(B \subset A \wedge \mu(B) < \delta \Rightarrow \int\limits_B |f| < \varepsilon\right).$$

Důkaz. $f \in \mathcal{L}(A)$, $|f| \in \mathcal{L}(A)$, $f_m = \min(|f|, m)$, $f_m \underset{\text{na } A}{\nearrow} |f|$,

$$\int\limits_A |f| = \lim_{m\to\infty} \mathbf{I} f_{m_A} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_A f_m.$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m)\left(0 \le \left(\int\limits_A |f| - \int\limits_A f_m\right) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Pro $B \subset A$ (volím $\delta < \frac{\varepsilon}{2m}$)

$$\int\limits_B |f| = \int\limits_B f_m + \int\limits_B (|f| - f_m) \le m\mu(B) + \int\limits_A (|f| - f_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|f| - f_m \ge 0$, $(|f| - f_m)_B \le (|f| - f_m)_A$,$f_m = \min(|f|, m) \le m$ □

Poznámka. Absolutní spojitost — viz skripta.

Věta 29.9. Buď $f \in \mathcal{M}(A)$, nechť existují α, β taková, že $\alpha \le f(x) \le \beta$ platí skoro všude na A. Buď $g \ge 0$ skoro všude na A, $g \in \mathcal{L}(A)$. Potom

(i) $fg \in \mathcal{L}(A)$,
$$\alpha \int\limits_A g \le \int\limits_A fg \le \beta \int\limits_A g;$$
(ii) existuje $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ tak, že
$$\int\limits_A fg = \gamma \int\limits_A g;$$
(iii) je-li navíc A kompaktní a souvislá, $f \in \mathcal{C}^0(A)$, pak existuje $\xi \in A$ takové, že
$$\int\limits_A fg = f(\xi) \int\limits_A g.$$

Důkaz. (1) $\alpha g \lesssim fg \lesssim \beta g$ na A, $|fg| \le (|\alpha| + |\beta|)g$, tedy $fg \in \mathcal{L}$ (fg má integrabilní majorantu).

(2) Je-li $\int_A g = 0$, je $g \sim 0$, proto $fg \sim 0$ a $\int_A fg = 0$, nebo $\int_A g > 0$ a pak

$$\alpha \le \underbrace{\frac{\int_A fg}{\int_A g}}_{\gamma} \le \beta.$$

□

30. Výpočet integrálu

Poznámka. Důkazy k následujícím větám jsou ve skriptech, Vrána je nezkouší.

Věta 30.1 (Fubini)**.** Buď $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, A, B měřitelné, $f \in \Lambda(A \times B)$. Potom platí

(i) Pro skoro všechna $x \in A$ je $f(x,\ ) \in \Lambda(B)$;

(ii)
$$\int_B f(\ ,y)\,\mathrm{d}y \in \Lambda(A);$$

(iii)
$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(\ ,y)\,\mathrm{d}y\right)(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Buď $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$, A měřitelná. Pak pro skoro všechna je $x \in \mathbb{R}^n$ je $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m | (x,y) \in A\}$ měřitelná v R^m a $A_y = \{x \in \mathbb{R}^n | (x,y) \in A\}$ měřitelná v R^n pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^m$.

Věta 30.2. Buď $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in \Lambda(A)$. Pak
$$\int_A f = \int_{R^n} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{R^m}\left(\int_{A_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Příklad.
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$
Integrály obecně nelze zaměnit. Tady je to způsobeno tím, že $\int f^+$ i $\int f^- = +\infty$, takže integrál neexistuje.

Věta 30.3 (o substituci)**.** Buď φ prosté a regulární zobrazení $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ (difeomorfismus), $A \subset \operatorname{Ran}\varphi$. Pak platí:
$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t$$
má-li jedna strana smysl. ($|\varphi'(t)|$ je absolutní hodnota z Jakobiánu)

Důkaz. Plyne z 34.4. □

31. Parametrické integrály

Definujme funkci $F : A \mapsto \mathbb{R}$ vztahem

$$F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Analogie $F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$ a $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \leftrightarrow n$, $\alpha \leftrightarrow x$.

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

Věta 31.1 (o spojitosti)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ϱ) metrický prostor, $A \subset P$, $f : M \times A \mapsto \mathbb{R}$ a nechť platí:

(I) Pro skoro všechna $x \in M$

$$f(x,\ ,) \in \mathcal{C}^0(A)$$

(II) $(\forall \alpha \in A)(f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na $M)$,

(III) $(\exists g \in \mathcal{L}(M))($pro skoro všechna $x \in M)(\forall \alpha \in A)(|f(x,\alpha)| \le g(x))$.

Potom

$$F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha) \in \mathcal{C}^0(A).$$

Důkaz. Buď jde o izolované body (které jsou body spojitosti z definice), nebo platí následující věta o limitě, což dokazuje spojitost. □

Věta 31.2 (o limitě)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ϱ) metrický prostor, $A \subset P$, $\alpha_0 \in A'$, $f : M \times A \mapsto \mathbb{R}$ a nechť platí:

(I) Pro skoro všechna $x \in M$

$$\lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} f(x,\alpha) = \varphi(x),$$

(II) $(\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\})(f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na $M)$,

(III) $(\exists g \in \mathcal{L}(M))($pro skoro všechna $x \in M)(\forall \alpha \in A \setminus \alpha_0)(|f(x,\alpha)| \le g(x))$.

Potom

(i) $\varphi \in \mathcal{L}(M)$,

(ii)

$$\int\limits_M \varphi = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} \int\limits_M f(x,\alpha).$$

Důkaz. Heineova věta: $\lim \alpha_n = \alpha_0$, $\alpha_n \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $\varphi_n(x) = f(x,\alpha_n) \to \varphi(x)$. $\varphi_n(x)$ je měřitelná na M, z Lebesgueovy věty plyne, že $\varphi \in \mathcal{L}(M)$. Pro libovolnou posloupnost α_n platí

$$\int\limits_M \varphi = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f(x,\alpha_n)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} \int\limits_M f(x,\alpha).$$

□

Věta 31.3 (o derivaci)**.** Buď M měřitelná množina, $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathcal{I} = \mathcal{I}^\circ \subset \mathbb{R}$. Nechť $f : M \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ je reálná funkce a platí:

(I) Existuje $\alpha_0 \in \mathcal{I}$ takové, že $f(\ ,\alpha_0) \in \mathcal{L}(M)$,

(II) pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ platí, že $f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na M,

(III) je-li $N \subset M$, $\mu(N) = 0$, pak $f(x,\ )$ je diferencovatelná na $\mathcal{I}$ pro každé $x \in M \setminus N$,

(IV) existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že

$$(\forall x \in M \setminus N)(\forall \alpha \in \mathcal{I}) \left(\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| \le g(x) \right).$$

Potom

(i) $f(\ ,\alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,
(ii) $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\ ,\alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,
(iii) a platí
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int\limits_M \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (1) Buď $x \in M \smallsetminus N$, pak
$$f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0) = \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)\,|\alpha - \alpha_0|\,,$$
takže
$$|f(x,\alpha)| \leq \underbrace{|f(x,\alpha_0)|}_{\in\mathcal{L}(M)} + \underbrace{g(x)(\alpha-\alpha_0)}_{\in\mathcal{L}(M)},$$
kde α je pevné.

(2) Pro $\alpha \in \mathcal{I}$
$$\frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \int\limits_M \underbrace{\frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h}}_{\psi(x,h)}\,\mathrm{d}x.$$
Použijeme minulou větu, $A = \{h \mid \alpha + h \in \mathcal{I}\}$, $0 \in A'$. Limita
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in A}} \int\limits_M \psi(x,h)$$
existuje a je záměnná, neboť pro $x \in M \smallsetminus N$ platí $|\psi(x,h)| = \left|\frac{\partial f(x,\xi_{x\alpha})}{\partial\alpha}\right| \leq g(x)$.

□

Poznámka. Co kdyby meze závisely na α?
$$F(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)$$
$f, \frac{\partial f}{\partial\alpha} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}_2)$, $(a(\mathcal{I}_1), b(\mathcal{I}_2)) \subset \mathcal{I}_1$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int\limits_{a(\alpha)}^{a(\alpha_0)} + \int\limits_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} + \int\limits_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)}\right) =$$
$$= f(b(\alpha),\alpha)b'(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)a'(\alpha) + \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.$$
Pomůcka pro zapamatování:
$$\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha) = F(a(\alpha), b(\alpha), \alpha),$$
$\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ podle derivace složené funkce.

Věta 31.4 (o integraci)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $N \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná a $f : M \times N \mapsto \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť alespoň jeden z integrálů
$$\int\limits_M \left(\int\limits_N |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \int\limits_N \left(\int\limits_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

konverguje. Pak

$$\int\limits_M \left(\int\limits_N f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_N \left(\int\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Důkaz. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow |f| \in \Lambda$. Z Fubiniho je pak též $|f| \in \mathcal{L}$, což je majoranta f a zbytek plyne z Fubiniho. □

Poznámka. Předcházející věta představuje zobecnění Fubiniovy věty. Povšimněte si, že v předpokladech nemusí platit $f \in \Lambda$, stačí pouze měřitelnost.

Definice 31.5. Buď $p, q > 0$. Potom **Eulerův integrál druhého druhu** je integrál ve tvaru

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a **Eulerův integrál prvního druhu** je integrál ve tvaru

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce gama je Eulerův integrál druhého druhu jako funkce p, tj.

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce beta je Eulerův integrál prvního druhu jako funkce p, q, tj.

$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka.
(1) Dříve se tyto funkce zaváděly jako elementární. S nástupem výpočetní techniky a softwaru to již není třeba.
(2) Podmínka $p, q > 0$ je proto, aby integrály konvergovaly. Zajímavé je, že na konvergenci je třeba zobecněný Riemannův integrál, ale Lebesgeův integrál pouze obyčejný.

Věta 31.6. Funkce beta je symetrická ve svých argumentech, tj. $\mathbf{B}(p,q) = \mathbf{B}(q,p)$.

Důkaz.

$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} = \int\limits_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}.$$

V 1. kroku se použila substituce $x = t/(t+1)$, ve 2. kroku na druhý integrál $x = 1/t$. □

Věta 31.7.

$$\mathbf{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

pro $p \in (0,1)$

Důkaz.

$$\mathbf{B}(p,1-p) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} + \int\limits_0^1 \frac{x^{(1-p)-1}}{1+x} = \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n-p} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n-p} =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\pi p + \pi n} + \frac{1}{\pi p - \pi n} \right) \right] \pi = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Korektnost postupu: Na záměnu nemůžu použít Leviovu větu kvůli $(-1)^n$. Pro $x \in (0,1)$ platí

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\alpha-1+n} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha-1+k} = \int_0^1 \lim x^{\alpha-1} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x},$$

pro $\alpha \in (0,1)$ je $x^{\alpha-1}$ integrabilní majorantou, takže integrál konverguje a podle Lebesgueovy věty lze zaměnit. □

Věta 31.8.

$$\mathbf{B}(p,q) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q)}{\mathbf{\Gamma}(p+q)}.$$

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \alpha^\beta \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t.$$

Položím $\beta = p+q$, $\alpha = 1+y$. Pak

$$\mathbf{\Gamma}(p+q) = (1+y)^{p+q} \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t}\, \mathrm{d}t$$

vynásobí se to $\cdot \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}$ a zintegruje přes y od 0 do ∞

$$\mathbf{B}(p,q)\mathbf{\Gamma}(p+q) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(y^{p-1} \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y}_{\text{integrál konverguje a je } \geq 0, \text{ lze zaměnit}} = \int_0^{+\infty} \left(t^{p+q-1} e^{-t} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-yt}\, \mathrm{d}y}_{\frac{1}{t^p}\mathbf{\Gamma}(p)} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \mathbf{\Gamma}(q)\mathbf{\Gamma}(p),$$

za použití vzorce $\mathbf{\Gamma}(\beta)$. □

Poznámka.

$$\mathbf{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(1-p).$$

Po rozšíření pro záporná p (viz poznámky za další větou) platí vzorec pro $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Věta 31.9. Buď $p > 0$. Pak $\mathbf{\Gamma}(p+1) = p\mathbf{\Gamma}(p)$.

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} = \left[\frac{x^p}{p} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} = \frac{1}{p}\mathbf{\Gamma}(p+1).$$

□

Poznámka. (1) Předchozí věta má obecnější platnost, platí pro $p \in \mathbb{C}$.
(2) $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$, pomocí předchozí věty pak $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$,
(3) $\mathbf{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}$,
(4) $\mathbf{\Gamma}(p+n) = (p+n-1)\cdots p\mathbf{\Gamma}(p)$,
(5) $\mathbf{\Gamma}$ je definovaná na $(0,+\infty)$. Lze prodloužit i na záporná p indukcí

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p+1)}{p}$$

pro $p \in (-1, 0)$ a takto to natáhnu na $(-n+1, n)$.

(6) Použitím vztahu

$$\ln\alpha = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1)$$

dostaneme

$$\mathbf{\Gamma}(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n^p \left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^p \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} n^p \int_0^1 \tau^{n-1}(1-\tau)^p \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{p+1}\mathbf{B}(n, p+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1}(n-1)!\, p\mathbf{\Gamma}(p)}{(p+1)\cdots p\mathbf{\Gamma}(p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\, n!}{\prod_{k=0}^{n}(p+k)}.$$

Takto lze definovat $\mathbf{\Gamma}$ i pro $\mathbb{C}$, ale problémy jsou s $\mathbb{Z}_-$.

(7) Funkce $\mathbf{\Gamma}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$, neboť integrál

$$\mathbf{\Gamma}^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^k x \,\mathrm{d}x$$

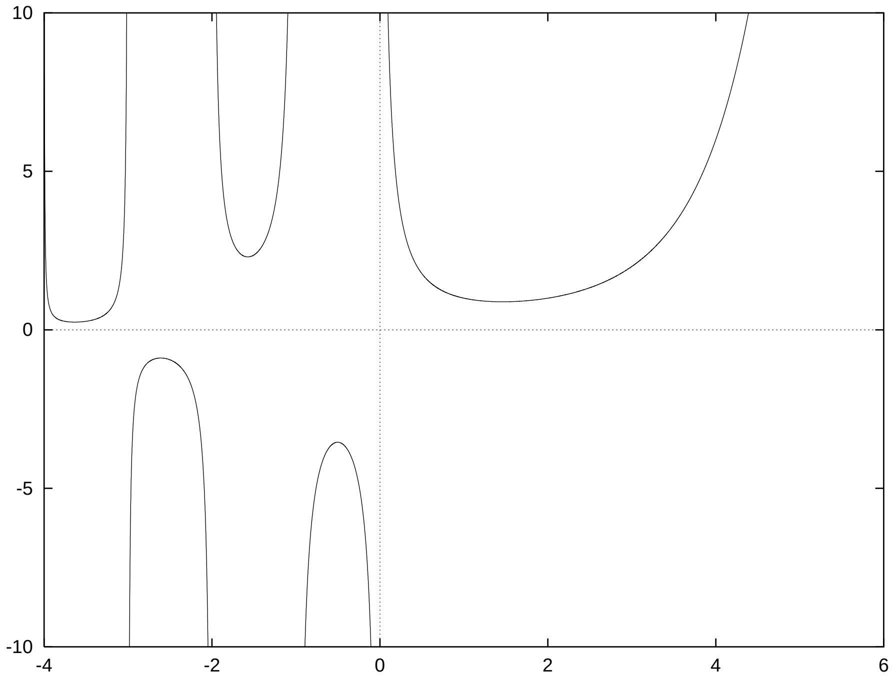
existuje — má integrabilní majorantu (pro každé p existuje okolí (p_1, p_2), na němž majoranta existuje):

$$\int_0^1 \underbrace{x^{p-1}e^{-x}\ln^k x}_{\leq x^{p_1-1}e^{-x}|\ln x|^{k+1}} \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \underbrace{x^{p-1}e^{-x}\ln^{k+1} x}_{\leq x^{p_2-1}e^{-x}\ln^k x} \,\mathrm{d}x.$$

$$\mathbf{\Gamma}''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ln^2 x \,\mathrm{d}x > 0,$$

takže $\mathbf{\Gamma}$ je konvexní. $\mathbf{\Gamma}(1) = \mathbf{\Gamma}(2) = 1$, z Rolleovy věty existuje $p_0 \in (1,2)$ takové, že $\mathbf{\Gamma}'(p_0) = 0$. Funkce $\mathbf{\Gamma}'$ je rostoucí, takže $\mathbf{\Gamma}'(p) > 0$, právě když $p > p_0$, tedy $\mathbf{\Gamma}$ roste konvexně od p_0. Z Heineovy věty a spojitosti vyplývá

$$\lim_{p\to\infty} \mathbf{\Gamma}(p) = +\infty, \quad \mathbf{\Gamma}(p) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p+1)}{p} \Rightarrow \lim_{p\to 0} \mathbf{\Gamma}(p) = +\infty.$$



Obrázek 1. Průběh funkce gama

Věta 31.10 (Legendrův vzorec)**.**

$$\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(p+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\mathbf{\Gamma}(2p).$$

pro $p \geq 0$

Důkaz. Po úpravě a substituci $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ dostaneme

$$\mathbf{B}(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1} = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1} = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} = 2\int_0^1 \frac{1}{2^{2p}} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, p\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2})\mathbf{\Gamma}(p)}{\mathbf{\Gamma}(p+\frac{1}{2})} = \frac{\mathbf{\Gamma}^2(p)}{\mathbf{\Gamma}(2p)}.$$

□

Věta 31.11 (Stirlingova formule)**.**

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \sqrt{2\pi}\,p^{p-\frac{1}{2}}e^{-p}(1+r(p)), \text{ kde } |r(p)| \leq \left(e^{\frac{1}{12p}} - 1\right).$$

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n-1}(1+r(n+1)) \approx \sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

tedy

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}} \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^{-1}.$$

□

Poznámka. Funkci $\mathbf{\Gamma}$ lze jednoznačně definovat takto: $F \in \mathcal{C}^1$ na $(0,+\infty)$, $F(p+1) = pF(p)$,

$$F(p)F(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad F(p)F\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p+1}}F(2p).$$

32. Newtonova formule v $\mathbb{R}^2$

Definice 32.1. Buďte $f, g \in \mathcal{C}^1[\alpha, \beta]$, množinu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (\alpha, \beta),\ g(x) < y < f(x)\}$ nazýváme **elementární oblastí typu** $x(y)$.

Poznámka. Definujeme $\varphi = \varphi_g \dot{+} \varphi_\beta \dot{-} \varphi_f \dot{-} \varphi_\alpha$, kde

$$\begin{aligned}
&\varphi_g(t) = (t, g(t)) \quad t \in [\alpha, \beta] \\
&\varphi_\beta(t) = (\beta, g(\beta) + t(f(\beta) - g(\beta))) \quad t \in [0, 1] \\
&\varphi_f(t) = (t, f(t)) \quad t \in [\alpha, \beta] \\
&\varphi_\alpha(t) = (\alpha, g(\alpha) + t(f(\alpha) - g(\alpha))) \quad t \in [0, 1]\,.
\end{aligned}$$

Věta 32.2. Buď $P : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$ reálná funkce spojitá na $\overline{D}$ a třídy $\mathcal{C}^1$ na D. Pak

$$\int_\varphi P\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Z Fubiniho věty a věty o derivaci podle parametru

$$\begin{aligned}
\int_\varphi P\,\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y &= \int_{\varphi_g} + \int_{\varphi_\beta} - \int_{\varphi_f} - \int_{\varphi_\alpha} = \int_\alpha^\beta (P(t, g(t)), 0)(1, g'(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (P, 0)(0, f(\beta) - g(\beta))\,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \int_\alpha^\beta (P(t, f(t)), 0)(1, f'(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (P, 0)(0, f(\alpha) - g(\alpha))\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_\alpha^\beta (P(t, g(t)) - P(t, f(t)))\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta [P(x, y)]_{g(x)}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta \left(\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Věta 32.3. Buď $Q \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$, $Q \in \mathcal{C}^1(D)$, kde D je oblast typu $y(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\alpha, \beta],\ g(y) < x < f(y)\}$. Buď φ konstruována jako v předchozím příkladu a $[\varphi] = \dot{D}$. Pak

$$\int_\varphi Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. $\varphi = \varphi_g \dot{+} \varphi_\beta \dot{-} \varphi_f \dot{-} \varphi_\alpha$, $\varphi_g(t) = (g(t), t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi_\beta(t) = (g(\beta) + t(f(\beta) - g(\beta)), \beta)$, $t \in [0, 1]$ atd... analogicky, jako v předchozí větě. □

Definice 32.4. Buď $\varphi \in \mathcal{C}^0[\alpha, \beta]$, $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$. Potom φ nazveme **Jordanovou dráhou**, pokud platí

(i) $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$,
(ii) φ je na $[\alpha, \beta)$ prostá.

Jordanovy dráhy jsou tedy takové křivky, které jsou uzavřené a přitom se nikde neprotínají. Platí pro ně následující věta, která je sice „naprosto zjevná“, ale jejíž důkaz je velmi obtížný.

Věta 32.5 (Jordan)**.** Buď φ **Jordanova dráha** v $\mathbb{R}^2$. Pak lze $\mathbb{R}^2$ jednoznačně disjunktně rozloží na tři komponenty souvislosti $\mathbb{R}^2 = A \cup [\varphi] \cup B$, kde A je neomezená a B omezená. Komponentu A označíme $\operatorname{ext}\varphi$ a nazveme ji **vnějšek dráhy**, B budeme značit $\operatorname{int}\varphi$ a nazývat **vnitřek dráhy**.

Věta 32.6 (Green)**.** Buď $D = D^\circ \subset R^2$ omežená oblast, její hranice φ je kladně orientovaná Jordanova dráha po částech třídy $\mathcal{C}^1$, $P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$, $P, Q \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Potom platí

$$\int_\varphi (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 32.7. Vnitřek Jordanovy dráhy je jednoduše souvislý. (jednoduchá souvislost viz 18)

Poznámka. Je-li forma $\boldsymbol{\omega} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ je uzavřená na jednoduše souvislém uzavřeném definičním oboru, z definice platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z Greenovy věty pak získáme

$$\int\limits_{\varphi} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

forma $\boldsymbol{\omega}$ je tedy konzervativní.

33. Vnější algebra

Z této kapitoly Vrána zmiňuje pouze útržky nutné pro příští kapitolu. To však neznamená, že byste této kapitole neměli věnovat pozornost, spíše naopak. Významně totiž abstrahuje dosavadní poznatky z fyzikálních předmětů a dává jim nutný matematický podklad. Matematičtí fyzici by této kapitole měli věnovat zvláštní pozornost.

Definice 33.1. Množinu všech k-lineárních antisymetrických forem definovaných na V^n budeme značit $\Lambda^k(V^n)$. Říkáme, že $\Lambda^k(V^n)$ je **k-tá vnější mocnina prostoru** V^n.

Věta 33.2. $\Lambda^k(V^n)$ tvoří lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Speciálně platí $\Lambda^0(V^n) = \mathbb{R}$, $\Lambda^1(V^n) = V^n$.

Definice 33.3. Buď $k \in \widehat{n}, n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\binom{n}{k}$ budeme značit množinu všech uspořádaných k-tic

$$\lambda = (i_1, \ldots, i_k),$$

pro něž $(\forall p \in \widehat{k})(i \in \widehat{n})$ a $i_1 < \cdots < i_k$.

Poznámka. Symbol $\binom{n}{k}$ pro tuto kapitolu tedy bude znamenat **množinu** rostoucích k-tic, nikoli kombinační číslo. Počet prvků této množiny budeme značit

$$\left|\binom{n}{k}\right| = \frac{n!}{k!(n-k!)}$$

Definice 33.4. Nechť $\lambda \in \binom{n}{k}$, soubor $(\vec{x}_{i_1}, \ldots, \vec{x}_{i_k}) \in V^n$. Potom klademe $\vec{x}_\lambda = (\vec{x}_{i_1}, \ldots, \vec{x}_{i_k})$.

Definice 33.5. Nechť $\lambda \in \binom{n}{k}$, soubor $(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k})$ báze V^n, soubor $(\underset{\leftarrow}{e}^{i_1}, \ldots, \underset{\leftarrow}{e}^{i_k})$ k ní duální báze V_n. Potom symbolem $\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda}$ budeme značit k-lineární antisymetrickou formu definovanou vztahem

$$\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \begin{vmatrix} \underset{\leftarrow}{e}^{i_1}(\vec{x}_1) & \ldots & \underset{\leftarrow}{e}^{i_1}(\vec{x}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{\leftarrow}{e}^{i_k}(\vec{x}_1) & \ldots & \underset{\leftarrow}{e}^{i_k}(\vec{x}_k) \end{vmatrix}.$$

Poznámka. (1) Platí $\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda}(\vec{e}_\lambda) = 1$.

(2) Označíme-li S_λ množinu všech permutací k-tice λ, pak lze z definice determinantu psát

$$\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \sum_{\pi \in S_\lambda} \operatorname{sgn} \pi \ \underset{\leftarrow}{e}^{\pi(i_1)}(\vec{x}_1) \ldots \underset{\leftarrow}{e}^{\pi(i_k)}(\vec{x}_k).$$

Věta 33.6. Nechť $\binom{n}{k} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, kde $p = \left|\binom{n}{k}\right|$, soubor $(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_k})$ báze V^n. Potom soubor forem

$$(\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda_1}, \ldots, \underset{\leftarrow}{e}^{\lambda_p})$$

tvoří bázi $\Lambda^k(V^n)$ a $\dim \Lambda^k(V^n) = \left|\binom{n}{k}\right|$.

Definice 33.7. Označme $\Lambda(V^n)$ direktní součet prostorů $\Lambda^0(V^n) \oplus \Lambda^1(V^n) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V^n)$ a definujme zobrazení $\wedge : \Lambda(V^n) \times \Lambda(V^n) \mapsto \Lambda(V^n)$ bodově vztahem

$$(\sigma \wedge \varrho)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{k+l}) = \frac{1}{k!\ l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \ \sigma(\vec{x}_{\pi(1)} \ldots \vec{x}_{\pi(k)})\ \varrho(\vec{x}_{\pi(k+1)} \ldots \vec{x}_{\pi(k+l)})$$

pro všechna $\sigma \in \Lambda^k(V^n), \varrho \in \Lambda^l(V^n), (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_{k+l}) \in V^n$. Potom

(I) dvojici $(\Lambda(V^n), \wedge)$ nazýváme **vnější algebra** prostoru V^n,
(II) operaci $\wedge$ nazýváme **vnější násobení**,
(III) prvek $\sigma \wedge \varrho \in \Lambda(V^n)$ nazýváme **vnější součin** prvků σ, ϱ.

Poznámka. Operace vnějšího násobení je bilineární zobrazení s následujícími vlastnostmi:

(1) Asociativita
(2) Antikomutativita: $(\forall \sigma \in \Lambda^k(V^n), \varrho \in \Lambda^l(V^n))(\sigma \wedge \varrho = (-1)^{kl} \varrho \wedge \sigma)$

Poznámka. Důležitým důsledkem antikomutativity je antisymetrie. Pro $k = 1$, resp. $l = 1$ při označení z předchozí poznámky platí

(1) $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^n)(\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x})$
(2) $(\forall \underset{\leftarrow}{x}, \underset{\leftarrow}{y} \in V_n)(\underset{\leftarrow}{x} \wedge \underset{\leftarrow}{y} = -\underset{\leftarrow}{y} \wedge \underset{\leftarrow}{x})$

Neboť z poznámky 18 plyne označení $\underset{\leftarrow}{e}^{i} = \mathrm{d}x^i$, plynou odtud tyto nejčastěji užívané vlastnosti

(1) $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$
(2) $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0$

Definice 33.8. Nechť $k \in \mathbb{N}, x^1, \dots, x^k \in \Lambda(V^n), \pi \in S_k$. Potom klademe

$$x^{\pi(1)\dots\pi(k)} = x^{\pi(1)} \wedge \dots \wedge x^{\pi(k)}.$$

Poznámka. Následující pozorování můžeme učinit na základě předchozích definic.

(1) Nechť $\lambda \in \binom{n}{k}$, soubor $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze V^n, soubor $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ k ní duální báze V_n. Potom platí $\underset{\leftarrow}{e}^{\lambda} = \underset{\leftarrow}{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\leftarrow}{e}^{i_k}$.
(2) Nechť $\binom{n}{1} \cup \dots \cup \binom{n}{n} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, kde $p = \left|\binom{n}{1} \cup \dots \cup \binom{n}{n}\right| = 2^n - 1$, soubor $(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$ báze V^n. Potom soubor prvků

$$(1, \underset{\leftarrow}{e}^{\lambda_1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{\lambda_p})$$

tvoří bázi $\Lambda(V^n)$ a $\dim \Lambda(V^n) = 2^n$.
(3) $(\Lambda^k(V^n))^\# = \Lambda^k(V_n)$, obdobně $(\Lambda(V_n))^\# = \Lambda(V^n)$
(4) Pro libovolné $k \in \widehat{n}_0$ platí $\dim \Lambda^k(V^n) = \dim \Lambda^{n-k}(V^n)$, tedy $\Lambda^k(V^n) \cong \Lambda^{n-k}(V^n)$ (prostory jsou izomorfní). Zkonstruujeme mezi nimi izomorfismus zvaný Hodgeův operátor.

Definice 33.9. Nechť $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze V^n. Libovolnou nenulovou n-lineární antisymetrickou formu σ definovanou na V^n nazýváme **orientací prostoru** V^n. Řekneme, báze V^n je

(1) **kladně orientovaná** $\Leftrightarrow \sigma(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) > 0$
(2) **záporně orientovaná** $\Leftrightarrow \sigma(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) < 0$

Definice 33.10. Nechť $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ kladně orientovaná ortonormální báze $(V^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se zvolenou orientací σ. Potom pro každý totálně antisymetrický tenzor $x \in \Lambda^k(V^n)$ definujeme duální tenzor $\star x \in \Lambda^{n-k}(V^n)$ vztahem

$$x \wedge y = \langle \star x, y \rangle \ \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n$$

pro každé $y \in \Lambda^{n-k}(V^n)$. Izomorfismus $\star : \Lambda^k(V^n) \mapsto \Lambda^{n-k}(V^n)$ nazýváme **Hodgeův operátor**. Výsledek operace Hodgeova operátoru nazýváme Hodgeův duál, resp. Hodgeův sdružený tensor.

Poznámka. (1) $(\forall x, y \in \Lambda^k(V^n))(\langle \star x, \star y \rangle = \langle x, y \rangle)$

(2) Z Riezsovy věty vyplývá, že při zvolené orientaci existuje ke každému antisymetrickému tenzoru právě jeden tenzor duální. Záleží však na orientaci báze! Proto se duální tenzor nazývá **pseudotenzor** (popř. pseudoskalár, pseudovektor) a mění znaménko při změně orientace.

Definice 33.11. Zobrazení, které každému bodu z afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřadí tenzor, nazveme **tenzorovým polem** $\boldsymbol{\omega}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R}^n \mapsto \Lambda^k(V_n)$.

Definice 33.12. Nechť $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ báze $(V^n)^\#$ a $\omega_\lambda : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. **Diferenciální k-formou** (resp. diferenciální formou stupně k) rozumíme tenzorové pole $\boldsymbol{\omega}$, jehož složky jsou skalárními poli ω_λ, tj.

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\lambda \in \binom{n}{k}} \omega_\lambda \underset{\leftarrow}{e}^{\lambda}.$$

Poznámka. (1) Z 18.2 víme, že obecnou diferenciální 1-formu $\boldsymbol{\omega}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}x^i.$$

(2) Obdobně diferenciální k-formu $\boldsymbol{\omega}$ můžeme s užitím poznámky 33.8.1 zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\lambda \in \binom{n}{k}} \omega_\lambda \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

(3) Hodnota diferenciální k-formy $\boldsymbol{\omega}$ v bodě x se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \binom{n}{k}} \omega_\lambda(x)\ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Definice 33.13. Vnější derivace je zobrazení d přiřazující k-formě $(k+1)$-formu, které splňuje následující vlastnosti.

(I) totální diferenciál: $(\forall f \in \mathcal{C}^1)(\mathrm{d}f = f')$
(II) nilpotentnost: Pro každou k-formu $\boldsymbol{\omega}$ platí $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{d}^2\boldsymbol{\omega} = 0$.
(III) derivační vlastnost: Pro každou k-formu $\boldsymbol{\omega}$ platí $\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\zeta}) = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\zeta} + (-1)^k(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta})$

Poznámka. (1) Vnější derivace je těmito vlastnostmi dána jednoznačně.

Věta 33.14. Vnější derivací diferenciální k-formy je diferenciální $(k+1)$-forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{\lambda \in \binom{n}{k}} \mathrm{d}\omega_\lambda \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Definice 33.15. Diferenciální k-forma $\boldsymbol{\omega}$ je **třídy** $\mathcal{C}^q$, právě když ω_λ jsou třídy $\mathcal{C}^q$ pro všechna $\lambda \in \binom{n}{k}$.

Definice 33.16. Diferenciální k-forma $\boldsymbol{\omega}$ se nazývá

(I) **uzavřená**, jestliže $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$,
(II) **exaktní**, jestliže existuje $(k-1)$-forma $\boldsymbol{\xi}$ taková, že $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega}$.

Poznámka. (1) Ze axiomu (II) vnější derivace platí: exaktnost $\Rightarrow$ uzavřenost.

(2) K opačné implikaci již nestačí jen jednoduchá souvislost, ale další podmínky (jako např. konvexnost).

Věta 33.17. Buď $(\underset{\leftarrow}{e}^1, \dots \underset{\leftarrow}{e}^n)$ ON báze V_n, $\boldsymbol{\omega} = \underset{\leftarrow}{e}^n \wedge \cdots \wedge \underset{\leftarrow}{e}^n$ diferenciální n-forma. Potom platí

$$\star(\underset{\leftarrow}{e}^1 \wedge \cdots \wedge \underset{\leftarrow}{e}^k) = \underset{\leftarrow}{e}^{k+1} \wedge \cdots \wedge \underset{\leftarrow}{e}^n.$$

Poznámka. (1) V $\mathbb{R}^3$ můžeme z předchozí věty vyjádřit příslušné ortonormální kovektory (1-formy) jako diferenciální 2-formy, neboť dle platí $\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$, tj. 2 forma je izomorfní s 1-formou a

$$\begin{aligned}
\star\mathrm{d}x &= \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\\
\star\mathrm{d}y &= \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\\
\star\mathrm{d}z &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Vidíme, že Hodgeův operátor souvisí vektorovým součinem. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ platí
(a) $\vec{x} \times \vec{y} = \star(\vec{x} \wedge \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$,
(b) $\vec{x} \wedge \vec{y} = \star(\vec{x} \times \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$.
Zároveň si můžeme všimnout, že smíšený součin $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ dává číslo z tělesa (skalár). Platí $\binom{3}{0} = \binom{3}{3}$, tj. 0-forma (skalár) je izomorfní s 3-formou a

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z} \in \mathbb{R}.$$

(2) Každé diferenciální 1-formě $\boldsymbol{\omega} = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$ jednoznačně přísluší vektorová funkce $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ (vektorové pole). Platí-li navíc $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$, tj. exaktní, je vektorové pole přímo rovno gradientu, tedy $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

(3) Každé diferenciální 1-formě $\boldsymbol{\omega} = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$ jednoznačně přísluší diferenciální 2-forma $\star\boldsymbol{\omega} = F_1\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_2\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + F_3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

Definice 33.18. Gradient (grad) je zobrazení z 0-formy na 1-formu. Buď $\boldsymbol{\omega} = f(x, y, z)$ 0-forma a $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ její vnější derivace. Složky $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené kovektory $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ztotožňujeme se složkami vektoru $\operatorname{grad} f$.

Definice 33.19. Rotace (rot) je operátor na 1-formách. Buď $\boldsymbol{\omega} = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$ 1-forma, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ příslušné vektorové pole a $\star\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ Hodgeův duál vnější derivace 1-formy $\boldsymbol{\omega}$. Složky $\star\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené kovektory $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ztotožňujeme se složkami vektoru $\operatorname{rot} \vec{F}$.

Definice 33.20. Divergence (div) je zobrazení z 1-formy na 0-formu. Buď $\boldsymbol{\omega} = F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y + F_3 \mathrm{d}z$ 1-forma, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ příslušné vektorové pole a $\mathrm{d} \star \boldsymbol{\omega}$ vnější derivace Hodgeova duálu 1-formy $\boldsymbol{\omega}$. Složku $\mathrm{d} \star \boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené 3-formou $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ ztotožňujeme s $\operatorname{div} \vec{F}$.

Definice 33.21. Laplaceův operátor je operátor na 0-formách získaný složením zobrazení div grad. Buď $\boldsymbol{\omega} = f(x, y, z)$ 0-forma a $\mathrm{d} \star \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ vnější derivace Hodgeova duálu vnější derivace 1-formy $\boldsymbol{\omega}$. Složku $\mathrm{d} \star \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené 3-formou $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ ztotožňujeme s $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

Poznámka. Vidíme, že tyto operace jsou jen speciální případy vnější derivace forem na $\mathbb{R}^3$. Ukážeme, že se skutečně jedná o nám známé operace z fyziky. Zavádíme symbol nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$, který používáme pouze v $\mathbb{R}^3$. V jiných případech používáme abstraktní defince výše.

Věta 33.22. Gradient skalární funkce $f = f(x, y, z)$ lze v $\mathbb{R}^3$ reprezentovat pomocí symbolu nabla:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T.$$

Důkaz. Buď $\boldsymbol{\omega} = f(x, y, z)$ 0-forma a

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

její vnější derivace. Dle 33.18 jsou složky $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ rovny složkám vektoru $\operatorname{grad} f$. Odsud je též vidět, že $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ jsou vnější derivace souřadnicových funkcionálů na $\mathbb{R}^3$. □

Věta 33.23. Rotace vektorové funkce $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ lze v $\mathbb{R}^3$ reprezentovat pomocí symbolu nabla:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\, ; \, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\, ; \, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^T.$$

Důkaz. Buď $\boldsymbol{\omega} = F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y + F_3 \mathrm{d}z$ 1-forma, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ příslušné vektorové pole dle poznámky 33.17.2. Užijeme-li základní vlastnosti vnějšího součinu 33.7, pro vnější derivaci 1-fomy $\boldsymbol{\omega}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} &= \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}F_3 \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right)}_{\mathrm{d}F_1} \wedge \mathrm{d}x + \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right)}_{\mathrm{d}F_2} \wedge \mathrm{d}y + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right)}_{\mathrm{d}F_3} \wedge \mathrm{d}z = \\
&= -\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nyní k vnější derivaci $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ nalezneme Hodgeův duál. Z poznámky 33.17.1 plyne

$$\star\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}z.$$

Dle 33.19 jsou složky $\star\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ rovny složkám vektoru $\operatorname{rot} \vec{F}$. □

Věta 33.24. Divergence vektorové funkce $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ je v $\mathbb{R}^3$ stopa matice první derivace (Jacobiho matice) a lze ji v $\mathbb{R}^3$ reprezentovat pomocí symbolu nabla:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{tr} \vec{F}' = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Důkaz. Buď $\boldsymbol{\omega} = F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y + F_3 \mathrm{d}z$ 1-forma, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ příslušné vektorové pole dle poznámky 33.17.2. Hodgeův duál 1-formy $\boldsymbol{\omega}$ je z poznámky 33.17.1 dán

$$\star\boldsymbol{\omega} = F_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - F_2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + F_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Užijeme-li základní vlastnosti vnějšího součinu 33.7, pro vnější derivaci Hodgeova duálu $\star\boldsymbol{\omega}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\star\boldsymbol{\omega} &= \mathrm{d}F_1 \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}F_2 \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}F_3 \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial F_1}{\partial z} \mathrm{d}z \right)}_{\mathrm{d}F_1} \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial F_2}{\partial z} \mathrm{d}z \right)}_{\mathrm{d}F_2} \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathrm{d}z \right)}_{\mathrm{d}F_3} \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Dle 33.20 je jediná složka $\mathrm{d}\star\boldsymbol{\omega}$ v bázi tvořené 3-formou $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ rovna přímo $\operatorname{div} \vec{F}$. Navíc, protože 3-forma je izomorfní s 0-formou, platí dokonce

$$\star\mathrm{d}\star\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}.$$

Zároveň z definice stopy a tvaru Jacobiho matice $\vec{F}$ platí zřejmě i rovnost $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{tr} \vec{F}'$. ☐

Věta 33.25. Laplaceův operátor skalární funkce $f = f(x, y, z)$ je v $\mathbb{R}^3$ stopa matice druhé derivace (Hessova matice) a lze jej v $\mathbb{R}^3$ reprezentovat pomocí symbolu $\Delta = \nabla^2$, tj.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{tr} f'' = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Důkaz. Laplaceův operátor je z definice složení dvou zobrazení div grad. Buď $f = f(x, y, z)$ 0-forma. Pak je $\operatorname{grad} f$ dle 33.22 roven $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$ To je však z 33.17.2 vektorové pole příslušící 1-formě $\mathrm{d}f$, která je východiskem pro výpočet divergence. Nyní stačí dosadit $\mathrm{d}f$ za $\boldsymbol{\omega}$ a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$ za $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$ do důkazu 33.24.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\star\mathrm{d}f &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \cdots = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z. \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Dle 33.21 je jediná složka $\mathrm{d}\star\mathrm{d}f$ v bázi tvořené 3-formou $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ rovna přímo $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$. Analogicky k důkazu 33.24 díky izomorfismu 0-forem k 3-formám platí

$$\star\mathrm{d}\star\mathrm{d}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Zároveň z definice stopy a tvaru Hessovy matice f platí zřejmě i rovnost $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{tr} f''$. ☐

Poznámka. Z definice vnější derivace 33.13 víme, že $\mathrm{d}^2\boldsymbol{\omega} = 0$. Z této vlastnosti okamžitě vyplývají dvě užitečné identity $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ a $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

34. Vícerozměrná integrace

Z této kapitoly Vrána přednáší pouze plošné integrály a divergenční větu, na zkoušce pak její znění může chtít slyšet na A. Ze znalostí z předchozí kapitoly nyní můžeme shrnout poznatky o integrování získané z fyzikálních předmětů.

Definice 34.1. Neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá ***σ*-kompaktní**, existuje-li nejvýše spočetný systém $\{A_n\}_{n\in\mathcal{I}}$ kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$, který pokrývá A, tj.

$$A = \bigcup_{n\in\mathcal{I}} A_n.$$

Definice 34.2. Nechť jsou dány:

(1) k-rozměrná varieta $M \subset \mathbb{R}^n$,
(2) regulární zobrazení $g : \mathbb{R}^k \mapsto M$,
(3) σ-kompaktní množina $A \subset (\operatorname{Ran} g)^\circ$.

Potom **orientací variety** M nazýváme zobrazení $\vec{e} : \mathbb{R}^k \mapsto \Lambda^k(V_n)$ definované $\forall t \in \operatorname{Dom} g$

$$e(t) = \frac{\bigwedge_{i=1}^k g_i(t)}{\left\|\bigwedge_{i=1}^k g_i(t)\right\|}$$

Poznámka. (1) Orientace variety M má význam jednotkového tečného „vektoru“ k varietě M.
(2) Orientace variety M je daná orientací jejího tečného prostoru (g_i jsou tečné vektory).
(3) Varieta je orientovatelná, pokud se dá napsat jako implicitní zobrazení. Pokud ji nelze zadat implicitně, není tedy orientovatelná a můžeme ji zadat např. parametricky.

Definice 34.3 (k-rozměrný integrál druhého druhu)**.** Nechť $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální k-forma, $A \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$ orientovaná dle e, $t \in \operatorname{Dom} g$. Potom při označení z předchozí definice klademe

$$\int_{A^\circ} \boldsymbol{\omega} = \int_{g^{-1}(A)} \omega(g(t)) \bigwedge_{i=1}^{k} g_i(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde g_i jsou i-té parciální derivace, tj. $g_i = \partial_i g(t)$, a dále

$$\bigwedge_{i=1}^{k} g_i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial g}{\partial t^1}(t) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial g}{\partial t^k}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Pro $n = 3$, $k = 2$ nazýváme 34.3 **plošný integrál druhého druhu**.

Pro každou diferenciální 2-formu $\boldsymbol{\omega}$ existuje dle poznámky 33.17.2 vektorové pole $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \Lambda^2(V^n)$. S užitím poznámek pod definicí 33.10 získáme

$$\int_{g^{-1}(A)} \omega(g(u,v))\; g_u(u,v) \wedge g_v(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{g^{-1}(A)} \left\langle \vec{F}(g(u,v)), g_u(u,v) \wedge g_v(u,v) \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$
$$= \int_{g^{-1}(A)} \left\langle \star\vec{F}(g(u,v)), \star g_u(u,v) \wedge g_v(u,v) \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{g^{-1}(A)} \left\langle \star\vec{F}(g(u,v)), g_u(u,v) \times g_v(u,v) \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Pro zápis plošných integrálů druhého druhu se proto užívá následující symboliky:

$$\int_A \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}S = \int_A \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_A (F_1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \int_{g^{-1}(A)} \vec{F}(g(t)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial g}{\partial t^2}(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Druhá rovnost plyne z toho, že je-li $\boldsymbol{\omega} = F_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + F_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, potom $\star\vec{F} = (F_1, -F_2, F_3)^T$.

Integrand v poslední rovnosti je smíšený součin. Užitím poznámky 33.17.1(a) můžeme pokračovat v úpravách integrálu (ozn. $\partial_i g^j = \frac{\partial g^j}{\partial t^i}$)

$$= \int\limits_{g^{-1}(A)} \vec{F}(g(t)) \wedge \frac{\partial g}{\partial t^1}(t) \wedge \frac{\partial g}{\partial t^2}(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{g^{-1}(A)} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \partial_1 g^1 & \partial_1 g^2 & \partial_1 g^3 \\ \partial_2 g^1 & \partial_2 g^2 & \partial_2 g^3 \end{vmatrix}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Poznámka. Při označení z definice 34.2 platí

$$\int\limits_{A^\circ} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{g^{-1}(A)} \omega(g(t))\ \vec{e}(t) \left\| \bigwedge_{i=1}^{k} g_i(t) \right\| \mathrm{d}t.$$

Je-li $\boldsymbol{\omega}$ 0-forma, tj. (skalární) funkce, můžeme tento poznatek shrnout do následující definice.

Definice 34.4 (k-rozměrný integrál prvního druhu)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funkce, $A \subset \mathrm{Dom}\, f$, $\mu_k(x)$ k-rozměrná míra na $\mathbb{R}^k$, $x \in \mathrm{Dom}\, f$, $t \in \mathrm{Dom}\, g$. Potom při označení z definice klademe

$$\int\limits_A f(x)\, \mathrm{d}\mu_k(x) = \int\limits_{g^{-1}(D)} f(g(t)) \left\| \bigwedge_{i=1}^{k} g_i(t) \right\| \mathrm{d}t,$$

kde g_i jsou i-té parciální derivace, tj. $g_i = \partial_i g(t)$, a dále

$$\left\| \bigwedge_{i=1}^{r} g_i(t) \right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \dots & \langle g_1, g_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle g_k, g_1 \rangle & \dots & \langle g_k, g_k \rangle \end{vmatrix}}.$$

Definice 34.5. Symetrická bilineární forma daná Gramovou maticí souboru $(g_i(t))$ definované po složkách $[g(t)]_{ij} = \langle g_i(t), g_j(t) \rangle$ se nazývá **metrický tenzor**. Determinant příslušné matice se nazývá **gramián**.

Poznámka.
(1) Mezi metrickým tenzorem a Jakobiánem platí vztah $g = \mathcal{J}^T \mathcal{J}$, odsud platí $\det f'(x) = \sqrt{\det g(t)}$. Tímto je dokázána věta 30.3. Metrický tenzor tedy figuruje při přechodu od jedněch souřadnic ke druhým. Zároveň udává geometrii na varietě M, neboť na ní indukuje „skalární součin" a tudíž i metriku. Proto se nazývá metrický tenzor.
(2) Metrický tenzor nemusí být nutně pozitivně definitní, musí však mít prázdný nulprostor. Variety se signaturou metriky $(-1, 1, 1, 1)$ nazýváme **pseudoriemannovské.**
(3) Metrický tenzor 2-rozměrné variety nazýváme **první fundamentální formou**, značíme

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad (E, F, G \text{ jsou funkce } t).$$

(4) $\det g = EG - F^2 = \langle g_u, g_u \rangle \langle g_v, g_v \rangle - \langle g_u, g_v \rangle^2 = \|g_u\|^2 \|g_v\|^2 - \langle g_u, g_v \rangle^2$
(5) Pro velikost vektorového součinu platí $\|\vec{a} \times \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{c}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle^2$. Užitím tohoto vzorce na předchozí rovnost získáme užitečný vztah

$$\sqrt{\det g} = \|g_u \times g_v\| = \|g_u\|^2 \|g_v\|^2 - \langle g_u, g_v \rangle^2.$$

Poznámka. Pro $k = 2$ v $\mathbb{R}^3$ nazýváme 34.4 **plošný integrál prvního druhu**. Pro jeho zápis se s přihlédnutím k předchozí poznámce užívá následující symboliky:

$$\int\limits_A f\, \mathrm{d}S = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ve speciálním případě, kdy $g(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$, získáme

$$\int\limits_A f\, \mathrm{d}S = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Položíme-li $f(x) = 1$, získáme vzorec pro výpočet obsahu plochy $A \subset \mathbb{R}^3$, která je parametricky zadaná zobrazením $\varphi(x, y)$.

Poznámka. Pro $k = 1$ v $\mathbb{R}^n$ nazýváme 34.4 **křivkový integrál prvního druhu**, s nímž jsme se již setkali. Pro $[a, b] = \operatorname{Dom} g$ buď

$$\int_g f \mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t)) \, \|g'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Položíme-li $f(x) = 1$, získáme vzorec pro výpočet délky křivky $[g]$, která je parametricky zadaná zobrazením g.

Věta 34.6 (divergenční, zobecněná Stokesova)**.** Buď $D \subset \mathbb{R}^n$, a nechť jsou dány:

(I) k-rozměrná varieta M v $\mathbb{R}^n$,
(II) ∂D, tj. $(k-1)$-rozměrná varieta (po částech $\mathcal{C}^0$),
(III) σ-kompaktní množina $D \subset M$ ležící na jedné straně svého okraje ∂D.

Potom pro každou diferenciální $(k-1)$-formu $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ platí

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{\omega} = \int_{D^\circ} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}.$$

Poznámka.
(1) V předpokladech stačí $\mathcal{C}^1(D^\circ)$ a $\mathcal{C}^0(\overline{D})$.
(2) Důkaz věty je nad rámec přednášky, dokážeme si však nám již známé důsledky této věty. Následující formule jsou důsledkem divergenční věty pro $n = k$.

Věta 34.7 (Newton, Leibniz ($n = k = 1$))**.** Buď $\mathrm{d}f$ exaktní diferenciální 1-forma třídy $\mathcal{C}^0, D = [a, b], \partial D = \{a, b\}$. Potom platí

$$f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b = \int_a^b \mathrm{d}f = \int_a^b f'.$$

Důkaz. Orientace krajních bodů je opačná, proto jsou funkční hodnoty v krajních bodech (0-forma $f(x)$ vyčíslená přes okraj ∂D) vynásobeny příslušnými znaménky. $[f(x)]_a^b = 1 \cdot f(b) + (-1) \cdot f(a)$ □

Věta 34.8 (Green ($n = k = 2$))**.** Buď $D = D^\circ \subset R^2$ omezená oblast, její hranice ∂D je kladně orientovaná uzavřená Jordanova dráha po částech třídy $\mathcal{C}^1$, $P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$, $P, Q \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Potom platí

$$\int_{\partial D} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{\omega} = P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$, potom pro vnější derivaci $\boldsymbol{\omega}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}y = \\ = \frac{\partial P}{\partial y} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

□

Věta 34.9 (Gauss, Ostrogradskij ($n = k = 3$))**.** Buď $D = D^\circ \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast, její hranice ∂D je kladně orientovaná uzavřená plocha po částech třídy $\mathcal{C}^1$ prostá na $(\operatorname{Dom} \partial D)^\circ$, $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{C}^1(D)$, $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Potom platí

$$\iint_{\partial D} (F_3 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + F_1 \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_2 \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) = \iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

ve fyzikální notaci

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_D \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}V.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{\omega} = F_3 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + F_1 \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_2 \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, potom z důkazu 33.24 plyne pro vnější derivaci vztah $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

□

Věta 34.10 (per partes $(n = k = 3)$)**.** Buď $D = D^\circ \subset \mathbb{R}^3$ omežená oblast, její hranice ∂D je kladně orientovaná uzavřená plocha po částech třídy $\mathcal{C}^1$ prostá na $(\operatorname{Dom} \partial D)^\circ$, $f, g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1(D)$, $f, g \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Potom platí

$$\iiint\limits_{D^\circ} \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \oint\limits_{\partial D} f \nabla g \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \iiint\limits_{D^\circ} f \Delta g.$$

Důkaz. Označme $\vec{F} = f \operatorname{grad} g = f \nabla g$, potom pro i-tou složku divergence plyne z alternativní definice 33.24 vztah

$$(\operatorname{div} \vec{F})^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial {x^i}^2}.$$

Ve vektorovém tvaru jsme tedy užitím 33.24 a 33.25 získali vztah $\operatorname{div} \vec{F} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g$. Dosazením $\operatorname{div} \vec{F}$ do Gaussovy věty 34.9 získáme tvrzení věty. □

Věta 34.11 (druhá Greenova formule $(n = k = 3)$)**.** Za předpokladů předchozí věty platí

$$\oint\limits_{\partial D} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \\ f & g \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{D^\circ} \begin{vmatrix} \Delta f & \Delta g \\ f & g \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Z předchozí věty vyjádříme prostřední člen

$$\oint\limits_{\partial D} f \nabla g \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{D^\circ} \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \iiint\limits_{D^\circ} f \Delta g.$$

Obdobně získáme

$$\oint\limits_{\partial D} g \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial D} g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{D^\circ} \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \iiint\limits_{D^\circ} g \Delta f.$$

Odečtením předchozích dvou rovností dostaneme tvrzení věty. □

Poznámka. Následující formule je důsledkem divergenční věty pro $k \leq n$.

Věta 34.12 (Kelvin, Stokes $(n = 3,\ k = 2)$)**.** Buď $D = D^\circ \subset \mathbb{R}^3$ omežená oblast, její okraj ∂D je kladně orientovaná uzavřená Jordanova dráha po částech třídy $\mathcal{C}^1$, $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{C}^1(D)$, $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Označme $\boldsymbol{\omega} = F_1 \wedge \mathrm{d}x + F_2 \wedge \mathrm{d}y + F_3 \wedge \mathrm{d}z$. Potom platí

$$\int\limits_{\partial D} \boldsymbol{\omega} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

ve fyzikální notaci

$$\oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{D} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{\omega}$ stejně jako v tvrzení, potom z důkazu 33.23 plyne pro vnější derivaci $\boldsymbol{\omega}$ vztah

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

□

Poznámka. Položíme-li v důkazu předchozí věty $\boldsymbol{\omega} = P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y + O \, \mathrm{d}z$, kde O je nulová funkce, potom ze Stokesovy věty 34.12 vyplývá Greenova věta 34.8 jakožto poslední sčítanec na obou stranách (zbylé jsou nulové kvůli nové funkci O).

35. Komplexní derivace

Komplexní analýzu se Vrána tradičně snaží stihnout v průběhu tří přednášek, což dost dobře není možné. Proto provádí důkazy hodně zrychleně a některá důležitá tvrzení nedokazuje vůbec. Existují velmi pěkně napsaná skripta Komplexní analýza pro učitele od Jiřího Veselého, která jsou mimo jiné i doporučenou učebníci k přednášce Funkce komplexní proměnné od docenta Pošty. Ke zkoušce by ale mělo stačit naučit se to, co Vrána odpřednášel (někdy toho je méně, než kolik obsahují Wikiskripta, jindy zase více – podle toho, kolik hodin během semestru odpadne).

Definice komplexní funkce komplexní proměnné je formálně úplně stejná jako v $\mathbb{R}$.

Definice 35.1. Buď $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in (\mathrm{Dom}\, f)^\circ$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

říkáme, že funkce f je v bodě z_0 (komplexně) diferencovatelná a příslušnou limitu značíme $f'(z_0)$.

Topologicky je normovaný prostor $\mathbb{C}$ totožný s $\mathbb{R}^2$. Na zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se tedy lze dívat i jako na zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Označme reálnou, resp. imaginární část takového zobrazení jako f_1 a f_2, tj. pišme $f(z) = f(x + \mathbf{i}y) = f_1(x, y) + \mathbf{i}f_2(x, y)$. Pak se můžeme ptát, jaký je vztah mezi komplexní diferencovatelností funkce f a diferencovatelností reálného zobrazení $\vec{f} = (f_1, f_2)$. Na tuto otázku podává odpověď následující věta.

Věta 35.2. Funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je v bodě[1] $z_0 = x_0+\mathbf{i}y_0$ komplexně diferencovatelná právě tehdy, když je diferencovatelné výše definované zobrazení $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zároveň jsou splněny tzv. Cauchyho–Riemannovy podmínky $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Důkaz. Můžeme psát

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\alpha h}{|h|}\frac{|h|}{h} = 0\\ &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\alpha h}{|h|} = 0.\end{aligned}$$

(Druhou ekvivalenci lze zdůvodnit tím, že oba výrazy mají v každém bodě stejnou absolutní hodnotu a přitom platí, že libovolný výraz jde k nule právě tehdy, když jde k nule v absolutní hodnotě. Nejspíš existuje i nějaké elegantnější zdůvodnění.) Rozepíšeme-li α jako $\alpha_1 + \mathbf{i}\alpha_2$ a $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ a roznásobíme-li všechno do mrtě, zjistíme, že poslední výrok je dále ekvivalentní

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(*) + \mathbf{i}f_2(*) - f_1(x_0,y_0) - \mathbf{i}f_2(x_0,y_0) - [(\alpha_1h_1 - \alpha_2h_2) + \mathbf{i}(\alpha_2h_1 + \alpha_1h_2)]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

kde $(*)$ pro nedostatek místa značí vyčíslení v bodě (x_0+h_1, y_0+h_2). Upravujme dále. Výraz, jehož limitu počítáme, má za obor hodnot komplexní čísla. Pokud tato čísla interpretujeme jako dvojice reálných čísel, tj. pokud využijeme izomorfismus $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, můžeme ekvivalentně psát

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\vec{f}(x_0+h_1, y_0+h_2) - \vec{f}(x_0,y_0) - \big((\alpha_1h_1-\alpha_2h_2), (\alpha_2h_1+\alpha_1h_2)\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \vec{0}.$$

Tuto rovnost lze dále přepsat jako

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\vec{f}(x_0+h_1, y_0+h_2) - \vec{f}(x_0,y_0) - L\vec{h}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \vec{0},$$

přičemž jako L jsme označili lineární operátor na $\mathbb{R}^2$, který vektoru (h_1, h_2) přiřadí vektor $\big((\alpha_1h_1 - \alpha_2h_2), (\alpha_2h_1+\alpha_1h_2)\big)$. Vztah, který jsme získali, ale znamená právě a pouze to, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má v bodě (x_0, y_0) derivaci L.

[1]Dodržujeme úmluvu, že když číslo zapíšeme ve tvaru $x + \mathbf{i}y$, jsou x i y reálná čísla. Pokud tomu tak nebude, budeme se snažit na to upozornit.

Stačí už jen ověřit, že operátor L splňuje Cauchyho–Riemannovy podmínky. Jeho matice je $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & -\alpha_2\\ \alpha_2 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right)$. Matice derivace zobrazení $\vec{f} = (f_1, f_2)$ má přitom vždy tvar $\left(\begin{smallmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2\end{smallmatrix}\right)$. □

Komplexní diferencovatelnost f je tedy výrazně silnější vlastnost než reálná diferencovatelnost příslušného zobrazení $\vec{f}$. Následující příklad ukáže, že ani velmi „hezké“ funkce nemusejí mít derivaci.

Příklad. Uvažme funkci $f(z) = \overline{z}$. Pak $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = -y$. Spočítáme-li příslušné parciální derivace, dostaneme $\partial_x f_1 = 1$, ale $\partial_y f_2 = -1$. V žádném bodě tedy nejsou splněny Cauchyho–Riemannovy podmínky, a funkce f proto není nikde diferencovatelná.

Uvědomme si, že funkce $z \mapsto \overline{z}$ je přitom na celém $\mathbb{C}$ spojitá. Sestavit funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je všude spojitá, ale nikde diferencovatelná, je sice rovněž možné, ale neúměrně náročnější – komplexní analýza se od té reálné diametrálně liší. Jak říká Vrána: „Mít komplexní derivaci, to už je síla.“

Na druhé straně mají i mnohé společné. Následující tři tvrzení lze dokázat naprosto stejným způsobem jako v prvním semestru, proto je uvádíme bez důkazu.

Věta 35.3. Nechť má funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivaci v bodě z_0. Pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 35.4. Nechť f, g mají derivaci v z_0. Pak

(i) $(f + cg)'(z_0) = f'(z_0) + cg'(z_0)$,
(ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
(iii) Jestliže $g'(z_0) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{1}{g^2(z_0)}g'(z_0).$$

Věta 35.5. Nechť $\exists f'(g(z_0))$, $\exists g'(z_0)$. Pak $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Než se Vrána pustí do ústřední části teorie funkcí komplexní proměnné, tedy do kapitoly o holomorfních funkcích, udělá odbočku a zavede některé elementární funkce na $\mathbb{C}$. Protože to v našem ročníku udělal dost zmateně a místy i chybně, nebudeme formulovat jeho tvrzení do vět a definic, pouze do volného textu.

Komplexní exponenciálu lze definovat vztahem $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Víme, že jde o mocninnou řadu s nekonečným poloměrem konvergence, která se na reálné ose rovná reálné exponenciále definované v prvním ročníku.

Protože je mocninná řada s nekonečným poloměrem konvergence v každém bodě absolutně konvergentní, lze přímočarým roznásobením dokázat identitu $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{N-k}}{(N-k)!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} z_1^k z_2^{N-k} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(z_1 + z_2)^N$$

Když do mocninné řady definující exponenciálu dosadíme $\mathbf{i}z$ a následně seskupíme sudé a liché členy, získáme rovnost

$$e^{\mathbf{i}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \mathbf{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Sudou část funkce $e^{\mathbf{i}z}$ označíme $\cos z$ a lichou jako $\mathbf{i}\sin z$. Tím jsme na celé komplexní rovině definovali sinus a kosinus. Předešlou rovnost můžeme přepsat jako $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z$ a ze sudosti kosinu a lichosti sinu hned odvodíme i obě dvojice vztahů

$$\cos z = \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}},$$

resp.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Druhá dvojice vztahů přitom ukazuje, že se naše „nové“ definice na reálné ose shodují s těmi původními.

Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} &= e^{\mathbf{i}z_1}e^{\mathbf{i}z_2} \\ &= (\cos z_1 + \mathbf{i}\sin z_1)(\cos z_2 + \mathbf{i}\sin z_2) \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + \mathbf{i}(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2), \end{aligned}$$

přičemž první závorka obsahuje sudou a druhá lichou funkci, takže platí

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Z toho snadno zjistíme, že identity

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

platí pro každé komplexní z.

Taktéž můžeme díky sudosti kosinu a lichosti sinu odvodit důležitou identitu

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) = \cos(z - z) = 1,$$

ale **pozor**! Neplyne z ní, že $\cos^2 z$ a $\sin^2 z$ leží v intervalu $[0, 1]$, protože v komplexním oboru lze odmocnit i záporné číslo. Funkce sinus a kosinus nejsou v $\mathbb{C}$ omezené!

Definujme dále jako obvykle

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

a učiňme snadné pozorování

$$\cos z = \cosh \mathbf{i}z, \quad \sin z = -\mathbf{i}\sinh \mathbf{i}z.$$

Nyní už jsme připraveni vyjádřit reálnou a imaginární část exponenciály, sinu a kosinu. Následující vztahy sice platí obecně, ale zdaleka nejzajímavější jsou pro nás v případě, že x a y jsou reálná čísla.

$$\begin{aligned} e^{x+\mathbf{i}y} &= e^x e^{\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y); \\ \sin(x + \mathbf{i}y) &= \sin x \cos \mathbf{i}y + \sin \mathbf{i}y \cos x = \sin x \cosh y + \mathbf{i}\sinh y \cos x; \\ \cos(x + \mathbf{i}y) &= \cos x \cosh y - \mathbf{i}\sin x \sinh y. \end{aligned}$$

Protože chování reálných funkcí máme dobře prozkoumané, jsme schopni pomocí předešlého vyjádření určit nulové body sinu v komplexním oboru:

$$\sin z = \sin(x + \mathbf{i}y) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cosh y = 0 \wedge \sinh y \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \wedge y = 0.$$

Derivace je možné snadno spočítat třeba pomocí pravidla o derivování mocninné řady člen po členu:

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Prozkoumejme na závěr, zda je exponenciála prostá. Nejprve snadno zjistíme, že $e^{z_1} = e^{z_2}$ právě tehdy, když $e^{z_1 - z_2} = 1$. Potřebujeme tedy zjistit, pro která z je $e^z = 1$. K tomu opět využijeme rozklad na reálnou a imaginární část. Podmínka

$$e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y) = 1$$

je splněna právě tehdy, když $e^x \sin y = 0$ a zároveň $e^x \cos y = 1$, což je ekvivalentní tomu, že x lze zvolit libovolně a $y = 2k\pi$. Ukázali jsme tedy, že exponenciála není prostá – naopak, je periodická s periodou $\mathbf{i}2\pi$. Pro účely definování inverzní funkce, logaritmu, ji budeme muset zúžit na nějaký pás, na němž je exponenciála prostá. Takový pás má pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ tvar

$$E_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im}(z) \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]\}.$$

Na každém takovém pásu představuje exponenciála bijekci $E_\alpha \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, protože každé nenulové komplexní číslo z lze zapsat ve tvaru $e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$; stačí totiž za e^x dosadit $|z|$ a dostaneme známý goniometrický tvar komplexního čísla. Tohoto pozorování zanedlouho využijeme při zavedení logaritmu; nejdřív ale definujeme tzv. argument, což je úhel, který dané číslo svírá s reálnou osou.

Definice 35.6. **Argumentem komplexního čísla** z nazýváme množinu $\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z|\, e^{\mathbf{i}\alpha}\}$.

Definice 35.7. Buď $\vartheta \in \mathbb{R}$. Potom je pro $z \neq 0$ množina $\operatorname{Arg} z \cap (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi]$ jednoprvková. Její jediný prvek označíme jako $\arg_\vartheta z$, čímž definujeme funkci $\arg_\vartheta \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi]$. Funkci $\arg_0$ značíme zkráceně arg.

Poznámka. Snadno ověříme, že platí rovnost $\arg_\vartheta z = \arg(ze^{-\mathbf{i}\vartheta}) + \vartheta$.

Definice 35.8. Pro libovolné $\vartheta \in \mathbb{R}$ definujeme polopřímku $P_\vartheta = \{te^{\mathbf{i}\vartheta} \mid t \in \mathbb{R}^+\}$.

Poznámka.
(1) Funkce $\arg z$ není spojitá na P_π a nikde nemá derivaci. (Neexistence derivace plyne z nespojitosti, viz z následující bod; pro dokázání mírně slabšího tvrzení stačí využít větu 36.2.)

(2) Pro $z = x + \mathbf{i}y$ lze argument vyjádřit explicitně třeba takto:
$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{pro } y \geq 0, \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$
Je možné využít i vyjádření pomocí arcsin nebo arctg.

(3) Jsme také schopni spočítat argument součinu, resp. podílu:
$$\begin{aligned} \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi\varepsilon, \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi\varepsilon, \\ \arg \frac{1}{z} &= -\arg z + 2\pi\varepsilon, \end{aligned}$$
přičemž ε volíme -1, 0 nebo 1 tak, abychom zůstali v základním intervalu. Kdybychom místo funkcí arg pracovali s množinami Arg, nebyli bychom nuceni přičítat $2\pi\varepsilon$.

(4) Nechť funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ splňují Cauchyho–Riemannovy podmínky
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$
a nechť jsou navíc třídy $\mathcal{C}^2$. Zderivováním první podmínky podle x a druhé podle y získáme
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$
Když obě rovnosti sečteme a využijeme záměnnosti parciálních derivací, dostaneme $\Delta f_1 = 0$. Analogickým postupem bychom odvodili i $\Delta f_2 = 0$. Obě funkce f_1, f_2 jsou tedy harmonické, čehož se využívá například při modelování profilů letadel.

Nyní se pustíme do zkoumání logaritmu, tj. inverzní funkce k exponenciále.

Definice 35.9. Zaveďme množinu $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid z = e^w\}$. Pokud chceme, aby byl logaritmus funkce, musíme se zúžit na některý z pásů E_ϑ. Definujme tedy pro $z \neq 0$ hodnotu $\ln_\vartheta z$ dvojicí podmínek
$$\ln_\vartheta z \in \operatorname{Ln} z \wedge \mathbf{Im}(\operatorname{Ln})_\vartheta z \in (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi].$$
Speciálně označme $\ln = \ln_0$ a nazvěme tuto funkci **logaritmus komplexního čísla**.

Poznámka.
(1) Když hledáme logaritmus komplexního čísla z, rozepišme ho na reálnou a imaginární část: $\ln_\vartheta z = u + \mathbf{i}v$. Dostáváme podmínku $z = e^u e^{\mathbf{i}v} = e^u(\cos v + \mathbf{i} \sin v)$. Zjevně $|z| = e^u$ a $v = \arg_\vartheta z$, tj.
$$\ln_\vartheta z = \ln |z| + \mathbf{i} \arg_\vartheta z.$$
Speciálně platí $\ln z = \ln |z| + \mathbf{i} \arg z$.

(2) Spočítejme, zda má logaritmus derivaci v bodě $z \neq 0$. Víme, že $\mathbf{Re}(\ln z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{Im}(\ln z) = \arg z$. Určeme nejprve derivaci reálné a imaginární části.

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$
$$(\arg z)' = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

ale pouze mimo polopřímku P_π, na níž je argument nespojitá funkce, a nemůže tedy mít derivaci. Obě funkce f_1, f_2 mají totální derivaci (parciální derivace jsou totiž spojité) a zároveň zjevně platí Cauchyho–Riemannovy podmínky. Podle věty 35.2 proto komplexní derivace existuje. Můžeme ji tedy spočítat limitou přes některou konkrétní podmnožinu, třeba přes reálnou přímku. Obecně v případě existence derivace platí

$$(f(z_0))' = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathbf{i}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0);$$

v případě logaritmu tedy dostáváme

$$(\ln z)' = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

(3) [2] Analogicky s reálnými funkcemi definujeme

$$\operatorname{argsinh} z = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right), \quad \operatorname{argcosh} z = \ln\left(z+\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}\right), \quad \operatorname{argtgh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

(Definice argcosh se může zdát podivná, ale rovnost $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1} = \sqrt{z^2-1}$ obecně pro komplexní odmocninu neplatí.)

$$\arcsin z = -\mathbf{i}\ln\left(\mathbf{i}z+\sqrt{1-z^2}\right), \quad \arccos z = -\mathbf{i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) = -\mathbf{i}\ln\left(z+\mathbf{i}\sqrt{1-z^2}\right),$$
$$\operatorname{arctg} z = \frac{\mathbf{i}}{2}\ln\left(\frac{1-\mathbf{i}z}{1+\mathbf{i}z}\right)$$

(4) Pro $z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$ můžeme definovat $z^\alpha = e^{\alpha\ln z}$; tato definice je jednoznačná. Lepší[3] je definovat obecnou mocninu jako „víceznačnou funkci“, tj. jako množinu (obdobně jako Ln a Arg):

$$z^\alpha = e^{\operatorname{Ln} z} = \{e^{\alpha\ln z+\alpha\,2k\pi\mathbf{i}} \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Mohlo by se zdát, že má množina z^α vždy nekonečně mnoho prvků. Tak tomu ale není, neboť exponenciála je periodická s periodou $2\pi\mathbf{i}$. To má za následek, že pro $\mathbf{Re}(\alpha)\in\mathbb{Z}$ a $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ je z^α definováno jednoznačně. Pro $\mathbf{Re}(\alpha)\in\mathbb{Q}$ a $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ má množina q prvků, kde q je jmenovatel $\mathbf{Re}(\alpha)$ ve zkráceném tvaru. (V komplexních číslech tedy například existuje pět pátých odmocnin.) A pokud je $\mathbf{Re}(\alpha)$ iracionální nebo $\mathbf{Im}(\alpha)\neq 0$, pak je prvků skutečně nekonečně mnoho. Pro $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ se kořeny nacházejí na kružnici, pro $\mathbf{Re}(\alpha) = 0$ na polopřímce a pro $\mathbf{Re}(\alpha)\neq 0 \wedge \mathbf{Im}(\alpha)\neq 0$ jsou umístěny na spirále.

Například

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \{e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}+2k\pi\mathbf{i}\right)} \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \mid k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R};$$
$$x^{\frac{3}{5}} = \{e^{\frac{3}{5}\ln x}e^{\frac{3}{5}\,2k\pi\mathbf{i}} \mid k\in\widehat{5}\};$$
$$x^{\sqrt{2}} = \{e^{\sqrt{2}\ln x}e^{\sqrt{2}\,2k\pi\mathbf{i}} \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Podobný problém s nejednoznačností nastává i u dalších funkcí, k jejichž definici se použil logaritmus, tedy arcsin, argsinh, ...

[2] Této části moc nerozumím a v našem ročníku ji Vrána neprobíral. Mazat se mi ji nechtělo, ale berte ji s ještě větší rezervou než zbytek textu.

[3] Citation needed.

36. Holomorfní funkce

Definice 36.1. Funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme **holomorfní v bodě** x, když je diferencovatelná na nějakém jeho okolí. Funkce se nazývá **holomorfní na množině** M, jestliže je holomorfní v každém jejím bodě.

Poznámka. Funkce sin, cos, exp jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Mocninné řady jsou holomorfní uvnitř kruhu konvergence.

Věta 36.2. Funkce zobrazující do $\mathbb{R}$ a holomorfní na souvislé množině $M \subset \mathbb{C}$ je na této množině konstantní.

Důkaz. Při použití zavedeného značení můžeme psát $f_2 = 0$. Z Cauchyho–Riemannových podmínek plyne, že v každém bodě platí $\partial_x f_1 = 0$ a $\partial_y f_1 = 0$. Víme, že funkce f_1 je diferencovatelná a její derivací je nulové zobrazení. Proto je na množině M konstantní. □

V základních výsledcích komplexní analýzy figurují křivkové integrály komplexních funkcí komplexní proměnné. Než budeme pokračovat, musíme tyto integrály definovat. Nejprve se naučíme integrovat reálnou funkci, která zobrazuje do $\mathbb{C}$.

Definice 36.3. Buď $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Pak definujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b \mathbf{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t,$$

pokud oba integrály na pravé straně existují.

Nyní už můžeme definovat křivkový integrál. I když by bylo možné zavést integrál z velmi obecných funkcí, pro naše účely bude stačit pracovat s funkcemi, které jsou spojité.

Definice 36.4. Buď $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ dráha třídy $\mathcal{C}^1$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkce spojitá na $\langle\varphi\rangle$. Pak klademe

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jestliže je dráha pouze po částech hladká, definujeme integrál jako součet přes všechny části, kde je hladká.

Poznámka. Existuje-li k f primitivní funkce F na $\langle\varphi\rangle$, tj. $\forall z \in \langle\varphi\rangle$ platí $f(z) = F'(z)$, pak

$$\int_\varphi f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Integrál přes uzavřenou křivku by tedy byl nutně nulový.

Příklad. Spočítejme hodnotu integrálu, který hraje v komplexní analýze významnou roli. Nechť φ je jakákoliv kružnice se středem z_0 probíhaná v kladném smyslu konstantní rychlostí, tj. $\varphi(t) = re^{\mathbf{i}t}+z_0$, $t \in [-\pi,\pi]$. Pak

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}}{re^{\mathbf{i}t}} re^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathbf{i}.$$

Všimněme si, že funkce $\frac{1}{z}$, kterou jsme integrovali, „skoro“ má primitivní funkci – logaritmus. Přesto integrál přes uzavřenou křivku není nulový. Logaritmus je totiž nespojitý na přímce P_π. Dokonce není těžké ukázat, že skok mezi hodnotami logaritmu na polorovinách oddělených P_π je roven právě $2\pi\mathbf{i}$.

Definice 36.5. Buď φ po částech hladká uzavřená dráha, nechť $z_0 \notin \langle\varphi\rangle$. **Index bodu z_0 vzhledem k φ** definujeme vztahem

$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}.$$

Index je tedy definován pro každý bod, který neleží na křivce φ. Nevinně vyhlížející integrál nás překvapí svými vlastnostmi: Jeho hodnota je vždy celé číslo! Jeho význam lze vyjádřit geometricky. Udává, kolikrát křivka φ oběhla bod z_0 v kladném smyslu. Dá se tedy například ukázat, že platí

$$\operatorname{int}\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle \mid \operatorname{ind}_\varphi z \neq 0\}, \quad \operatorname{ext}\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle \mid \operatorname{ind}_\varphi z = 0\}.$$

Než budeme pokračovat dál, připomeňme definici Jordanovy dráhy – viz definice 32.4. Nyní, když už máme k dispozici definici indexu bodu, jsme schopni definovat kladnou orientaci. Aby ale tato definice měla nějaký smysl, museli bychom ukázat, že znamená právě to, co si pod ní představujeme, tj. procházení dráhy proti směru hodinových ručiček. To dělat nebudeme. Stejně tak nebudeme dokazovat ani korektnost definice, tedy nezávislost na volbě bodu z_0.

Definice 36.6. Buď φ uzavřená Jordanova dráha, nechť $z_0 \in \operatorname{int}\varphi$. Říkáme, že dráha φ je **orientována kladně**, právě když $\operatorname{ind}_\varphi z_0 > 0$.

Nyní přichází na řadu extrémně silná věta, z níž další výsledky v komplexní analýze vyplývají velmi snadno. Tuto větu ale bohužel dokážeme pouze za značně zesílených předpokladů.

Věta 36.7 (Cauchyho integrální)**.** Buď φ po částech hladká Jordanova dráha a f funkce holomorfní na $\operatorname{int}\varphi$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi}$. Pak

$$\oint_\varphi f = 0.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze za silnějšího předpokladu $f \in \mathcal{C}^1$. Později sice ukážeme, že tento předpoklad splňuje každá holomorfní funkce (ba co víc, každá holomorfní funkce je dokonce třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale v důkazu použijeme právě Cauchyho integrální větu, takže provedeme důkaz kruhem. Dokázat Cauchyho větu v plném znění dá mnohem víc práce a pan tajemník přiznává, že na to nemá čas.

Předpokládáme-li tedy $f \in \mathcal{C}^1$ a označíme-li $\varphi = \varphi_1 + \mathbf{i}\varphi_2$, pak s užitím Greenovy věty získáme:

$$\begin{aligned}\oint_\varphi f(z) &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f_1\varphi_1' - f_2\varphi_2')\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b (f_1\varphi_2' + f_2\varphi_1')\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b (f_1, -f_2)(\varphi_1', \varphi_2')\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b (f_2, f_1)(\varphi_1', \varphi_2')\mathrm{d}t = \int_\varphi \overrightarrow{(f_1, -f_2)} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathbf{i}\int_\varphi \overrightarrow{(f_2, f_1)} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \\ &= \iint_{\operatorname{int}\varphi} \underbrace{\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathbf{i}\iint_{\operatorname{int}\varphi} \underbrace{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

□

Věta 36.8 (princip deformace dráhy)**.** Buďte φ_1, φ_2 stejně orientované po částech hladké Jordanovy dráhy. Nechť $\langle\varphi_1\rangle \subset \operatorname{int}\varphi_2$. Buď dále f holomorfní na $\operatorname{int}\varphi_2 \setminus \overline{\operatorname{int}\varphi_1}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi_2} \setminus \operatorname{int}\varphi_1$. Pak

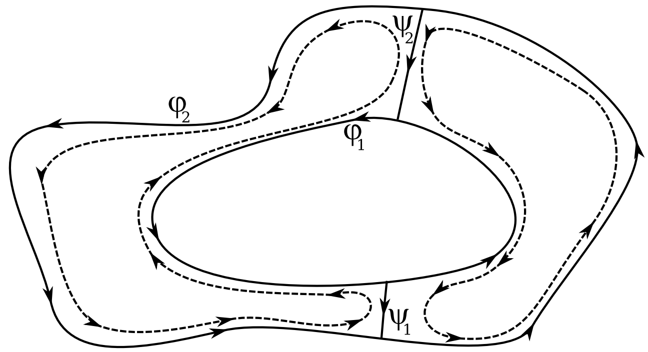
$$\oint_{\varphi_2} f = \oint_{\varphi_1} f.$$

Důkaz. Dráhy φ_1 a φ_2 se spojí pomocí drah ψ_1, ψ_2 mezi nimi, viz obrázek. (Bylo by potřeba zdůvodnit, proč je vždy možné nalézt takové dráhy, které φ_1 a φ_2 neprotnou, ale pouze spojí; intuitivně je to ale jasné. Argumentovat bychom mohli třeba tím, že $\langle\varphi_1\rangle$ a $\langle\varphi_2\rangle$ jsou kompakty, a proto existují body, v nichž je jejich vzdálenost minimální. Vrána to ale po nás stejně nebude chtít.)

Napřed se udělá integrál přes levou část, potom přes pravou. Oba tyto integrály jsou podle Cauchyho integrální věty nulové. Jejich součet je přitom roven rozdílu obou integrálů, které nás zajímají – křivky ψ_1, ψ_2 se projdou tam a zpět, takže se jejich příspěvky odečtou, φ_1 byla integrována proti směru, proto vyjde záporně. Proto opravdu platí

$$\oint_{\varphi_2} f - \oint_{\varphi_1} f = 0.$$

□



OBRÁZEK 2. Princip deformace dráhy

Věta 36.9 (Cauchyho integrální vzorec)**.** Buď φ po částech hladká Jordanova dráha a nechť f je holomorfní na $\operatorname{int}\varphi$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi}$. Pak pro každé $z \in \operatorname{int}\varphi$ platí

$$f(z) = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Důkaz. Nejdříve převedeme uvedený integrál na integrál z téže funkce přes jednodušší křivku – kladně orientovanou kružnici se středem v z. Protože je $\operatorname{int}\varphi$ otevřená množina, existuje takové $r \in \mathbb{R}^+$, že $\psi(t) = z + re^{\mathbf{i}t}$ splňuje $\langle\psi\rangle \in \operatorname{int}\varphi$. S využitím principu deformace dráhy tedy můžeme psát

$$\int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Druhý z integrálů převedeme vytknutím konstanty $f(z)$ na integrál, který známe – dostaneme tedy $f(z) \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{ind}_\varphi(z)$. Věta by proto byla dokázána, kdybychom mohli zdůvodnit, že je první z integrálů nulový.

Integrand splňuje $\lim_{\xi \to z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z)$, lze tedy nalézt okolí, na němž je omezen třeba konstantou $2\,|f'(z)| = M$. BÚNO předpokládejme, že kružnice ψ v tomto okolí leží (v opačném případě bychom použili menší kružnici). Pak platí

$$\left| \int_\psi \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \leq M 2\pi r.$$

Jenže integrál přes všechny kružnice ležící uvnitř $\langle\varphi\rangle$ je stejný. Zmenšováním kružnice proto můžeme ukázat, že je menší než libovolné ε, a tedy nulový. □

Příklad. Počítejme integrál $\int_\varphi \frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

(1) Předpokládejme nejprve $\mathbf{i}, -\mathbf{i} \in \operatorname{ext}\varphi$. Pak $\oint_\varphi = 0$, protože integrujeme holomorfní funkci.

(2) Nyní zkoumejme případ $\mathbf{i} \in \operatorname{int}\varphi$, $-\mathbf{i} \in \operatorname{ext}\varphi$. Potom

$$\oint_\varphi = \frac{1}{2\mathbf{i}} \oint_\varphi \left(\frac{\sin z}{z - \mathbf{i}} - \frac{\sin z}{z + \mathbf{i}} \right) = \pi \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{\sin z}{z - \mathbf{i}} - \frac{1}{2\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{\sin z}{z + \mathbf{i}} = \pi \sin \mathbf{i},$$

protože první integrál vyjadřuje hodnotu $\sin \mathbf{i}$ pomocí Cauchyho integrálního vzorce a druhý je nulový, neboť integrujeme holomorfní funkci.

(3) Ostatní případy by šlo vyřešit podobně.

Věta 36.10. Buď funkce f holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$. Pak pro každé $z \in B$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z_0}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi$$

pro libovolnou Jordanovu dráhu φ takovou, že $\langle\varphi\rangle \subset B$ a $z_0 \in \operatorname{int}\varphi$.

Důkaz. Buď $z \in B(z_0, R)$. Potom existuje φ kladně orientovaná dráha taková, že $z \in \operatorname{int}\varphi$ a zároveň splňující předpoklady věty ($B(z_0, R)$ je otevřená). S využitím znalosti součtu geometrické řady můžeme psát

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \mathrm{d}\xi =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi\right) (z - z_0)^n.$$

Ověříme korektnost záměny sumy a integrálu: platí, že

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}\right| \le M r^n,$$

kde M je kladná konstanta omezující $\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ (ta existuje, protože f je spojité a vzdálenost bodů φ od z_0 je nenulová) a pro $r \in \mathbb{R}$ platí $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \le r < 1\right|$, protože $z \in \operatorname{int}\varphi$. Řada má konvergentní číselnou majorantu, je tedy podle Weierstrassovy věty stejnoměrně konvergentní a záměna je korektní. □

Věta 36.11. Za splnění předpokladů předchozí věty platí:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \operatorname{ind}_\varphi(z_0) \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\xi,$$

n-tou derivaci holomorfní funkce lze tedy vyjádřit jako křivkový integrál.

Důsledek. Funkce, která je na $B(z_0, R)$ holomorfní, je na $B(z_0, R)$ dokonce třídy $\mathcal{C}^\infty$. Také je na tomto kruhu **analytická** – to znamená, že ji lze na okolí každého bodu vyjádřit jako součet mocninné řady.

Chceme-li určit poloměr konvergence mocninné řady, která na nějakém kruhu konverguje k funkci, již známe, stačí spočítat vzdálenost středu od nejbližšího bodu, ve kterém funkce není holomorfní. Naše dřívější metody, jak poloměr určovat, byly – podle slov pana tajemníka – „úplně směšný“.

37. Laurentovy řady

Definice 37.1. Buď $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Potom řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

nazveme **Laurentovou** [Loránovou] **řadou** a její součet definujeme jako

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

v těch bodech, v nichž obě uvedené sumy konvergují. První sumu nazýváme **regulární** a druhou **hlavní částí** Laurentova rozvoje.

Poznámka. První suma je mocninnou řadou a konverguje na nějakém kruhu, řekněme o poloměru R. Druhá suma je „převrácenou mocninnou řadou“ a není těžké si rozmyslet, že konverguje na doplňku nějakého kruhu, řekněme o poloměru r. Pokud je $r > R$, nekonverguje Laurentova řada nikde. V případě, že $r < R$, konverguje na mezikruží $B(z_0, r, R)$, tj. pro všechna z splňující $|z - z_0| < R$ a $|z - z_0| > r$. (Vyšetřit, jak se chová na hranici onoho mezikruží, může být obtížné.)

Věta 37.2 (Laurent)**.** Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

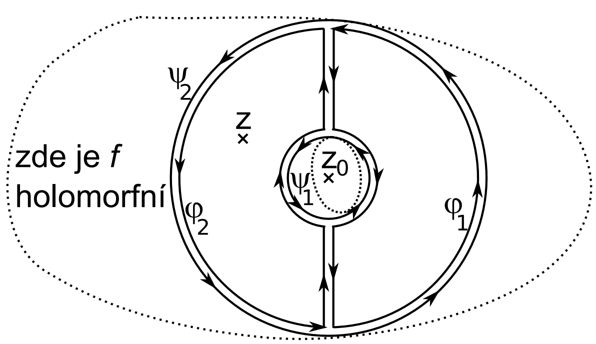
Pak pro každé $z \in P$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{\operatorname{ind}_\vartheta z_0}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\vartheta \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi,$$

pro libovolnou Jordanovu dráhu ϑ takovou, že $\langle\vartheta\rangle \subset P$ a $z_0 \in \operatorname{int}\vartheta$.



Obrázek 3. K důkazu Laurentovy věty

Důkaz. Buď $z \in P$. Zvolme r_1 a r_2 tak, aby $r < r_1 \le |z - z_0| < r_2 < R$, a příslušné kružnice probíhané v kladném smyslu označme ψ_1, ψ_2. Spojme je pomocnými úsečkami a vytvořme tak dráhy φ_1 a φ_2, viz obrázek. Pišme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\varphi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\varphi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\psi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\psi_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}}\right)(z-z_0)^{-n}.$$

V první rovnosti jsme funkční hodnotu v bodě z vyjádřili pomocí Cauchyho integrálního vzorce jako integrál přes dráhu φ_2. K ní přičítáme integrál přes dráhu φ_1, který je nulový, protože funkce je na vnitřku dráhy holomorfní. Druhé rovnítko znamená jen to, že jsme sečtením drah $\varphi_{1,2}$ dostali kružnice $\psi_{1,2}$. Ve třetí rovnosti jsme první integrál rozepsali přesně stejným způsobem jako v důkazu Cauchyho integrální věty a druhý integrál přepsali takto:

$$-\int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{z - \xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \frac{\mathrm{d}\xi}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \int_{\psi_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n \mathrm{d}\xi =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\psi_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n}\,\mathrm{d}\xi.$$

Všimněme si, že obě geometrické řady, jejichž součty jsme využili, opravdu mají kvocient menší než jedna (každá na své kružnici). Záměnu sumy a integrálu lze opět ospravedlnit nalezením majoranty. Zde je vhodné si uvědomit, že počítáme integrál přes kružnici, tedy přes uzavřenou množinu, a následně využít holomorfnosti funkce.

Na závěr je potřeba zdůvodnit, proč lze při výpočtu každého koeficientu a_n využít libovolnou dráhu ϑ, ne jen kružnice ψ_1, resp. ψ_2. To ale hned plyne z principu deformace dráhy, protože žádný z počítaných integrálů už na z nijak nezávisí a integrandy jsou tedy holomorfní na celém mezikruží. Je vhodné si tuto věc uvědomit již na začátku důkazu: požadujeme totiž aby to fungovalo pro každou dráhu splňující předpoklady věty. Proto tuto dráhu můžeme obklopit dvěma kružnicemi (to skutečně lze díky otevřenosti mezikruží) a dráhu na tyhle dvě kružnice zdeformovat. □

Zároveň platí, že Laurentův rozvoj funkce je jednoznačně daný.

Definice 37.3. $P(z_0, R)$ bude značit $P(z_0, 0, R)$.

Definice 37.4. Bod z_0 se nazývá **izolovaným singulárním bodem** funkce f, jestliže f je holomorfní na $P(z_0, R)$ pro nějaké $R \in \mathbb{R}^+$ a v z_0 není.

Definice 37.5. Buď z_0 izolovaný singulární bod funkce f.

(i) Řekneme, že singularita je **odstranitelná**, jestliže v její Laurentově řadě se středem z_0 je $a_n = 0$ pro všechna záporná n.
(ii) Řekneme, že singularita je **p-tého řádu** (pól p-tého stupně), jestliže $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro $n < -p$.
(iii) Řekneme, že singularita je **podstatná**, jestliže pro nekonečně mnoho a_n, $n < 0$ platí, že $a_n \neq 0$.

Definice 37.6. Buď z_0 singulární bod funkce f a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

její Laurentova řada. Pak číslo $a_{-1} = \operatorname{rez}_{z_0} f$ nazýváme **reziduum funkce v bodě** z_0.

Věta 37.7 (reziduová)**.** Nechť f je holomorfní na otevřené množině $G \setminus M$, $M \subset G$ je množina jejích izolovaných singulárních bodů, nechť φ je po částech hladká Jordanova dráha neprocházející žádným singulárním bodem, $\overline{\operatorname{int} \varphi} \subset G$. Pak

$$\oint_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in M \cap \operatorname{int} \varphi} 2\pi \mathbf{i} \operatorname{rez}_a f \operatorname{ind}_{\varphi} a.$$

Důkaz. Předpokládejme, že v $\operatorname{int} \varphi$ leží pouze jeden singulární bod z_0, potom z Laurentovy věty je

$$a_{-1} = \frac{\operatorname{ind}_{\varphi} z_0}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\varphi} f(\xi) \mathrm{d}\xi\,.$$

Pro jeden singulární bod tedy věta platí. Obecné znění věty dokážeme indukcí. Nechť věta platí pro dráhu obsahující ve vnitřku n singulárních bodů a nechť uvnitř dráhy φ leží $n + 1$ singularit. Vnitřek můžeme[4] rozdělit pomocnou dráhou ψ na dvě části, z nichž každá obsahuje alespoň jeden

[4] Kdybychom chtěli být precizní, bylo by potřeba zdůvodnit, že je to opravdu možné. Ale Vrána se na to neptá.

singulární bod. Potom můžeme integrál přes φ roztrhnout na dva integrály, z nichž oba splňují indukční předpoklad. Jejich součet je proto opravdu roven $\sum_{a\in M\cap \operatorname{int}\varphi} 2\pi\mathbf{i}\, \operatorname{rez}_a f\, \operatorname{ind}_\varphi a$. □

Poznámka. Představme si, že chceme spočítat reziduum v bodě z_0, v němž je singularita p-tého řádu. Když funkci f vynásobíme $(z-z_0)^p$, získáme funkci, kterou lze vyjádřit jako mocninnou řadu (pouze v bodě z_0 není definována), přičemž koeficientem před $(z-z_0)^0$ je a_{-p}. Proto platí $a_{-p} = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^p$. Abychom místo a_{-p} spočítali reziduum a_{-1}, musíme součin před provedením limity zderivovat.

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$f(z)(z-z_0)^p = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+p}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}} \left(f(z)(z-z_0)^p\right) = (p-1)! \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}} \big(f(z)(z-z_0)^p\big)$$

Tuto limitu jde dobře vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla.