
Prázdná stránka

Prázdná stránka

Obsah

1	Základní topologické pojmy a vztahy mezi nimi	9
1.1	Elementární charakteristiky funkce více proměnných	9
1.2	Limita funkce více proměnných	12
1.3	Spojitosť funkce více proměnných	25
1.4	Základní topologické věty	27
2	Diferenciální počet	31
2.1	Parciální derivace a jejich alternativy	31
2.2	Základy vektorové analýzy	40
2.3	Totální diferenciál	42
3	Posloupnosti a řady funkcí více proměnných	55
3.1	Posloupnosti funkcí více proměnných	55
3.2	Řady funkcí více proměnných	60
3.3	Mocninné řady více proměnných	64
4	Teorie Taylorových řad a taylorovských rozvoů	67
4.1	Taylorovy a Maclaurinovy řady	67
4.2	Polynomiální aproximace funkcí	69
5	Teorie implicitních funkcí	77
5.1	Funkce zadaná implicitně rovnicí	77
5.2	Funkce zadané implicitně soustavou rovnic	83
6	Regulární transformace parciálních diferenciálních výrazů	95
6.1	Záměna proměnných	95
6.2	Lineární a křivočaré souřadné systémy	106
7	Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic	115
7.1	Parciální diferenciální rovnice druhého řádu	115
7.2	Transformace parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu	117
7.3	Kvaziparciální diferenciální rovnice	121
7.4	Parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro funkci dvou proměnných	123
7.5	Parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	131
7.6	Parciální diferenciální rovnice vyšších řádů	137
8	Extrémy funkce více proměnných	141
8.1	Lokální extrémy	141
8.2	Lokální vázané extrémy	146
8.3	Globální extrémy	150

9	Riemannův integrál	157
9.1	Riemannův integrál přes vícedimenzionální interval	157
9.2	Riemannův integrál přes obecnou množinu	162
9.3	Vlastnosti Riemannova integrálu	163
10	Integrál po křivce	181
10.1	Křivky	181
10.2	Křivkový integrál	185
11	Integrál po ploše	195
11.1	Dvoudimenzionální plochy ve třidimenzionálním prostoru	195
11.2	Plošné integrály	198
11.3	Integrační věty teorie plošných integrací	204
12	Neřešené příklady	207
12.1	Zadání příkladů	207
12.2	Výsledky cvičení	247

PŘEDMLUVA

Toto skriptum pojednává o základních oblastech matematické analýzy funkcí (a vektorových funkcí) více proměnných. Jen v něm provedena systematická výstavba celé teorie (ve formátu definic a vět s důkazy) od počátečních definic, přes analýzu topologických vlastností, diferenciální a integrální počet až k vyšetřování extrémů a provádění záměn proměnných v parciálních diferenciálních výrazech. Vedle studia funkcí zadaných ve standardním, tj. explicitním formátu, je ve skriptech probráno i studium vlastností funkcí, jež jsou zadány implicitně prostřednictvím jedné nebo více generujících rovnic. Z důvodu kompletnosti jsou ve skriptu diskutovány i okrajovější oblasti teorie, jakými jsou např. posloupnosti a řady funkcí více proměnných, taylorovské rozvoje či křivkové a plošné integrace. Samostatnou kapitolou skript je úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic využívající metodiku tzv. kanonických transformací. V závěru skript je nabídnuto značné množství příkladů k samostatnému procvičování aplikací probrané teorie. Formálnější část textu je doplněna o značné množství komentářů, vysvětlení, obrázků i řešených příkladů s cílem usnadnit čtenáři porozumění zkoumané problematice.

Značení

Symbol	Význam
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\mathbf{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{R}^r$	množina uspořádaných r -tic reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbf{R}^\oplus$	$\mathbf{R}^\oplus = \mathbf{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$
$\mathbf{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolná číselná množina
$\mathbf{R}^\star$	$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbf{E}^r$	r -rozměrný euklidovský prostor
$\hat{n}$	$\{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$
$\underline{\hat{n}}$	$\{m \in \mathbf{N}_0 : m \leq n\}$
A, B, C	množiny
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	matice
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	vektorové prostory
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$	operátory
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	soustavy množin
$\mathcal{C}^n(G)$	třída všech funkcí, jež mají na oblasti G spojitě derivace až do řádu n
$\mathcal{C}^\infty(G)$	třída všech funkcí, jež mají na oblasti G spojitě derivace všech řádů
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x)$	n -tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$	první, druhá derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}$	n -tá derivace funkce $f(\varepsilon)$ podle proměnné ε
$\frac{\partial f}{\partial x_k}$	parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ podle proměnné x_k
$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}$	směrová parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ ve směru $\vec{s}$
$d^n f_a(h)$	n -tý totální diferenciál funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $a \in \mathbf{R}$
$d^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$	n -tý totální diferenciál funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_\varepsilon(x)$	okolí bodu x
$\mathcal{U}^\star(x), \mathcal{U}_\varepsilon^\star(x)$	redukované okolí bodu x
$\cup, \cap$	sjednocení a průnik množin
$\subset, \subsetneq$	podmnožina a vlastní podmnožina množiny
Δ	symetrický doplněk množin

Symbol	Význam
$\text{Dom}(f)$	definiční obor funkce $f(\vec{x})$
$\text{Ran}(f)$	obor hodnot funkce $f(\vec{x})$
$f(A)$	obraz množiny A při zobrazení $f(\vec{x})$
$f^{-1}(A)$	vzor množiny A při zobrazení $f(\vec{x})$
$f^{-1}(a)$	vzor jednoprvkové množiny $\{a\}$ při zobrazení $f(\vec{x})$
$\doteq$	přibližně
$\propto$	úměrně
$\sim$	ekvivalence množin či funkcí
$A^\circ, \overline{A}$	vnitřek, resp. uzávěr množiny A
$\text{bd}(A)$	hranice množiny A
$\text{der}(A)$	derivate množiny A
$\vec{b}^\top = (b_1, b_2, \dots, b_r)$	řádkový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)^\top$	sloupcový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b}_k$	k -tý vektor posloupnosti $(\vec{b}_n)_{n=1}^\infty$
$b_{k\ell}$	ℓ -tá složka vektoru $\vec{b}_k$
$\mathbb{A}_{ij}$	prvek matice $\mathbb{A}$ v i -tém řádku a j -tém sloupci
$\mathbb{A}_{\bullet j}$	j -tý sloupec matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}_{i\bullet}$	i -tý řádek matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\top$	matice transponovaná k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^*$	komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\# = (\mathbb{A}^*)^\top$	hermitovsky sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{I}$	jednotková (Croneckerova) matice
δ_{ij}	prvek Croneckerovy matice
$\det(\mathbb{A})$	determinant matice $\mathbb{A}$
$\text{h}(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r)$	diagonální matice s prvky $x_1, x_2, \dots, x_r$ na hlavní diagonále
$\mathcal{E}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$	standardní báze v $\mathbf{R}^r$, tj. $e_{ij} = \delta_{ij}$
a^*	komplexně sdružené číslo k číslu a
$[x]$	dolní celá část čísla x
$\lceil x \rceil$	horní celá část čísla x
$\mathcal{O}$	symbol vymezený pro obor konvergence
$\mathcal{R}$	symbol vymezený pro poloměr konvergence
$\mathcal{C}$	symbol vymezený pro libovolnou reálnou konstantu (zejména integrační)
$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}; \beta)$	funkce proměnné $\vec{x}$ s parametrem β
kartézský součin množin A a B	$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Symbol	Význam
$\operatorname{sgn}(x)$	funkce signum
$\Theta(\vec{x})$	vícerozměrná Heavisideova funkce
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r]_\lambda$	lineární obal souboru vektorů
$\deg(\wp)$	stupeň polynomu $\wp$
$q(\vec{x}) \succ 0$	pozitivní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \succeq 0$	pozitivní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \prec 0$	negativní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \preceq 0$	negativní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \nprec 0$	indefinitnost kvadratické formy
$\operatorname{card}(X)$	kardinální číslo, resp. mohutnost množiny
$\aleph_0$	mohutnost množiny přirozených čísel
$\aleph_1$	mohutnost množiny reálných čísel
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{M} f(\vec{x})$	bodová konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{M} f(\vec{x})$	stejněměrná konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$	konvergence podle normy
$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x})$	limita vzhledem ke konvergenci podle normy
$\ \vec{x}\ $	norma vektoru $\vec{x}$
$\langle \vec{x} \vec{y} \rangle$	skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$
$\mathcal{M}_\mu$, resp. $\mathcal{M}_\lambda$	abstraktní, resp. klasická Lebesgueova σ -algebra
$\mu_r(X)$, resp. $\lambda_r(X)$	abstraktní, resp. klasická Lebesgueova r -dimenzionální míra
Λ_μ	třída všech μ -měřitelných funkcí
$\mathcal{L}^*(E, \mu)$	třída všech funkcí, jež mají integrál $(\mathcal{L}) \int_E g(x) d\mu(x)$
$\mathcal{L}(E, \mu)$	třída všech lebesgueovsky integrabilních funkcí přes množinu E při míře $\mu(x)$
$\mathcal{Z}_\mu$	základní systém funkcí
$\mathcal{Z}_\mu^+$	rozšířený systém funkcí
$\mathcal{L}_2(G)$	třída kvadraticky integrabilních funkcí
$\mathcal{L}_p(G)$	třída funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p d\vec{x}$ konečný
$\mathbb{L}(G)$	třída faktorových funkcí, jež jsou lebesgueovsky integrovatelné na množině G
$\mathbb{L}_2(G)$	třída kvadraticky integrabilních faktorových funkcí
$\mathbb{L}_p(G)$	třída faktorových funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p d\vec{x}$ konečný
$\chi_G(\vec{x})$	charakteristická funkce množiny $G \subset \mathbb{E}^r$
$f^\ominus(x)$	inverzní funkce
$\vec{F}^\ominus(\vec{x})$	inverzní zobrazení
$\operatorname{supp}(f)$	nosič (support) funkce $f(\vec{x})$

Kapitola 1

Základní topologické pojmy a vztahy mezi nimi

Podobně jako je tomu u funkce jedné proměnné, budou také v úvodních partiích teorie více proměnných diskutovány základní topologické pojmy (limita, spojitost, resp. jejich alternativy) a vzájemné vazby mezi nimi. Přednosti spojitých funkcí budou poté demonstrovány na sérii tzv. základních topologických vět, které diskutují přenos jistých vlastností množin z obrazu na vzor, resp. naopak.

1.1 Elementární charakteristiky funkce více proměnných

Na úvod kapitoly bude nutné definovat ústřední pojmy, se kterými budeme operovat prakticky v celém skriptu.

1.1.1 Úmluva a komentář

V celé kapitole je symbol r vymezen přirozenému číslu většímu nebo rovnému dvěma. Mnohá z vyslovených tvrzení ale zůstávají v platnosti i pro variantu, kdy $r = 1$. Doporučujeme čtenáři, aby se nad tímto zobecněním samostatně zamýšlel. Detekce odlišností mezi funkcemi jedné a více proměnných jsou jedním z klíčových úkonů vedoucích k pochopení celé problematiky funkce více proměnných.

1.1.2 Úmluva

Symbolem $\mathbf{E}^r$ budeme rozumět prostor $\mathbf{R}^r$ uspořádaných r -tic reálných čísel se standardním skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_s := \sum_{i=1}^r x_i y_i,$$

euklidovskou normou $\|\vec{x}\|_e := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle_s} = \sqrt{\sum_{i=1}^r x_i^2}$ a euklidovskou metrikou $\varrho_e(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Prostor $\mathbf{E}^r = \{\mathbf{R}^r, \langle \cdot | \cdot \rangle_s, \|\cdot\|_e, \varrho_e(\cdot, \cdot)\}$, který se nazývá *euklidovským prostorem*, lze tedy považovat za prostor metrický, normovaný i pre-Hilbertův. Navíc se zjevně jedná i o tzv. *Hilbertův prostor*, neboť je úplný vzhledem k metrice generované popsáním (tedy standardním) skalárním součinem. Nebude-li explicitně uvedeno jinak, budeme vždy uvažovat skalární součin jako standardní a normu, resp. metriku jako euklidovské.

1.1.3 Komentář

Věty 6.3.5 a 6.6.10 ve skriptech [7] nám umožňují některá z následujících tvrzení přeformulovat pro obecnější metrické prostory $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s obecnou metrikou ϱ (jež je ovšem generována nějakou normou). Navíc nám platnost těchto poznámek umožňuje provádět některé důkazy vět užitím jednodušších metrik, než je sama metrika euklidovská. Víme totiž, že ekvivalence metrik v $\mathbf{R}^r$ z poznámky 6.4.24 ve skriptech [7] automaticky přenáší jistá (samozřejmě, že ne všechna) tvrzení o metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho_1\}$ na metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho_2\}$.

1.1.4 Definice

Nechť jsou dána čísla $x_k, y_k \in \mathbf{R}^*$ tak, že $-\infty \leq x_k < y_k \leq +\infty$ pro $k \in \hat{r}$. Množinu $I = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \times \cdots \times (x_r, y_r)$ nazýváme *otevřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$. Pro úspornost zápisů budeme také zapisovat $I = \times_{k=1}^r (x_k, y_k)$.

1.1.5 Definice

Nechť jsou dána čísla $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ tak, že $-\infty < x_k < y_k < +\infty$ pro $k \in \hat{r}$. Množinu $J = \langle x_1, y_1 \rangle \times \langle x_2, y_2 \rangle \times \cdots \times \langle x_r, y_r \rangle$ nazýváme *uzavřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$. Množinu $H = \langle x_1, y_1 \rangle \times \langle x_2, y_2 \rangle \times \cdots \times \langle x_r, y_r \rangle$ nazýváme *polouzavřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$. Pro úspornost zápisů budeme také zapisovat $J = \times_{k=1}^r \langle x_k, y_k \rangle$, resp. $H = \times_{k=1}^r \langle x_k, y_k \rangle$.

1.1.6 Definice

Množinu $M \subset \mathbf{E}^r$ nazveme *zvrhlým intervalem* v $\mathbf{E}^r$, existuje-li uzavřený interval $J \in \mathbf{E}^r$ tak, že $M^\circ = J^\circ$, $\overline{M} = J$ a $J^\circ \subsetneq M \subsetneq J$.

1.1.7 Příklad

Ukázkou zvrhlého intervalu je například množina $M = (0, 2)^{2\cup}((0, 2) \cap \mathbf{Q}) \times \{2\}$, kde symbolika $(a, b)^r$ zjednodušuje zápis kartézského součinu $\times_{k=1}^r (a, b)$.

1.1.8 Komentář

Na tomto místě připomínáme (pro úplnost) některé definice z předešlých partií matematické analýzy. Řekneme, že množina $G \subset \mathbf{E}^r$ je *oblastí* v metrickém prostoru $\mathbf{E}^r$, je-li v $\mathbf{E}^r$ otevřená a souvislá. Uzávěr oblasti pak nazýváme *uzavřenou oblastí*. Řekneme, že množina K je *kompaktní* v metrickém prostoru $\mathbf{E}^r$, jestliže z každé posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ prvků $\vec{x}_n \in K$ lze vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v K . Navíc také (podle věty 6.7.28 ze skript [7]) v případě Hilbertova prostoru platí, že množina je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená. Řekneme, že množina M je *souvislá* v metrickém prostoru $\{E, \rho\}$, jestliže neexistují žádné dvě neprázdné oddělené množiny $M_1, M_2 \subset E$ takové, že $M_1 \cup M_2 = M$.

1.1.9 Definice

Zobrazení $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, které prvku $\vec{x}$ z r -rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}^r$ přiřazuje nejvýše jedno reálné číslo $f(\vec{x})$, nazýváme *funkcí r proměnných*.

1.1.10 Komentář

Symbol $f(\vec{x})$ tedy značí buď funkci r proměnných (chápanou jako jediný objekt) nebo její funkční hodnotu ve specifickém bodě $\vec{x}$. Konkrétní interpretaci je nutno stanovit podle kontextu. V některých zdrojích se pro funkci užívá pouze symbolu f , ale my se v těchto skriptech přidržíme varianty $f(\vec{x})$.

1.1.11 Definice

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, množiny $A \subset \mathbf{E}^r$, $B \subset \mathbf{R}$ a číslo $b \in \mathbf{R}$. Pak definujeme

$$\text{Dom}(f) := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : f(\vec{x}) \in \mathbf{R}\};$$

$$f(A) := \{y \in \mathbf{R} : (\exists \vec{x} \in A) : y = f(\vec{x})\};$$

$$f^{-1}(B) := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : f(\vec{x}) \in B\};$$

$$\text{Ran}(f) := f(\text{Dom}(f));$$

$$f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$$

a nazýváme po řadě *definičním oborem* funkce $f(\vec{x})$, resp. *obrazem množiny* A při zobrazení $f(\vec{x})$, resp. *vzorem množiny* B při zobrazení $f(\vec{x})$, resp. *oborem hodnot* funkce $f(\vec{x})$, resp. *vzorem prvku* b při zobrazení $f(\vec{x})$.

1.1.12 Komentář

Poznámka ke značení: Zkratky Dom, resp. Ran jsou odvozeny z anglických ekvivalentů *domain*, *range*. Také dodáváme, že speciálně pro $A \subset \text{Dom}(f)$ lze pro obraz množiny A psát $f(A) = \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\}$.

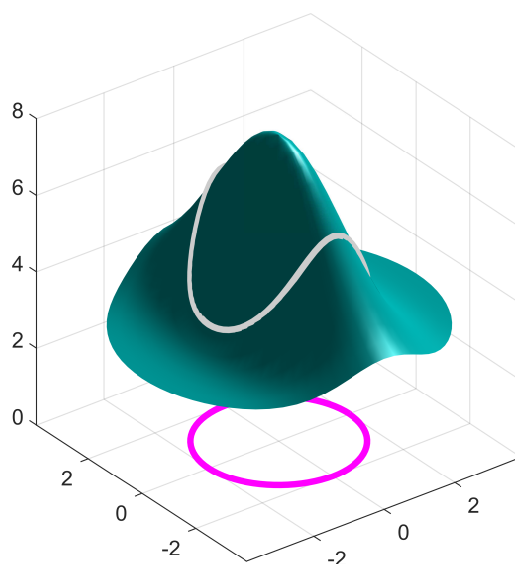
1.1.13 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Množinu

$$\Gamma(f) := \{(x_1, x_2, \dots, x_r, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(\vec{x})\} \quad (1.1)$$

budeme nazývat *grafem funkce* $f(\vec{x})$. Často se omezíme na $M \subset \text{Dom}(f)$, pak $\Gamma_M(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_r, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in M \wedge y = f(\vec{x})\}$ je graf funkce $f(\vec{x})$ na M .

1.1.14 Příklad



Obrázek 1.1

Graf funkce $f(x, y) = 3 + 5e^{-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ na množině M a její restrikce (šedá křivka) na kružnici $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ (fialová křivka).

Pro ilustraci zde vykreslujeme graf funkce

$$f(x, y) = 3 + 5e^{-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$ a připomínáme, že graf $\Gamma_M(f)$ funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je jakousi zobecněnou nadplochou v prostoru $\mathbf{E}^{r+1}$. Kromě samotného grafu zde můžeme upozornit také na jistou zajímavost hodnou zapamatování. Označíme-li totiž

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \right\},$$

dostáváme $f(A) = \langle 3 + 5e^{-1}, 8 \rangle$. Zajímavé ovšem je, že pro $B = \langle 3 + 5e^{-1}, 8 \rangle$ vychází

$$f^{-1}(B) = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\},$$

a tedy $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

1.1.15 Definice

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkce r proměnných a $\text{Dom}(f)$ její definiční obor. Nechť $A \subset \text{Dom}(f)$. *Restrikcí funkce $f(\vec{x})$ na množinu A budeme rozumět funkci $f_A(\vec{x}) : A \mapsto \mathbf{R}$ definovanou na $\text{Dom}(f_A) = A$ předpisem $f_A(\vec{x}) := f(\vec{x})$.*

1.1.16 Komentář

Restrikcí funkce de facto rozumíme zúžení definičního oboru funkce $f(\vec{x})$ na množinu A . Z našeho hlediska bude nejzajímavějším příkladem restrikce omezení definičního oboru funkce $f(\vec{x})$ na jednorozměrnou množinu. Konkrétně: je-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$, pak funkce

$$f(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_r)$$

představuje restrikci funkce $f(\vec{x})$ na jednorozměrnou množinu $A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_r) \in \mathcal{U}(\vec{a})\}$. Viditelně také vždy platí následující vztah mezi grafy obou funkcí: $\Gamma(f_A) \subset \Gamma(f)$.

1.1.17 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *omezená* na množině $M \subset \mathbf{E}^r$, je-li množina $f(M)$ omezená, tj. existuje-li číslo $K > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in M$ platí $|f(\vec{x})| < K$.

1.1.18 Definice

Nechť je dáno s funkcí $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ s definičními obory $H_k := \text{Dom}(f_k) \subset \mathbf{E}^r$. Označme $H = \bigcap_{k=1}^s H_k$. Nechť je dána funkce $g(\vec{y}) : \mathbf{E}^s \mapsto \mathbf{R}$ s definičním oborem $G := \text{Dom}(g) \subset \mathbf{E}^s$. Nechť je množina $B := \vec{f}^{-1}(G) \cap H$ neprázdná. *Složenou funkcí $(g \circ \vec{f})(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ rozumíme zobrazení, které prvku $\vec{x} \in B$ přiřazuje funkční hodnotu $(g \circ \vec{f})(\vec{x})$ danou předpisem $(g \circ \vec{f})(\vec{x}) := g(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}))$.*

1.2 Limita funkce více proměnných

V této sekci představíme zavedení pojmu limity pro funkci více proměnných a také jisté zobecněné alternativy k pojmům limita zleva, resp. zprava, jež byly užívány v teorii funkce jedné proměnné.

1.2.1 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém redukováném okolí $\mathcal{U}^\star(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ (*vlastní*) *limitu* rovnou číslu $c \in \mathbf{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$. Zapisujeme

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c.$$

Uvedený typ limity se občasné označuje jako *limita bez přívlastku*.

1.2.2 Komentář

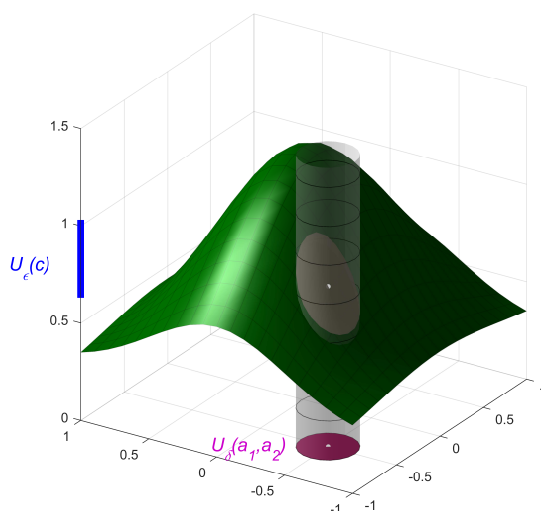
K demonstraci definice limity funkce více proměnných poslouží nejlépe názorný obrázek. Uvažme funkci

$$f(x_1, x_2) = \frac{7}{20} + e^{-x_1^2 - 2x_2^2}$$

dvou proměnných a bod $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Na obrázku níže klademe $\vec{a} = (-1/2, -1/2)$. Je zjevné, že příslušnou hodnotou limity je

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(x_1, x_2) = \frac{7}{20} + e^{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{7}{20} + e^{-\frac{3}{4}} \doteq 0,8224 =: c.$$

To plyne z faktu, že zkoumaná funkce je spojitá, a to dokonce všude v $\mathbb{E}^2$. Podle definice tedy ke každému okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(c)$ (na obrázku vyznačenému modrou svislou čarou) existuje redukované δ -okolí $\mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ (na obrázku vyznačené fialově) tak, že pro jakékoli $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ padne funkční hodnota $f(\vec{x})$ právě do $\mathcal{U}_\varepsilon(c)$. Pro úplnost dodáváme, že šedá oblast vyznačená na zelené ploše grafu $\Gamma(f)$ funkce $f(\vec{x})$ představuje graf restrikce funkce $f|_{\mathcal{U}_\delta(\vec{a})}$.



Obrázek 1.2

K demonstraci pojmu limita funkce více proměnných.

1.2.3 Komentář

Četné užívanými pojmy v teorii funkcí jedné proměnné byly limita zleva, resp. zprava. S ohledem na skutečnost, že definiční obory diskutované v těchto skriptech jsou vícerozměrné, je možností, jak se blížit do vybraného bodu $\vec{a}$, podstatně víc. V následující definici tedy vyslovíme zajímavé zobecnění obou výše uvedených pojmů.

1.2.4 Definice

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ je definována na množině $M \setminus \{\vec{a}\}$, kde $M \subset \mathbb{E}^r$ a $\vec{a} \in \text{der}(M)$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ (vlastní) limitu vzhledem k množině M rovnou číslu $c \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ platí $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$. Zapisujeme

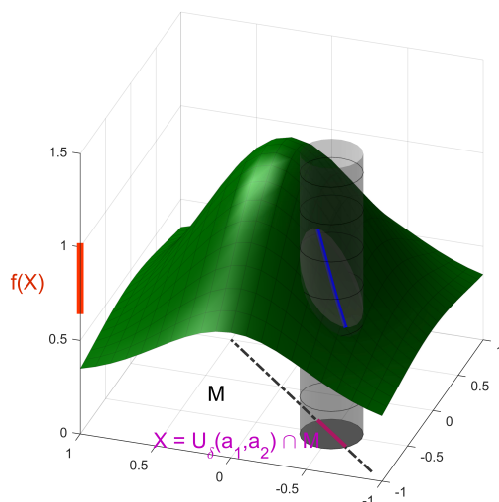
$$\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c.$$

1.2.5 Komentář

To, že je bod $\vec{a}$ hromadným bodem množiny M , mimo jiné znamená, že M je nutně nekonečná, neboť v každém redukovaném okolí bodu $\vec{a}$ musí ležet alespoň jeden další bod množiny M .

1.2.6 Komentář

Podobně jako v poznámce 1.2.2 uijeme k vysvětlení pojmu limita funkce více proměnných vzhledem k množině obrázek.



Obrázek 1.3

K demonstraci pojmu limita funkce více proměnných vzhledem k množině.

Uvažujeme stejnou funkci i bod jako v poznámce 1.2.2. Za množinu M , vzhledem k níž budeme limitu vyšetřovat, položíme přímku

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_2 = x_1\}$$

(černá přerušovaná čára na obrázku). Označíme X průnik δ -okolí $\mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ a množiny M (na obrázku je množina X vyznačena růžově). Graf restrikce funkce f_X na množinu X je v obrázku vyznačen modrou křivkou ležící na grafu $\Gamma(f)$. Zkoumáme-li limitu funkce $f(x_1, x_2)$ vzhledem k množině M , vyšetřujeme de facto pouze chování funkce $f(x_1, x_2)$ na definičním oboru X . Pak pro každé okolí $\mathcal{U}_\epsilon(c)$ bodu c ležící v obraze $f(X)$ množiny X existuje $\delta > 0$ tak, že pro jakékoliv $\vec{x}$ z množiny $X = \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ leží příslušná hodnota právě v $\mathcal{U}_\epsilon(c)$.

1.2.7 Věta

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{a} \in \mathbb{E}^r$ nejvýše jednu limitu bez přívlastku, resp. nejvýše jednu limitu vzhledem k množině.

Důkaz:

- nechť $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c_1$ a $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c_2$
- pokud pro spor předpokládáme, že $c_1 \neq c_2$, existuje jistě $\epsilon > 0$ tak, že

$$\mathcal{U}_\epsilon(c_1) \cap \mathcal{U}_\epsilon(c_2) = \emptyset \quad (1.2)$$

- pro toto ϵ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_1}^*(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x}) - c_1| < \epsilon$, což je ekvivalentní zápisu $f(\vec{x}) \in \mathcal{U}_\epsilon(c_1)$
- pro ono zmiňované ϵ existuje ale také $\delta_2 > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_2}^*(\vec{a})$ platí $f(\vec{x}) \in \mathcal{U}_\epsilon(c_2)$
- pro $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tedy existuje $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{U}_\epsilon(c_1) \cap \mathcal{U}_\epsilon(c_2)$
- našli jsme tudíž prvek průniku $\mathcal{U}_\epsilon(c_1) \cap \mathcal{U}_\epsilon(c_2)$, přestože víme, že platí disjunkce (1.2), což završuje očekávaný spor
- druhá verze věty se dokazuje obdobně

1.2.8 Definice

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je definována na jistém redukováném okolí $\mathcal{U}^\star(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ *nevlastní limitu* rovnou ∞ , resp. $-\infty$, jestliže pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a})$ platí $f(\vec{x}) > K$, resp. $f(\vec{x}) < -K$. Zapisujeme

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \infty, \text{ resp. } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = -\infty.$$

1.2.9 Definice

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je definována na množině $M \setminus \{\vec{a}\}$, kde $M \subset \mathbf{E}^r$ a $\vec{a} \in \text{der}(M)$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ *nevlastní limitu vzhledem k množině M* rovnou ∞ , resp. $-\infty$, jestliže pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap M$ platí $f(\vec{x}) > K$, resp. $f(\vec{x}) < -K$. Zapisujeme

$$\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \infty, \text{ resp. } \lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = -\infty.$$

1.2.10 Věta – o dědičnosti limity

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkce definovaná na množině $M \setminus \{\vec{a}\}$, kde $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť $N \subset M$ a $\vec{a} \in \text{der}(N)$. Existuje-li v bodě $\vec{a}$ vlastní, resp. nevlastní limita funkce $f(\vec{x})$ vzhledem k množině M , pak také existuje vlastní, resp. nevlastní limita funkce $f(\vec{x})$ vzhledem k množině N a platí

$$\lim_{\vec{x} \in N, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}).$$

Důkaz:

- jelikož $\vec{a} \in \text{der}(N)$ a také $N \subset M$, platí zřejmě vztah $\vec{a} \in \text{der}(M)$
- Příklad vlastní limity:
 - vezměme $\varepsilon > 0$
 - předpokladem je, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap M$ platí $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$, kde $c := \lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$
 - jelikož $\mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap N$ je podmnožinou $\mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap M$, plyne odsud, že pro výše zvolené ε existuje $\delta > 0$ (ono zmíněné) tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap N$ platí $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$
 - tím je dokázáno tvrzení
- Příklad nevlastní limity:
 - důkaz provedeme pro nevlastní limitu ∞ , pro případ $-\infty$ je důkaz analogický
 - zvolme $K > 0$
 - předpokladem je, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap M$ platí $f(\vec{x}) > K$
 - jelikož stále $\mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap N$ je podmnožinou $\mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap M$, plyne odsud, že pro výše zvolené K existuje $\delta > 0$ (ono zmiňované) tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^\star(\vec{a}) \cap N$ platí $f(\vec{x}) > K$
 - tím je důkaz zkompletován

1.2.11 Důsledek

Existuje-li limita funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a je-li rovna číslu c , pak pro libovolnou množinu $M \subset \mathbf{E}^r$, pro kterou $\vec{a} \in \text{der}(M)$, platí $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$.

1.2.12 Důsledek

Má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ nevlastní limitu ∞ , resp. $-\infty$, pak pro libovolnou množinu $M \subset \mathbf{E}^r$, pro kterou $\vec{a} \in \text{der}(M)$, platí $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \infty$, resp. $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = -\infty$.

1.2.13 Komentář

Věta 1.2.10 se svými důsledky se hojně užívá při vyvracení existence limity funkce $f(\vec{x})$ v daném bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Pokud jsou totiž nalezeny dvě množiny M, N , pro které je $\vec{a}$ hromadným bodem, a pokud platí, že $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) \neq \lim_{\vec{x} \in N, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$, pak limita bez přívlastku existovat nemůže. Ukážeme si v následujícím příkladě, jakým způsobem lze tuto metodu aplikovat v praxi.

1.2.14 Příklad

Ukažme, že reálná funkce

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

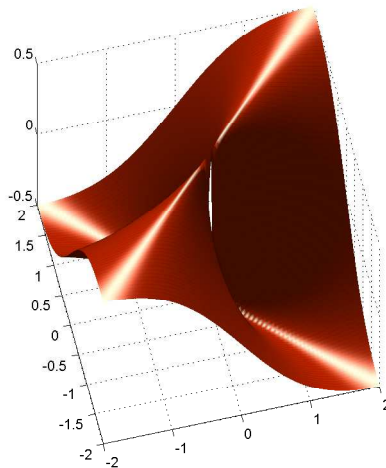
s definičním oborem $\mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ nemá v bodě $\vec{0} = (0, 0)$ limitu. Pro $k \in \mathbf{R}$ definujme množiny $M_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = kx\}$. Tyto množiny tedy představují přímky v rovině $\mathbf{R}^2$ procházející bodem $\vec{0}$. Funkce $f(x, y)$ se na množinách $M_k \setminus \{\vec{0}\}$ redukuje na konstantní funkce

$$f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Tedy jistě

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in M_k} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Protože pro různá k (tj. pro různé přímky procházející počátkem) jsou tyto limity různé, nemá funkce $f(x, y)$ podle věty 1.2.10 v bodě $\vec{0} = (0, 0)$ limitu. Pro ilustraci zde vykreslujeme graf studované funkce.



Obrázek 1.4
Graf funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

1.2.15 Věta

Výrok $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$ je ekvivalentní výroku $\lim_{\|\vec{x} - \vec{a}\| \rightarrow 0} f(\vec{x}) = c$, jenž chápeme takto:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| \in \mathcal{U}_\delta^*(0) \Rightarrow |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- kvantifikátorová podoba prvního z výroků je $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \Rightarrow |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$;
- kvantifikátorová podoba druhého výroku je uvedena ve znění věty
- přitom ale platí (při aplikaci axiomů metriky a definice metriky indukované normou) sada ekvivalencí $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \Leftrightarrow 0 < \varrho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta \Leftrightarrow 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$
- proto jsou uvedené tvrzení ekvivalentní

1.2.16 Komentář

Nabízí se nyní otázka, zda nelze hledat limity funkce více proměnných za pomoci pravidel pro limity funkce jedné proměnné. Jak budeme ilustrovat v následujících větách, za jistých předpokladů to možné bude. Nejprve to ukážeme pro funkci dvou proměnných, kde je důkaz nejpřehlednější.

1.2.17 Věta – o vztahu dvojrozměrné limity a limit parciálních

Nechť je dána funkce $f(x_1, x_2) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a existuje $\mathcal{U}^*(a_1, a_2) \subset \text{Dom}(f)$. Nechť $\Delta > 0$. Označme

$$A = (a_1 - \Delta, a_1 + \Delta), \quad B = (a_2 - \Delta, a_2 + \Delta).$$

Nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x_1, x_2) = c. \quad (1.3)$$

Nechť pro každé $x_1 \in A$ existuje

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1). \quad (1.4)$$

Potom existuje limita $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1)$ a platí $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1) = c$.

Důkaz:

- nechť je pevně zvoleno $\varepsilon > 0$
- z předpokladu existence limity (1.3) tedy jistě existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ platí nerovnost

$$|f(x_1, x_2) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- díky $|x_1 - a_1| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ a $|x_2 - a_2| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, potom $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$, protože $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \delta^2$
- tedy platí pro všechna (x_1, x_2) taková, že $0 < |x_1 - a_1| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ a $0 < |x_2 - a_2| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, nerovnost

$$|f(x_1, x_2) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- nechť $\eta := \min\{\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \Delta\}$
- zvolme nyní x_1 takové, že $0 < |x_1 - a_1| < \eta$
- potom podle právě dokázaného platí implikace $0 < |x_2 - a_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1, x_2) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$
- limitním přechodem $x_2 \rightarrow a_2$ pak získáme nerovnost $|\varphi(x_1) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
- pro libovolné x_1 takové, že $0 < |x_1 - a_1| < \eta$, tudíž platí, že $|\varphi(x_1) - c| < \varepsilon$
- platí tedy $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1) = c$

1.2.18 Důsledek

Nechť je dána funkce $f(x_1, x_2) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ a existuje $\mathcal{U}^*(a_1, a_2) \subset \text{Dom}(f)$. Nechť $\Delta > 0$. Označme

$$A = (a_1 - \Delta, a_1 + \Delta), \quad B = (a_2 - \Delta, a_2 + \Delta).$$

Nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x_1, x_2) = c.$$

Nechť pro každé $x_2 \in B$ existuje

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2) = \psi(x_2). \quad (1.5)$$

Potom existuje limita $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \psi(x_2)$ a platí $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \psi(x_2) = c$.

1.2.19 Komentář

Uvedené dvě věty tedy diskutují vztah mezi "dvojměrnou limitou" a tzv. parciálními limitami. Existuje-li totiž dvojměrná limita (1.3) i vnitřní limity (1.4) a (1.5), je dvojměrná limita rovna číslu

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \left(\lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) \right) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \left(\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2) \right).$$

Takové tvrzení lze jistě zobecnit i pro funkce více než dvou proměnných. To bude námětem následující definice a věty.

1.2.20 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ existuje $\mathcal{U}^*(\vec{a}) \subset \text{Dom}(f)$. Libovolnou permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ čísel z množiny $\hat{r}$ budeme (pro účely této definice) nazývat *kódem parciální limity*. Číslo

$$\lim_{x_{k_1} \rightarrow a_{k_1}} \left(\lim_{x_{k_2} \rightarrow a_{k_2}} \dots \left(\lim_{x_{k_r} \rightarrow a_{k_r}} f(\vec{x}) \right) \right),$$

které bylo vypočteno postupnou aplikací r jednorozměrných limit, budeme nazývat (pokud existuje) *parciální limitou* funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a}$ asociovanou s kódem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$.

1.2.21 Věta – o parciálních limitách

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkce, $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a existuje vlastní limita $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$. Nechť $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ je libovolný kód. Potom platí

$$\lim_{x_{k_1} \rightarrow a_{k_1}} \left(\lim_{x_{k_2} \rightarrow a_{k_2}} \dots \left(\lim_{x_{k_r} \rightarrow a_{k_r}} f(\vec{x}) \right) \right) = c$$

za předpokladu, že je výraz na levé straně definován.

Důkaz:

- je proveden opakovanou aplikací věty 1.2.17

1.2.22 Komentář

Předcházející věta vlastně říká, že existují-li všechny parciální limity i limita bez přívlastku, pak hodnoty parciálních limit nezávisí na jejich kódu. Existují-li naopak dva různé kódy, vzhledem k nimž jsou parciální limity rozdílné, pak limita bez přívlastku existovat nemůže. Věta 1.2.21 má tudíž dvě základní využití. Jednak detekuje možnou hodnotu limity v daném bodě a jednak také může podobně jako věta 1.2.10 sloužit k vyvrácení existence limity. Druhý z bodů demonstrováme na následujícím jednoduchém příkladě.

1.2.23 Příklad

Pomocí věty 1.2.21 ukažme, že limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$$

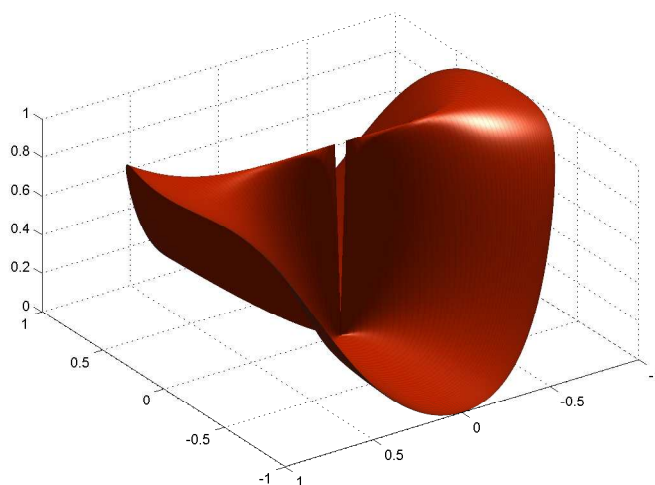
neexistuje. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} = 0,$$

kdežto

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} = 1.$$

Podle uvedené věty tedy vyšetřovaná limita neexistuje, neboť hodnoty parciálních limit jsou závislé na kódech. I zde bude jistě účelné nahlédnout do průběhu funkce $f(x, y)$.



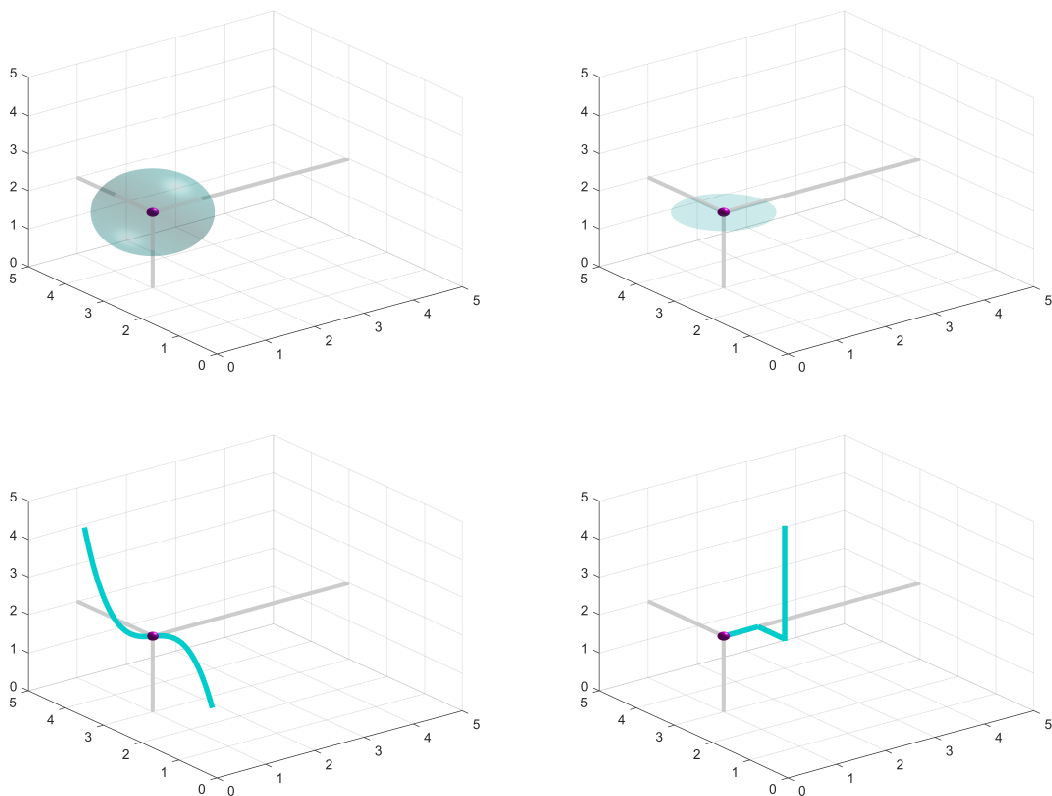
Obrázek 1.5

Graf funkce $f(x, y) = y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$.

Povšimněme si, že blížíme-li se k bodu $(0,0)$ podle kódu $(1,2)$, je parciální limitou nula, kdežto blížíme-li se k nule podle kódu $(2,1)$, je parciální limitou jednička.

1.2.24 Komentář

V této fázi úvodních úvah o topologii funkce více proměnných je namísto shrnout možné přístupy k limitování. Pro odlišení tří základních přístupů (limita bez přívlastku/limita vzhledem k množině/parciální limita) bude účelné demonstrovat odlišnosti těchto přístupů na obrázku.



Obrázek 1.6

Na prvním obrázku je symbolicky naznačena konstrukce limity bez přívlastku, kdy se do bodu $\vec{a} = (1, 3, 2)$ blížíme "ze všech směrů," tj. zmenšováním poloměru euklidovského okolí bodu $\vec{a}$. Druhý a třetí obrázek demonstrují přístup při vyčíslování limity vzhledem k množině. V prvním případě (obrázek vpravo nahoře) jde o limitu vzhledem ke kruhu ležícímu v rovině $z = 2$, pro nějž je bod $\vec{a}$ středem. Obrázek vlevo dole demonstruje limitu vzhledem k obecné křivce ve třídímním prostoru, na níž bod $\vec{a}$ leží (jako její hromadný bod). Poslední obrázek symbolicky nastiňuje způsob, jakým je vypočítávána limita parciální.

1.2.25 Komentář

Zajímavou otázkou, jež se dotýká existence limity funkce více proměnných, je otázka konvergence číselné posloupnosti funkčních hodnot $(f(\vec{x}_n))_{n=1}^{\infty}$, kde $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z definičního oboru $\text{Dom}(f)$ funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$. Přitom nás budou zajímat pouze takové posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, jež konvergují k bodu $\vec{a}$, ale zároveň jej neprotínají (v bodě $\vec{a}$ totiž funkce $f(\vec{x})$ nemusí být obecně definována). Intuitivně lze očekávat, že bude-li mít funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ limitu rovnou $c \in \mathbb{R}$, pak každá taková posloupnost $(f(\vec{x}_n))_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{a} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) : \vec{x}_n \neq \vec{a},$$

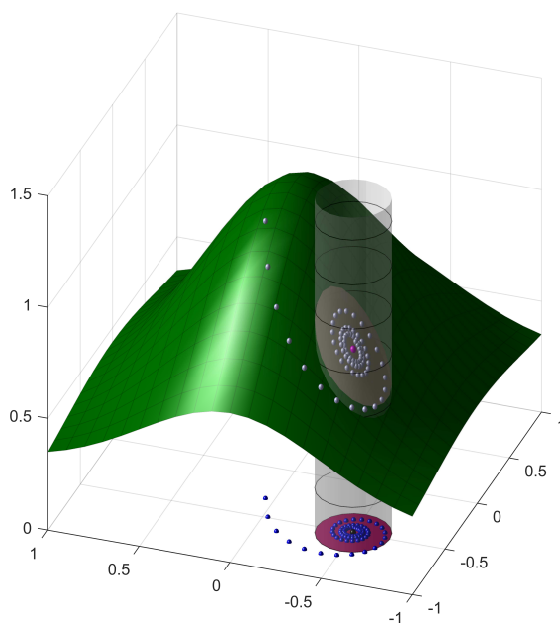
bude konvergentní a její limitou bude právě číslo c . Očekáváme tudíž implikaci

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = c.$$

Rozeberme tuto situaci s pomocí názorného obrázku 1.7. Modře je na něm vyobrazena posloupnost bodů $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ z dvojrozměrného definičního oboru funkce $f(\vec{x})$ taková, jež konverguje k bodu $\vec{a}$ (na obrázku černě), v němž vyšetřujeme limitu, popř. spojitost funkce $f(x_1, x_2)$. Přitom zelená plocha reprezentuje graf $\Gamma(f)$. Šedé body na zelené ploše grafu odpovídají bodům $(x_{n_1}, x_{n_2}, f(x_{n_1}, x_{n_2}))$ a pro n rostoucí nade všechny meze konvergují k bodu (a_1, a_2, c) , jež je na obrázku vyobrazen fialově. Je-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ spojitá, pak navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_1}, x_{n_2}, f(x_{n_1}, x_{n_2})) = (a_1, a_2, f(a_1, a_2)).$$

Citované poznatky budeme nyní sumarizovat v následujících větách.



Obrázek 1.7

Ilustrační obrázek k Heineho větě.

1.2.26 Věta – Heineho pro limitu

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ existuje $\mathcal{U}^*(\vec{a}) \subset \text{Dom}(f)$.

- Nechť $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$. Potom pro každou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ takovou, že $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = c$.
- Jestliže pro každou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, konvergující k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)$, pak je pro každé dvě takové posloupnosti stejná a funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ limitu rovnou této jejich společné hodnotě.

Důkaz:

- První tvrzení:
 - nechtť tedy existuje $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$
 - potom pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta}^*(\vec{a})$ je $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$
 - vezměme nyní libovolnou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergující k pevnému bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ takovou, že $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$
 - tedy pro všechna $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro přirozená $n \geq n_0$ platí $\varrho(\vec{x}_n, \vec{a}) < \delta$
 - dohromady tedy platí: pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro přirozená $n \geq n_0$ platí $|f(\vec{x}_n) - c| < \varepsilon$, což dokazuje tvrzení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = c$
- Druhé tvrzení:
 - nechtť je dána libovolná posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, konvergující k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$
 - nechtť je dále dána posloupnost $(\vec{y}_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\vec{y}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, konvergující rovněž k bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$

- také posloupnost $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \dots$ konverguje k bodu $\vec{a}$ a žádný její prvek se nerovná $\vec{a}$
- tedy podle předpokladu má posloupnost $f(\vec{x}_1), f(\vec{y}_1), f(\vec{x}_2), f(\vec{y}_2), \dots$ limitu, označme ji c
- každá vybraná posloupnost musí ale nevyhnutelně mít tutéž limitu
- zbývá dokázat, že $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$
- kdyby toto nebylo pravda, existovalo by $\varepsilon > 0$ takové, že pro žádné $\delta > 0$ by neplatila implikace $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \Rightarrow |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$
- to jest, ke každé hodnotě $\delta = 1/n$ by existoval bod $\vec{x}_n$ tak, že by sice bylo $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ a $\varrho(\vec{x}_n, \vec{a}) < 1/n$, ale současně by bylo $|f(\vec{x}_n) - c| \geq \varepsilon$
- takže by ale zcela jistě neplatilo, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = c$, což je zamýšlený spor

1.2.27 Věta

Má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \text{der}(M)$ vlastní limitu vzhledem k množině M , pak je pro nějaké $\delta > 0$ omezená na množině $\mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \cap M$.

Důkaz:

- postačí vyšetřovat omezenost funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na redukovaném okolí $\mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$, neboť zcela jistě platí, že $f(\vec{a}) < \infty$, pokud $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$
- nechť $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}, \vec{x} \in M} f(\vec{x}) = c$
- zvolíme pevně $\varepsilon > 0$
- jelikož má zmiňovaná funkce v bodě $\vec{a}$ vlastní limitu c , existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ platí $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$
- dále $|f(\vec{x})| \leq |f(\vec{x}) - c| + |c| \leq \varepsilon + |c| =: K$, čímž je hledané K z definice 1.1.17 nalezeno

1.2.28 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$, pro který existuje $\mathcal{U}^*(\vec{a})$ tak, že $\mathcal{U}^*(\vec{a}) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Nechť dále existují obě vlastní limity $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c_1$ a $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = c_2$. Pak platí rovnosti

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f + g)(\vec{x}) = c_1 + c_2$,
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (fg)(\vec{x}) = c_1 c_2$,
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\frac{f}{g} \right)(\vec{x}) = \frac{c_1}{c_2}$,

jsou-li výrazy na pravých stranách definovány.

Důkaz:

- Součet funkcí:
 - vezměme $\varepsilon > 0$
 - z předpokladu víme, že k němu existují $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_1}^*(\vec{a})$ je $|f(\vec{x}) - c_1| < \varepsilon/2$ a pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_2}^*(\vec{a})$ je $|g(\vec{x}) - c_2| < \varepsilon/2$
 - nechť $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
 - pak pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x}) + g(\vec{x}) - (c_1 + c_2)| \leq |f(\vec{x}) - c_1| + |g(\vec{x}) - c_2| < \varepsilon$
 - odtud $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (f + g)(\vec{x}) = c_1 + c_2$

• Součin funkcí:

- uvažujme případ $c_2 \neq 0$
- pro $c_2 = 0$ je důkaz jednoduchý
- podle věty 1.2.27 je funkce $f(\vec{x})$ na jistém okolí $\mathcal{U}_{\delta_1}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ omezená, tedy existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_1}^*(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x})| < K$
- vezměme $\varepsilon > 0$
- k němu existuje $\delta_2 > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_2}^*(\vec{a})$ platí $|g(\vec{x}) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2K}$
- existuje také $\delta_3 > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_3}^*(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x}) - c_1| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}$
- nechť $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$
- pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta}^*(\vec{a})$ pak platí

$$\begin{aligned} |f(\vec{x})g(\vec{x}) - c_1c_2| &= |f(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x})c_2 + f(\vec{x})c_2 - c_1c_2| \leq \\ &\leq |f(\vec{x})||g(\vec{x}) - c_2| + |c_2||f(\vec{x}) - c_1| < K\frac{\varepsilon}{2K} + |c_2|\frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon \end{aligned}$$

- tedy $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (fg)(\vec{x}) = c_1c_2$

• Podíl funkcí:

- požadujeme, aby $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = c \neq 0$
- ukážeme, že

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{g(\vec{x})} = c^{-1} \quad (1.6)$$

- zbytek důkazu je pouhá aplikace již dokázaného bodu 2 této věty
- jelikož $c \neq 0$, existuje jistě $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_1}^*(\vec{a})$ je $2|g(\vec{x})| > |c|$
- a pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_2}^*(\vec{a})$ je $2|g(\vec{x}) - c| < \varepsilon c^2$
- položíme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$
- pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta}^*(\vec{a})$ pak platí

$$\left| \frac{1}{g(\vec{x})} - \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{g(\vec{x}) - c}{c g(\vec{x})} \right| < \frac{\varepsilon c^2}{2} \frac{2}{c^2} = \varepsilon$$

- tím je dokázána platnost vztahu (1.6)

1.2.29 Komentář

Předešlá věta zůstává v platnosti i pro nevlastní limity.

1.2.30 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro limitu funkce vzhledem k množině

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má v bodě $\vec{a} \in \text{der}(M)$ vlastní limitu vzhledem k množině M právě tehdy, když platí tvrzení

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_{\delta}^*(\vec{a}) \cap M \right) : |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon. \quad (1.7)$$

Důkaz:

• První implikace:

- nechť $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c$

- zvolme pevně $\varepsilon > 0$
- z předpokladu víme, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M) : |f(\vec{x}) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f(\vec{y}) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- odsud tedy pro zvolené ε existuje zmiňované kladné δ tak, že pro každá $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ platí série nerovností $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq |f(\vec{x}) - c| + |f(\vec{y}) - c| < \varepsilon$

• Druhá implikace:

- zvolme pevně $\varepsilon > 0$
- dále zvolme $\delta > 0$ tak, aby tvrzení (1.7) platilo
- vezměme libovolnou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ prvků z M , kde $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, konvergující k bodu $\vec{a} \in \text{der}(M)$
- tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro přirozená $n \geq n_0$ platí $\rho(\vec{x}_n, \vec{a}) < \delta$
- pro $m, n \geq n_0$ a pro $\vec{x}_m, \vec{x}_n \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ podle podmínky (1.7) platí $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_m)| < \varepsilon$
- posloupnost $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots$ tedy splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku pro číselné posloupnosti (viz [7], věta 1.1.8), tudíž existuje její vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)$
- jelikož jsme ověřili, že limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)$ existuje pro jakoukoli posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ s výše uvedenou vlastností, platí podle Heineho věty 1.2.26, že se její hodnota rovná limitě $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}, \vec{x} \in M} f(\vec{x})$

1.2.31 Důsledek – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro limitu funkce bez přívlastku

Funkce $f(\vec{x}) : E^r \mapsto \mathbb{R}$ definovaná na jistém redukovaném okolí bodu $\vec{a}$ má v bodě $\vec{a}$ limitu právě tehdy, když platí tvrzení

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a})) : |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon. \quad (1.8)$$

1.2.32 Věta – o limitě složené funkce

Nechť funkce $f_i(\vec{x}) : E^r \mapsto \mathbb{R}$ pro $i \in \hat{s}$ mají v bodě $\vec{a} \in \text{der}(M)$ limity $c_i \in \mathbb{R}$ vzhledem k množině M . Nechť funkce $g(\vec{y}) : E^s \mapsto \mathbb{R}$ má v bodě $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ limitu vzhledem k množině $P \subset E^s$, pro níž $\vec{c} \in \text{der}(P)$. Jestliže existuje takové okolí $\mathcal{U}_\Delta^*(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\Delta^*(\vec{a}) \cap M$ platí $(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x})) \in P \setminus \{\vec{c}\}$, pak

$$\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} (g \circ f)(\vec{x}) = \lim_{\vec{y} \in P, \vec{y} \rightarrow \vec{c}} g(\vec{y}).$$

Důkaz:

- podle předpokladu existuje pro funkci $f_i(\vec{x})$ limita $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_i(\vec{x}) = c_i$
- tedy pro pevně zvolené $\eta > 0$ existují $\delta_i > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_i}^*(\vec{a}) \cap M$ platí

$$|f_i(\vec{x}) - c_i| < \eta \quad (i \in \hat{s})$$

- vezměme ještě takové okolí $\mathcal{U}_\Delta^*(\vec{a})$, že všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\Delta^*(\vec{a}) \cap M$ se zobrazují prostřednictvím všech funkcí $f_i(\vec{x})$ mimo bod c_i
- dále z předpokladu víme, že pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{y} \in \mathcal{U}_\eta^*(\vec{c}) \cap P$ platí $|g(\vec{y}) - b| < \varepsilon$, kde $b = \lim_{\vec{y} \in P, \vec{y} \rightarrow \vec{c}} g(\vec{y})$
- celkem tedy: pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta := \min\{\Delta, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s\}$ zprostředkované přechodem přes η tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta^*(\vec{a}) \cap M$ platí

$$|g(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x})) - b| = |g(\vec{y}) - b| < \varepsilon,$$

což bylo dokázat

1.3 Spojitost funkce více proměnných

Druhým ze základních topologických pojmů teorie funkcí více proměnných je spojitost. I tento pojem má svého předchůdce v teorii funkcí jedné proměnné a nebude proto obtížné jednodimenzionální pojetí tohoto termínu transformovat do vícerozměrné alternativy.

1.3.1 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Řekneme, že *funkce $f(\vec{x})$ je spojitá v bodě $\vec{a}$* , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ platí $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *spojitá na množině N* , je-li spojitá v každém bodě množiny N . Uvedený typ spojitosti se občasné označuje jako *spojitost bez přívlastku*.

1.3.2 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ a $\vec{a} \in \text{der}(M)$. Řekneme, že *funkce $f(\vec{x})$ je spojitá v bodě $\vec{a}$ vzhledem k množině M* , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \cap M$ platí $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$.

1.3.3 Komentář

Doporučujeme čtenáři, aby rozvážil, že ani v případě, kdy je množinou, vzhledem k níž se spojitost zkoumá, celý definiční obor, pojmy z definic 1.3.1 a 1.3.2 nespływají. Ztotožnění obou pojmů nastane, pokud $M = \text{Dom}(f)$ a bod $\vec{a}$ je vnitřním bodem množiny M , tj. $\vec{a} \in M^\circ$. Tehdy je totiž splněno, že funkce $f(\vec{x})$ je skutečně definována na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$.

1.3.4 Věta

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkce definovaná na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ a $\vec{a} \in \text{der}(M)$. Pak $f(\vec{x})$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá vzhledem k množině M právě tehdy, když existuje limita $\lim_{\vec{x} \in M, \vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})$ a její hodnota se rovná číslu $f(\vec{a})$.

Důkaz:

- plyne přímo z definic 1.3.2 a 1.2.4

1.3.5 Důsledek

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá právě tehdy, když $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

1.3.6 Věta – Heineho pro spojitost

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ konvergující k bodu $\vec{a}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{a})$.

Důkaz:

- plyne z Heineho věty pro limitu 1.2.26 a důsledku 1.3.5

1.3.7 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro spojitost vzhledem k množině

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá v bodě $\vec{a} \in \text{der}(M) \subset \mathbf{E}^r$ vzhledem k množině M právě tehdy, když pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje kladné δ tak, že pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \cap M$ platí nerovnost $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$.

Důkaz:

- plyne z Bolzano-Cauchyovy podmínky pro limitu 1.2.30 a důsledku 1.3.5

1.3.8 Důsledek – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro spojitost bez přívlastku

Funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá v bodě $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$ právě tehdy, když pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje kladné δ tak, že pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ platí nerovnost $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$.

1.3.9 Věta – o spojitosti složené funkce

Nechť jsou funkce $f_k(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ pro $k = 1, 2, \dots, s$ spojitě v bodě $\vec{a} \in \bigcap_{k=1}^s \text{Dom}(f_k)$ a funkce $g(\vec{y}) : \mathbf{E}^s \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá v bodě $\vec{c} = (f_1(\vec{a}), f_2(\vec{a}), \dots, f_s(\vec{a}))$, pak funkce $(g \circ f)(\vec{x})$ je spojitá v bodě $\vec{a}$.

Důkaz:

- podle předpokladu existuje pro všechny funkce $f_k(\vec{x})$ limita $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_k(\vec{x}) =: c_k$ a navíc $c_k = f_k(\vec{a})$
- tedy pro pevně zvolené $\eta > 0$ existují $\delta_k > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_{\delta_k}(\vec{a})$ platí

$$|f_k(\vec{x}) - c_k| < \eta \quad (k \in \hat{s})$$

- dále z předpokladu víme, že pro libovolné pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{y} \in \mathcal{U}_\eta(\vec{c})$ platí $|g(\vec{y}) - g(\vec{c})| < \varepsilon$
- podotýkáme, že $g(\vec{c}) = \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{c}} g(\vec{y})$ díky platnosti věty 1.3.4
- celkem tedy: pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s\}$ zprostředkované přechodem přes η tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ platí $|g(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x})) - g(\vec{c})| = |g(\vec{y}) - g(\vec{c})| < \varepsilon$, což bylo dokázat

1.3.10 Příklad

Chceme dokázat, že funkce $f(x, y) = 2xy$ je spojitá v bodě $(0, 0)$. Úkolem je tedy prokázat, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ splňují všechny příslušné funkční hodnoty nerovnost $|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| < \varepsilon$. Tvrzení $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ je přitom ekvivalentní nerovnosti $x^2 + y^2 < \delta^2$. Prokážeme nyní, že položíme-li $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, bude definiční vztah splněn. Užijeme přitom triviální nerovnosti $|2xy| \leq x^2 + y^2$, o jejíž platnosti se lze snadno přesvědčit. Pak tedy, je-li $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$, je zřejmě splněna nerovnost $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$. Tehdy $|f(x, y)| = |2xy| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon$. To završuje důkaz spojitosti funkce $f(x, y) = 2xy$.

1.3.11 Příklad

Pokusme se rozhodnout, zda je možno funkci

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + e^y - y - 1} \quad (1.9)$$

dodefinovat v bodě $(0, 0)$ tak, aby byla spojitá v $\mathbf{E}^2$. Takovou dodefinovanou hodnotou by mohla být jediné limita

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \vec{0}} \frac{xy}{x^2 + e^y - y - 1}. \quad (1.10)$$

Rozhodněme, zda existuje. Nejprve budeme studovat parciální limity zadané funkce. Snadno určíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + e^y - y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + e^y - y - 1} = 0.$$

Tento výsledek tedy úlohu neřeší. Zkoumejme proto limity vzhledem k množinám

$$M_k = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : y = kx\}.$$

Pro ně platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}, x \in M_k} \frac{xy}{x^2 + e^y - y - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + e^{kx} - kx - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx}{2x + ke^{kx} - k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k}{2 + k^2 e^{kx}} = \frac{2k}{2 + k^2}.$$

Jelikož jsou příslušné hodnoty závislé na hodnotě parametru k , limita bez přívlastku (1.10) neexistuje. A proto nemůže být funkce (1.9) dodefinována žádnou hodnotou tak, aby byla spojitá.

1.3.12 Věta

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ spojitá na otevřené množině $G \subset \mathbf{E}^r$. Pak graf (1.1) funkce $f(\vec{x})$ z definice 1.1.13 reprezentuje r -dimenzionální nadplochu v prostoru $\mathbf{E}^r$.

Důkaz:

- zobrazení $\vec{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) : G \mapsto \mathbf{E}^{r+1}$ definované předpisem $\vec{\Omega}(x_1, x_2, \dots, x_r) = (x_1, x_2, \dots, x_r, f(\vec{x}))$ je r -dimenzionální plošnou parametrizací
- $\text{Ran}(\vec{\Omega})$ je příslušným geometrickým obrazem
- protože $\Gamma(f) := \{(x_1, x_2, \dots, x_r, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in G \wedge y = f(\vec{x})\} = \text{Ran}(\vec{\Omega})$, splňuje $\Gamma(f)$ definici r -dimenzionální nadplochy v prostoru $\mathbf{E}^r$
- pro plné pochopení důkazu doporučujeme čtenáři redukci tvrzení na variantu $r = 2$ a následné napojení na definice plošné parametrizace, geometrického obrazu plošné parametrizace a dvoudimenzionální plochy v prostoru 3D (viz kapitola č. 11)

1.4 Základní topologické věty

Jedny z prvních otázek, které je třeba na úvod teorie funkcí více proměnných řešit, jsou otázky přenosů jistých topologických vlastností z obrazů na vzory či v obráceném směru. Budeme se tedy např. ptát, zda otevřenost definičního oboru zůstane po aplikaci zobrazení $f(\vec{x})$ nezměněna. To znamená, formálněji řečeno, že budeme rozhodovat o platnosti následujících tvrzení: Nechť $A = A^\circ \subset \mathbf{E}^r$ je množina, na níž je definována funkce $f(\vec{x})$. Za jakých podmínek (kladených na funkci $f(\vec{x})$) bude také obraz $f(A)$ otevřenou množinou? Lze tuto vlastnost vůbec garantovat? Podobně vzneseme dotaz: Nechť $B = B^\circ \subset \mathbf{R}$ je podmnožina oboru hodnot funkce $f(\vec{x})$. Za jakých podmínek bude také vzor $f^{-1}(B)$ otevřenou množinou? Tyto a mnohé další dotazy zodpoví následující série vět.

1.4.1 Komentář

Mezi tzv. *topologické vlastnosti množin* řadíme otevřenost, omezenost, kompaktnost, uzavřenost, souvislost, či oddělenost. Pro připomenutí definic těchto pojmů doporučujeme nahlédnout do skript [7], popř. do komentáře 1.1.8.

1.4.2 Věta – o otevřené množině

Vzor otevřené množiny při spojitým zobrazení je otevřená množina, přesněji: je-li $B \subset \text{Ran}(f)$, $B = B^\circ$ a $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto B$ je spojitým zobrazením na $\text{Dom}(f)$, pak $f^{-1}(B)$ je otevřenou množinou v $\mathbf{E}^r$.

Důkaz:

- označme $A := f^{-1}(B)$, kde tedy $B = B^\circ \subset \text{Ran}(f)$ je zvolena libovolně
- chceme ukázat, že i množina A je otevřená

- tedy chceme ukázat, že pro libovolné pevně zvolené $\vec{a} \in A$ existuje $\mathcal{U}(\vec{a})$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{a}) \subset A$
- ke zvolenému $\vec{a}$ jistě existuje $c \in B$ tak, že $f(\vec{a}) = c$
- jelikož B je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{U}_\varepsilon(c) \subset B$
- pro toto ε ale ze spojitosti funkce $f(\vec{x})$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ je

$$|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon,$$

což je ekvivalentní zápisu $f(\vec{x}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(c)$

- ze vztahu $f(\vec{x}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(c) \subset B$ tudíž vyplývá, že $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \subset A$
- našli jsme tedy okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$, které celé leží v A
- a protože byl bod $\vec{a}$ zvolen v A libovolně, dokazuje to, že $A = A^\circ$

1.4.3 Věta – o souvislé množině

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá na souvislé množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť pro dvě různá $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in M$ platí $f(\vec{a}_1) = c_1$ a $f(\vec{a}_2) = c_2 > c_1$. Pak funkce $f(\vec{x})$ na množině M nabývá všech hodnot z intervalu $\langle c_1, c_2 \rangle$.

Důkaz:

- nechť $M \subset \mathbf{E}^r$ je souvislá množina
- nechť dle předpokladů existují $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in M$ tak, že $f(\vec{a}_1) = c_1$ a současně $f(\vec{a}_2) = c_2 > c_1$
- zvolme $c \in (c_1, c_2)$ a předpokládejme, že neexistuje žádné $\vec{b} \in M$ takové, že $f(\vec{b}) = c$
- definujme množiny $M_1 = \{\vec{x} \in M : f(\vec{x}) < c\}$, $M_2 = \{\vec{x} \in M : f(\vec{x}) > c\}$
- obě množiny jsou neprázdné, neboť $\vec{a}_1 \in M_1$ a $\vec{a}_2 \in M_2$
- díky předpokladu pro spor také vidíme, že $M_1 \cup M_2 = M$ a navíc $M_1 \cap M_2 = \emptyset$
- dokazujeme nyní, že $\bar{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$
- protože jistě $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, jak plyne z definice množin M_1 a M_2 , je dokazovaná rovnost ekvivalentní rovnosti $\text{bd}(M_1) \cap M_2 = \emptyset$
- postačí tedy dokázat, že hranice množiny M_1 nemá s M_2 žádný průnik
- zvolme $\vec{a} \in \text{bd}(M_1)$ libovolně
- podle jisté věty teorie metrických prostorů lze ale zcela jistě do každého hraničního bodu dokonvergovat po bodech dané množiny (to souvisí s definicí hraničního bodu, neboť v každém jeho okolí o poloměru $\varepsilon = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbf{N}$, totiž jistě leží nějaký prvek dané množiny)
- v našem případě to značí, že existuje posloupnost $(\vec{x}_m)_{m=1}^\infty$ prvků $\vec{x}_m \in M_1$ taková, že $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{a}$
- protože je funkce $f(\vec{x})$ podle předpokladů věty spojitá, lze užít Heineovy věty
- podle ní: $\lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_m) = f(\vec{a})$
- jelikož ale (na základě zavedení množiny M_1) jistě $f(\vec{x}_m) < c$ pro všechna m , plyne odtud, že $f(\vec{a}) \leq c$
- odtud již přímo plyne, že $\vec{a} \notin M_2$, což bylo dokázat
- tím jsme ovšem našli dvě oddělené a zároveň neprázdné množiny v množině M , které ji pokrývají, což je zřetelný spor se souvislostí množiny M
- ze vzniklého sporu vyplývá, že zmiňované $\vec{b}$ existuje

1.4.4 Věta – o kompaktní množině

Nechť $f(\vec{x}) : E^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá funkce a $A \subset \text{Dom}(f)$ kompaktní množina. Pak $f(A)$ je kompaktní.

Důkaz:

- jelikož A je dle předpokladů kompaktní množinou, lze z každé posloupnosti $(\vec{z}_n)_{n=1}^{\infty}$ jejich prvků vybrat konvergentní posloupnost, jež má limitu v A
- zvolme libovolnou posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z $f(A)$
- zamýšlíme dokázat, že z ní lze vybrat podposloupnost, jež má limitu z $f(A)$
- pro každé $n \in \mathbf{N}$ zvolme $\vec{x}_n \in A$ tak, že $y_n = f(\vec{x}_n)$
- z posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vyberme konvergentní podposloupnost $(\vec{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, což lze díky kompaktnosti množiny A a označme $\vec{a} := \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_{n_k}$
- jelikož A je kompaktní, je zaručeno, že $\vec{a} \in A$
- z Heineho věty pro spojitě funkce (viz 1.3.6) plyne, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{n_k}) = f(\vec{a})$
- jelikož ale $\vec{a} \in A$, je $f(\vec{a}) \in f(A)$
- tím je důkaz završen, neboť jsme ukázali, že z libovolné posloupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z $f(A)$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $(f(\vec{x}_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ mající limitu v $f(A)$

Kapitola 2

Diferenciální počet

Po zevrubném zkoumání topologických vlastností funkce více proměnných přistoupíme v novém oddíle k budování diferenciálního počtu. Budeme se tedy zabývat definicemi parciálních derivací (obyčejných či směrových), ale vystavíme také robustní pojem totálního diferenciálu pro funkci více proměnných. V rámci tohoto oddílu probereme také základy vektorové analýzy pro vektory funkcí více proměnných.

2.1 Parciální derivace a jejich alternativy

2.1.1 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí bodu $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbf{E}^r$. Potom *parciální derivací funkce $f(\vec{x})$ podle proměnné x_k ($k \in \hat{r}$) v bodě $\vec{a}$* nazýváme limitu (pokud existuje a je vlastní)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_r) - f(\vec{a})}{h}. \quad (2.1)$$

2.1.2 Komentář

Na tomto místě raději upřesňujeme, že v některých jiných zdrojích může být pojem parciální derivace zaveden nepatrně obecněji. Na rozdíl o požadavku z definice 2.1.1, aby zkoumaná funkce byla definována na jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$, požadují některé definice slabší předpoklad, a sice aby byla funkce definována přinejmenším na množině $\mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \cap E_k$, kde $E_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \xi, a_{k+1}, \dots, a_r) \in \mathbf{E}^r : \xi \in \mathbf{R}\}$ je přímka rovnoběžná s k -tou souřadnou osou procházející bodem $\vec{a}$.

2.1.3 Komentář

Parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ podle proměnné x_k v bodě $\vec{a}$ je tedy podle definice 2.1.1 rovna obyčejné derivaci funkce jedné proměnné $\psi(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_r)$ v bodě $t = a_k$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{d\psi}{dt}(a_k).$$

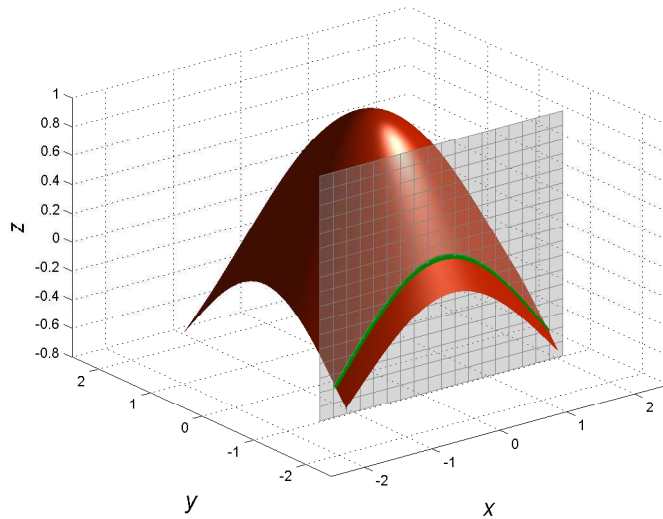
Vzhledem k tomuto faktu představuje parciální derivování fakticky obyčejné derivování podle vybrané proměnné x_k , kdy na zbylé proměnné x_j ($j \neq k$) je nahlíženo jako na parametry. Dále poznamenáváme, že definiční vztah (2.1) je ekvivalentní vztahu

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_r) - f(\vec{a})}{x_k - a_k}.$$

Této rovnosti bylo dosaženo substitucí $h = x_k - a_k$ v rovnosti (2.1).

2.1.4 Příklad

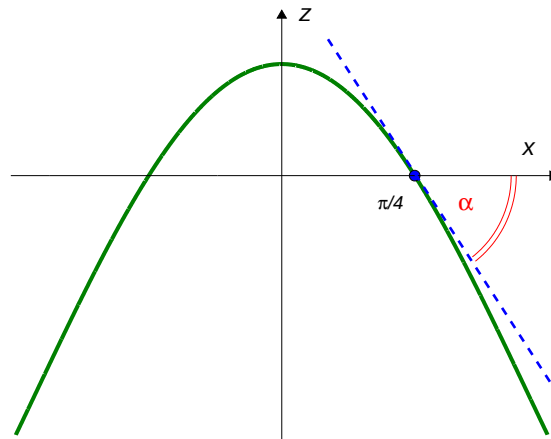
Uvažme funkci $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ definovanou na množině $M = \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Graf funkce je vyobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 2.8

K demonstraci parciální derivace.

Pokusme se nyní demonstrovat geometrický význam parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ v bodě $\vec{a} = (\pi/4, -\sqrt{3}\pi/4)$. V obrázku je tučnou čarou vyznačen řez grafu funkce rovinou $y = -\sqrt{3}\pi/4$. Tímto řezem je křivka vyobrazená na obrázku níže.



Obrázek 2.9

K demonstraci parciální derivace.

Hodnotou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ v bodě $\vec{a} = (\pi/4, -\sqrt{3}\pi/4)$ je tangens orientovaného úhlu α , který svírá tečna k citované křivce sestrojená v bodě $\vec{a}$ s osou x .

2.1.5 Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = 8x^2y$ a vypočtěme podle definice obě parciální derivace v bodě $\vec{a} = (1, 3)$. Podle definice 2.1.1 platí rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24(1+h)^2 - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h^2 + 48h}{h} = 48.$$

Analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(3+h) - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h}{h} = 8.$$

2.1.6 Definice

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je definována na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Nechť pro všechna $k \in \hat{r}$ existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$. (Totální) derivací funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ rozumíme vektor

$$\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}\vec{x}}(\vec{a}) = \frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}(\vec{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\vec{a}) \right).$$

Řekneme, že derivace $\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}\vec{x}}$ má určitou vlastnost (typicky: spojitost, hladkost, příslušnost ke třídě $\mathcal{C}^m(G)$ apod.), mají-li tuto vlastnost všechny její složky.

2.1.7 Věta – o elementárních vlastnostech parciální derivace

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou funkce definované na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Nechť $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ mají parciální derivace podle proměnné x_k a nechť $\lambda \in \mathbf{R}$. Potom platí rovnosti

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}),$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) g(\vec{a}) + f(\vec{a}) \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) g(\vec{a}) - f(\vec{a}) \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a})}{g^2(\vec{a})}, \text{ pokud } g(\vec{a}) \neq 0.$$

Důkaz:

- díky poznámce 2.1.3 plyne důkaz z analogických vět pro funkci jedné proměnné

2.1.8 Věta

Má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, pak je v tomto bodě spojitá vzhledem k množině

$$M = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \xi, a_{k+1}, \dots, a_r) \in \text{Dom}(f) : \xi \in \mathbf{R}\}.$$

Důkaz:

- na základě skutečnosti diskutované v komentáři 2.1.3 lze uvedenou větu převést na odpovídající tvrzení pro funkci $\psi(\xi) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \xi, a_{k+1}, \dots, a_r)$ jedné proměnné ξ
- a protože pro funkci jedné proměnné platí tvrzení, že z existence derivace v bodě a_k plyne spojitost v tomto bodě, pak to značí, že $f(\vec{x})$ je spojitá vzhledem k M

2.1.9 Příklad

Zatímco pro funkci jedné proměnné $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ vyplývala z existence derivace $f'(x)$ v bodě a spojitost funkce $f(x)$ v bodě a , u funkcí více proměnných je situace značně odlišná. Může například nastat situace, kdy funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má v bodě $\vec{a}$ všechny parciální derivace, ale přesto není v bodě $\vec{a}$ spojitá. Takovou funkcí je například funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \dots (x, y) \neq \vec{0}; \\ 0 & \dots (x, y) = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pro její parciální derivaci podle první proměnné z definice platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(0+h)0}{(0+h)^2+0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Podobně také

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0(0+h)}{0+(0+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Přestože funkce (2.2) má v bodě $(0, 0)$ derivaci, není v něm spojitá, jak bylo ukázáno v příkladě 1.2.14.

2.1.10 Věta – o derivaci složené funkce

Nechť jsou dány funkce $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, jež jsou spojitě v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a mají v bodě $\vec{a}$ derivaci, tj. parciální derivace podle všech proměnných. Nechť je dána funkce $g(\vec{y}) : \mathbf{E}^s \mapsto \mathbf{R}$, jež je spojitá v bodě $\vec{b} = (f_1(\vec{a}), f_2(\vec{a}), \dots, f_s(\vec{a}))$ a má v bodě $\vec{b}$ derivaci, tj. parciální derivace podle všech proměnných. Nechť je funkce $(g \circ f)(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí bodu $\vec{a}$. Pak pro libovolné $i \in \hat{r}$ platí

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial f_j}(\vec{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a}). \quad (2.3)$$

Důkaz:

- důkaz demonstrujeme na příkladu $r = s = 2$, tedy pro složenou funkci

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$$

- hledáme parciální derivaci funkce $(g \circ f)(x_1, x_2)$ v bodě $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{E}^2$
- položíme podle předpokladů $\vec{b} = (f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2)) = (b_1, b_2)$
- z definice parciální derivace vyplývá

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(x_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2))}{x_1 - a_1}$$

- do čitatele limitního zlomku přičteme a zároveň od něj odečteme výraz $g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2))$, čímž se posledně uvedená limita rozpadne na součet dvou limit

$$\beta_1 := \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(x_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2))}{x_1 - a_1}$$

$$\beta_2 := \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2))}{x_1 - a_1}$$

- pro první z nich platí (po rozšíření jedničkou)

$$\beta_1 := \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(x_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2))}{f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)} \frac{f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)}{x_1 - a_1}$$

- zatímco ve druhé části této limity snadno rozpoznáváme parciální derivaci

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)}{x_1 - a_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}),$$

při výpočtu druhé části využijeme nejprve faktu, že funkce $f_2(x_1, x_2)$ je z předpokladů věty spojitá, a poté již snadnou substitucí určíme, že

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(x_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2))}{f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(x_1, a_2), f_2(a_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2))}{f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2)} = \left| \begin{array}{l} h := f_1(x_1, a_2) - f_1(a_1, a_2) \\ b_1 = f_1(a_1, a_2) \\ b_2 = f_2(a_1, a_2) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(b_1 + h, b_2) - g(\vec{b})}{h} = \frac{\partial g}{\partial f_1}(\vec{b}) \end{aligned}$$

- tedy

$$\beta_1 = \frac{\partial g}{\partial f_1}(\vec{b}) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a})$$

- analogicky pro β_2 platí

$$\begin{aligned} \beta_2 &:= \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \frac{g(f_1(a_1, a_2), f_2(x_1, a_2)) - g(f_1(a_1, a_2), f_2(a_1, a_2))}{f_2(x_1, a_2) - f_2(a_1, a_2)} \frac{f_2(x_1, a_2) - f_2(a_1, a_2)}{x_1 - a_1} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial f_2}(\vec{b}) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) \end{aligned}$$

- odtud tedy

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial g}{\partial f_1}(\vec{b}) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial f_2}(\vec{b}) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a})$$

- podobně by se dokázala rovnost

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{\partial g}{\partial f_1}(\vec{b}) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial f_2}(\vec{b}) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a})$$

2.1.11 Komentář

Předcházející věta je zobecněním věty o derivaci složené funkce pro funkci jedné proměnné. Ta říká, že máme-li zadánu funkci $f(u)$ s nezávisle proměnnou u a tato závisí na jiné nezávisle proměnné x podle předpisu $u = u(x)$, pak pro derivaci funkce $f(x)$ podle nové proměnné x platí (v poněkud neformálním zápise)

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}.$$

Uvažme nyní vícerozměrnou analogii. Mějme funkci $f(u, v, w)$ tří nezávisle proměnných u, v, w a tyto necht záviset každá na dvou dalších nezávislých proměnných x, y podle předpisů $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a $w = w(x, y)$. Pak např. pro parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle nové proměnné y platí podle předchozí věty vztah

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

2.1.12 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Pak k -tou *parciální derivací* funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ podle proměnných $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ (v uvedeném pořadí) rozumíme následující hodnotu (je-li definována)

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\vec{a}) := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right)(\vec{a}),$$

kde je na symbol $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}}$ nahlíženo jako na funkci proměnné $\vec{x}$.

2.1.13 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a necht existují všechny její parciální derivace druhého řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a})$ v bodě $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$. Pak matici

$$\mathbb{H}_{\vec{a}} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a}) \right)_{j,k=1}^r$$

budeme nazývat *Hessovou maticí* funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$. Tj. prvkem Hessovy matice vyskytujícím se na j -tém řádku a k -tém sloupci je parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a})$. Determinant Hessovy matice budeme nazývat *hessiánem*.

2.1.14 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je otevřenou množinou a $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkcí r proměnných definovanou na množině G . Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *třídy* $\mathcal{C}^n$ na množině G a označíme $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^n(G)$, jestliže pro libovolnou kombinaci indexů $i_1, i_2, \dots, i_n$ z množiny $\hat{n}$ je parciální derivace

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}$$

spojitá v každém bodě množiny G . Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *třídy* $\mathcal{C}^\infty$ na množině M a označíme $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(G)$, jestliže všechny parciální derivace (tj. derivace všech řádů) funkce $f(\vec{x})$ jsou spojité v každém bodě množiny G . Funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(G)$ nazýváme také *hladkými* funkcemi na G .

2.1.15 Komentář

Množina $G \subset \mathbf{E}^r$ z předešlé definice je volena jako otevřená kvůli tvaru definice 2.1.1, kde je požadováno, aby (má-li existovat alespoň teoretická možnost, že v daném bodě existuje parciální derivace) s daným bodem patřilo do definičního oboru funkce také nějaké okolí tohoto bodu. To lze ale zaručit pouze u otevřené množiny.

2.1.16 Komentář

Bývá zvykem např. parciální derivaci

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_4 \partial x_4 \partial x_4}$$

označovat souhrnným symbolem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_4^3}.$$

Derivace takového typu nazýváme často *nesmíšenými*. Zajímavá vlastnost *smíšených derivací* je demonstrována na následujícím příkladě. Uvažme např. funkci

$$f(x, y) = y^2 + \arctg(xy^2).$$

Jelikož

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{2xy}{1+x^2y^4},$$

je snadné ukázat, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y \frac{1-x^2y^4}{(1+x^2y^4)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2y \frac{1-x^2y^4}{(1+x^2y^4)^2}.$$

Tato shoda mezi odpovídajícími smíšenými parciálními derivacemi není nahodilá, nýbrž za jistých okolností zákonitá. Vyslovíme a dokážeme nyní větu o této shodě.

2.1.17 Věta – o záměně smíšených parciálních derivací druhého řádu

Nechť pro $i, j \in \hat{r}$ existují na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Nechť je parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ spojitá v bodě $\vec{a}$. Potom existuje také $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ v bodě $\vec{a}$ a navíc platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

Důkaz:

- důkaz věty předvedeme pro variantu funkce dvou proměnných
- označme pro přehlednost zápisů

$$f_1(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \quad f_2(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x})$$

$$f_{12}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}), \quad f_{21}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x})$$

- měli bychom nejprve ukázat, že existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(a_1 + h, a_2) - f_2(a_1, a_2)}{h}$$

a že její hodnota je rovna $f_{12}(\vec{a})$

- z existence parciální derivace $f_2(\vec{a})$ vyplývá, že

$$\frac{f_2(a_1 + h, a_2) - f_2(a_1, a_2)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2)}{kh}$$

- označme

$$F(h, k) := \frac{f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2)}{kh}$$

- máme tedy dokázat, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} F(h, k) \right) = f_{12}(\vec{a})$$

- z předpokladů věty plyne, že limita $\lim_{k \rightarrow 0} F(h, k)$ existuje pro jakékoliv h vyhovující pro jisté $\delta > 0$ nerovnosti $0 < |h| < \delta$
- podle věty 1.2.21 tudíž stačí dokázat, že existuje dvojná limita

$$\lim_{(k, h) \rightarrow (0, 0), k \neq 0, h \neq 0} F(h, k) = f_{12}(\vec{a}) \quad (2.4)$$

- zvolme tedy $k \in \mathcal{U}_\delta^*(0)$ a $h \in \mathcal{U}_\delta^*(0)$ a položíme $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2 + k) - f(x_1, a_2)$
- pak podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce jedné proměnné existuje $\Theta_1 \in (0, 1)$ tak, že platí

$$F(h, k) = \frac{\varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1)}{hk} = \frac{\varphi'(a_1 + \Theta_1 h)}{k} = \frac{f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + k) - f_1(a_1 + \Theta_1 h, a_2)}{k}$$

- označme $\psi(x_2) := f_1(a_1 + \Theta_1 h, x_2)$
- jelikož funkce $f_{12}(\vec{x})$ existuje na okolí bodu $\vec{a}$, platí podle Lagrangeovy věty o přírůstku také

$$F(h, k) = \psi'(a_2 + \Theta_2 k) = f_{12}(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + \Theta_2 k),$$

kde $\Theta_2 \in (0, 1)$

- ze spojitosti funkce $f_{12}(\vec{x})$ plyne, že

$$\lim_{(k, h) \rightarrow (0, 0), k \neq 0, h \neq 0} F(h, k) = \lim_{(k, h) \rightarrow (0, 0), k \neq 0, h \neq 0} f_{12}(a_1 + \Theta_1 h, a_2 + \Theta_2 k) = f_{12}(\vec{a})$$

- tím je vztah (2.4) dokázán

2.1.18 Důsledek – o záměně smíšených parciálních derivací vyšších řádů

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ spojitě všechny parciální derivace až do řádu $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ včetně. Potom tyto derivace nezávisejí na pořadí derivování.

2.1.19 Věta – o Hessově matici

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je oblast. Pak pro každý bod $\vec{a} \in G$ je Hessova matice $\mathbb{H}_{\vec{a}}$ reálná, symetrická, a má tudíž reálné spektrum, tj $\sigma(\mathbb{H}_{\vec{a}}) \subset \mathbf{R}$.

Důkaz:

- symetrie Hessovy matice je snadným důsledkem tvrzení 2.1.18
- reálnost spektra $\sigma(\mathbb{H}_{\vec{a}})$ pak plyne z učiva lineární algebry

2.1.20 Definice

Nechť $\vec{s}$ je nenulový vektor z vektorového prostoru $\mathbf{E}^r$. Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Pak *parciální derivací* funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ ve směru $\vec{s}$ rozumíme limitu (pokud existuje a je vlastní)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) := \frac{1}{\|\vec{s}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{s}) - f(\vec{a})}{h}.$$

2.1.21 Komentář

Na tomto místě raději upřesňujeme, že v některých jiných zdrojích může být také pojem směrové (parciální) derivace zaveden obecněji. Na rozdíl od požadavku z definice 2.1.20, aby zkoumaná funkce byla definována na jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$, požadují některé definice slabší předpoklad, a sice aby byla funkce definována přinejmenším na množině $\mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \cap E_{\vec{s}}$, kde $E_{\vec{s}} = \{(a_1 + s_1\xi, a_2 + s_2\xi, \dots, a_r + s_r\xi) \in \mathbf{E}^r : \xi \in \mathbf{R}\}$ je přímka rovnoběžná s vektorem $\vec{s}$ a procházející bodem $\vec{a}$.

2.1.22 Lemma

Nechť $\vec{s}$ je nenulový vektor z vektorového prostoru $\mathbf{E}^r$ a $c \neq 0$. Nechť pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ existuje v bodě $\vec{a}$ parciální derivace ve směru $\vec{s}$. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial(c\vec{s})}(\vec{a}) = \operatorname{sgn}(c) \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}).$$

2.1.23 Lemma – o vztahu směrové a parciální derivace

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Potom pro libovolné $k \in \hat{r}$ a libovolné $c > 0$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial(c\vec{e}_k)}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}),$$

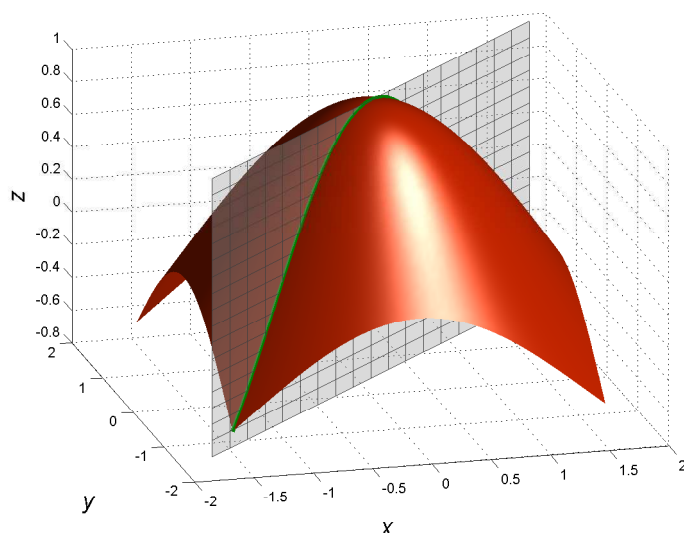
kde $\vec{e}_k$ je k -tý vektor standardní báze v $\mathbf{R}^r$, pokud alespoň jedna z uvedených parciálních derivací existuje.

2.1.24 Komentář

Diskutujme nyní geometrický význam směrové parciální derivace v bodě $\vec{a}$. Graf funkce

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_r, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in \operatorname{Dom}(f) \wedge y = f(\vec{x})\} \quad (2.5)$$

představuje podle věty 1.3.12 zobecněnou plochu (nadoplochu) v prostoru $\mathbf{E}^{r+1}$ nad definičním oborem $\operatorname{Dom}(f) \subset \mathbf{E}^r$. Provedeme-li v bodě $(\vec{a}, f(\vec{a})) \in \Gamma(f)$ řez této plochy rovinou, jež je kolmá k rovině, v níž leží $\operatorname{Dom}(f) \subset \mathbf{E}^r$, a rovnoběžná s vektorem $\vec{s}$, obdržíme křivku procházející bodem $(a_1, a_2, \dots, a_r, f(\vec{a})) \in \Gamma(f)$. Hodnota směrové parciální derivace v bodě $\vec{a}$ pak představuje tangentu orientovaného úhlu, který svírá tečna v bodě $(a_1, a_2, \dots, a_r, f(\vec{a}))$ ke zmíněné křivce s rovinou, v níž leží definiční obor. Populárně řečeno: stojíme-li na grafu funkce $f(\vec{x})$ nad bodem $\vec{a}$ definičního oboru a zamýšlíme-li jít směrem $\vec{s}$, pak hodnota $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a})$ je mírou pro stoupání či klesání zamýšlené trasy.



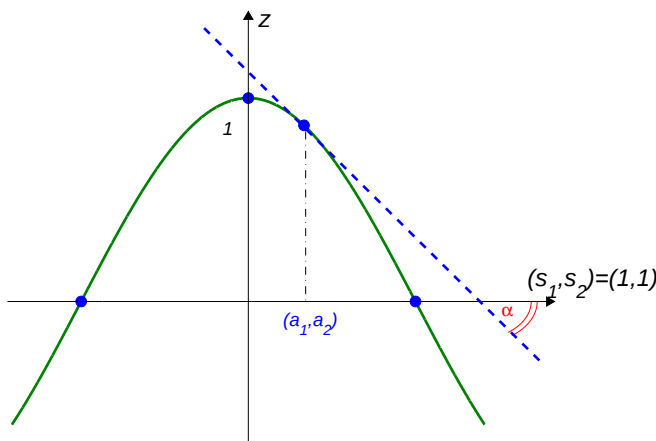
Obrázek 2.10

K demonstraci směrové parciální derivace.

Pokusme se výše uvedené poznatky demonstrovat na konkrétním případě. Budeme tedy hledat směrovou parciální derivaci funkce

$$f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$$

v bodě $\vec{a} = (\sqrt{2}\pi/36, \sqrt{2}\pi/36)$ ve směru $\vec{s} = (1, 1)$. Na grafu funkce $z = f(x, y)$ vyznačíme řez rovinou $x - y = 0$. Jde o rovinu, jež prochází bodem $\vec{a}$, je kolmá k rovině $z = 0$ a její řez v rovině $z = 0$ je přímka se směrovým vektorem $\vec{s}$. Zmíněný řez je vyobrazen na obrázku níže. Připomínáme, že vodorovnou osou je vzhledem ke způsobu provedení řezu přímka $\{(x, x) : x \in \mathbf{R}\}$ se směrovým vektorem $\vec{s} = (1, 1)$. Hodnota hledané směrové parciální derivace je na obrázku představována tangentou orientovaného úhlu α , který svírá tečna ke grafu funkce sestrojená v bodě $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ uvedeného řezu a směr $\vec{s}$.



Obrázek 2.11

K demonstraci směrové parciální derivace.

2.1.25 Příklad

Nechť je dána funkce

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 e^z}{y},$$

směr $\vec{s} = (2, 2, 1)$ a bod $\vec{a} = (1, 1, 0)$. Vypočteme směrovou parciální derivaci funkce $f(x, y, z)$ v bodě $\vec{a}$ ve směru $\vec{s}$. Zřejmě platí $\vec{a} + h\vec{s} = (1 + 2h, 1 + 2h, h)$, a tedy podle definice 2.1.20 dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 1, 0) := \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{(1 + 2h)^2 e^h}{1 + 2h} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 2h)e^h - 1}{3h} = 1.$$

Graf funkce $f(x, y, z)$ tedy stoupá v bodě $(1, 1, 0)$ ve směru $\vec{s} = (2, 2, 1)$ po úhlem 45° .

2.2 Základy vektorové analýzy

V mnoha praktických aplikacích je nanejvýš výhodné pracovat s tzv. s -dimenzionálními funkcionálními vektory, tj. s vektory, které mění svoji podobu v závislosti na poloze bodu v r -dimenzionálním definičním oboru. Můžeme je proto s výhodou reprezentovat uspořádanou s -tící funkcí r proměnných. Hodnotě argumentu $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$, pak lze přiřadit konkrétní hodnotu vektoru $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}))$, podobně jako u běžné funkce. V takovém případě hovoříme o vektorových funkcích, popř. funkčních (funkcionálních) vektorech, a značíme $\vec{f}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^s$.

2.2.1 Definice

Nechť jsou dány funkce $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Funkčním vektorem (vektorem funkcí) $\vec{f}(\vec{x})$ nazýváme zobrazení z $\mathbf{E}^r$ do $\mathbf{E}^s$ definované předpisem $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}))$. Řekneme, že funkční vektor $\vec{f}(\vec{x})$ má jistou vlastnost (typicky: existenci limity, spojitost, existenci parciální derivace, existenci totálního diferenciálu, hladkost, příslušnost ke třídě $\mathcal{C}^m(G)$ apod.), mají-li tuto vlastnost všechny jeho složky.

2.2.2 Definice

Jacobiho maticí funkčního vektoru $\vec{f}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^s$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ rozumíme matici

$$\frac{\mathcal{D}\vec{f}}{\mathcal{D}\vec{x}}(\vec{a}) = \frac{\mathcal{D}(f_1, f_2, \dots, f_s)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{D}f_1}{\mathcal{D}\vec{x}} \\ \frac{\mathcal{D}f_2}{\mathcal{D}\vec{x}} \\ \vdots \\ \frac{\mathcal{D}f_s}{\mathcal{D}\vec{x}} \end{pmatrix}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \end{pmatrix}(\vec{a}).$$

Determinant Jacobiho matice (pokud je definován, tj. pokud $s = r$) nazýváme *Jacobiho determinantem* (*Jacobiánem*) funkčního vektoru $\vec{f}(\vec{x})$. Řekneme, že Jacobiho matice má jistou vlastnost (typicky: spojitost, hladkost, příslušnost ke třídě $\mathcal{C}^m(G)$), mají-li tuto vlastnost všechny její prvky.

2.2.3 Definice

Hamiltonovým operátorem (*nabla operátorem*) rozumíme zobrazení z množiny všech funkcí $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, jež mají na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ všechny parciální derivace prvního řádu, do množiny všech funkčních vektorů definované symbolickým předpisem

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right).$$

2.2.4 Definice

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a funkční vektor $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$, pro něž v oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ existují všechny níže zmíněné parciální derivace. *Gradientem funkce* $f(\vec{x})$ na množině G rozumíme funkční vektor

$$\text{grad } f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\vec{x}) \right).$$

Divergencí funkčního vektoru $\vec{F}(\vec{x})$ na množině G rozumíme funkci

$$\text{div } \vec{F}(\vec{x}) := \sum_{k=1}^r \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\vec{x}).$$

Laplaciánem rozumíme zobrazení, které funkci $f(\vec{x})$ přiřazuje funkci $\Delta f(\vec{x}) := \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ a funkčnímu vektoru $\vec{F}(\vec{x})$ vektor $\Delta \vec{F}(\vec{x}) = (\Delta F_1(\vec{x}), \Delta F_2(\vec{x}), \dots, \Delta F_r(\vec{x}))$.

2.2.5 Definice

Nechť je dán funkční vektor $\vec{G}(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{E}^3$, pro nějž v oblasti $G \subset \mathbf{E}^3$ existují všechny níže zmíněné parciální derivace. *Rotací funkčního vektoru* $\vec{G}(\vec{x})$ na množině G rozumíme funkční vektor

$$\text{rot } \vec{G}(\vec{x}) := \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(\vec{x}); \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(\vec{x}); \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right).$$

2.2.6 Komentář

Právě zavedené základní operace vektorové analýzy mohou být symbolickou aplikací nabla operátoru zjednodušeny do formátů $\text{grad } f(\vec{x}) := \nabla f(\vec{x})$, $\text{div } \vec{F}(\vec{x}) := \langle \nabla | \vec{F}(\vec{x}) \rangle$, resp.

$$\text{rot } \vec{G}(\vec{x}) := \nabla \times \vec{G}(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ G_1(\vec{x}) & G_2(\vec{x}) & G_3(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

kde $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory standardní báze prostoru $\mathbf{E}^3$. Podobně také (symbolicky): $\Delta f(\vec{x}) := \langle \nabla f(\vec{x}) | \nabla f(\vec{x}) \rangle$, nebo výrazně neformálně $\Delta = \nabla^2$.

2.2.7 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *harmonická* na množině $G \subset \mathbf{E}^r$, jestliže $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí rovnost $\Delta f(\vec{x}) = 0$.

2.2.8 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *superharmonická* na množině $G \subset \mathbf{E}^r$, jestliže $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí rovnost $\Delta f(\vec{x}) \leq 0$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *subharmonická* na množině $G \subset \mathbf{E}^r$, jestliže $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí rovnost $\Delta f(\vec{x}) \geq 0$.

2.2.9 Věta – o základních rovnostech vektorové analýzy

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$ a vektory funkcí $\vec{F}(\vec{x}), \vec{G}(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^3$ je libovolná oblast. Pak na množině G platí rovnosti

- $\text{grad } f(\vec{x}) = \frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}\vec{x}};$
- $\text{rot grad } f(\vec{x}) = \vec{0};$
- $\text{div rot } \vec{F}(\vec{x}) = 0;$
- $\text{div grad } f(\vec{x}) = \Delta f(\vec{x});$
- $\text{rot rot } \vec{F}(\vec{x}) = \text{grad div } \vec{F}(\vec{x}) - \Delta \vec{F}(\vec{x});$
- $\text{div}(\vec{F}(\vec{x}) \times \vec{G}(\vec{x})) = \langle \vec{G}(\vec{x}) | \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) \rangle - \langle \vec{F}(\vec{x}) | \text{rot } \vec{G}(\vec{x}) \rangle;$
- $\text{div}(f(\vec{x}) \vec{F}(\vec{x})) = f(\vec{x}) \text{div } \vec{F}(\vec{x}) + \langle \vec{F}(\vec{x}) | \text{grad } f(\vec{x}) \rangle.$

Důkaz:

- prokázání platnosti uvedených rovností vektorové analýzy budeme demonstrovat na důkazu druhého bodu
- snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f(\vec{x}) &:= \nabla \times \text{grad } f(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

- poslední rovnost plyne z příslušnosti funkce $f(\vec{x})$ do třídy $\mathcal{C}^2(G)$, kde je podle důsledku 2.1.18 zaručena záměnnost odpovídajících si parciálních derivací

2.3 Totální diferenciál

V následující sekci se budeme snažit dát zmiňované základní pojmy diferenciálního počtu do souvislosti s topologickými vlastnostmi z první kapitoly. Budeme přitom mít na zřeteli výsledek příkladu 2.1.9, který zjevně prokázal, že ani existence totální derivace není garantem spojitosti funkce více proměnných. Bude tedy třeba nalézt silnější alternativu k pojmu parciální derivace. Takovou alternativou bude pojem totálního diferenciálu, o jehož síle se přesvědčíme za malou chvíli.

2.3.1 Věta – o přírůstku

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na otevřeném intervalu $I = \times_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$ totální derivaci. Potom pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in I$ existují body $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_r \in I$ tak, že platí

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) (x_i - y_i).$$

Důkaz:

- důkaz budeme demonstrovat (bez újmy na obecnosti) na případě $r = 2$, kdy $I = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2)$
- nechť $\vec{x} = (x_1, x_2)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2)$
- zcela bez jakýchkoliv pochybností platí formální rovnost

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(x_1, x_2) - f(y_1, x_2) + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2)$$

- definujme pro $t \in \langle x_1, y_1 \rangle$ funkci $\psi_1(t) = f(t, x_2)$ a pro $t \in \langle x_2, y_2 \rangle$ funkci $\psi_2(t) = f(y_1, t)$
- pak $\psi_1(t), \psi_2(t)$ jsou na svých definičních oborech spojité (viz věta 2.1.8) a mají tam derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2)$, resp. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1, t)$,
- podle Lagrangeovy věty o přírůstku (aplikované odděleně na funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$) tedy existují čísla $\eta_1 \in (x_1, y_1)$ a $\eta_2 \in (x_2, y_2)$ taková, že

$$\psi_1(x_1) - \psi_1(y_1) = \psi'_1(\eta_1) (x_1 - y_1), \quad \psi_2(x_2) - \psi_2(y_2) = \psi'_2(\eta_2) (x_2 - y_2)$$

- dostáváme proto

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{y}) &= \psi_1(x_1) - \psi_1(y_1) + \psi_2(x_2) - \psi_2(y_2) = \psi'_1(\eta_1) (x_1 - y_1) + \psi'_2(\eta_2) (x_2 - y_2) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta_1, x_2) (x_1 - y_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1, \eta_2) (x_2 - y_2), \end{aligned}$$

tj. za body $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ z tvrzení věty stačí volit body $\vec{\xi}_1 = (\eta_1, x_2)$ a $\vec{\xi}_2 = (y_1, \eta_2)$, které zřejmě patří do I

2.3.2 Věta

Nechť je pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ splněn alespoň jeden z předpokladů: 1) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ totální derivaci, která je na $\mathcal{U}(\vec{a})$ omezená; 2) $f(\vec{x})$ má na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ spojitou totální derivaci. Pak $f(\vec{x})$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá.

Důkaz:

- nejprve prokážeme první z obou tvrzení
- funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má podle předpokladů na okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ vlastní parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných
- v okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ jistě leží nějaký otevřený interval tvaru $I = \times_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$, a lze tudíž užít věty o přírůstku 2.3.1
- v ní položíme $\vec{y} = \vec{a}$

- pro $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{a})$ tedy existují $\vec{\xi}_i \in I$ ($i \in \hat{r}$) tak, že

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i)(x_i - a_i)$$

- z omezenosti derivace na $\mathcal{U}(\vec{a})$ plyne existence čísla $K > 0$, pro nějž a všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{a})$ a $i \in \hat{r}$ platí

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) \right| < K$$

- tedy

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < K \sum_{i=1}^r |x_i - a_i| = K \varrho_1(\vec{x}, \vec{a}),$$

kde ϱ_1 je síťová metrika

- pro všechna $\vec{x}$, pro něž $\varrho_1(\vec{x}, \vec{a}) < \frac{\varepsilon}{K}$, tedy při $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, je $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$, což díky ekvivalentnosti metrik v $\mathbf{R}^r$ (viz poznámka 1.1.3) dokazuje požadovanou spojitost funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$
- druhé z dokazovaných tvrzení plyne po aplikaci věty 1.2.27 z faktu, že funkce spojitá v $\vec{a}$ (a definovaná na nějakém okolí bodu $\vec{a}$) je jistěm $\mathcal{U}(\vec{a})$ nutně omezená, a důkaz se proto převádí na bod č. 1

2.3.3 Definice

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je definována na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. *Totálním diferenciálem* funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ nazýváme lineární funkci $df_{\vec{a}}(\vec{h})$ tvaru

$$df_{\vec{a}}(\vec{h}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i,$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_r) \in \mathcal{U}(\vec{0}) \subset \mathbf{E}^r$ a $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ($i \in \hat{r}$), pro niž platí

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i + \eta(\vec{h}), \quad (2.6)$$

přičemž

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0. \quad (2.7)$$

Jestliže taková funkce s vlastnostmi uvedenými výše existuje, říkáme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ *totální diferenciál* nebo že je v bodě $\vec{a}$ *diferencovatelná*. Nezávisle proměnnou h_k ($k \in \hat{r}$) vystupující ve funkci $df_{\vec{a}}(\vec{h})$ budeme nazývat *k-tou diferencí*.

2.3.4 Komentář

Nezávisle proměnnou $\vec{h}$ z definice totálního diferenciálu bývá zvykem označovat také $d\vec{x}$ a její složky (diference) h_k symboly dx_k . Z kontextu definice vyplývá, že hodnota $d\vec{x}$ představuje odchylku (směrově orientovanou) k -té souřadnice libovolného bodu $\vec{x}$ od k -té souřadnice bodu $\vec{a}$, v němž totální diferenciál vyšetřujeme, tedy $dx_k = x_k - a_k$. Dále považujeme za důležité připomenout ekvivalenci rovností

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

2.3.5 Komentář

V následujícím textu vyslovíme jednu ze základních vět diferenciálního počtu funkce více proměnných. Dokážeme, že roli garanta spojitosti převeze pro funkci více proměnných právě totální diferenciál. A navíc také prokážeme, že každá funkce má ve vybraném bodě $\vec{a}$ nejvýše jeden totální diferenciál, tj. že koeficienty α_k v definici 2.3.3 jsou určeny jednoznačně. Toto sdělení je obsahem nadcházející věty.

2.3.6 Věta – o koeficientech totálního diferenciálu

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ totální diferenciál $\sum_{k=1}^r \alpha_k h_k$. Pak pro koeficienty α_k totálního diferenciálu 2.3.3 platí

$$\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}), \quad (k \in \hat{r}).$$

Důkaz:

- v definici 2.3.3 volme pro účely tohoto důkazu $\vec{h} = t \vec{e}_k$, kde $\vec{e}_k$ reprezentuje k -tý vektor standardní báze v $\mathbf{R}^r$

- dostáváme tak sadu rovností

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \alpha_k \right| &= \left| \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \sum_{i=1}^r \alpha_i \delta_{ik} \right| = \\ &= \left| \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^r \alpha_i t \epsilon_{ki} \right| = \frac{|\eta(t \vec{e}_k)|}{|t|} = \frac{|\eta(t \vec{e}_k)|}{\|t \vec{e}_k\|} \end{aligned} \quad (2.8)$$

- poznamenáváme pro úplnost, že v předešlých úvahách bylo využito kromě jiného také definice normy
- pravá strana rovnosti (2.8) má podle definice 2.3.3, resp. podle vztahu (2.7) pro $t \rightarrow 0$ limitu nula
- proto tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \alpha_k \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\eta(t \vec{e}_k)|}{\|t \vec{e}_k\|} = |\vec{h} = t \vec{e}_k| = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0,$$

kde bylo využito věty o vztahu limity bez přívlastku a limity vzhledem k množině

- jelikož limita bez přívlastku $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|}$ existuje, musí podle věty 1.2.11 existovat i limita vzhledem k úsečce $\{(0, 0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0, 0) : t \in \mathcal{U}_\delta(0)\} \subset \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ ležící v jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ a obě limity se musejí rovnat
- protože je rovnost $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0$ garantována přímo v definici totálního diferenciálu, důkaz se tím uzavírá, neboť

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \alpha_k \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t \vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t} - \alpha_k = 0$$

- odtud $\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$

2.3.7 Věta

Nechť má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ totální diferenciál. Pak je v bodě $\vec{a}$ spojitá a má v něm derivaci.

Důkaz:

- podle definice totálního diferenciálu platí pro $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$

$$|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})| = \left| \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i + \eta(\vec{h}) \right| \leq \|\vec{h}\|_1 \max_{i \in \hat{r}} |\alpha_i| + |\eta(\vec{h})| \rightarrow 0$$

- přitom $\|\vec{h}\|_1 = \sum_{i=1}^r |h_i|$ je síťová norma vektoru $\vec{h}$
- tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ platí pro funkční hodnoty nerovnost $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$
- to dokazuje spojitost funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$
- existence derivace plyne přímo z věty 2.3.6

2.3.8 Komentář – o geometrickém významu totálního diferenciálu

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ definována na okolí bodu (x_0, y_0) . Potom má její totální diferenciál následující význam. Nechť $g_{\alpha, \beta}(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je lineární funkce definovaná předpisem

$$g_{\alpha, \beta}(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Grafem této funkce je rovina procházející bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbf{E}^3$. Potom funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál právě tehdy, když existují taková $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, že pro funkci

$$\eta(x - x_0, y - y_0) := f(x, y) - g_{\alpha, \beta}(x, y)$$

platí

$$\frac{\eta(h_1, h_2)}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$$

pro $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$, tj. odchylka roviny $z = g_{\alpha, \beta}(x, y)$ od grafu funkce $f(x, y)$ je veličina nekonečně malá vzhledem ke vzdálenosti $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Taková rovina se pak (podle níže uvedené definice) nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) . Je tedy možné říci, že $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál právě tehdy, když v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbf{E}^3$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$. Z výše uvedeného proto vyplývá, že normálovým vektorem *tečné nadroviny* ke grafu (1.1) obecné funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $(a_1, a_2, \dots, a_r, f(\vec{a})) \in \mathbf{E}^{r+1}$ je vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\vec{a}), -1 \right). \quad (2.9)$$

2.3.9 Definice

Nechť má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ totální diferenciál $\sum_{k=1}^r \alpha_k h_k$. Pak nadrovinu popsanou rovnicí

$$y - f(\vec{a}) = \sum_{k=1}^r \alpha_k (x_k - a_k)$$

budeme nazývat *tečnou nadrovinou* ke grafu Γ_f v jeho bodě $(\vec{a}, f(\vec{a}))$.

2.3.10 Příklad

Nalezneme rovnici tečné roviny k funkci $z(x, y) = \sqrt{50 - x^2 - y^2}$ v bodě $\vec{a} = (3, 4)$. Funkční hodnotou je $z(3, 4) = 5$. Dále

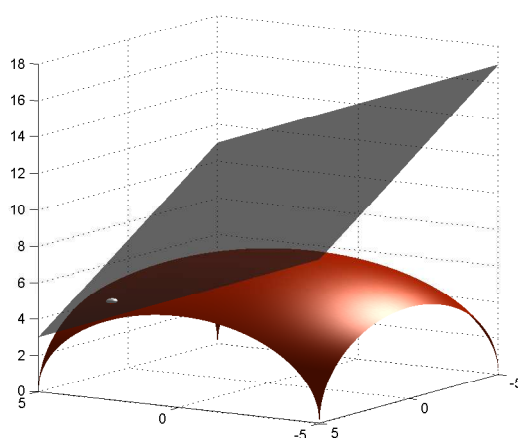
$$\frac{\partial z}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{-x}{\sqrt{50 - x^2 - y^2}}(\vec{a}) = -\frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(\vec{a}) = \frac{-y}{\sqrt{50 - x^2 - y^2}}(\vec{a}) = -\frac{4}{5}.$$

Pak rovnici tečné roviny získáme z předpisu totálního diferenciálu

$$z - 5 = -\frac{3}{5}(x - 3) - \frac{4}{5}(y - 4),$$

která nakonec vede k finálnímu tvaru $3x + 4y + 5z = 50$. Výsledek úlohy je vyobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 2.12

Tečná rovina ke grafu funkce.

2.3.11 Příklad

Zkoumejme totální diferenciál funkce (2.2) z příkladu 2.1.9. Podle již zjištěných skutečností by totální diferenciál této funkce v bodě $\vec{0}$ neměl existovat. Kdyby existoval, pak by ale jistě měl podle věty 2.3.6 tvar

$$df_{\vec{0}}(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) dy = 0 dx + 0 dy = 0.$$

Pro zbytkovou funkci by tudíž platilo

$$\eta(h, k) = \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Ovšem limita

$$\lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}} \frac{hk}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

neexistuje, jak se lze přesvědčit, hledáme-li limitu vzhledem k přímkám $M_\gamma = \{(k, h) \in \mathbf{E}^2 : k = \gamma h\}$. Snadno nahlédneme, že limita

$$\lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}, (h,k) \in M_\gamma} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma h^2}{h^3(1 + \gamma^2)^{3/2}} = \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2)^{3/2}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$$

neexistuje, a tedy není splněna podmínka (2.7) z definice totálního diferenciálu 2.3.3. Zkoumaná funkce proto skutečně v bodě $\vec{0}$ totální diferenciál nemá.

2.3.12 Příklad

V tomto příkladě ukážeme, že funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2|xy|}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (2.10)$$

má obě parciální derivace v bodě $\vec{0} = (0, 0)$ nulové, je v tomto bodě spojitá, ale nemá v něm totální diferenciál. Kdyby totální diferenciál existoval, pak by měl podle věty 2.3.6 tvar

$$df_{\vec{0}}(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) dy = 0 dx + 0 dy = 0.$$

Pro zbytkovou funkci by pak platilo

$$\eta(h, k) = \frac{2|hk|}{|h| + |k|}.$$

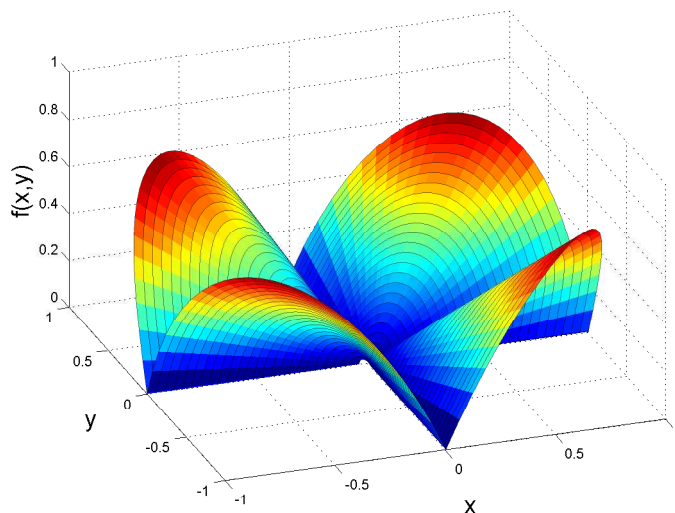
Limita

$$\lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}} \frac{2|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}(|h| + |k|)}$$

ale opět neexistuje, neboť hledáme-li limitu vzhledem k přímkám $M_\gamma = \{(k, h) \in \mathbf{E}^2 : k = \gamma h\}$, zjišťujeme, že limita

$$\lim_{(h,k) \rightarrow \vec{0}, (h,k) \in M_\gamma} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2|\gamma|h^2}{h^2 \sqrt{1 + \gamma^2}} \frac{1}{1 + |\gamma|} = \frac{2|\gamma|}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \frac{1}{1 + |\gamma|}$$

závisí na volbě konstanty $\gamma \in \mathbf{R}$, a tedy na základě platnosti věty 1.2.11 limita bez přívlastku neexistuje. Zkoumaná funkce proto nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál, a tudíž neexistuje tečná rovina ke grafu této funkce v bodě grafu $(0, 0, 0)$ – viz také obrázek.



Obrázek 2.13
Graf funkce $f(x, y) = \frac{2|xy|}{|x|+|y|}$.

Snadno nahlédneme (ostatně již jsme tohoto faktu užili), že funkce (2.10) má v bodě $\vec{0}$ obě parciální derivace a navíc je v tomto bodě také spojitá. O tom se přesvědčíme z definice. Máme dokázat, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ splňují všechny příslušné funkční hodnoty nerovnost $|f(x, y)| < \varepsilon$. Tvzení $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$ je přitom ekvivalentní nerovnosti $x^2 + y^2 < \delta^2$. Prokážeme nyní, že jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ položíme $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, bude definiční vztah splněn. Užijeme přitom triviálních nerovností

$$\left| \frac{2xy}{|x| + |y|} \right| \leq |x| + |y|, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2x^2 + 2y^2},$$

o jejichž platnosti se lze přesvědčit snadnými úpravami. Pak tedy, je-li $(x, y) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{0})$, je zřejmě splněna nerovnost

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Tedy ale

$$|f(x, y)| = \left| \frac{2xy}{|x| + |y|} \right| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2x^2 + 2y^2} < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

To završuje důkaz spojitosti funkce (2.10).

2.3.13 Komentář

Úzus značení totálního diferenciálu bývá poněkud různorodý. Existuje totiž několik všeobecně uznávaných variant. Má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ totální diferenciál, lze kromě tvaru z definice 2.3.3 užít i alternativy

$$df_{\vec{a}}(dx_1, dx_2, \dots, dx_r) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) dx_k,$$

resp.

$$df_{\vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})(x_k - a_k).$$

2.3.14 Definice

Nechť $m \in \mathbf{N}$. Nechť má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ m -tý totální diferenciál $d^m f_{\vec{x}}(\vec{h})$ ve všech bodech $\vec{x}$ okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Označme $g(\vec{x}) := d^m f_{\vec{x}}(\vec{h})$ funkci chápanou jako zobrazení z okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ do množiny všech reálných čísel, kde se $\vec{h}$ pro účely této definice chápe jako vektor parametrů. *Totálním diferenciálem řádu $m+1$ funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ rozumíme funkci $d^{m+1} f_{\vec{a}}(\vec{h})$ definovanou předpisem $d^{m+1} f_{\vec{a}}(\vec{h}) := dg_{\vec{a}}(\vec{h})$, pokud je pravá strana definována (v souladu s definicí 2.3.3).*

2.3.15 Komentář

Tvar definice 2.3.14 bývá označován jako *rekurentní*, neboť k určení diferenciálu m -tého řádu je nezbytné znát diferenciál řádu $m-1$. Jak definice funguje si ozřejmíme na následujícím příkladě. Pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ označme v souladu s definicí 2.3.3 symbolem $df_{\vec{x}}(\vec{h})$ její totální diferenciál vypočtený v bodě $\vec{x}$ a položme $g(\vec{x}) := df_{\vec{x}}(\vec{h})$. Funkce $g(\vec{x})$ je tedy definována všude tam, kde má funkce $f(\vec{x})$ totální diferenciál. Odtud tedy

$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) h_k.$$

Podle definice 2.3.14 je nyní třeba vypočítat (první) totální diferenciál této funkce. Pokud v bodě $\vec{a}$ existuje, nutně platí

$$d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h}) = dg_{\vec{a}}(\vec{h}) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}) h_k = \sum_{k=1}^r \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{\ell=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x}) h_\ell \right) \Big|_{\vec{a}} h_k = \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(\vec{a}) h_k h_\ell.$$

Analogickým postupem lze získat také tvar diferenciálů vyšších řádů

$$d^m f_{\vec{a}}(\vec{h}) = \sum_{k_1=1}^r \sum_{k_2=1}^r \dots \sum_{k_m=1}^r \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}}(\vec{a}) h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_m}. \quad (2.11)$$

Povšimněte si, že se ve výrazu (2.11) vyskytují všechny přípustné varianty m -té parciální derivace. Zápis (2.11) ovšem nevyužívá důsledku 2.1.18 o záměnnosti smíšených parciálních derivací. Užijeme-li ho, tedy předpokládáme-li, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^m(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$, zjistíme, že parciální derivace

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}}(\vec{a}) \quad (2.12)$$

má

$$\frac{m!}{\ell_1! \ell_2! \dots \ell_r!} \quad (2.13)$$

shodných alternativ, kde $\ell_k (k \in \hat{r})$ je počet výskytů proměnné x_k v derivaci (2.12). Vzorec (2.13) představuje počet permutací r prvků s opakováním prvku č. 1 ℓ_1 -krát, prvku č. 2 ℓ_2 -krát atd. Přitom $\sum_{k=1}^r \ell_k = m$.

2.3.16 Věta

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivaci, která je spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

Důkaz:

- dle předpokladů věty má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ spojitě první parciální derivace podle všech proměnných, tj. existuje $\delta > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$
- v tom okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ jistě existuje otevřený interval $I \subset \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$, jehož je $\vec{a}$ součástí
- podle věty o přírůstku 2.3.1 proto existují pro pevně zvolený (dostatečně malý) vektor $\vec{h}$ vektory $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_r \in I$, pro které platí $\varrho(\vec{\xi}_i(\vec{h}), \vec{a}) \leq \|\vec{h}\|$, tak, že platí rovnost

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) h_i,$$

- odtud

$$\eta(\vec{h}) = f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) h_i = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \right) h_i$$

- a tedy

$$\frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \right| \frac{|h_i|}{\|\vec{h}\|} \leq \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \right| \frac{\|h\|_1}{\|\vec{h}\|},$$

kde $\|h\|_1 = \sum_{k=1}^r |h_k|$ je síťová metrika vektoru $\vec{h}$

- v konečnědimenzionálním prostoru jsou ale podle věty 6.3.5 ze skript [7] všechny metriky ekvivalentní
- existuje tudíž $\alpha > 0$ tak, že pro všechny vektory $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ platí: $\|\vec{x}\|_1 \leq \alpha \|\vec{x}\|$
- protože jsou parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ na okolí bodu $\vec{a}$ spojitě, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že z nerovnosti $\varrho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$ plyne

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}; \quad (i \in \hat{r})$$

- pro $\|\vec{h}\| < \delta$ platí také nerovnost $\varrho(\vec{\xi}_i(\vec{h}), \vec{a}) < \delta$
- tedy pro $\|\vec{h}\| < \delta$ dostáváme konečně

$$\frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} \leq \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$$

- tedy

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

- tím je existence hledaného totálního diferenciálu prokázána

2.3.17 Komentář

Na základě platnosti předešlé věty získává symbol $\mathcal{C}^k(G)$ novou (podstatně silnější) interpretaci. Doposud jsme zápisem $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^k(G)$ rozuměli skutečnost, že funkce $f(\vec{x})$ má na oblasti G spojitě všechny parciální derivace řádu $k \in \mathbf{N}$. Nyní ale byla de facto dokázána implikace

$$f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^k(G) \Rightarrow f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^{k-1}(G).$$

Tento pravdivý výrok nevyplývá pouze z věty 2.3.16, ale také z věty 2.3.7. Symbol $\mathcal{C}^k(G)$ lze tedy nově interpretovat jako množinu funkcí, které mají na množině G spojitě parciální derivace až do řádu k včetně.

2.3.18 Věta – o kvadratické formě druhého totálního diferenciálu

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, která je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ třídy $\mathcal{C}^2(G)$. Pak má tato funkce na G druhý totální diferenciál $d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x})$, který představuje r -dimenzionální kvadratickou formu, jejíž maticí je matice Hessova (viz definice 2.1.13), tj. pro každé $\vec{a} \in G$ platí rovnost

$$d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x}) = d\vec{x}^T \mathbb{H}_{\vec{a}} d\vec{x}. \quad (2.14)$$

Důkaz:

- za daných okolností je Hessova matice jistě maticí symetrickou, což je pro důkaz tvrzení nezbytné prokázat
- předpis $d\vec{x}^T \mathbb{H}_{\vec{a}} d\vec{x}$ tudíž skutečně reprezentuje kvadratickou formu
- navíc příslušnost funkce ke třídě $\mathcal{C}^2(G)$ garantuje podle věty 2.3.16 existenci druhého totálního diferenciálu
- zbývá tudíž pouze prokázat rovnost (2.14), což je ale banální

2.3.19 Věta – o vzorcích pro výpočet směrové parciální derivace

Nechť má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ totální diferenciál. Potom má v bodě $\vec{a}$ parciální derivaci v každém směru $\vec{s} \neq \vec{0}$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \text{grad} f(\vec{a}) | \vec{s} \rangle. \quad (2.15)$$

Důkaz:

- z definice směrové derivace a totálního diferenciálu dostáváme

$$\frac{f(\vec{a} + t\vec{s}) - f(\vec{a})}{t\|\vec{s}\|} = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) t s_i + \eta(t\vec{s})}{t\|\vec{s}\|} = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) s_i + \frac{\eta(t\vec{s})}{t\|\vec{s}\|}$$

- podle vlastnosti funkce $\eta(\vec{h})$ z definice totálního diferenciálu platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\eta(t\vec{s})|}{|t|\|\vec{s}\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\eta(t\vec{s})}{\|t\vec{s}\|} \right| = \left| \frac{\vec{h} = t\vec{s}}{\|\vec{h}\| = |t| \cdot \|\vec{s}\|} \right| = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\eta(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

- poznamenáváme také, že i zde bylo užito věty 1.2.15

- z předešlého mezivýpočtu vyplývá, že

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta(t \vec{s})}{t \|\vec{s}\|} = 0$$

- odsud

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) s_i = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \text{grad} f(\vec{a}) | \vec{s} \rangle$$

2.3.20 Příklad

Pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} 5x + \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (1, 0); \\ 5 & (x, y) = (1, 0); \end{cases}$$

určeme směrovou parciální derivaci ve směru $\vec{s} = (2, -1)$ v bodě $\vec{a} = (1, 0)$, existuje-li. Není těžké ukázat, že $\text{grad} f(1, 0) = (5, 0)$. Odtud

$$\frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \text{grad} f(\vec{a}) | \vec{s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle (5, 0) | (2, -1) \rangle = 2\sqrt{5}.$$

Ale podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h, -h) - f(1, 0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[5 + 10h + \frac{h}{4} - 5 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{41}{4},$$

což jasně ukazuje, že předpoklad ve větě 2.3.19 není splněn, a tedy totální diferenciál v bodě $(1, 0)$ jistě neexistuje.

2.3.21 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a bod $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$. Nechť pro každý bod $\vec{b}$ z jistého okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ má funkce $f(\vec{x})$ totální diferenciál $\text{d}f_{\vec{b}}(\vec{x})$, pro nějž platí $\text{d}f_{\vec{b}}(\vec{x}) = 0$. Pak existuje $C \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ platí rovnost $f(\vec{x}) = C$.

Důkaz:

- zvolme bod $\vec{b} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ libovolně
- z předpokladů věty plyne, že $\text{d}f_{\vec{b}}(\vec{x}) = 0$
- podle vztahu (2.15) jsou tedy všechny směrové derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{b})$ v bodě $\vec{b}$ nulové
- navíc z existence totálního diferenciálu v každém bodě množiny $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ vyplývá, že funkce je na $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ spojitá
- shrnuto tedy: v každém směru $\vec{s}$ a v každém bodě množiny $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ jsou směrové derivace nulové, tudíž funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je konstantní na $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$

2.3.22 Komentář

Právě dokázanou větu lze jednoduše shrnout následujícím způsobem. Má-li funkce na okolí vybraného bodu nulový totální diferenciál, pak je na tomto okolí konstantní. Raději upozorňujeme čtenáře, že podobné tvrzení vyslovené pro jediný bod není platné. Tedy existují funkce, jež mají v bodě nulový totální diferenciál, a přesto nejsou konstantní. To je doufejme očividné. Stejně je tomu pro derivaci funkce jedné proměnné.

2.3.23 Důsledek

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a bod $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$. Nechť pro každý bod $\vec{b}$ z jistého okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ mají funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ totální diferenciály $df_{\vec{b}}(\vec{x})$, resp. $dg_{\vec{b}}(\vec{x})$, pro něž platí $df_{\vec{b}}(\vec{x}) = dg_{\vec{b}}(\vec{x})$. Pak existuje $C \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ platí rovnost $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + C$.

2.3.24 Věta – o derivaci složené vektorové funkce

Nechť vektorová funkce $\vec{f}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^s$ má totální diferenciál v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a dále vektorová funkce $\vec{g}(\vec{y}) : \mathbf{E}^s \mapsto \mathbf{E}^p$ má totální diferenciál v bodě $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a}) \in \mathbf{E}^s$. Potom také složená vektorová funkce $\vec{F}(\vec{x}) := (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^p$ má totální diferenciál v bodě $\vec{a}$ a platí následující tvrzení. Je-li $\mathbb{A}$ Jacobiho maticí vektorové funkce $\vec{f}(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ a $\mathbb{B}$ Jacobiho maticí vektorové funkce $\vec{g}(\vec{y})$ v bodě $\vec{b}$, pak Jacobiho matice $\mathbb{C}$ složené vektorové funkce $\vec{F}(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ je dána vzorcem $\mathbb{C} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$.

Důkaz:

- všechny zúčastněné funkce mají odpovídající totální diferenciál, tudíž podle věty 2.3.6 mají též příslušné parciální derivace (a jsou navíc i spojité)
- věta 2.1.10 aplikovaná odděleně na složky $F_k(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ vede přímo ke vztahu

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a}); \quad (k \in \widehat{p}, i \in \widehat{r}) \quad (2.16)$$

- z předpokladů věty také víme, že

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \end{pmatrix}(\vec{a}), \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \frac{\partial g_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_s} \end{pmatrix}(\vec{b})$$

- pak tedy podle již dokázané rovnosti (2.16) platí pro prvek $\mathbb{C}_{ki}$ ($k \in \widehat{p}, i \in \widehat{r}$) Jacobiho matice vektorové funkce $\vec{F}(\vec{x}) := (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^p$ v bodě $\vec{a}$ rovnost

$$\mathbb{C}_{ki} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^s \mathbb{B}_{kj} \cdot \mathbb{A}_{ji}$$

- odtud tedy $\mathbb{C} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$

Kapitola 3

Posloupnosti a řady funkcí více proměnných

Protože nás ve čtvrté kapitole čeká studium polynomiálních aproximací funkcí více proměnných, kdy se budeme snažit nahrazovat komplikovanější funkce polynomiálními ekvivalenty tvaru

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \beta_{k_1 k_2 \dots k_r} (x_1 - c_1)^{k_1} (x_2 - c_2)^{k_2} \dots (x_r - c_r)^{k_r}$$

(podobně jako jsme to předvedli pro funkce jediné proměnné ve skriptech [7]), bude nezbytné nejprve probádat vlastnosti funkcionálních řad funkcí více proměnných.

3.1 Posloupnosti funkcí více proměnných

Jelikož jsou vlastnosti funkcionálních řad silně propojeny s vlastnostmi posloupností, budeme se v úvodu kapitoly zabírat právě jimi.

3.1.1 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}^r$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na M nazýváme *posloupností funkcí* na M . Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(\vec{x})$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots \quad \text{nebo} \quad (f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}. \quad (3.1)$$

Přírozené číslo n přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(\vec{x})$ n -tým členem posloupnosti (3.1).

3.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (3.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že posloupnost funkcí (3.1) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přírozené n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí nerovnost $|f_n(\vec{c}) - \gamma| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost funkcí (3.1) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N .

3.1.3 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (3.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť pro každé $\vec{c} \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(\vec{c})$ hodnotu limity posloupnosti $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na množině N definována funkce $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (3.1) (nebo alternativně *limitní funkcí*) a značíme $f(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x})$. *Oborem konvergence* O posloupnosti (3.1), který je zároveň definičním oborem limitní funkce, nazýváme množinu všech bodů $\vec{c} \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

3.1.4 Definice

Nechť (3.1) je posloupnost funkcí definovaných na neprázdné množině $M \subset \mathbb{E}^r$. Řekneme, že tato posloupnost *stejněměrně konverguje na M* k funkci $f(\vec{x})$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$.

3.1.5 Komentář

Bodovou konvergenci značíme obvykle symbolem $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$, stejněměrnou pak $f_n(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x})$. Rozdíl mezi bodovou a stejněměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall \vec{x} \in M) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

- stejněměrná konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Stejněměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního" n_0 , které plní svoji roli pro všechna $\vec{x} \in M$.

3.1.6 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejněměrnou konvergenci

Posloupnost funkcí (3.1) je stejněměrně konvergentní na $M \subset \mathbb{E}^r$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad m, n \geq n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Důkaz:

- První implikace:

- nechť $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ stejněměrně konverguje na M k jisté funkci $f(\vec{x})$
- pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m, n \geq n_0$, a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí

$$|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- a tedy $|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| \leq |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| + |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$

- Druhá implikace:

- nechť posloupnost funkcí splňuje vztah (3.4)
- pak podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti posloupnost (3.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině M (označme ji $f(\vec{x})$)
- chceme dokázat, že $f_n(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x})$ na M
- zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (3.4) n_0 tak, aby pro všechna $m, n \geq n_0$ platilo

$$|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro libovolné pevně zvolené $n \geq n_0$ a pro m rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ platnou pro každé $\vec{x} \in M$

- tím je důkaz zkompleťován

3.1.7 Věta – supremální kritérium

Nechť $f(\vec{x})$ a $f_n(\vec{x})$ pro všechna n jsou funkce definované na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{\vec{x} \in M} |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|$$

pro každé n . Pak posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(\vec{x})$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz:

- pro všechna $\vec{x} \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| \leq \sigma_n$
- První implikace:
 - předpokládejme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$
 - z definice limity číselné posloupnosti $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$
 - to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí také $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$, a tedy $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
- Druhá implikace:
 - předpokládejme, že $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
 - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$, k němuž jistě existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon/2$
 - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $\sigma_n \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$

3.1.8 Věta

Nechť posloupnost (3.1) funkcí spojitých na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně konverguje na M k funkci $f(\vec{x})$. Potom je funkce $f(\vec{x})$ na M spojitá.

Důkaz:

- abychom dokázali spojitost funkce $f(\vec{x})$ na M , musíme dokázat spojitost pro každé $\vec{c} \in M$
- zvolme libovolné $\varepsilon > 0$
- ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ plyne, že k číslu ε existuje index n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbf{N}) (\forall \vec{x} \in M) : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.5)$$

- ze spojitosti funkce $f_{n_0}(\vec{x})$ v bodě $\vec{c}$ plyne, že k číslu ε existuje okolí $\mathcal{U}(\vec{c})$ takové, že

$$(\forall \vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{c}) \cap M) : \quad |f_{n_0}(\vec{x}) - f_{n_0}(\vec{c})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.6)$$

- zvolíme-li index n_0 tak, aby platilo (3.5), a okolí $\mathcal{U}(\vec{c})$ tak, aby platilo (3.6), dostáváme celkem, že k číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{U}(\vec{c})$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}(\vec{c}) \cap M$ platí

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{c})| \leq |f(\vec{x}) - f_{n_0}(\vec{x})| + |f_{n_0}(\vec{x}) - f_{n_0}(\vec{c})| + |f_{n_0}(\vec{c}) - f(\vec{c})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

- tím je důkaz dokončen

3.1.9 Komentář

Následující věta poněkud předbíhá probranou látku. Budeme se v ní zabírat možností záměny limity a vícerozměrného integrálu. Teorie vícerozměrných integrací ale nebyla dosud v těchto skriptech probrána. Doporučujeme proto čtenáři buď nastudovat základy Lebesgueova integrálu ze skript [8] nebo následující větu v této chvíli přeskočit a vrátit se k ní až po nastudování poslední kapitoly těchto skript, v níž budou probrány riemannovské integrační postupy.

3.1.10 Věta

Nechť je dána posloupnost $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ funkcí spojitých na neprázdné kompaktní (tj. omezené a uzavřené) množině $K \subset \mathbb{E}^r$. Nechť zadaná posloupnost stejnoměrně konverguje na množině K k funkci $f(\vec{x})$. Potom platí

$$\int_K f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(\vec{x}) \, d\vec{x}. \quad (3.7)$$

Důkaz:

- označme nejprve symbolem $\mu(K)$ klasickou r -dimenzionální míru (objem) množiny K
- je-li $\mu(K) = 0$, je tvrzení věty triviální, neboť vztah (3.7) se za tohoto předpokladu redukuje na limitování nulové posloupnosti
- předpokládejme tedy, že K není μ -nulová, tj. že nemá nulovou míru
- funkce $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots$ jsou na množině K spojitě, a proto všechny integrály $\int_K f_n(\vec{x}) \, d\vec{x}$ existují (jak v riemannovském tak v lebesgueovském smyslu) a jsou konečné
- podle věty 3.1.8 je však spojitá také funkce $f(\vec{x})$ a levá strana rovnosti (3.7) tedy rovněž existuje
- označíme-li

$$\gamma_n := \int_K f_n(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

je naším úkolem prokázat, že posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k hodnotě $\gamma := \int_K f(\vec{x}) \, d\vec{x}$, tj. že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \geq n_0$ je splněna nerovnost

$$|\gamma_n - \gamma| = \left| \int_K f_n(\vec{x}) \, d\vec{x} - \int_K f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| < \varepsilon$$

- z definice stejnoměrné konvergence 3.1.4 plyne, že k pevně zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \vec{x} \in K) : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{\mu(K)}$$

- odtud a z vlastností vícerozměrného integrálu plyne

$$\begin{aligned} \left| \int_K f_n(\vec{x}) \, d\vec{x} - \int_K f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| &= \left| \int_K (f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})) \, d\vec{x} \right| \leq \int_K |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| \, d\vec{x} \leq \\ &\leq \mu(K) \cdot \sup_{\vec{x} \in K} |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| = \mu(K) \cdot \max_{\vec{x} \in K} |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{\mu(K)} \cdot \mu(K) = \varepsilon, \end{aligned}$$

což podle definice limity dokazuje platnost vztahu (3.7)

3.1.11 Komentář

Obsah předešlé věty lze vyjádřit také jednoduchou větou: "Pro stejnoměrně konvergentní posloupnost vícerozměrných spojitých funkcí lze na kompaktní množině zaměnit limitu a integrál," tedy

$$\int_K \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(\vec{x}) d\vec{x}.$$

3.1.12 Komentář

Zde nabádáme čtenáře, aby v teorii Lebesgueova integrálu vyhledal věty, které řeší stejnou problematiku jako právě probraná věta, ale za podstatně slabších předpokladů. Jedná se zejména o slavnou Lebesgueovu větu o integrabilní majorantě (viz věta 5.3.52 ve skriptech [8]). Ta prokazuje, že za jistých okolností lze záměnu limity a integrálu provést i bez splnění vlastnosti stejnoměrné konvergence.

3.1.13 Věta

Nechť je dána posloupnost (3.1) funkcí, pro kterou existují na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$. Nechť posloupnost (3.1) konverguje bodově v G k limitní funkci $f(\vec{x})$. Nechť navíc posloupnost

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right)_{n=1}^{\infty}$$

stejnoměrně konverguje na G . Pak má funkce $f(\vec{x})$ parciální derivaci podle x_k všude v G a pro každé $\vec{x} \in G$ platí rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{a}). \quad (3.8)$$

Důkaz:

- zvolme $\vec{a} \in G$ libovolně a prokažme, že rovnost (3.8) skutečně platí
- zaveďme v souladu s komentářem 2.1.3 nové funkce $\psi_n(t) = f_n(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_r)$ a novou množinu

$$G_{\vec{a}} := \{t \in \mathbf{R} : \vec{x} \in G \wedge x_1 = a_1 \wedge x_2 = a_2 \wedge \dots \wedge x_{k-1} = a_{k-1} \wedge x_{k+1} = a_{k+1} \wedge \dots \wedge x_r = a_r\}$$

- pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je $\text{Dom}(\psi_n(t)) = G_{\vec{a}}$
- zjevně $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{d\psi_n}{dt}(a_k)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$
- díky dědičnosti bodové konvergence konverguje posloupnost $(\psi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ alespoň v jednom bodě
- díky dědičnosti stejnoměrné konvergence konverguje posloupnost $(\frac{d\psi_n}{dt})_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně na $G_{\vec{a}}$
- tím jsou pro posloupnost $(\psi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ splněny předpoklady věty 1.3.12 ze skript [7], podle níž existují limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) := \psi(t)$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d\psi_n}{dt} := \sigma(t)$ a platí pro ně rovnost $\sigma(t) = \frac{d\psi}{dt}$
- ta je ale po dosazení bodu $\vec{a}$ ekvivalentní rovnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d\psi_n}{dt}(a_k) = \sigma(a_k) = \frac{d\psi}{dt}(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}) \Big|_{\vec{a}}$$

- jelikož byl bod $\vec{a}$ volen v G libovolně, je tvrzení dokázáno

3.1.14 Komentář

Také tato věta by mohla být podobně jako věta 3.1.10 vyslovena v silnějších verzích. Pro naše účely ale postačí toto znění.

3.2 Řady funkcí více proměnných

Dalším zcela přirozeným krokem v teorii funkcí více proměnných je zavedení a analýza funkčních řad, tj. řad, jejichž členy jsou funkce více proměnných.

3.2.1 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (3.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Potom nekonečný součet $f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \dots + f_n(\vec{x}) + \dots$ nazýváme *řadou funkcí* na M a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \quad (3.9)$$

3.2.2 Definice

Nechť je dána funkční řada (3.9) definovaná na neprázdné množině M . Funkci $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n f_k(\vec{x})$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $\vec{x} \in M$ budeme nazývat *n -tým částečným součtem* řady (3.9) a posloupnost $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady asociovanou se zadanou funkční řadou.

3.2.3 Definice

Nechť je dána funkční řada (3.9) definovaná na neprázdné množině M . Nechť $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost jejích částečných součtů. Řekneme, že řada (3.9) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $(s_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (3.9) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N . Vlastní limitu $s(\vec{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\vec{x})$ posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady (součtovou funkcí)* (3.9) a zapisujeme

$$s(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \quad (3.10)$$

Definiční obor $\text{Dom}(s)$, tj. množinu všech $\vec{c} \in M$, pro něž posloupnost $(s_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (3.9) a značit symbolem O .

3.2.4 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *stejněměrně* ke svému součtu $s(\vec{x})$ a označíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \stackrel{M}{\equiv} s(\vec{x})$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na M stejněměrně k funkci $s(\vec{x})$.

3.2.5 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad

Řada funkcí (3.9) konverguje na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geq n \geq n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 3.1.6

- označíme-li totiž $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti

$$s_{n-1}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}), \quad s_m(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m f_k(\vec{x})$$

- podle věty 3.1.6 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geq n \geq n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost $|s_m(\vec{x}) - s_{n-1}(\vec{x})| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}) \right| = |f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon$$

3.2.6 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ konverguje na M stejnoměrně.

3.2.7 Věta – nutná podmínka stejnoměrné konvergence

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})(m \geq n \geq n_0)(\forall \vec{x} \in M) : |f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m \geq n \geq n_0$, platí také při speciální volbě, kdy $m = n$
- pak ale $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq n_0)(\forall \vec{x} \in M) : |f_n(\vec{x})| = |f_n(\vec{x}) - o(\vec{x})| < \varepsilon$, kde $o(\vec{x})$ je symbol pro nulovou funkci
- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k nulové funkci

3.2.8 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ definované na neprázdné množině M . Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí $|f_n(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x})$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$.

3.2.9 Věta – srovnávací kritérium

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je stejnoměrně konvergentní na M . Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergentní na M , tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 3.2.5

- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ stejnoměrně konverguje na M , tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m \geq n \geq n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí

$$0 \leq g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \dots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje m_0 tak, že pro všechna $\vec{x} \in M$ a všechny indexy $n \geq m_0$ platí $|f_n(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x})$
- pro zvolené ε a všechna $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ pak platí

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| \leq |f_n(\vec{x})| + |f_{n+1}(\vec{x})| + \dots + |f_m(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \dots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

3.2.10 Důsledek

Konverguje-li řada na neprázdné množině M regulárně, konverguje na M také stejnoměrně.

3.2.11 Věta – Weierstrassovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(\vec{x})$ jsou funkce a pro všechna $\vec{x} \in M \subset \mathbb{E}^r$ a všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \widehat{n}_0$ je $|f_n(\vec{x})| \leq a_n$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergují na M , tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme $g_n(\vec{x}) := a_n$ pro všechna $\vec{x} \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

3.2.12 Věta – supremální kritérium pro řady funkcí

Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ na neprázdné množině $M \subset \mathbb{E}^r$. Označme $\sigma_n := \sup_{\vec{x} \in M} |g_n(\vec{x})|$. Konverguje-li číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- plyne ihned z Weierstrassova kritéria

3.2.13 Věta

Nechť řada (3.9) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na neprázdné množině $M \subset \mathbb{E}^r$. Potom součtem této řady je funkce spojitá na M .

Důkaz:

- tvrzení této věty plyne bezprostředně z věty 3.1.8
- je-li funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ řadou spojitých funkcí, pak jistě také příslušná posloupnost částečných součtů $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je posloupností spojitých funkcí
- z předpokladů věty ale vyplývá, že $s_n(\vec{x}) \rightrightarrows s(\vec{x})$
- tím je zaručeno splnění předpokladů věty 3.1.8 a limita $s(\vec{x})$ posloupnosti částečných součtů je tudíž spojitou funkcí
- součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ je tedy za daných okolností spojitá funkce

3.2.14 Věta

Předpokládejme, že řada (3.9) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje na neprázdné kompaktní množině $K \subset \mathbb{E}^r$ a že jejím součtem na K je funkce $s(\vec{x})$. Potom číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \int_K f_n(\vec{x}) d\vec{x}$ konverguje a pro její součet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_K f_n(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K s(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Důkaz:

- aplikujeme větu 3.1.10 na posloupnost $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- označme tedy $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n f_k(\vec{x})$
- jelikož všechny funkce $f_n(\vec{x})$ jsou podle předpokladů spojitě, je také každá funkce $s_n(\vec{x})$ na K spojitá
- dále na K platí, že $s_n(\vec{x}) \Rightarrow s(\vec{x})$, čímž jsou naplněny předpoklady věty 3.1.10, a z jejího tvrzení tudíž vyplývá, že

$$\int_K \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K s_n(\vec{x}) d\vec{x}$$

- dále snadno

$$\int_K s(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K \sum_{k=1}^n f_k(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_K f_k(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_K f_k(x) d\vec{x}$$

3.2.15 Komentář

Na tomto místě je vhodné upozornit, že také právě dokázaná věta má (podobně jako to bylo probráno v komentáři 3.1.12 o posloupnostech) své kvalitnější verze, tzn. verze s podstatně slabšími předpoklady. Jedná se zejména o tzv. Leviho větu o řadách uvedenou např. v [8].

3.2.16 Věta

Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ funkcí, pro kterou existují na oblasti $G \subset \mathbb{E}^r$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$. Nechť má tato řada na G součet $s(\vec{x})$. Nechť navíc řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{x})$$

stejněměrně konverguje na G k součtové funkci $\sigma(\vec{x})$. Pak má funkce $s(\vec{x})$ parciální derivaci podle x_k všude v G a pro každé $\vec{a} \in G$ platí rovnost

$$\frac{\partial s}{\partial x_k}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{a}) = \sigma(\vec{a}).$$

Důkaz:

- aplikujeme větu 3.1.13 na posloupnost $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů
- z předpokladů věty víme, že posloupnost $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $s(\vec{x})$
- dále víme, že posloupnost částečných součtů $(\sigma_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\vec{x})$ konverguje na G stejnoměrně, tedy $\sigma_n(\vec{x}) \Rightarrow \sigma(\vec{x})$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 3.1.13, a platí proto $\frac{\partial s}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial s_n}{\partial x_k}(\vec{x})$
- odtud

$$\frac{\partial s}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{\ell=1}^n f_{\ell}(\vec{x}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_{\ell}}{\partial x_k}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})$$

3.3 Mocninné řady více proměnných

V tomto oddíle probereme některá specifika funkčních řad, jejichž členy jsou mocninné funkce tvaru

$$g(\vec{x}) = a(x_1 - c_1)^{m_1}(x_2 - c_2)^{m_2} \dots (x_r - c_r)^{m_r}, \quad (3.11)$$

kde $a \in \mathbf{R}$, $\vec{c} \in \mathbf{E}^r$ a $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbf{N}_0$. Jelikož se za daných okolností jedná o speciální variantu obecné funkční řady, zůstávají všechna tvrzení předchozí sekce v platnosti.

3.3.1 Definice

Nechť jsou pevně zvoleny bod $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r) \in \mathbf{E}^r$ a konstanta $a \in \mathbf{R}$. Nechť dále $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbf{N}_0$. Funkci tvaru (3.11) budeme nazývat *monomickou funkcí* nebo *r -dimenzionálním monomem* stupně $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ centrováným do bodu $\vec{c}$ (se středem v bodě $\vec{c}$).

3.3.2 Definice

Funkční řadu

$$\sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} (x_1 - c_1)^{m_1} (x_2 - c_2)^{m_2} \dots (x_r - c_r)^{m_r} \quad (3.12)$$

sestavenou z monomických funkcí centrováných do stejného fixního bodu $\vec{c} \in \mathbf{E}^r$ budeme nazývat *r -dimenzionální mocninnou řadou* se středem v bodě $\vec{c} \in \mathbf{E}^r$. Reálná čísla $a_{m_1, \dots, m_r}$ budeme nazývat *koefficienty mocninné řady*.

3.3.3 Komentář

Řadu (3.12) se středem $\vec{c} \in \mathbf{E}^r$ lze snadno převést na řadu s nulovým středem. To lze provést substitucí $y_k = x_k - c_k$ pro všechna $k \in \hat{r}$. V dalším textu se proto omezíme na studium mocninných řad se středem v bodě $(0, 0, \dots, 0)$.

3.3.4 Věta

Je-li řada

$$\sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \quad (3.13)$$

regulárně konvergentní v bodě $\vec{u} \in \mathbf{E}^r$, pak je regulárně konvergentní v každém bodě $\vec{x} \in D$, kde

$$D := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : |x_1| \leq |u_1| \wedge |x_2| \leq |u_2| \wedge \dots \wedge |x_r| \leq |u_r|\}.$$

Součet $f(\vec{x})$ řady (3.13) je spojitou funkcí na množině D .

Důkaz:

- využijeme toho, že (v analogii s řadami funkcí jedné proměnné) pro regulárně konvergentní řady nezáleží na pořadí sčítání (které ani není v uvedené symbolice zohledněno)
- srovnáme členy řady (3.13) do posloupnosti monomických funkcí $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots$
- každá z funkcí je některý ze členů $a_{m_1, \dots, m_r} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r}$
- všechny monomické funkce jsou zcela jistě spojitě v $\mathbf{E}^r$
- řada $\sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_r^{m_r}$ je podle předpokladů konvergentní
- platí-li nerovnosti vymezující množinu D , pak $|g_n(\vec{x})| \leq |g_n(\vec{u})|$
- ze srovnávacího kritéria 3.2.9 pro stejnoměrnou konvergenci je tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ konvergentní regulárně na D
- podle věty 3.2.13 je tudíž její součet na D spojitou funkcí

3.3.5 Věta

Je-li řada (3.13) regulárně konvergentní v bodě $\vec{x} \in \mathbb{E}^r$, kde $x_j \neq 0$ pro všechna $j \in \hat{r}$, pak existuje číslo $K > 0$ tak, že všechny koeficienty $a_{m_1, \dots, m_r}$ splňují nerovnost

$$|a_{m_1, \dots, m_r}| \leq \frac{K}{|x_1|^{m_1} \dots |x_r|^{m_r}}.$$

Důkaz:

- z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ (viz důkaz předešlé věty) plyne, že posloupnost monomických funkcí $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots$ je omezená
- existuje tedy $K > 0$ tak, že $|g_n(\vec{x})| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
- odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení

3.3.6 Věta

Nechť je řada (3.13) regulárně konvergentní pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{E}^r$, pro něž

$$|x_1| < R_1 \wedge |x_2| < R_2 \wedge \dots \wedge |x_r| < R_r,$$

kde $R_1 > 0, R_2 > 0, \dots, R_r > 0$. Označme součet řady jako $f(\vec{x})$. Potom je v množině

$$D := \{\vec{x} \in \mathbb{E}^r : |x_1| < R_1 \wedge |x_2| < R_2 \wedge \dots \wedge |x_r| < R_r\}$$

regulárně konvergentní také řada

$$\sum_{m_1 \geq 1, m_2 \geq 0, \dots, m_r \geq 0} m_1 a_{m_1, \dots, m_r} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \quad (3.14)$$

a její součtovou funkcí (součtem) na množině D je funkce $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})$.

Důkaz:

- pro $r = 1$ platí dokazované tvrzení na základě platnosti věty 2.3.25 ze skript [7]
- budiž tedy $r > 1$
- zvolme reálná čísla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ tak, aby pro všechna $j \in \hat{r}$ platilo, že $|\xi_j| < R_j$
- potom je řada (chápaná jako řada proměnné x_1)

$$f(x_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_r) = \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} x_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \dots \xi_r^{m_r}$$

regulárně konvergentní na $(-R_1, R_1)$

- dále

$$f(x_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_r) = \sum_{m_1=0}^{\infty} x_1^{m_1} \left(\sum_{m_2, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \dots \xi_r^{m_r} \right),$$

kde řada na pravé straně (chápaná jako řada proměnné x_1) má poloměr konvergence jistě větší nebo přinejhorším roven R_1

- podle věty 2.3.25 ze skript [7] lze tuto řadu derivovat podle x_1 člen po členu, tj. pro všechna ξ_1 taková, že $|\xi_1| < R_1$, platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1 \xi_1^{m_1-1} \left(\sum_{m_2, \dots, m_r=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_r} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \dots \xi_r^{m_r} \right) \quad (3.15)$$

- zbývá dokázat, že řada

$$\sum_{m_1 \geq 1, m_2 \geq 0, \dots, m_r \geq 0} m_1 a_{m_1, \dots, m_r} \xi_1^{m_1-1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_r^{m_r} \quad (3.16)$$

regulárně konverguje

- pak bude totiž výraz (3.15) roven součtu řady (3.16)
- zvolme $\vec{S} \in \mathbb{E}^r$ tak, aby pro všechna $j \in \hat{r}$ platilo, že $|\xi_j| < S_j < R_j$
- podle věty 3.3.5 existuje $K > 0$ takové, že

$$|a_{m_1, \dots, m_r}| \leq \frac{K}{S_1^{m_1} \dots S_r^{m_r}}.$$

- vidíme tedy, že pro $q_j := |\xi_j|/S_j$, kde $0 \leq q_j < 1$, je

$$m_1 |a_{m_1, \dots, m_r}| \xi_1^{m_1-1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_r^{m_r} \leq \frac{K}{S_1} m_1 q_1^{m_1-1} q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r}$$

- zkoumaná řada je tedy skutečně regulárně konvergentní ze srovnávacího kritéria, neboť nalezená majorantní řada může být transformována do tvaru

$$\frac{K}{S_1} \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1 q_1^{m_1-1} \cdot \sum_{m_2=0}^{\infty} q_2^{m_2} \dots \sum_{m_r=0}^{\infty} q_r^{m_r},$$

který reprezentuje vícerozměrnou variantu geometrické řady s kvocienty ostře menšími než jedna

- tato majoranta je zcela zřejmě konvergentní, což završuje důkaz

3.3.7 Komentář

Uvedená věta vlastně řeší problematiku parciálního derivování člen po členu. Ačkoliv byla pro přehlednost důkazu vyslovena pouze pro parciální derivování podle proměnné x_1 , není obtížné nahlédnout, že její platnost je mnohem obecnější. Toto zobecnění postihne následující věta.

3.3.8 Věta

Nechť je řada (3.13) regulárně konvergentní na množině

$$D := \{\vec{x} \in \mathbb{E}^r : |x_1| < R_1 \wedge |x_2| < R_2 \wedge \dots \wedge |x_r| < R_r\},$$

kde $R_1 > 0, R_2 > 0, \dots, R_r > 0$. Potom má její součtová funkce parciální derivace všech řádů a tyto derivace jsou na množině D dány jako součty regulárně konvergentních řad, které vznikly derivováním řady (3.13) člen po členu. Tyto derivace jsou spojité, a tudíž vyhovují kritériu záměnnosti.

Důkaz:

- jedná (v první části tvrzení) se o opakovanou aplikaci věty 3.3.6
- druhá část tvrzení se opírá o znění vět a komentářů 2.3.16, 2.3.17 a 2.1.18

Kapitola 4

Teorie Taylorových řad a taylorovských rozvojų

S metodikou taylorovských rozvojų funkcí jsme byli již seznámeni v předchozích partiích matematické analýzy. Ukázali jsme si například, že funkce $y(x) = e^x$ je rovna na celém svém definičním oboru řadě $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Náhrady analytických funkcí příslušnými mocninnými řadami se ukázaly jako extrémně účinné při řešení jak praktických tak i teoretických úloh. Lze ale podobné náhrady konstruovat také pro funkce více proměnných? Zodpovězení nejen této, ale i dalších relevantních otázek přinese následující text.

4.1 Taylorovy a Maclaurinovy řady

Nejprve se budeme zabírat možnostmi nahrazení vybraných funkcí více proměnných nekonečnými řadami diskutovanými v předešlé kapitole.

4.1.1 Definice

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ je funkce definovaná na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{c})$ bodu $\vec{c} \in \mathbb{E}^r$. Nechť na tomto okolí platí

$$f(\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} a_{k_1 k_2 \dots k_r} (x_1 - c_1)^{k_1} (x_2 - c_2)^{k_2} \dots (x_r - c_r)^{k_r}, \quad (4.1)$$

kde $a_{k_1 k_2 \dots k_r} \in \mathbb{R}$ jsou tzv. *Taylorovy koeficienty*. Potom řadu (4.1) nazýváme *Taylorovou řadou funkce $f(\vec{x})$ se středem v bodě $\vec{c} \in \mathbb{E}^r$* . Speciálně pro $\vec{c} = \vec{0}$ mluvíme o tzv. *Maclaurinově řadě*. Funkci $f(\vec{x})$, pro kterou lze nalézt Taylorovy koeficienty tak, aby na nějakém okolí bodu $\vec{c}$ platila rovnost (4.1), nazýváme *funkcí analytickou v bodě $\vec{c}$* .

4.1.2 Komentář

Rovnost (4.1) lze tedy pro analytické funkce interpretovat dvojím způsobem. Jednak je tedy řada na pravé straně Taylorovou řadou dané funkce (tzn. že pro danou funkci byla tato řada odvozena na základě znalosti $f(\vec{x})$), ale nabízí se i obrácená interpretace, a sice že součtem dané řady je právě a jediné funkce $f(\vec{x})$ (tzn. že funkce $f(\vec{x})$ byla dopočtena na základě zadání tvaru řady).

4.1.3 Věta – Taylorova

Předpokládejme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ je *analytická v bodě $\vec{c} \in \mathbb{E}^r$* . Potom má funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{c}$ parciální derivace všech řádů a pro koeficienty $a_{k_1 k_2 \dots k_r}$ její Taylorovy řady se středem v bodě $\vec{c}$ platí:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_r!} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_r^{k_r}}(\vec{c}), \quad (4.2)$$

kde $\varkappa := \sum_{i=1}^r k_i$.

Důkaz:

- důkaz budeme demonstrovat na příkladě funkce dvou proměnných
- předpokládejme, že na jistém $\mathcal{U}(\vec{c})$ bodu $\vec{c} = (c_1, c_2)$ platí rovnost

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} (x_1 - c_1)^k (x_2 - c_2)^\ell \quad (4.3)$$

- pak lze ale snadno nahlédnout, že platí $a_{00} = f(c_1, c_2)$
- podle věty 3.3.8 je ale uvedená analytická funkce hladká na nějakém okolí bodu $\vec{c}$, tj. $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}(\vec{c}))$
- bude ji proto možno libovolně parciálně derivovat a odpovídající si parciální derivace budou zcela jistě záměnné (viz věta 2.1.17 a důsledek 2.1.18)
- derivujeme-li vztah (4.3) podle proměnné x_1 , dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} k (x_1 - c_1)^{k-1} (x_2 - c_2)^\ell$$

- po dosazení $\vec{x} = \vec{c}$ pak snadno

$$a_{10} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2)$$

- derivujeme-li vztah (4.3) podle proměnné x_2 , dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} \ell (x_1 - c_1)^k (x_2 - c_2)^{\ell-1}$$

- po dosazení $\vec{x} = \vec{c}$ opět snadno

$$a_{01} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2)$$

- analogicky k předešlým výpočtům lze postupovat dále
- poměrně jednoduše docházíme k hodnotě parciální derivace

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x_1, x_2) = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\infty} a_{k\ell} k(k-1)\dots(k-n+1)\ell(\ell-1)\dots(\ell-m+1)(x_1 - c_1)^{k-n}(x_2 - c_2)^{\ell-m}$$

- odtud (po dosazení $\vec{x} = \vec{c}$)

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(\vec{c}) = a_{nm} n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1) = a_{nm} n!m!$$

- upravíme-li tento vztah, dostáváme

$$a_{nm} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(\vec{c}) = \frac{1}{(n+m)!} \frac{(n+m)!}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(\vec{c})$$

- v koeficientu a_{nm} je zohledněn komentář 2.3.13, kdy číslo

$$\frac{(n+m)!}{n!m!}$$

představuje počet všech ekvivalentních alternativ výpočtu parciální derivace $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}$

- tím je věta dokázána

4.1.4 Komentář

Vzorec (4.1) lze pro funkci dvou proměnných zapsat, jak je patrné z úvah v důkazu předešlé věty, do kompaktnějšího tvaru

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}}(c_1, c_2) (x_1 - c_1)^k (x_2 - c_2)^{n-k}.$$

Přitom pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}_0$ odpovídá suma

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}}(c_1, c_2) (x_1 - c_1)^k (x_2 - c_2)^{n-k}$$

totálnímu diferenciálu funkce $f(x_1, x_2)$ řádu n , o kterém mimo jiné víme, že existuje pro všechny funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}(\vec{c}))$, což je právě případ, který předešlá věta rozebírá. Odtud

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{d}^n f_{(c_1, c_2)}(\mathbf{d}x_1, \mathbf{d}x_2)}{n!}.$$

Podotýkáme, že analogický vztah by platil také pro obecnou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ r proměnných. Tedy za jistých předpokladů, jejichž obdobu zná čtenář ze studia Taylorových polynomů pro funkce jediné proměnné (viz komentář 4.1.5), platí rovnost

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{h})}{n!},$$

respektive

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{x})}{n!},$$

kde formálně klademe $\mathbf{d}^0 f_{\vec{a}}(\vec{h}) := f(\vec{a})$.

4.1.5 Komentář

Poznamenáváme, že studium vlastností Taylorových řad v prostorech $\mathbf{E}^r$ je dosti komplikované. V zásadě lze říci, že by nás (stejně jako u funkce jedné proměnné) mělo zajímat, kde Taylorova řada jako mocninná řada v $\mathbf{E}^r$ konverguje a co je na jejím oboru konvergence jejím součtem, speciálně tedy, zda je výchozí funkce i součtem příslušné Taylorovy řady. Známe totiž příklady z teorie funkce jedné proměnné, kdy Taylorova řada konverguje ke zcela jiné funkci, než ze které byla sestrojena (viz např. příklad 3.2.18, strana 75, skript [7]). Jistou možnost, jak celý problém řešit, nabídne následující sekce.

4.2 Polynomiální aproximace funkcí

V tomto oddíle ukážeme, že pokus aproximovat vybranou funkci více proměnných konečnou řadou monomických funkcí může být učiněn i pro funkce, které analytické nejsou. Budeme tedy diskutovat, jak lze odhadnout chybu, které se dopouštíme, když vybranou funkci aproximujeme monomickou funkcí zvoleného stupně. A také ukážeme, že pro analytické funkce lze tento aproximační proces zdokonalit tím, že odchylka mezi funkcí a její aproximací může být stlačena pod libovolně malou hodnotu.

4.2.1 Věta – o Taylorově vzorci

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na otevřené množině $G \subset \mathbf{E}^r$ všechny spojitě parciální derivace až do řádu $(m+1)$ včetně. Nechť dále $\vec{a} \in G$, $\vec{h} \in \mathbf{E}^r$ jsou takové, že celá úsečka $\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{h}, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ leží v G . Potom existuje $\tau \in (0, 1)$ takové, že platí

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\vec{a}) h_{i_1} h_{i_2} + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^r \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(\vec{a}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m} + \\
& + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^r \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}}(\vec{a} + \tau \vec{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_{m+1}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Důkaz:

- položíme

$$F(t) = f(\vec{a} + t \vec{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2, \dots, a_r + th_r)$$

- snadno nahlédneme, že $F(0) = f(\vec{a})$ a $F(1) = f(\vec{a} + \vec{h})$
- podle věty 3.1.1 o Taylorově vzorci pro funkci jedné proměnné (viz skripta [7]) platí, že pro dva různé body c, t ležící v jistém uzavřeném intervalu, kde jsou splněny podmínky dostatečné hladkosti funkce $F(t)$ – viz znění citované věty o Taylorově vzorci – existuje bod $\tau \in (c, t)$, resp. $\tau \in (t, c)$, tak, že platí

$$F(t) = F(c) + \frac{\dot{F}(c)}{1!}(t-c) + \frac{\ddot{F}(c)}{2!}(t-c)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(t-c)^n + R_{n+1}(t), \tag{4.5}$$

kde

$$R_{n+1}(t) = \frac{F^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t-c)^{n+1} \tag{4.6}$$

- specifikujeme-li toto tvrzení pro $c = 0$ a $t = 1$, dostáváme odtud, že jistě existuje $\tau \in (0, 1)$ takové, že

$$F(t) = F(0) + \dot{F}(0)t + \frac{\ddot{F}(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\tau) \tag{4.7}$$

- vzhledem k faktu, že

$$\frac{dF}{dt}(0) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) h_i$$

a

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(0) = \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\vec{a}) h_{i_1} h_{i_2},$$

až

$$\frac{d^m F}{dt^m}(0) = \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \dots \sum_{i_m=1}^r \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(\vec{a}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m},$$

snadno nahlédneme, že ze vztahu (4.7) vyplývá dokazovaný vztah (4.4)

4.2.2 Definice

Rovnost (4.4) nazýváme *Taylorovým vzorcem* funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Sumu

$$\mathcal{T}_{\vec{a}}^m(\vec{x}) := \sum_{k=0}^m \frac{d^k f_{\vec{a}}(\vec{x})}{k!}$$

pak nazýváme *Taylorovým polynomem* řádu m funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Výraz

$$R_{m+1}(\vec{h}) := \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^r \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}}(\vec{a} + \tau \vec{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_{m+1}}$$

z věty 4.2.1 nazýváme *Lagrangeovým zbytkem v Taylorově vzorci po m -tém členu*. Pro $\vec{a} = \vec{0}$ užíváme (volitelně) u všech právě definovaných pojmů namísto označení Taylorův označení *Maclaurinův*.

4.2.3 Komentář

Taylorův polynom $\mathcal{T}_{\vec{a}}^m(\vec{x})$ řádu m může být v některých případech nižšího stupně než m . To nastane tehdy, je-li $d^m f_{\vec{a}}(\vec{x}) = 0$. Proto je nutno důsledně rozlišovat významy termínů stupeň a řád Taylorova polynomu.

4.2.4 Věta

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivace všech řádů. Potom mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f_{\vec{a}}(\vec{x})}{n!} \quad (4.8)$$

je konvergentní a má součet $f(\vec{x})$ právě pro taková $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$, pro která platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(\vec{x}) = 0$, kde $R_{n+1}(\vec{x})$ je Lagrangeův zbytek po n členech Taylorova vzorce (viz věta 4.2.1).

Důkaz:

- z věty 4.2.1 plyne, že

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f_{\vec{a}}(\vec{x})}{k!} + R_{n+1}(\vec{x}) = \mathcal{T}_{\vec{a}}^n(\vec{x}) + R_{n+1}(\vec{x})$$

- řada (4.8) je konvergentní a má součet $f(\vec{x})$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\vec{a}}^n(\vec{x}) = f(\vec{x})$, tj. když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\vec{x}) - \mathcal{T}_{\vec{a}}^n(\vec{x})] = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 0$$

- tím je tvrzení dokázáno

4.2.5 Věta – o polynomiální aproximaci

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, jež je analytická v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbf{N}_0$ tak, že pro všechna $m > m_0$ platí

$$\left| f(\vec{x}) - \sum_{n=0}^m \frac{d^n f_{\vec{a}}(\vec{x})}{n!} \right| < \varepsilon,$$

což značí, že každou analytickou funkci lze aproximovat polynomiální funkcí libovolně přesně.

Důkaz:

- jde o přímý důsledek definice analytické funkce a tvrzení věty 4.2.4
- protože za daných okolností platí podle věty 4.2.4 rovnost $\lim_{m \rightarrow \infty} R_{m+1}(\vec{x}) = 0$, plyne odtud, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbf{N}_0$ tak, že pro jakýkoli index $m > m_0$ je $|R_{m+1}(\vec{x})| < \varepsilon$
- pro tato m tedy

$$|f(\vec{x}) - \mathcal{T}_{\vec{a}}^m(\vec{x})| = \left| f(\vec{x}) - \sum_{n=0}^m \frac{d^n f_{\vec{a}}(\vec{x})}{n!} \right| = |R_{m+1}(\vec{x})| < \varepsilon$$

4.2.6 Komentář

Za předpokladu, že je skutečně splněna podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(\vec{x}) = 0$, je tedy výraz $\sum_{k=0}^n \frac{d^k f_{\vec{a}}(\vec{x})}{k!}$ přibližným vyjádřením funkčních hodnot funkce $f(\vec{x})$ na okolí bodu $\vec{a}$.

4.2.7 Příklad

Hledejme Maclaurinův polynom funkce $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ řádu tří. Snadno vypočteme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos(x + 2y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x + 2y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \sin(x + 2y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \sin(x + 2y).$$

Pro parciální derivace třetího řádu pak platí:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos(x + 2y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -8 \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -2 \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -4 \cos(x + 2y).$$

Po vyčíslení výše vyjádřených parciálních derivací v bodě $\vec{a} = (0, 0)$, tj.

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2,$$

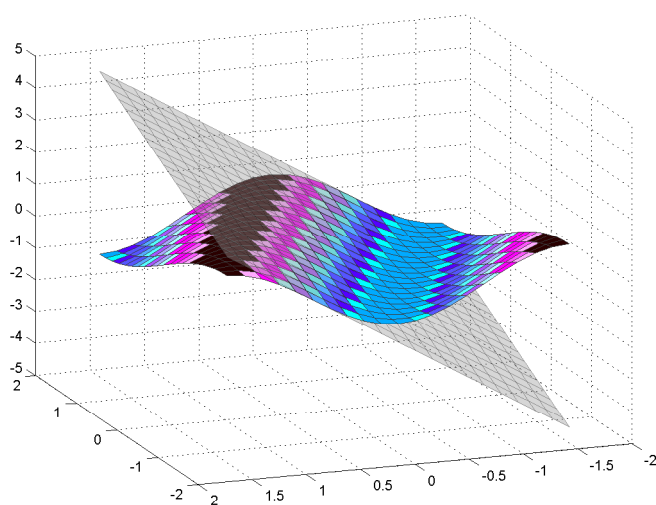
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = -8, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = -2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = -4,$$

dostáváme

$$\sin(x + 2y) \doteq x + 2y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{4}{3}y^3 - x^2y - 2xy^2. \quad (4.9)$$

Funkce $x + 2y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{4}{3}y^3 - x^2y - 2xy^2$ je tedy na okolí bodu $(0, 0)$ polynomiální aproximací funkce $f(x, y) = \sin(x + 2y)$.



Obrázek 4.14

Polynomiální aproximace funkce $f(x, y) = \sin(x + 2y)$. Barevně je vyobrazena zkoumaná funkce, zatímco příslušná polynomiální aproximace (4.9) je vyobrazena šedě.

4.2.8 Příklad

Cílem tohoto příkladu je vypočítat totální diferenciál tisícího řádu funkce $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ v bodě $\vec{a} = (0, 0)$. Způsob řešení je vybrán s ohledem na fakt, že přímé derivování do parciálních derivací tisícího řádu je neúnosně zdlouhavé. Užijeme tedy jednak skutečnosti, že

$$f(x, y) = f(\vec{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n f_0(x, y)}{n!} \quad (4.10)$$

a jednak znalosti Maclaurinova rozvoje funkce

$$\ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}.$$

Dosadíme-li do posledně uvedené rovnosti $t = xy$, obdržíme velice jednoduše Maclaurinovu řadu funkce $f(x, y)$, a sice

$$\ln(1 + xy) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n y^n}{n} = xy - \frac{1}{2} x^2 y^2 + \dots - \frac{x^{500} y^{500}}{500} + \dots$$

Součástí tohoto rozvoje je i hledaný diferenciál $d_0^{1000} f(x, y)$. Způsob jeho detekce je zřejmý ze vztahu (4.10). Z něj plyne, že

$$\frac{d^{1000} f_0(x, y)}{1000!} = -\frac{1}{500} x^{500} y^{500},$$

potážmo

$$d^{1000} f_0(x, y) = -\frac{1000!}{500} x^{500} y^{500},$$

čímž je úloha zakončena.

4.2.9 Příklad

Nalezněme Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 4x + y^2}.$$

Označíme-li $t = 4x + y^2$, lze úlohu řešit metodami známými z teorie funkce jedné proměnné. Podle ní

$$f(t) = (1 + t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} t^n = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n.$$

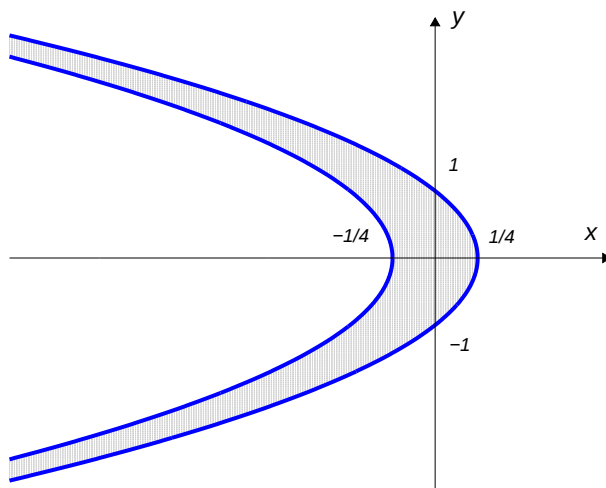
Uvedená mocninná řada má přitom, jak se lze poměrně jednoduše přesvědčit, obor konvergence rovný uzavřenému intervalu $O = \langle -1, 1 \rangle$. Dále snadno

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + 2x + \frac{y^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (4x + y^2)^n = \\ &= 1 + 2x + \frac{y^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \binom{n}{k} 4^k x^k y^{2n-2k} = 1 + 2x + \frac{y^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{k!(n-k)!} 2^{2k-n} x^k y^{2n-2k}. \end{aligned}$$

Tato řada je ovšem rovnocenným ekvivalentem funkce $f(x, y) = \sqrt{1 + 4x + y^2}$ pouze na množině

$$O_{x,y} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : -1 \leq 4x + y^2 \leq 1\}.$$

Touto množinou je uzavřená oblast vymezená parabolami $4x = -y^2 \pm 1$, viz také obrázek.



Obrázek 4.15

Vyobrazení oboru konvergence $O_{x,y} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : -1 \leq 4x + y^2 \leq 1\}$.

4.2.10 Příklad

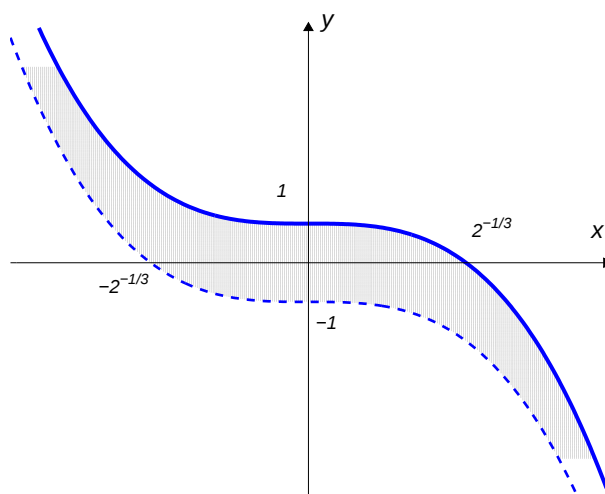
Nalezneme Maclaurinovu řadu funkce $f(x, y) = \ln(1 + 2x^3 + y)$ a určíme její obor konvergence. Opět uijeme teorii mocninných ekvivalentů pro funkce jedné proměnné. Tentokrát uijeme substituci $t = 2x^3 + y$ a rozvineme funkci $f(t) = \ln(1 + t)$ do známého tvaru

$$\ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}.$$

Proto

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x^3 + y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \binom{n}{k} (2x^3)^k y^{n-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} 2^k x^{3k} y^{n-k}.$$

Oborem konvergence je přitom množina $O = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : -1 < 2x^3 + y \leq 1\}$. Její tvar je vyobrazen na obrázku níže.



Obrázek 4.16

Vyobrazení oboru konvergence $O = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : -1 < 2x^3 + y \leq 1\}$.

4.2.11 Příklad

Pro funkci

$$f(x, y) = \sqrt{1 + y^2 + 2x}$$

vypočtěme $\frac{\partial^{40}}{\partial y^{30} \partial x^{10}}(\vec{0})$. Hledat parciální derivaci

$$\beta = \frac{\partial^{40}}{\partial y^{30} \partial x^{10}}(\vec{0})$$

přímo není jistě účelné, proto uijeme strategičtější postup. Sestavme Maclaurinův rozvoj vyšetřované funkce. Podobně jako v předešlých příkladech platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (y^2 + 2x)^n = 1 + x + \frac{y^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{n} \binom{n}{k} y^{2k} (2x)^{n-k} = \\ &= 1 + x + \frac{y^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2k)!!(n-k)!} y^{2k} x^{n-k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Označme $\alpha_{\ell m} \in \mathbf{R}$ koeficient u členu $\alpha_{\ell m} x^{\ell} y^m$ v rozvoji mocninné řady (4.11). Podle teorie pro něj platí

$$\frac{40!}{30! 10!} \beta \frac{1}{40!} = \alpha_{10,30},$$

kde číslo $\frac{40!}{30! 10!}$ reprezentuje násobnost zkoumané derivace a $\frac{1}{40!}$ dělení faktoriálem řádu totálního diferenciálu, jehož je uvedená derivace součástí. Jelikož $\ell = 10$ a $m = 30$, plyne ze vztahu (4.11), že $k = 15$ a $n = 25$. Uzavíráme tedy, že

$$\alpha_{10,30} = (-1)^{25+1} \frac{47!!}{30!! 10!!}, \quad \beta = \frac{47!!}{30!! 10!!} 30! 10! = 47!! 29!!$$

Kapitola 5

Teorie implicitních funkcí

Seznamme se nyní i s méně obvyklými způsoby zadání funkce. Ukážeme si postupně, že zkoumat určité vybrané vlastnosti bude možno nejen u funkcí zadaných známým (tzv. explicitním) předpisem $y = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, ale i u funkcí s komplikovanější formou zadání.

5.1 Funkce zadaná implicitně rovnicí

Připomeňme několik možných způsobů zadávání funkcí. Existuje jich totiž celá řada. My zde uvedeme pouze tři nejzásadnější:

- *explicitní zadání funkce* $f(x, y, z)$ předpisem např. $f(x, y, z) = x + y^4 + e^z$;
- *parametrické zadání funkce* $y(x)$ rovnicemi např. $x(t) = 4 \cos(t)$, $y(t) = 4 \sin(t)$, kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$ je parametr;
- *implicitní zadání funkce* $y(x)$ rovnicí např. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Je třeba si uvědomit, že v některých případech lze zcela jednoduše převádět jednotlivé typy zadání libovolně jeden na druhý, ale v jiných ne. Je-li např. funkce $y(x)$ zadána implicitně rovnicí $x + y + \ln(x) + \ln(y) = 0$, není možné žádnými úpravami docílit explicitního vyjádření $y(x)$. Následující úvahy nám však umožní zkoumat všechny potřebné vlastnosti i pro funkce, které uvedeným handicapem neexistence explicitního vyjádření trpí.

5.1.1 Definice

Nechť je dána funkce $F(\vec{x}, y) : X \times Y \mapsto \mathbf{R}$, kde $X \subset \mathbf{E}^r$ a $Y \subset \mathbf{R}$. Říkáme, že funkce $y(\vec{x}) : X \mapsto \mathbf{R}$ je na oblasti $G \subset X$ funkcí zadanou implicitně rovnicí

$$F(\vec{x}, y) = 0, \quad (5.1)$$

nebo stručně *implicitní funkcí*, pokud pro každé $\vec{x} \in G$ platí $F(\vec{x}, y(\vec{x})) = 0$.

5.1.2 Příklad

Rovnice $F(x, y) = x^4 - y = 0$ zadává na $G = (-1, 1)$ implicitní funkci $y(x) = x^4$. Naproti tomu rovnice $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ na $G = (-1, 1)$ zadává dvě implicitní funkce, a sice $f(x) = -x$ a $g(x) = x$. Rovnice $F(x, y) = x^2 + y^4 + 1 = 0$ nezadává žádnou implicitní funkci.

5.1.3 Komentář

S ohledem na výsledky předchozího příkladu bude nejprve třeba rozřešit dvě stěžejní otázky celé teorie, a sice otázku existence a otázku jednoznačnosti implicitní funkce. Odpovědi na tyto otázky budeme hledat vždy na okolí $\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0)$ jistého vybraného bodu $(\vec{x}_0, y_0)$, pro který je splněna rovnost $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$. Nejprve budeme řešit existenční problém pro zjednodušenou variantu úlohy, kdy $r = 1$, a tudíž hledaná implicitní funkce (bude-li vůbec existovat) bude funkcí jediné proměnné.

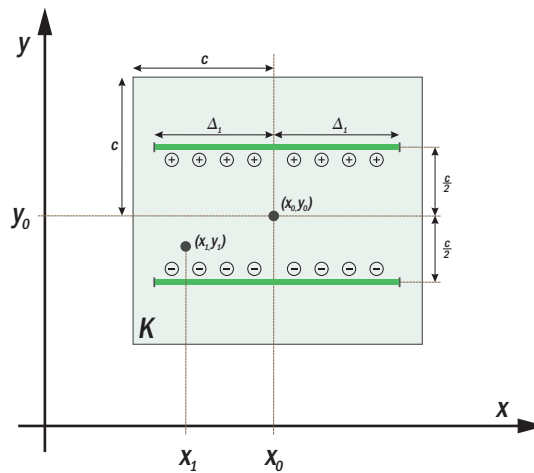
5.1.4 Věta – malá existenční

Nechť je dána funkce $F(x, y) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$, otevřený interval $L \subset \mathbb{E}^2$ a bod $(x_0, y_0) \in L$ takový, že $F(x_0, y_0) = 0$.
Nechť $F(x, y) \in \mathcal{C}^1(L)$, přičemž platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Pak existují čísla $\Delta_1 > 0$ a $\Delta_2 > 0$ tak, že platí: Ke každému číslu $x \in (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ existuje v intervalu $(y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ právě jediné y tak, že $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y znakem $f(x)$, je rovnice $F(x, y) = 0$ na množině $(x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1) \times (y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2)$ splněna právě tehdy, když $y = f(x)$. Funkce $f(x)$ je tedy funkcí implicitně zadanou rovnicí $F(x, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $y_0 = f(x_0)$.

Důkaz:



Obrázek 5.17

Demonstrační obrázek k důkazu existenční věty.

- položíme bez újmy na obecnosti $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \alpha > 0$
- kdyby $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$, vyšetřovali bychom namísto funkce $F(x, y)$ funkci $-F(x, y)$, což na sdělení věty nic nemění
- z definice spojitosti (aplikované na funkci $\frac{\partial F}{\partial y}$) vyplývá existence čísla $c > 0$ takového, že ve všech bodech (x, y) intervalu $K = (x_0 - c, x_0 + c) \times (y_0 - c, y_0 + c)$ je

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right| < \frac{\alpha}{2} \quad (5.2)$$

- proto

$$\frac{3\alpha}{2} > \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > \frac{\alpha}{2} > 0 \quad (5.3)$$

- zvolme ono c navíc tak malé, aby $K \subset L$
- potom jsou obě parciální derivace prvního řádu v K spojité
- funkce $F(x_0, y)$ jedné proměnné y má podle (5.2) v intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$ kladnou derivaci, a je tam tudíž rostoucí
- mimoto pro $y = y_0$ je $F(x_0, y_0) = 0$
- $F(x_0, y)$ má tedy v bodě $y = y_0 + c$ kladnou hodnotu a v bodě $y = y_0 - c$ zápornou hodnotu

- tedy $F(x_0, y_0 + c) > 0$ a $F(x_0, y_0 - c) < 0$
- funkce $F(x, y_0 + c)$ jedné proměnné x je v bodě x_0 spojitá a kladná
- funkce $F(x, y_0 - c)$ jedné proměnné x je v bodě x_0 spojitá a záporná
- existuje tedy číslo $\Delta_1 > 0$ takové, že pro $|x - x_0| < \Delta_1$ je

$$F(x, y_0 - c) < 0 \quad \wedge \quad F(x, y_0 + c) > 0 \quad (5.4)$$

- volme zároveň $\Delta_1 < c$
- nyní vyberme x_1 libovolně z intervalu $\langle x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1 \rangle$
- funkce $F(x_1, y)$ jedné proměnné y je podle (5.3) spojitá a rostoucí na intervalu $(y_0 - c, y_0 + c)$, tedy též na intervalu $\langle y_0 - c/2, y_0 + c/2 \rangle$
- pro $y = y_0 - c/2$ je hodnota $F(x_1, y)$ podle (5.4) záporná a pro $y = y_0 + c/2$ kladná
- proto nutně existuje v intervalu $\langle y_0 - c/2, y_0 + c/2 \rangle$ číslo y_1 takové, že $F(x_1, y_1) = 0$
- navíc existuje jen jedno y_1 s touto vlastností, neboť $F(x_1, y)$ je v tomto intervalu rostoucí
- položíme-li nyní $\Delta_2 = c/2$, vidíme, že ke každému x z intervalu $\langle x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1 \rangle$ existuje v intervalu $\langle y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2 \rangle$ právě jedno číslo y takové, že $F(x, y) = 0$
- pokud označíme toto y symbolem $f(x)$, pak je naplněna definice 5.1.1, a $y = f(x)$ je tudíž funkcí zadanou na okolí generujícího bodu (x_0, y_0) implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

5.1.5 Věta

Nechť je dána funkce $F(x, y) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ a bod $(x_0, y_0) \in \mathbf{E}^2$ takový, že $F(x_0, y_0) = 0$. Nechť na jistém okolí tohoto bodu má funkce $F(x, y)$ spojitou derivaci, tj. $F(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, přičemž platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (5.5)$$

Pak na jistém jednodimenziálním okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0 existuje jediná spojitá funkce $y(x)$, která je implicitně zadána rovnicí $F(x, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $y_0 = y(x_0)$. Navíc má tato funkce $y(x)$ v každém bodě $\xi \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ spojitou derivaci s hodnotou

$$y'(\xi) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y(\xi))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, y(\xi))}. \quad (5.6)$$

Speciálně tedy $y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$.

Důkaz:

- uvažujeme generující rovnici $F(x, y) = 0$ a generující bod (x_0, y_0) , který není, jak plyne z podmínky (5.5), bodem kritickým (viz definice 5.1.7)
- nejpodstatnější otázka, kterou je otázka existence diskutované implicitní funkce na okolí generujícího bodu (x_0, y_0) , je rozřešena ve větě 5.1.4
- podle jejího znění máme nyní stoprocentní jistotu, že hledaná implicitní funkce skutečně existuje
- hledejme tedy dále v jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ derivaci diskutované implicitní funkce $y(x)$, která je zadána generující rovnicí $F(x, y) = 0$

- generující rovnici $F(x, y(x)) = 0$ zderivujeme podle nezávisle proměnné x s ohledem na fakt, že proměnná y na nezávisle proměnné x závisí
- derivovat přitom lze, neboť $F(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_0, y_0))$
- díky předpokladům platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (5.7)$$

kde po dosazení bodu $(\xi, y(\xi)) \in \mathcal{U}(x_0, y_0)$ do obou stran rovnice dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y(\xi)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \frac{dy}{dx}(\xi) = 0 \quad (5.8)$$

- protože $\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \neq 0$, což je garantováno volbou okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$, lze rovnici (5.8) upravit do tvaru dokazované rovnosti (5.6)
- volbou $\xi = x_0$, z níž vyplývá, že $y(\xi) = y(x_0) = y_0$, pak dostáváme, že $y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$
- derivace (5.6) je navíc v $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ spojitá, neboť je podílem dvou spojitých funkcí a jmenovatel je v množině $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ nenulový
- díky existenci derivace $y'(x)$ lze tvrdit, že sama funkce $y(x)$ je na jistém okolí bodu x_0 spojitá
- zbývající část důkazu týkající se jednoznačnosti dokážeme sporem
- necht' tedy existují na jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0 dvě různé funkce $y(x)$ a $\tilde{y}(x)$, které jsou implicitními řešeními rovnice $F(x, y) = 0$ a vyhovují podmínce $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$
- z rovnosti (5.6) ale vyplývá, že $y'(x) = \tilde{y}'(x)$ všude na $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, tj. ne pouze v bodě x_0
- proto jistě existuje $C \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ platí $\tilde{y}(x) = y(x) + C$
- to společně s rovností $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ vede k faktu, že konstanta C je nulová
- tudíž na uvažovaném okolí bodu x_0 platí $y(x) = \tilde{y}(x)$, což je spor s existencí dvou různých funkcí

5.1.6 Komentář

Uvažujme nyní dodatečný požadavek, že pro funkci $F(x, y)$ z předešlé věty platí také, že $F(x, y) \in \mathcal{C}^m(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, kde $m \geq 2$. Dalším derivováním vztahu (5.7) lze vyjádřit i vyšší derivace funkce $y(x)$. Např. derivací rovnice (5.7) podle x získáme vztah

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

který vede (za citovaného předpokladu) k vyjádření druhé derivace $y''(x_0)$ do tvaru

$$y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx}(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dx}(x_0)\right)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Jak je patrné, k výpočtu druhé derivace bude zapotřebí již znát hodnotu první derivace ve studovaném bodě. Obdobně se postupuje při výpočtu derivací vyšších.

5.1.7 Definice

Funkci $F(\vec{x}, y) : X \times Y \mapsto \mathbf{R}$, kde $X \subset \mathbf{E}^r$ a $Y \subset \mathbf{R}$, z definice 5.1.1 budeme nazývat *generující funkcí*. Rovnici $F(\vec{x}, y) = 0$ budeme nazývat *generující rovnicí* a bod $(\vec{x}_0, y_0) \in X \times Y$, pro který je splněna rovnost $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$, budeme nazývat *generujícím bodem*. Generující bod navíc nazveme *kritickým*, pokud vyhovuje rovnosti $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) = 0$.

5.1.8 Komentář

Podle vět 5.1.5 a 5.1.11 garantuje podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$ existenci právě jediné implicitní funkce $y = y(\vec{x})$ na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0)$. Kritičnost bodu $(\vec{x}_0, y_0) \in X \times Y$ spočívá tedy v tom, že za podmínky $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) = 0$ nelze existenci implicitní funkce $y = y(\vec{x})$ nebo její jednoznačnost zaručit. Ukažme si to na následujících příkladech. Nechť je dána generující rovnice $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ reprezentující jednotkovou kružnici se středem v počátku souřadného systému. Bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$ je jejím kritickým bodem, neboť $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0$. Na okolí tohoto kritického bodu ale žádná implicitní funkce $y = y(x)$ existovat nemůže, neboť pro $\xi \in (1 - \delta, 1)$ existují dvě různé hodnoty y takové, že $F(\xi, y) = \xi^2 + y^2 - 1 = 0$. Existence implicitní funkce je proto v přímém rozporu s definicí pojmu funkce. Uvažme druhý příklad. Nechť je dána generující rovnice $G(x, y) = x^2 - y^2 = 0$. I tehdy je bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$ jejím kritickým bodem. Ale ačkoliv je podmínka kritičnosti naplněna, existují dokonce dvě příslušné implicitní funkce, a to $y_1(x) = x$ a $y_2(x) = -x$. Třetím příkladem je generující rovnice $H(x, y) = x - y^3 = 0$. Znovu je bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$ kritickým bodem, v němž ale příslušná implicitní funkce existuje a je určena jednoznačně. Touto implicitní funkcí je funkce $y(x) = |x|^{1/3} \operatorname{sgn}(x)$.

5.1.9 Úmluva

Kritičnost generující bodu sice (podle úvah probíraných v předešlém komentáři) nutně neznamená neexistenci příslušné implicitní funkce, jen její existence není narozdíl od generujícího bodu, který kritickým není, garantována. Proto provedeme následující úmluvu, která přispěje k systematickosti řešení úloh na implicitní funkce. Bude-li v daném příkladě zjištěno, že některý generující bod je kritický, nebudeme na okolí tohoto bodu (pokud nebude řečeno jinak) příslušnou implicitní funkci hledat.

5.1.10 Příklad

Pokusme se rozšířovat podobu grafu funkce $y(x)$, která je implicitně zadána rovnicí

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2). \quad (5.9)$$

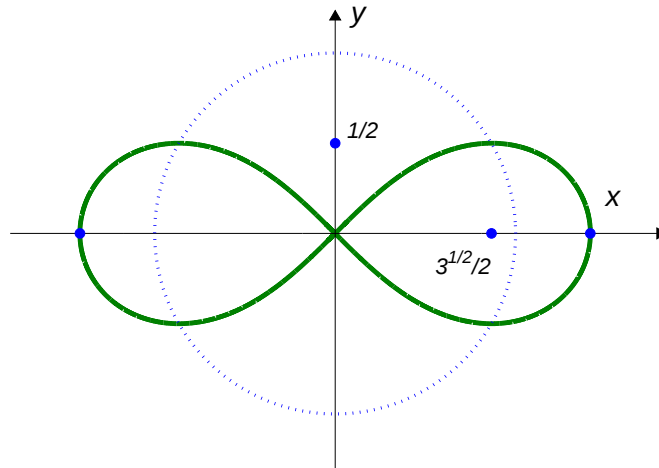
Vzhledem k symetrii postačí vyšetřit průběh funkce pouze v prvním kvadrantu. Navíc jelikož levá strana rovnosti (5.9) je vždy nezáporná, musí být $x^2 \geq y^2$, což značí, že v prvním kvadrantu se graf funkce $y(x)$ bude vyskytovat pouze pod osou $x = y$. Pokusme se nalézt extrémy vyšetřované funkce. Podle věty o implicitní funkci 5.1.5 platí

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 2(2x - 2yy'),$$

odkud pak tedy

$$y' = \frac{x(1 - x^2 - y^2)}{y(1 + x^2 + y^2)}.$$

Derivace $y'(x)$ je tedy nulová v průsečíku kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a křivky (5.9). Tímto průsečíkem v prvním kvadrantu je bod $\vec{a} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$. Jelikož průsečíky křivky (5.9) s osou x jsou body $\vec{0}$ a $(\sqrt{2}, 0)$, je po studiu znaménka první derivace jasné, že bod $\vec{a}$ je bodem lokálního maxima funkce $y(x)$. Nyní tedy lze vyobrazit průběh vyšetřované implicitní funkce.



Obrázek 5.18
Průběh implicitní funkce $y(x)$.

Podotýkáme, že vyobrazenou křivkou je tzv. *lemniskáta*.

5.1.11 Věta – o implicitní funkci

Nechť je dána funkce $F(\vec{x}, y) : \mathbf{E}^{r+1} \mapsto \mathbf{R}$ a bod $(\vec{x}_0, y_0) \in \mathbf{E}^{r+1}$ takový, že $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$. Nechť na jistém okolí tohoto bodu má funkce $F(\vec{x}, y)$ spojitou derivaci, tj. $F(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0))$, přičemž platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0. \quad (5.10)$$

Pak na jistém r -dimenzionálním okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ bodu $\vec{x}_0$ existuje jediná spojitá funkce $y(\vec{x})$, která je implicitně zadána rovnicí $F(\vec{x}, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $y_0 = y(\vec{x}_0)$. Navíc má tato funkce $y(\vec{x})$ v každém bodě $\vec{\xi} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ spojitě všechny parciální derivace s hodnotou

$$\frac{\partial y}{\partial x_k}(\vec{\xi}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{\xi}, y(\vec{\xi}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{\xi}, y(\vec{\xi}))}. \quad (5.11)$$

Speciálně tedy $\frac{\partial y}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0)}$.

Důkaz:

- uvažujeme tedy generující rovnici $F(\vec{x}, y) = 0$ a generující bod $(\vec{x}_0, y_0)$, který není, jak plyne z podmínky (5.10), bodem kritickým
- nejpodstatnější otázka, kterou je otázka existence diskutované implicitní funkce na okolí generujícího bodu $(\vec{x}_0, y_0)$, je rozřešena ve větě 5.2.3
- podle jejího znění máme nyní stoprocentní jistotu, že hledaná implicitní funkce více proměnných skutečně existuje
- hledejme tedy dále v jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ derivaci diskutované implicitní funkce $y(\vec{x})$, která je zadána generující rovnicí $F(\vec{x}, y) = 0$
- generující rovnici $F(\vec{x}, y(x)) = 0$ zderivujeme podle nezávisle proměnné x_k s ohledem na fakt, že proměnná y na nezávisle proměnné x_k závisí
- derivovat přitom lze, neboť $F(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0))$

- díky předpokladům platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad (5.12)$$

kde po dosazení bodu $(\vec{\xi}, y(\vec{\xi})) \in \mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0)$ do obou stran rovnice dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{\xi}, y(\vec{\xi})) + \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{\xi}, y(\vec{\xi})) \frac{\partial y}{\partial x_k}(\vec{\xi}) = 0 \quad (5.13)$$

- protože $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{\xi}, y(\vec{\xi})) \neq 0$, což je garantováno volbou okolí $\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0)$, lze rovnici (5.13) upravit do tvaru dokazované rovnosti (5.11)
- volbou $\vec{\xi} = \vec{x}_0$, z níž vyplývá, že $y(\vec{\xi}) = y(\vec{x}_0) = y_0$, pak dostáváme, že $\frac{\partial y}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0)}$
- derivace (5.11) je navíc v $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ spojitá, neboť je podílem dvou spojitých funkcí a jmenovatel je v množině $\mathcal{U}(\vec{x}_0, y_0)$ nenulový
- díky existenci derivace $\frac{\partial y}{\partial x_k}(\vec{\xi})$ lze tvrdit, že sama funkce $y(\vec{x})$ je na jistém okolí bodu $\vec{x}_0$ spojitá
- zbývající část důkazu týkající se jednoznačnosti provedeme metodou konstrukce sporu
- nechť tedy existují na jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ bodu $\vec{x}_0$ dvě různé funkce $y(\vec{x})$ a $\tilde{y}(\vec{x})$, které jsou implicitními řešeními rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$ a vyhovují podmínce $y(\vec{x}_0) = \tilde{y}(\vec{x}_0) = y_0$
- z rovnosti (5.11) ale vyplývá, že $\text{grad}(y)(\vec{x}) = \text{grad}(\tilde{y})(\vec{x})$ všude na $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$, tj. ne pouze v bodě $\vec{x}_0$
- proto jistě existuje (podle sdělení důsledku 2.3.23) $C \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ platí $\tilde{y}(\vec{x}) = y(\vec{x}) + C$
- to společně s rovností $y(\vec{x}_0) = \tilde{y}(\vec{x}_0) = y_0$ vede k faktu, že konstanta C je nulová
- tudíž na uvažovaném okolí bodu $\vec{x}_0$ platí $y(\vec{x}) = \tilde{y}(\vec{x})$, což je spor s existencí dvou různých funkcí

5.2 Funkce zadané implicitně soustavou rovnic

Logickým zobecněním předešlé problematiky je situace, kdy generující rovnice není pouze jedna, ale je jich několik. V tom případě lze očekávat, že sada s generujících rovnic bude (při příznivé konstelaci podmínek, tj. při splnění podmínky analogické k podmínce (5.5)) indukovat sadu s implicitních funkcí. Bude i v tomto případě možné ze znalosti všech parciálních derivací všech generujících funkcí jednoznačně určit parciální derivace funkcí implicitních? A jak v této obměně bude vypadat podmínka kritičnosti? Na to nám přinese odpověď následující text.

5.2.1 Definice

Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s) &= 0; \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s) &= 0; \\ &\vdots \\ F_s(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s) &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

kde $\vec{x} \in X \subset \mathbf{E}^r$ a $\vec{y} \in Y \subset \mathbf{E}^s$. Funkcemi zadanými implicitně rovnicemi (5.14) nebo stručně *implicitními funkcemi* na oblasti $G \subset X$ nazýváme takové funkce

$$\begin{aligned} y_1(x_1, x_2, \dots, x_r); \\ y_2(x_1, x_2, \dots, x_r); \\ \vdots \\ y_s(x_1, x_2, \dots, x_r), \end{aligned} \quad (5.15)$$

že po dosazení $y_1(x_1, x_2, \dots, x_r)$ za y_1 , $y_2(x_1, x_2, \dots, x_r)$ za y_2 až $y_s(x_1, x_2, \dots, x_r)$ za y_s do soustavy (5.14) jsou všechny rovnice (5.14) identicky splněny na G .

5.2.2 Definice

Vektorovou funkci $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) : X \times Y \mapsto \mathbf{E}^s$, kde $X \subset \mathbf{E}^r$ a $Y \subset \mathbf{E}^s$, z definice 5.2.1 budeme nazývat *vektorovou generující funkcí*. Rovnici $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ budeme nazývat *generující soustavou* a bod $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in X \times Y$, pro který je splněna rovnost $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$, budeme nazývat *generujícím bodem*. Generující bod navíc nazveme *kritickým*, pokud vyhovuje rovnosti

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_s)} \right) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0.$$

5.2.3 Věta – velká existenční

Nechť je dán bod $(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \in \mathbf{E}^{r+s}$ a s funkcí $F_j(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{E}^{r+s} \mapsto \mathbf{R}$, jež mají na jistém okolí uvedeného bodu spojitě první parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných. Nechť dále

$$F_j(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) = 0$$

pro všechny $j \in \hat{s}$, tj. $(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \in \mathbf{E}^{r+s}$ je generujícím bodem. Nechť navíc

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_s)} \right) (a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \neq 0. \quad (5.16)$$

Potom pro každé $\Delta_0 > 0$ existují $\delta \in (0, \Delta_0)$ a $\Delta \in (0, \Delta_0)$ tak, že ke každému

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in J, \quad J = \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, \dots, |x_r - a_r| < \delta\}$$

existuje v intervalu $K = \{\vec{y} \in \mathbf{E}^s : |y_1 - b_1| < \delta, |y_2 - b_2| < \delta, \dots, |y_s - b_s| < \delta\}$ právě jediný bod $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ tak, že je splněna rovnice $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$. Souřadnice $y_1, y_2, \dots, y_s$ tohoto bodu jsou tudíž funkcemi bodu $\vec{x}$, což značí, že takto získané funkce $y_j = \varphi_j(\vec{x})$ jsou funkcemi implicitně zadanými rovnostmi $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ na okolí generujícího bodu.

Důkaz:

- v důkazu bude striktně značit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ a $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$
- dále $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ a $\vec{\alpha} = (\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s)$
- symbolem $\sigma(\vec{y}, \vec{z})$ budeme rozumět σ -metriku, tj. $\sigma(\vec{y}, \vec{z}) = \max_{1 \leq k \leq s} |y_k - z_k|$
- znakem c_{jk} označme hodnotu derivace $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\vec{\alpha})$ v bodě $\vec{\alpha}$

- podle předpokladu věty tedy

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

- jelikož jsou funkce $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ spojité v bodě $\vec{\alpha}$, existuje jistě číslo $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$ tak, že ve všech bodech intervalu

$$|x_i - a_i| < \Delta_1, |y_j - b_j| < \Delta_1 \quad (i \in \hat{r}, j \in \hat{s}) \quad (5.17)$$

je

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_s)} \right) \neq 0$$

- zvolme navíc číslo Δ_1 tak malé, aby všechny funkce $F_j(\vec{x}, \vec{y})$ byly spojité a měly parciální derivace prvního řádu podle $y_1, y_2, \dots, y_s$ v intervalu (5.17)

- položíme

$$H_j(\vec{x}, \vec{y}) = c_{j1}y_1 + c_{j2}y_2 + \dots + c_{js}y_s - F_j(\vec{x}, \vec{y})$$

- vektorová generující rovnice $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ pak značí totéž co rovnice

$$c_{j1}y_1 + c_{j2}y_2 + \dots + c_{js}y_s = H_j(\vec{x}, \vec{y}), \quad (j \in \hat{s}) \quad (5.18)$$

- odtud

$$\frac{\partial H_j}{\partial y_k} = c_{jk} - \frac{\partial F_j}{\partial y_k}$$

a také

$$\frac{\partial H_j}{\partial y_k}(\vec{\alpha}) = 0, \quad (j, k \in \hat{s}) \quad (5.19)$$

- rovnice (5.18) jsou, jak vyplývá z teorie lineární algebry (viz skriptu [1]), splněny právě tehdy, když

$$y_j = \sum_{k=1}^s \frac{C_{kj}}{C} H_k(\vec{x}, \vec{y}) \quad (j \in \hat{s}), \quad (5.20)$$

kde C_{kj} je doplněk prvku c_{kj} v determinantu C

- pravou stranu rovnice (5.20) označme $G_j(\vec{x}, \vec{y})$, takže místo rovnic (5.18) můžeme vyšetřovat rovnice

$$y_j = G_j(\vec{x}, \vec{y}) \quad (j \in \hat{s}), \quad (5.21)$$

neboť (5.21) platí právě tehdy, platí-li (5.18)

- jelikož jsou rovnice $F_j(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ splněny v bodě $\vec{\alpha} = (\vec{a}, \vec{b})$, platí totéž o rovnicích (5.21), tj. platí

$$b_j = G_j(\vec{a}, \vec{b}) \quad (j \in \hat{s}), \quad (5.22)$$

- funkce $G_j(\vec{x}, \vec{y})$ splňují ovšem také předpoklady o spojitosti a o existenci parciálních derivací prvního řádu, které jsme v předcházejícím textu učinili o funkcích $F_j(\vec{x}, \vec{y})$

- mimoto je podle (5.19) a podle definice funkcí $G_j(\vec{x}, \vec{y})$ splněno:

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_k}(\vec{\alpha}) = 0 \quad (j, k \in \hat{s}), \quad (5.23)$$

- protože $\frac{\partial G_j}{\partial y_k}(\vec{x}, \vec{y})$ jsou funkce spojité v bodě $\vec{a} = (\vec{a}, \vec{b})$ a protože platí (5.23), existuje číslo $\Delta \in (0, \Delta_1)$ tak, že ve všech bodech intervalu

$$|x_i - a_i| < \Delta, |y_j - b_j| < \Delta \quad (i \in \hat{r}, j \in \hat{s}) \quad (5.24)$$

je

$$\left| \frac{\partial G_j(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_k} \right| < \frac{1}{2s} \quad (j, k \in \hat{s}), \quad (5.25)$$

- ze spojitosti funkcí $G_j(\vec{x}, \vec{y})$ plyne, že existuje $\delta \in (0, \Delta)$ tak, že ve všech bodech intervalu

$$|x_i - a_i| < \delta \quad (i \in \hat{r}) \quad (5.26)$$

je

$$|G_j(\vec{x}, \vec{b}) - G_j(\vec{a}, \vec{b})| < \frac{\Delta}{4} \quad (5.27)$$

- označme: $K = \{\vec{y} \in \mathbf{E}^s : |y_j - b_j| < \Delta; j \in \hat{s}\}$
- důkaz hlavního tvrzení nyní provedeme tak, že jej rozložíme na důkazy čtyř subtvrzení
- První subtvrzení: Je-li $\vec{x} \in J$, $\vec{y} \in K$, $\vec{z} \in K$ a $j \in \hat{s}$, pak

$$|G_j(\vec{x}, \vec{y}) - G_j(\vec{x}, \vec{z})| \leq \frac{\sigma(\vec{y}, \vec{z})}{2}.$$

- je-li $\vec{y} = \vec{z}$, pak je platnost vztahu jasná
- volme tedy $\vec{y} \neq \vec{z}$
- je-li $\vec{x}$ voleno pevně, jsou $G_j(\vec{x}, \vec{y})$ funkce proměnných $y_1, y_2, \dots, y_s$ mající v intervalu K parciální derivace prvního řádu
- podle věty o přírůstku 2.3.1 existují v K body $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \dots, \vec{\eta}_r \in K$ tak, že platí

$$G_j(\vec{x}, \vec{y}) - G_j(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial G_j}{\partial y_k}(\vec{x}, \vec{\eta}_k) (y_k - z_k)$$

- podle (5.25) tedy

$$|G_j(\vec{x}, \vec{y}) - G_j(\vec{x}, \vec{z})| \leq \frac{1}{2s} \sum_{k=1}^s |y_k - z_k| \leq \frac{\sigma(\vec{y}, \vec{z})}{2}$$

- Druhé subtvrzení: Ke každému $\vec{x} \in J$ existuje nejvýše jeden bod $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s) \in K$ takový, že $y_j = G_j(\vec{x}, \vec{y})$ pro $j \in \hat{s}$.
- nechť $\vec{x} \in J$, $\vec{y} \in K$, $\vec{z} \in K$, $y_j = G_j(\vec{x}, \vec{y})$ a $z_j = G_j(\vec{x}, \vec{z})$
- chceme dokázat, že za daných okolností je $\vec{y} = \vec{z}$, což prokáže onu jednoznačnost
- pro $j \in \hat{s}$ ale máme $2|y_j - z_j| = 2|G_j(\vec{x}, \vec{y}) - G_j(\vec{x}, \vec{z})| \leq \sigma(\vec{y}, \vec{z})$, a tedy

$$\sigma(\vec{y}, \vec{z}) = \max_{1 \leq k \leq s} |y_k - z_k| \leq \frac{\sigma(\vec{y}, \vec{z})}{2},$$

odkuž již zřetelně plyne, že $\sigma(\vec{y}, \vec{z}) = 0$

- z axiomů metriky ale plyne, že $\vec{y} = \vec{z}$, což bylo dokázat

- Třetí subtvrzení: Ke každému $\vec{x} \in J$ existuje bod $\vec{Y} \in K$ (a podle druhého subtvrzení bod jediný) tak, že $Y_j = G_j(x, Y)$ pro všechna $j \in \hat{s}$.
- zavedme posloupnost bodů $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots$ definovanou takto:
 1. Klademe $\vec{y}_0 = \vec{b}$, a tedy $y_{0j} = b_j$ a $y_{0j} = G_j(\vec{a}, \vec{y}_0)$, jak plyne ze vztahu (5.22).
 2. Je-li bod $\vec{y}_{n-1}$ již definován, pak definujeme

$$y_{nj} = G_j(\vec{x}, \vec{y}_{n-1}). \quad (5.28)$$

- nyní lze (a my to ponecháme čtenáři) prokázat indukci, že pro $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\sigma(\vec{y}_n, \vec{y}_{n-1}) \leq \frac{\Delta}{2^{n+1}} \quad (5.29)$$

- odtud dále plyne, že pro každé j a n je

$$\sigma(y_{nj}, y_{n-1j}) \leq \frac{\Delta}{2^{n+1}} \quad (5.30)$$

- řada

$$y_{0j} + (y_{1j} - y_{0j}) + (y_{2j} - y_{1j}) + (y_{3j} - y_{2j}) + \dots \quad (5.31)$$

konverguje, a existuje tudíž limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{nj} = Y_j$$

- z předešlého ale vychází, že $|Y_j - b_j| \leq \Delta/2$, takže bod $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_s)$ leží v K
- funkce $G_j(\vec{x}, \vec{y})$ (pro fixovanou hodnotu $\vec{x}$) jsou proto spojité v bodě $\vec{Y}$
- následkem této spojitosti pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} G_j(\vec{x}, \vec{y}_n) = G_j(\vec{x}, \vec{Y})$
- takže podle (5.28) je

$$Y_j = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{nj} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_j(\vec{x}, \vec{y}_{n-1}) = G_j(\vec{x}, \vec{Y}),$$

čímž je třetí subtvrzení dokázáno

- Čtvrté subtvrzení: Funkce $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ jsou spojité na J .
- čísla y_{nj} a Y_j ze třetího subtvrzení jsou zjevně funkcemi $\vec{x}$
- jelikož jsou funkce y_{nj} spojitými funkcemi na J , jak bylo prokázáno výše, a jelikož je řada (5.31) na J stejnoměrně konvergentní (jak plyne ze srovnávacího kritéria založeného na platnosti nerovnosti (5.30)), plyne odtud (a z věty 3.1.8 o spojitosti limitní funkce), že všechny Y_j jsou spojité
- označíme-li ještě $\varphi_j(\vec{x}) = Y_j(\vec{x})$, vidíme, že je celá velká existenční věta dokázána

5.2.4 Věta – o implicitních funkcích

Nechť jsou dány funkce $F_i(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$ pro $i \in \hat{s}$. Nechť bod

$$\vec{\lambda} = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_r^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_s^\circ)$$

vyhovuje soustavě (5.14) a všechny funkce $F_i(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$ pro $i \in \hat{s}$ mají v okolí bodu $\vec{\lambda}$ spojitě parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných, přičemž

$$\Delta := \det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_s)} \right) (\vec{\lambda}) \neq 0. \quad (5.32)$$

Pak na jistém okolí bodu $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$ existuje jediná soustava spojitých funkcí (5.15) implicitně zadaných soustavou (5.14) taková, že platí

$$\begin{aligned} y_1^0 &= y_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0); \\ y_2^0 &= y_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0); \\ &\vdots \\ y_s^0 &= y_s(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0). \end{aligned}$$

Každá z funkcí $y_1(x_1, x_2, \dots, x_r), y_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, y_s(x_1, x_2, \dots, x_r)$ má přitom na okolí uvažovaného bodu spojitou derivaci, tj. spojitě derivace podle všech nezávisle proměnných $x_1, x_2, \dots, x_r$, přičemž platí, že

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(\vec{x}^0) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{k-1}}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_{k+1}}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_s}(\vec{\lambda}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{k-1}}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_k}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_{k+1}}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_s}(\vec{\lambda}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_s}{\partial y_2}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial y_{k-1}}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_s}{\partial x_k}(\vec{\lambda}) & \frac{\partial F_s}{\partial y_{k+1}}(\vec{\lambda}) & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial y_s}(\vec{\lambda}) \end{vmatrix}. \quad (5.33)$$

Důkaz:

- uvažujeme generující soustavu $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ a generující bod $\vec{\lambda}$, který není, jak plyne z podmínky (5.10), bodem kritickým
- nejpodstatnější otázka, kterou je otázka existence diskutované implicitní funkce na okolí generujícího bodu $\vec{\lambda}$, je rozřešena ve větě 5.2.3
- podle jejího znění máme nyní stoprocentní jistotu, že hledané implicitní funkce více proměnných skutečně existují
- hledejme tedy dále v jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}_0)$ parciální derivace diskutovaných implicitních funkcí $y_j(\vec{x})$, které jsou zadány generující soustavou $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- podobně jako lze vcelku jednoduše vypočítat derivaci funkce $y(x)$ zadané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, lze i pro funkce (5.15) zadané implicitně rovnicemi (5.14) počítat jejich parciální derivace
- provedeme výpočet parciálních derivací $\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}\right)$ všech takto definovaných funkcí podle vybrané nezávisle proměnné x_k ($k \in \hat{r}$)
- derivací soustavy (5.14) podle x_k získáme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_k} + \frac{\partial F_s}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_s}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned}$$

- jedná se o soustavu rovnic s neznámými $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}$, která je díky splnění podmínky (5.32) vždy řešitelná, neboť determinant soustavy

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_s} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1} & \frac{\partial F_s}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \end{vmatrix}$$

je shodný s determinantem vystupujícím v nerovnosti (5.32)

- to lze nahlédnout z maticového vyjádření výše uvedené soustavy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1} & \frac{\partial F_s}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

- odtud obecně

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k} = - \frac{\Delta_{(k,j)}}{\Delta},$$

kde $\Delta_{(k,j)}$ vznikne podle Cramerova pravidla záměnou j -tého sloupce determinantu Δ za sloupceový vektor

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_k}, \frac{\partial F_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial x_k} \right)^\top$$

- přepisem tohoto poznatku je právě rovnost (5.33)
- díky nenulovosti determinantu Δ jsou pak na jistém okolí bodu $\vec{x}^0$ všechny parciální derivace $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ pro $k \in \hat{r}$, $j \in \hat{s}$ spojité, a tedy spojité jsou i funkce $y_j(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$
- jednoznačnost funkce $y_j(\vec{x})$ prokážeme sporem
- nechť tedy existují dvě různé funkce $y_j(\vec{x})$ a $\tilde{y}_j(\vec{x})$, které jsou řešením soustavy (5.14) a splňují rovnost

$$y_j(\vec{x}^0) = \tilde{y}_j(\vec{x}^0) \quad (5.34)$$

- z předešlé části důkazu ale vyplývá, že na určitém okolí bodu $\vec{x}^0$ platí

$$\frac{\mathcal{D}y_j}{\mathcal{D}\vec{x}}(\vec{x}) = \frac{\mathcal{D}\tilde{y}_j}{\mathcal{D}\vec{x}}(\vec{x})$$

- obě derivace jsou navíc podle předchozího spojité, a tudíž z věty 2.3.16 vyvozujeme, že obě funkce $y_j(\vec{x})$ a $\tilde{y}_j(\vec{x})$ mají na jistém okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{x}^0)$ bodu $\vec{x}^0$ totální diferenciály, pro které platí

$$dy_j(dx_1, dx_2, \dots, dx_r) = d\tilde{y}_j(dx_1, dx_2, \dots, dx_r)$$

- z důsledku 2.3.23 proto vyplývá, že existuje $C \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{x}^0)$ platí rovnost $\tilde{y}_j(\vec{x}) = y_j(\vec{x}) + C$
- z podmínky (5.34) ale plyne, že $C = 0$, což vede k očekávanému sporu

5.2.5 Příklad

Budeme hledat Taylorovy polynomy prvního řádu funkcí zadaných implicitně soustavou rovnic

$$\begin{aligned} F(x, y, z, u) &= x + y - 2u^2 - 2z^2 - 4uz = 0; \\ G(x, y, z, u) &= x^2 - y^2 + 8u^2z^2 + 4u^3z + 4uz^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

v bodě $\vec{a} = (z_0, u_0) = (1, 2)$. Nejprve vypočteme zbylé souřadnice bodu $\vec{\lambda} = (x_0, y_0, 1, 2)$, v němž by měla výše uvedená soustava rovnic definovat implicitní funkce $x(z, u)$ a $y(z, u)$. Po dosazení budeme tedy hledat řešení soustavy $x + y - 18 = 0$, $x^2 - y^2 + 72 = 0$. Odtud snadno $\vec{\lambda} = (7, 11, 1, 2)$, což tedy značí, že funkční hodnoty

implicitních funkcí jsou $x(\vec{a}) = 7$ a $y(\vec{a}) = 11$. Ovšem stále ještě není zodpovězena otázka existence příslušných implicitních funkcí. Podle věty 5.2.4 je totiž nutno zaručit nenulovost determinantu

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F, G)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) (\vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \end{vmatrix} (7, 11, 1, 2) = -36 \neq 0.$$

Při hledání parciálních derivací $\frac{\partial x}{\partial u}(\vec{a})$ a $\frac{\partial y}{\partial u}(\vec{a})$ derivujeme rovnice (5.35) podle proměnné u . To vede k rovnicím

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} - 4u - 4z &= 0; \\ 2x \frac{\partial x}{\partial u} - 2y \frac{\partial y}{\partial u} + 16uz^2 + 12u^2z + 4z^3 &= 0 \end{aligned}$$

a následně po dosazení bodu $\vec{a}$ k soustavě

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u}(\vec{a}) + \frac{\partial y}{\partial u}(\vec{a}) &= 12; \\ 14 \frac{\partial x}{\partial u}(\vec{a}) - 22 \frac{\partial y}{\partial u}(\vec{a}) &= -84. \end{aligned}$$

Odsud pak

$$\frac{\partial x}{\partial u}(\vec{a}) = 5, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(\vec{a}) = 7.$$

Zcela analogicky po derivaci soustavy (5.35) podle proměnné z obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} - 4z - 4u &= 0; \\ 2x \frac{\partial x}{\partial z} - 2y \frac{\partial y}{\partial z} + 16u^2z + 4u^3 + 12uz^2 &= 0; \end{aligned}$$

a po dosazení bodu $\vec{a}$ soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z}(\vec{a}) + \frac{\partial y}{\partial z}(\vec{a}) &= 12; \\ 14 \frac{\partial x}{\partial z}(\vec{a}) - 22 \frac{\partial y}{\partial z}(\vec{a}) &= -120. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou parciální derivace

$$\frac{\partial x}{\partial z}(\vec{a}) = 4, \quad \frac{\partial y}{\partial z}(\vec{a}) = 8.$$

Uzavíráme tedy, že hledanými Taylorovými polynomy prvního stupně jsou polynomy

$$\begin{aligned} x(u, z) &\doteq 7 + 5(u - 2) + 4(z - 1) = 5u + 4z - 7 \\ y(u, z) &\doteq 11 + 7(u - 2) + 8(z - 1) = 7u + 8z - 11. \end{aligned}$$

5.2.6 Příklad

Nalezněme druhý diferenciál funkce $z(x, y)$, jež je zadána implicitně rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2u^3 &= 0; \\ x + y + z - u &= 2; \end{aligned} \tag{5.36}$$

v bodě $\vec{a} = (1, -1)$. Při řešení úlohy je třeba si uvědomit, že dvě rovnice (5.36) zadávají kromě funkce $z(x, y)$ také funkci $u(x, y)$. Je-li $x = 1$ a $y = -1$, musí být nutně splněny rovnice

$$\begin{aligned} 4 - z^2 - 2u^3 &= 0; \\ z - u &= 2. \end{aligned}$$

Odtud jednoduše vychází, že $z(\vec{a}) = 2$ a $u(\vec{a}) = 0$. Tedy bodem, ve kterém by rovnice (5.36) měly zadávat zmíněné implicitní funkce, je bod $\vec{\lambda} = (1, -1, 2, 0)$. O tom, jsou-li splněny předpoklady věty o implicitních funkcích, se snadno přesvědčíme výpočtem determinantu

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F, G)}{\mathcal{D}(z, u)} \right) (\vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} -2z & -6u^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} (\vec{\lambda}) = 4 \neq 0.$$

Tedy nic již nebrání výpočtu. Zderivujeme-li vztahy (5.36) podle x , obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 4x - 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ 1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

kterou po dosazení bodu $\vec{\lambda}$ řeší hodnoty

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\vec{a}) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{a}) = 2.$$

Analogicky vede soustava

$$\begin{aligned} 4y - 2z \frac{\partial z}{\partial y} - 6u^2 \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ 1 + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

k hodnotám

$$\frac{\partial z}{\partial y}(\vec{a}) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{a}) = 0.$$

Dalším derivováním rovnic (5.37) získáme soustavu

$$\begin{aligned} 4 - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 12u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 6u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením pro $\vec{\lambda} = (1, -1, 2, 0)$ je hodnota

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\vec{a}) = \frac{1}{2}.$$

Analogicky bychom vypočetli také hodnotu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\vec{a}) = \frac{1}{2},$$

která ale nevyplývá ze zdánlivé symetrie zadání. Povšimněme si, že proměnné x a y jsou sice záměnné v rovnicích (5.36), ale bod $\vec{a} = (1, -1)$ již symetrii nevykazuje. Zderivujeme-li nyní rovnice (5.37) podle y , povede vzniklá soustava

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 12u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 6u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

k hodnotě smíšené parciální derivace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{1}{2}.$$

Zakončujeme tedy tvrzením, že druhým diferenciálem implicitní funkce $z(x, y)$ zadané rovnicemi (5.36) v bodě $\vec{a}$ je kvadratická forma

$$d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) = \frac{1}{2} (dx^2 + 2dx dy + dy^2).$$

5.2.7 Příklad

V tomto příkladě budeme zkoumat Taylorovu aproximaci funkce $z(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5.38)$$

kde $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Hledat budeme Taylorův polynom druhého stupně v bodě $(x_0, y_0) = (0, 0)$, kde $z(x_0, y_0) = -c := z_0$. Označme proto $\vec{\lambda} = (0, 0, -c)$ a zkoumejme nejprve, zda rovnice (5.38) skutečně zadává na okolí tohoto bodu $\vec{\lambda}$ implicitní funkci $z(x, y)$. Podle obecné věty o implicitních funkcích musí být (kromě jiného) splněno, že

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\vec{\lambda}) \neq 0,$$

kde

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Tato podmínka ale v našem případě splněna je, neboť

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\vec{\lambda}) = 2 \frac{z}{c^2} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,-c)} = -\frac{2}{c} \neq 0.$$

Parciální derivací rovnice (5.38) podle proměnné x a posléze podle y dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z},$$

odkud

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Dalším derivováním snadno vypočteme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{z - x \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{c}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{z - y \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{c}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{c^2}{a^2} \frac{x \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

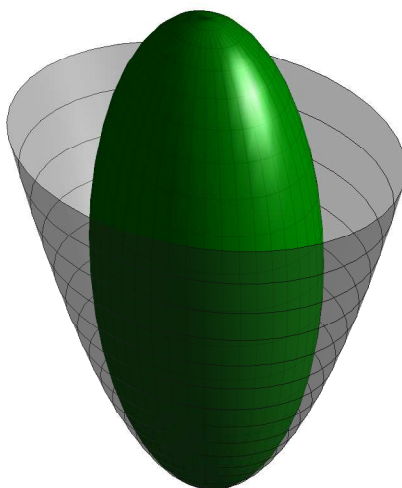
Taylorovým polynomem druhého stupně funkce $z(x, y)$ je tudíž polynom

$$\mathcal{T}^2(x, y) = -c + \frac{c}{2a^2} x^2 + \frac{c}{2b^2} y^2.$$

Proto je eliptický paraboloid

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} - \frac{z}{c} = 1 \quad (5.39)$$

kvadratickou plochou aproximující na okolí bodu $\vec{\lambda} = (0, 0, -c)$ skutečné chování implicitní funkce $z(x, y)$ zadané rovnicí (5.38).



Obrázek 5.19

Eliptický paraboloid (5.39) tečný k nerotačnímu elipsoidu (5.38).

5.2.8 Příklad

Pokusme se sestavit obecný vzorec pro tečnou rovinu k eliptickému hyperboloidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.40)$$

v jeho bodě (x_0, y_0, z_0) . Přitom $a, b, c > 0$ nechť jsou pevně zvolené parametry. Na rovnici (5.40) budeme pohlížet jako na rovnici generující implicitní funkci $z = z(x, y)$. Chceme-li nalézt tečnou rovinu ke grafu funkce $z = z(x, y)$, tj. k ploše (5.40), je třeba zkonstruovat příslušný první totální diferenciál. Pro korektnost řešení vylučujeme z uvedeného postupu ty body (x_0, y_0, z_0) , v nichž není splněna podmínka

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \neq 0,$$

tj. body, kde $z_0 = 0$. Jde tedy o všechny body elipsy

$$E = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Podle věty o implicitních funkcích snadno vypočteme, že

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}.$$

Proto

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0}$$

a pro totální diferenciál funkce $z = z(x, y)$ tak dostáváme rovnost

$$dz_{(x_0, y_0)}(dx, dy) = z - z_0 = \frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0} dx + \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0} dy.$$

Po jednoduchých úpravách

$$z - z_0 = \frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0} (x - x_0) + \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0} (y - y_0),$$

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0} x + \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0} y - z &= \frac{c^2}{a^2} \frac{x_0}{z_0} x_0 + \frac{c^2}{b^2} \frac{y_0}{z_0} y_0 - z_0, \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2},\end{aligned}$$

pak snadno odvodíme hledanou rovnici pro tečnou rovinu ve tvaru

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1. \quad (5.41)$$

Podotýkáme, že bylo užito faktu, že bod (x_0, y_0, z_0) je bodem studovaného eliptického hyperboloidu, a tedy

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Rovnice (5.41) navíc zůstává v platnosti i pro vyloučené body elipsy E , jak se lze jednoduše přesvědčit modifikací řešení pro implicitní funkce $x = x(y, z)$ či $y = y(x, z)$.

Kapitola 6

Regulární transformace parciálních diferenciálních výrazů

Zaměňovat nezávisle proměnné v obyčejných diferenciálních rovnicích je poměrně snadnou a standardní úlohou. Víme například z teorie diferenciálních rovnic Eulerova typu, že takové záměny mohou být extrémně výhodné při řešení diferenciálních rovnic. Vzpomeňme ku příkladu, že transformace tvaru $x = e^t$ převede Eulerovu diferenciální rovnici $\sum_{m=0}^n a_m x^m y^{(m)}(x) = q(x)$ pro neznámou funkci $y(x)$ na rovnici s konstantními koeficienty $\sum_{m=0}^n b_m y^{(m)}(t) = q(t)$. Lze ale obdobné postupy aplikovat také na řešení parciálních diferenciálních rovnic? To si ukážeme nyní.

6.1 Záměna proměnných

V první části této kapitoly se budeme věnovat teorii transformací parciálních diferenciálních výrazů (či parciálních diferenciálních rovnic) do nových proměnných. To je základní procedura nezbytná k úpravám parciálních diferenciálních rovnic do elegantnějších, a tedy snáze řešitelných tvarů.

6.1.1 Komentář

Ze všech možných transformací v prostorech $\mathbf{E}^r$ se budeme zabývat pouze těmi, které "zachovávají podstatu transformovaných objektů," tedy těmi, které např. převádí regulární křivky na jiné regulární křivky, regulární plochy na jiné regulární plochy atd. Vynecháme proto tzv. *singulární transformace*, jakou je např. transformace $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$, definovaná předpisem

$$x(\xi, \eta) = \sqrt{2\xi}; \quad y(\xi, \eta) = \xi.$$

Taková transformace totiž např. polorovinu $\{(\xi, \eta) \in \mathbf{E}^2 : \xi \geq 0\}$ v souřadnicích ξ, η deformuje na parabolu $x^2 - 2y = 0$ v souřadnicích x, y .

6.1.2 Definice

Vektorovou funkci $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ nazveme *prostou*, resp. *prostým zobrazením* na množině $G \subset \mathbf{E}^r$, pokud pro každé dva různé body $\vec{x}, \vec{y} \in G$ ($\vec{x} \neq \vec{y}$) platí, že $\vec{F}(\vec{x}) \neq \vec{F}(\vec{y})$.

6.1.3 Komentář

Vyslovíme nyní užitečné věty (uvedené jako lemmata) z teorie lineární algebry. Budeme je dále využívat při důkazech některých vět.

6.1.4 Lemma

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ je regulární čtvercová matice řádu r . Označme β_{ij} algebraický doplněk jejího prvku a_{ij} , tj.

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,r-1} & a_{i-1,r} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,r-1} & a_{i+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \dots & a_{r-1,j-1} & a_{r-1,j+1} & \dots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{r,r-1} & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Pak označíme-li $\mathbb{B} = (\beta_{ij})_{i,j=1}^r$ matici těchto algebraických doplňků, platí rovnost $\det(\mathbb{B}) = (\det(\mathbb{A}))^{r-1}$.

Důkaz:

- viz příklad 2.42, strana 36 ve skriptech [1]

6.1.5 Lemma

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ je regulární čtvercová matice řádu r a β_{ij} algebraický doplněk jejího prvku a_{ij} . Pak

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rr} \end{pmatrix}.$$

Důkaz:

- viz věta 2.40, strana 35 ve skriptech [1]

6.1.6 Definice

Vektorovou funkci $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ nazveme *regulární*, resp. *regulárním zobrazením* na množině $G \subset \mathbb{E}^r$, pokud

- množina G je otevřená,
- $\vec{F}(\vec{x})$ má na G spojitou Jacobiho matici, tj. všechny prvky Jacobiho matice jsou na G spojitými funkcemi,
- a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí nerovnost $\det\left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_r)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}\right)(\vec{x}) \neq 0$.

6.1.7 Komentář

Povšimněte si, že regulární zobrazení nemusí podle definice být nutně prosté! To ukážeme v následujícím příkladě.

6.1.8 Příklad

Ukažme nyní, že zobrazení $(x, y) = \vec{F}(\varrho, \varphi) := (\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi))$ je na množině $G = (0, +\infty) \times (0, 4\pi)$ regulární. Snadno nahlédneme, že G je otevřenou množinou a $\vec{F}(\varrho, \varphi)$ na ní spojitě diferencovatelné. Vypočtěme tedy příslušný jacobíán. Ten je tvaru

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \varrho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \varrho,$$

a nemůže tudíž na G nabýt nulové hodnoty. Přestože je ale nyní prokázáno, že $\vec{F}(\varrho, \varphi)$ je na G regulárním zobrazením, není na G zobrazením prostým, neboť pro dva různé body $(\varrho_1, \varphi_1) = (1, \pi)$ a $(\varrho_2, \varphi_2) = (1, 3\pi)$ platí rovnost $\vec{F}(\varrho_1, \varphi_1) = \vec{F}(\varrho_2, \varphi_2) = (-1, 0)$, což odporuje definici prostoty.

6.1.9 Věta

Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulární zobrazení na množině $G \subset \mathbb{E}^r$. Pak pro každé $\vec{a} \in G$ a každý index $i \in \hat{r}$ existuje totální diferenciál

$$dF_{i_{\vec{a}}}(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_r)$$

funkce $F_i(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ v bodě $\vec{a}$.

Důkaz:

- podle předpokladů má funkce $F_i(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ v bodě $\vec{a} \in G$ spojitě všechny parciální derivace
- podle věty 2.3.16 tedy existuje totální diferenciál $dF_{i_{\vec{a}}}(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_r)$

6.1.10 Definice

Vektorovou funkci $\vec{I}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ definovanou předpisem $I_i(\vec{x}) = x_i$ pro $i \in \hat{r}$ nazýváme *identitou* v $\mathbb{E}^r$.

6.1.11 Lemma

Identita $\vec{I}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ na r -dimenzionálním prostoru $\mathbb{E}^r$ je regulárním a prostým zobrazením. Jacobiho maticí identity je jednotková matice řádu r .

6.1.12 Věta

Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulární zobrazení na A , kde $A \subset \mathbb{E}^r$ je tedy otevřenou množinou. Potom $\vec{F}(A)$ je otevřená množina v $\mathbb{E}^r$.

Důkaz:

- zvolme $\vec{b} \in \vec{F}(A)$ libovolně
- pak jistě existuje $\vec{a} \in A$ tak, že $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$
- snahou je (podle definice otevřené množiny) ukázat, že $\vec{b}$ je vnitřním bodem množiny $\vec{F}(A)$, tj. že existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ takové, že celé leží v množině $\vec{F}(A)$
- chceme tedy de facto dokázat, že každý bod $\vec{y} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ má vzor $\vec{x}$, který leží v A
- jinými slovy: rovnice

$$\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}) \tag{6.1}$$

by měla mít pro každé $\vec{y} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ nějaké řešení $\vec{x} \in A$

- rovnici (6.1) zapíšeme ve tvaru

$$\vec{\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}, \quad (6.2)$$

kde jsme položili $\vec{\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}) - \vec{y}$

- jelikož $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$, je $\vec{\Phi}(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{0}$

- dále

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}\vec{\Phi}}{\mathcal{D}\vec{x}} \right) = \det \left(\frac{\mathcal{D}\vec{F}}{\mathcal{D}\vec{x}} \right) \neq 0$$

- tudíž podle věty o implicitních funkcích 5.2.4 existuje $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ takové, že pro všechna $\vec{y} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ existuje právě jediné $\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ implicitně zadané rovnicí (6.2)

- platí pro něj, že $\vec{\Phi}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$, tj. $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})$

- to dokončuje důkaz

6.1.13 Věta – o lokální prostotě

Nechť $A \subset \mathbb{E}^r$ je otevřená množina a $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ regulární zobrazení na A . Potom pro každý bod $\vec{a} \in A$ existuje okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ tak, že $\vec{F}(\vec{x})$ je prosté na $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$.

Důkaz:

- zvolme $\vec{a} \in A$ libovolně a označme $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$
- z předešlé věty vyplývá, že existuje $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b}) \subset \vec{F}(A)$ tak, že pro jakékoli $\vec{y}$ z okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$ existuje jednoznačně určené $\vec{x} \in A$ tak, že $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})$
- tím je tedy definováno (opět podle věty o implicitních funkcích) spojitě zobrazení $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{y})$
- vezměme okolí $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ tak, aby $\vec{F}(\mathcal{U}_\delta(\vec{a})) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{b})$
- vzor B množiny $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ při spojitěm zobrazení $\vec{x}$ je podle věty 1.4.2 otevřenou množinou, tj. $B = B^\circ$
- tím je zaručeno, že zobrazení $\vec{F}(\vec{x})$ mezi $\mathcal{U}_\delta(\vec{a})$ a B je bijektivní, tedy i prosté

6.1.14 Lemma

Nechť je vektorová funkce $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ regulárním zobrazením definovaným na množině $M \subset \mathbb{E}^r$. Nechť $\vec{G}(\vec{y}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulárním zobrazením definovaným na množině $\vec{F}(M) \subset \mathbb{E}^r$. Pak zobrazení $(\vec{G} \circ \vec{F})(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulárním zobrazením na množině $M \subset \mathbb{E}^r$.

6.1.15 Definice

Nechť je na množině $A \subset \mathbb{E}^r$ zadána vektorová funkce $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$. Vektorovou funkci $\vec{G}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ nazveme *inverzní vektorovou funkcí* k vektorové funkci $\vec{F}(\vec{x})$ a označíme $\vec{F}^\circ(\vec{x})$ právě tehdy, když pro všechna $\vec{x} \in A$ platí rovnost $(\vec{G} \circ \vec{F})(\vec{x}) = \vec{I}(\vec{x})$.

6.1.16 Věta – o regularitě inverzního zobrazení

Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulární a prosté zobrazení na množině $G \subset \mathbb{E}^r$. Pak k němu existuje inverzní zobrazení $\vec{G}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$, které je na množině $\vec{F}(G)$ regulární a prosté.

Důkaz:

- prostota inverzního zobrazení je za daných předpokladů zřejmá a plyne přímo z definice inverzního zobrazení
- označíme-li $H = \vec{F}(G)$ obraz množiny G při zobrazení $\vec{F}(\vec{x})$, plyne z věty 6.1.12, že $H = H^\circ$
- navíc systém rovnic

$$\Omega_j(\vec{x}, \vec{y}) = y_j - F_j(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \quad (j \in \hat{r}) \quad (6.3)$$

představuje soustavu r rovnic pro r neznámých $x_1, x_2, \dots, x_r$

- na okolí každého bodu

$$\vec{\lambda} = (a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r) \in G \times \vec{F}(G)$$

je determinant

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}\vec{\Omega}}{\mathcal{D}\vec{x}} \right) (\vec{\lambda}) = \det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_r)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)} \right) (\vec{a}) \neq 0 \quad (6.4)$$

nenulový

- jsou tak naplněny předpoklady věty 5.2.4 o implicitních funkcích
- soustava (6.3) tedy zadává jednoznačně funkce $x_j = x_j(y_1, y_2, \dots, y_r)$, kde $j \in \hat{r}$
- naším cílem nyní je získat Jacobiho matici inverzního zobrazení $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$, tj. vypočítat parciální derivace

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i}, \quad (i \in \hat{r}, k \in \hat{r}) \quad (6.5)$$

- parciální derivací soustavy (6.3) podle proměnné y_i získáme sadu r rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \\ 0 &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \\ 0 &= \dots \\ 0 &= \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \\ 1 &= \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \\ 0 &= \frac{\partial F_{i+1}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_{i+1}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_{i+1}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_{i+1}}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \\ 0 &= \dots \\ 0 &= \frac{\partial F_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial F_r}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial F_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \end{aligned}$$

- ta představuje soustavu r rovnic pro r neznámých $\frac{\partial x_1}{\partial y_i}, \frac{\partial x_2}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial x_r}{\partial y_i}$

- zapsána do maticového tvaru má tato soustava tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1} & \frac{\partial F_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- determinantom této soustavy je právě determinant (6.4), a proto je soustava z Frobeniovy věty řešitelná
- podle Cramerova pravidla má soustava řešení

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\Delta_{(ik)}}{\Delta},$$

kde

$$\Delta = \det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_r)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)} \right)$$

je determinant soustavy a $\Delta_{(ik)}$ je determinant matice, jež vznikne nahrazením k -tého sloupce matice soustavy sloupcovým vektorem pravé strany $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$, kde jednička vystupuje na i -té pozici

- každá derivace $\frac{\partial x_k}{\partial y_i}$ je tedy spojitá, čímž je naplněn druhý požadavek kladený na regularitu zobrazení $\vec{x} = \vec{G}(\vec{y})$
- zbývá tedy dokázat, že příslušný determinant není nulový
- Jacobiho maticí zkoumaného inverzního zobrazení $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}) = \vec{G}(\vec{y})$ je, jak bylo demonstrováno výše, matice

$$\mathbb{B} = \frac{\mathcal{D}(G_1, G_2, \dots, G_r)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_r)} = \left(\frac{\Delta_{(ik)}}{\Delta} \right)_{i,k=1}^r = \frac{1}{\Delta^r} (\Delta_{(ik)})_{i,k=1}^r$$

- uvědomíme-li si nyní, že determinant $\Delta_{(ik)}$ je roven algebraickému doplňku β_{ik} čísla a_{ik} matice

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{i,k=1}^r = \frac{\mathcal{D}\vec{F}}{\mathcal{D}\vec{x}}$$

platí podle lemmatu 6.1.4 rovnost

$$\det(\mathbb{B}) = \frac{1}{\Delta^r} \det(\mathbb{C}) = \frac{(\det(\mathbb{A}))^{r-1}}{\Delta^r} = \frac{\Delta^{r-1}}{\Delta^r} = \frac{1}{\Delta} \neq 0,$$

kde $\mathbb{C} = (\beta_{ik})_{i,k=1}^r$ je matice sestavená z algebraických doplňků β_{ik}

- jelikož determinant inverzního zobrazení $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}) = \vec{G}(\vec{y})$ je nenulový, je toto inverzní zobrazení regulární

6.1.17 Komentář

Z výše uvedeného důkazu navíc plyne, že

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{r1} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{r2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \beta_{1r} & \beta_{2r} & \dots & \beta_{rr} \end{pmatrix},$$

a proto platí podle věty 6.1.5 rovnost $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$. Jacobiho matice regulárního zobrazení $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ je tudíž inverzní k Jacobiho matici inverzního zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{y}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$. Doplnkově bude tento problém řešen také ve větě 6.1.18.

6.1.18 Věta – o Jacobiho matici inverzního zobrazení

Nechť je na množině $G \subset \mathbf{E}^r$ zadáno regulární a prosté zobrazení $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$. Pak pro Jacobiho matici $\mathbb{B}$ inverzního zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ v bodě $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$ a Jacobiho matici $\mathbb{A}$ vektorové funkce $\vec{F}(\vec{x})$ v bodě $\vec{a} \in M$ platí rovnost $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.

Důkaz:

- nechť $\mathbb{A}$ je Jacobiho matice regulárního a prostého zobrazení $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ v bodě $\vec{a} \in G$
- pak z definice regulárního zobrazení plyne, že $\det(\mathbb{A}) \neq 0$
- podle věty 6.1.16 tedy existuje k $\vec{F}(\vec{x})$ inverzní zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{x})$
- označme $\mathbb{B}$ Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ v bodě $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$
- snadno nahlédneme, že Jacobiho matice identity z definice 6.1.10 je jednotkovou maticí $\mathbb{I}$ řádu r
- podle věty 6.1.9 mají jak zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{x})$ tak samotné $\vec{F}(\vec{x})$ totální diferenciály v bodě $\vec{b}$, resp. $\vec{a}$
- tím jsou naplněny předpoklady věty 2.3.24, a bude tudíž možno užít jejího tvrzení, že $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$
- odtud je již zřejmo, že $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$

6.1.19 Důsledek – o jacobiánu inverzního zobrazení

Nechť platí předpoklady předešlé věty. Pak jacobián inverzního zobrazení $\vec{F}^\ominus(\vec{x})$ v bodě $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$ je roven převrácené hodnotě jacobiánu zobrazení $\vec{F}(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$.

6.1.20 Definice

Nechť

$$\Phi \left(x_1, x_2, \dots, x_r, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_r}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots \right) \quad (6.6)$$

je diferenciální výraz pro funkci $z(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Nechť $\vec{x}(\vec{\xi}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ je regulárním a prostým zobrazením na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Potom r vztahů $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ pro $i \in \hat{r}$ nazýváme *transformačními vztahy prvního druhu* a přechod od výrazu (6.6) k výrazu

$$\Phi \left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{\partial z}{\partial \xi_1}, \frac{\partial z}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \xi_r}, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2}, \dots \right) \quad (6.7)$$

pro funkci $z(\vec{\xi}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ *transformací prvního druhu*.

6.1.21 Příklad

Budeme nyní transformovat parciální diferenciální rovnici

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

pro neznámou funkci $u(x, y)$ na rovnici pro funkci $u(\varrho, \varphi)$ prostřednictvím vztahů

$$x = \varrho \cos(\varphi), \quad y = \varrho \sin(\varphi). \quad (6.8)$$

Jelikož

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \varrho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \varrho,$$

je zadaná transformace regulární a prostá na množině $A = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : \varrho > 0 \wedge 0 < \varphi < 2\pi\}$. Zderivujeme-li vztahy (6.8) podle x dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}$$

pro neznámé $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Řešením je dvojice

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}.$$

Podobně po derivování soustavy (6.8) podle y získáme rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 &= \frac{\partial \varrho}{\partial y} \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}$$

jejichž řešeními jsou parciální derivace

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}.$$

Odtud tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos(\varphi) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin(\varphi)}{\varrho}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \varrho} \sin(\varphi) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}.$$

Dalším derivováním první z dvojice těchto rovnic podle x obdržíme druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} - \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Analogicky vypočteme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{\cos(2\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\cos(2\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

což po dosazení do původní rovnice vede k výsledku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

6.1.22 Definice

Nechť (6.6) je diferenciální výraz pro funkci $z(\vec{x}) : E^r \mapsto \mathbf{R}$. Nechť $\vec{\xi}(\vec{x}) : E^r \mapsto E^r$ je regulárním a prostým zobrazením na množině $M \subset E^r$. Potom r vztahů $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ pro $i \in \hat{r}$ nazýváme *transformačními vztahy druhého druhu* a přechod od výrazu (6.6) k výrazu (6.7) pro funkci $z(\vec{\xi}) : E^r \mapsto \mathbf{R}$ *transformací druhého druhu*.

6.1.23 Příklad

Budeme nyní transformovat parciální diferenciální rovnici

$$x^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 3x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 3xy \frac{\partial f}{\partial y} + 8x^4 y^5 = 0$$

transformačními vztahy

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

druhého druhu. Tato transformace je regulární na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$, neboť pro její jacobíán platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) = 2 \frac{y}{x}.$$

Nyní budeme provádět samotnou transformaci. Zřejmě

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial f}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial f}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$-4xy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 8y \frac{\partial f}{\partial \eta} + 8x^4 y^5 = 0,$$

kterou na množině M snadno upravíme do finálního tvaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} - 2\xi^3 = 0.$$

6.1.24 Komentář

Pro zadaný diferenciální výraz (6.6) lze vždy provést pouze transformaci prvního druhu, neboť pro provedení obecné transformace je třeba znát vztahy $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ pro $i \in \hat{r}$. U transformace druhého druhu, ačkoliv je samo její provedení jednodušší, bývá někdy problematické nalézt explicitní vyjádření původních proměnných $\vec{x}$ pomocí proměnných $\vec{\xi}$ nově zaváděných.

6.1.25 Komentář

Kromě transformací nezávisle proměnných definovaných v definicích 6.1.20 a 6.1.22, kdy provádíme přechod od funkce $z(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ke stejné funkci $z(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$, lze provádět i obecnější přechod, kdy jsou zaměňovány nejen nezávisle proměnné, ale i závisle proměnné (tedy funkce). Od funkce $z(x_1, x_2, \dots, x_r)$ přecházíme k nové funkci $w(x_1, x_2, \dots, x_r, z(x_1, x_2, \dots, x_r))$ buď *zobecněnou transformací prvního druhu* zavedenou vztahy

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, w(\xi_1, \dots, \xi_r)), \\z &= z(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, w(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)),\end{aligned}$$

nebo *zobecněnou transformací druhého druhu*, zavedenou vztahy

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_r, z(x_1, x_2, \dots, x_r)), \\w &= w(x_1, x_2, \dots, x_r, z(x_1, x_2, \dots, x_r)).\end{aligned}$$

Pro regularitu těchto obecných transformací požadujeme, aby na množině, kde je transformace prováděna, platilo

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r, z)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, w)} \right) \neq 0,$$

nebo (což je díky důsledku 6.1.19 ekvivalentní)

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, w)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r, z)} \right) \neq 0.$$

6.1.26 Příklad

Budeme substituovat diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{4xy^2}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

pro neznámou funkci $z = z(x, y)$ zobecněnými transformačními vztahy druhého druhu

$$a = x^2 + y^2, \quad b = 2xy, \quad w = \frac{z}{xy},$$

kde $w(a, b)$ představuje novou funkci. Zjistíme nejprve maximální množinu M , na níž je zadaná transformace regulární. Vypočteme proto Jacobiho determinant

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(a, b, w)}{\mathcal{D}(x, y, z)} \right) = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ -\frac{z}{x^2 y} & -\frac{z}{xy^2} & \frac{1}{xy} \end{vmatrix} = \frac{4(x^2 - y^2)}{xy},$$

z jehož tvaru plyne, že $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq \pm y\}$. Jak je patrné, plynou z transformační rovnosti $z = xyw$ dva výchozí vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yw + xy \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xw + xy \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Dále vypočteme první derivace nové funkce:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \frac{\partial w}{\partial a} + 2y \frac{\partial w}{\partial b}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y \frac{\partial w}{\partial a} + 2x \frac{\partial w}{\partial b}.$$

Po dosazení do výše uvedených rovností obdržíme vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yw + 2x^2y \frac{\partial w}{\partial a} + 2xy^2 \frac{\partial w}{\partial b}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xw + 2xy^2 \frac{\partial w}{\partial a} + 2x^2y \frac{\partial w}{\partial b}.$$

Druhé parciální derivace pak získáme standardním algoritmem.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \left(2x \frac{\partial w}{\partial a} + 2y \frac{\partial w}{\partial b} \right) + 4xy \frac{\partial w}{\partial a} + 2y^2 \frac{\partial w}{\partial b} + 4x^3y \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + 8x^2y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} + 4xy^3 \frac{\partial^2 w}{\partial b^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \left(2y \frac{\partial w}{\partial a} + 2x \frac{\partial w}{\partial b} \right) + 4xy \frac{\partial w}{\partial a} + 2x^2 \frac{\partial w}{\partial b} + 4xy^3 \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + 8x^2y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} + 4x^3y \frac{\partial^2 w}{\partial b^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = w + y \left(2y \frac{\partial w}{\partial a} + 2x \frac{\partial w}{\partial b} \right) + 2x^2 \frac{\partial w}{\partial a} + 4xy \frac{\partial w}{\partial b} + 4x^2y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + 4(x^3y + xy^3) \frac{\partial^2 w}{\partial a \partial b} + 4x^2y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}.$$

Zde již můžeme dosadit do zadané rovnice za všechny transformované výrazy. Výsledek

$$4xy(x^2 - y^2)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + 2xy(x^2 - y^2) \frac{\partial w}{\partial a} = 0$$

dále můžeme na množině M upravit do tvaru

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \frac{\partial w}{\partial a} = 0.$$

Uvědomíme-li si dále, že $a^2 - b^2 = (x^2 - y^2)^2$, dostáváme konečnou podobu výsledku tohoto příkladu, a sice

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\partial w}{\partial a} = 0.$$

Důvodem, proč jsou transformace v matematice tak frekventované, je skutečnost, že transformují rovnice na jednodušší typy, jež jsou již snadněji řešitelné. Tak například poslední uvedená rovnice přejde substitucí $v = \frac{\partial w}{\partial a}$ na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dv}{da} + \frac{v}{2\sqrt{a^2 - b^2}} = 0$$

s parametrem b . Takovou rovnici pohodlně vyřešíme např. metodou separace proměnných. Více se s touto problematikou seznámíme v následující kapitole, resp. v oblasti matematiky nazývané *matematická fyzika*.

6.1.27 Příklad

Jedním z nejjednodušších příkladů záměny je záměna závisle proměnné za nezávisle proměnnou v obyčejné diferenciální rovnici. Jedná se tedy o transformaci diferenciální rovnice pro neznámou funkci $y(x)$ na diferenciální rovnici pro neznámou funkci $x(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce dostáváme (v symbolickém zápise)

$$y' = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1},$$

tedy označíme-li pro účely tohoto příkladu derivaci podle y tečkou, získáme $y' = \frac{1}{\dot{x}}$. Dále (postupným derivováním)

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\dot{x}} \right) \frac{dy}{dx} = -\frac{\ddot{x}}{(\dot{x})^2} \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$

Pro vyšší derivace se postupuje analogicky.

6.2 Lineární a křivočaré souřadné systémy

V nadcházející části textu si představíme jednoduchou afinní transformaci, ale také některé privilegované soustavy křivočarých souřadnic v prostorech $\mathbf{E}^2$ a $\mathbf{E}^3$, do nichž se většina praktických úloh kvůli jednoduchosti řešení převádí.

6.2.1 Příklad – *afinní transformace*

Nenáročnou záměnou proměnných v parciálním diferenciálním výrazu je *afinní transformace*

$$x_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} y_j + b_i \quad (i \in \hat{r}),$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ a $b_i \in \mathbf{R}$. Takovou transformaci lze v prostoru $\mathbf{E}^r$ elegantněji zapsat užitím maticového formalizmu $\vec{x} = \mathbb{A}\vec{y} + \vec{b}$, tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}.$$

Jacobiho maticí tohoto zobrazení je zjevně matice

$$\mathbb{A} = \frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \dots, y_r)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Zkoumaná afinní transformace je tedy regulární na $\mathbf{E}^r$, právě když je matice $\mathbb{A}$ regulární, tj. je-li $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

6.2.2 Příklad – *polární souřadnice*

Na množině $M = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{E}^2 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$ uvažme zobrazení dané rovnostmi

$$x = \varrho \cos(\varphi), \quad y = \varrho \sin(\varphi). \quad (6.9)$$

Jde o regulární a prosté zobrazení na množině M , neboť $M = M^\circ$, dále funkční vektor $\vec{F}(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi))$ má spojitě první derivace a

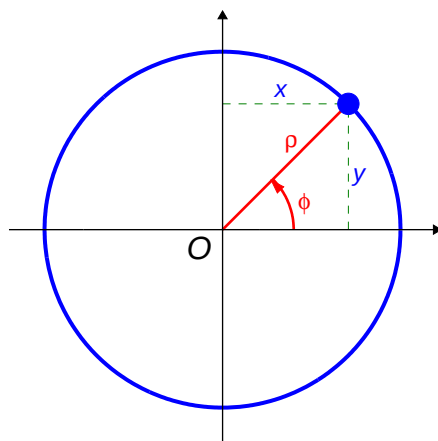
$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)} \right) = \varrho > 0.$$

Povšimněme si toho, že

$$\vec{F}(M) = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : y \neq 0 \vee x < 0\} = \mathbf{E}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \geq 0 \wedge y = 0\}.$$

Tedy uvedená transformace nezobrazuje množinu M na celé $\mathbf{E}^2$, nýbrž pouze na $\mathbf{E}^2$ bez nezáporné části osy x . Další věcí, která je hodna povšimnutí, je fakt, že zadané zobrazení je regulární i na množině např. $N = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{E}^2 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 4\pi)\}$. Tehdy již $\vec{F}(M) = \mathbf{E}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Tentokrát se ale nejedná o prosté zobrazení, zatímco v původním případě ano.

Zavedenou transformaci ve dvoudimenzionálním prostoru $\mathbf{E}^2$ nazýváme *polární transformací* a souřadnice ϱ, φ *polárními*. První z nich se někdy nazývá *rádius* a druhá *úhel*. Jejich vztah k původním kartézským souřadnicím x, y je dobře patrný na následujícím obrázku. Povšimněte si, že polární souřadnice (6.9) splňují rovnost $x^2 + y^2 = \varrho^2$.



Obrázek 6.20
Zavedení polárních souřadnic.

6.2.3 Příklad – zobecněné polární souřadnice

Analogii k polárním souřadnicím představují tzv. *zobecněné polární souřadnice*, které již nejsou odvozeny od polárního popisu pohybu bodu po kružnici se středem v bodě $\vec{0}$, ale od pohybu bodu po elipse o poloosách $a, b \in \mathbf{R}^+$ se středem v obecném bodě $(s, t) \in \mathbf{E}^2$. Zobecněné polární souřadnice ϱ, φ jsou definovány na již citované otevřené množině $M = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$ předpisy

$$x = s + a\varrho \cos(\varphi), \quad y = t + b\varrho \sin(\varphi).$$

Zobrazení je regulární a prosté na množině M , neboť funkční vektor $\vec{F}(\varrho, \varphi) = (s + a\varrho \cos(\varphi), t + b\varrho \sin(\varphi))$ má spojitě první derivace, $M = M^\circ$ a

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)} \right) = ab\varrho > 0.$$

Zobecněné polární souřadnice vyhovují rovnici

$$\left(\frac{x-s}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-t}{b} \right)^2 = \varrho^2.$$

6.2.4 Komentář – pseudopolární souřadnice

Nechť $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ je parametr. Vztahy

$$x = \varrho \cos^\alpha(\varphi), \quad y = \varrho \sin^\alpha(\varphi)$$

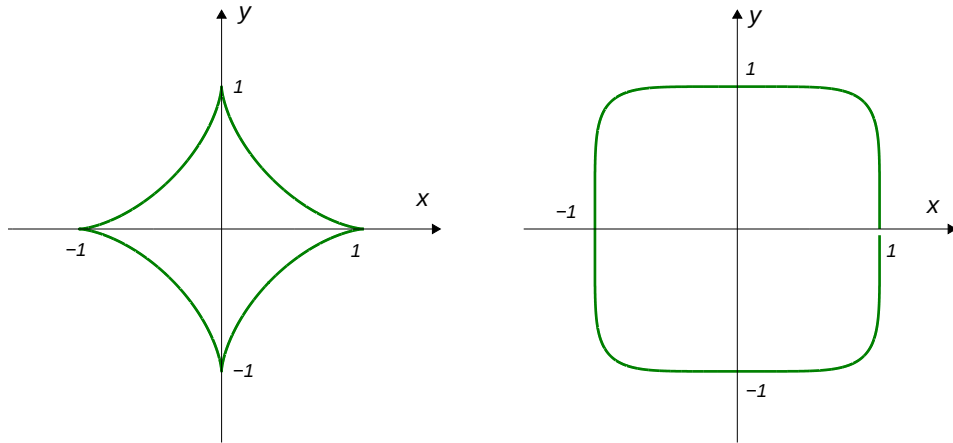
představují na množině $M = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{E}^2 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ rovněž regulární a prosté zobrazení, které se dosti často využívá při řešení některých úloh. Výpočet příslušného jacobíanu je náplní cvičení. Pseudopolární souřadnice splňují rovnost

$$x^{2/\alpha} + y^{2/\alpha} = \varrho^{2/\alpha}$$

a lze k nim v analogii k předchozím úvahám zkonstruovat také zobecněnou variantu. Zvolíme-li při definici pseudopolárních souřadnic např. $\alpha = 3$, popisuje rovnice

$$\varrho = (|x|^{2/3} + |y|^{2/3})^{3/2} = 1$$

zobecnění kružnice, jež bývá nazýváno *asteroidou*. Její tvar je vyobrazen na levém obrázku níže.



Obrázek 6.21

Asteroida $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ a pseudokružnice $|x|^6 + |y|^6 = 1$.

Při volbě $\alpha = 1/3$ má rovnice křivky tvar $\varrho^6 = x^6 + y^6$ a křivkou $\varrho = 1$ je tzv. *pseudokružnice* vyobrazená na předešlém obrázku vpravo.

6.2.5 Příklad – cylindrické souřadnice

Cylindrické (válcové) souřadnice v $\mathbf{E}^3$ definujeme na $M = \{(\varrho, \varphi, h) \in \mathbf{E}^3 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$ rovnicemi

$$x = \varrho \cos(\varphi), \quad y = \varrho \sin(\varphi), \quad z = h. \quad (6.10)$$

Zobrazení je regulární a prosté na otevřené množině M , neboť funkční vektor $\vec{F}(\varrho, \varphi, h) = (\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi), h)$ má spojitě první derivace a pro jacobíán platí nerovnost

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \varrho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho > 0.$$

Jak je patrné z obrázku, válcové souřadnice popisují pohyb bodu po plášti válce, který má osu totožnou s kartézskou osou z a vyhovují rovnosti $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Zobecněná varianta cylindrických souřadnic má na množině $M = \{(\varrho, \varphi, h) \in \mathbf{E}^3 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$ definiční vztahy tvaru

$$x = s + a\varrho \cos(\varphi), \quad y = t + b\varrho \sin(\varphi), \quad z = u + ch,$$

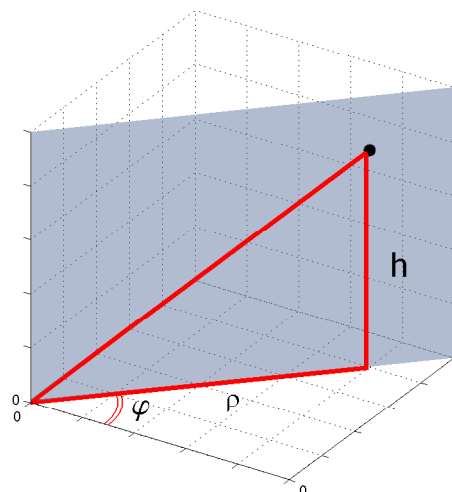
kde $s, t, u \in \mathbf{R}$ a $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry. Jacobíán zobecněných válcových souřadnic má hodnotu

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} a \cos(\varphi) & -a\varrho \sin(\varphi) & 0 \\ b \sin(\varphi) & b\varrho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc\varrho > 0.$$

Zobecněné válcové souřadnice popisují pohyb bodu po plášti eliptického válce

$$\left(\frac{x-s}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-t}{b} \right)^2 = \varrho^2.$$

(poloosy řezu válce jsou a, b), který má osu procházející bodem (s, t, u) , jež je rovnoběžná s kartézskou osou z . Souřadnice h má oproti ose z pouze posunutý počátek a změněné měřítko.



Obrázek 6.22
Zavedení cylindrických souřadnic.

6.2.6 Příklad

Pokusme se na tomto místě transformovat Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

do cylindrických souřadnic z příkladu 6.2.5 na množině regularity a prostoty M . Po zderivování definičních vztahů (6.10) podle x obdržíme soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned}$$

jejichž řešením je uspořádaná trojice

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \left(\cos(\varphi), -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}, 0 \right).$$

Zcela obdobně řeší soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial \varrho}{\partial y} \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial y}, \end{aligned}$$

trojice

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \left(\sin(\varphi), \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}, 0 \right)$$

a soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial \varrho}{\partial z} \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 1 &= \frac{\partial h}{\partial z}, \end{aligned}$$

trojice

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) = (0, 0, 1).$$

Odtud pak zjevně

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial h}.$$

Dalším derivováním první z dvojice těchto rovnic podle x obdržíme druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Analogicky vypočteme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial h^2}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do předpisu pro Laplaceův operátor vypočtené derivace, získáme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}.$$

6.2.7 Příklad – sférické souřadnice

Sférické (kulové) souřadnice $\varrho, \vartheta, \varphi$ popisují pohyb bodu po plášti koule se středem v bodě $\vec{0}$. Jsou definovány na množině $M = \{(\varrho, \varphi, \vartheta) \in \mathbf{E}^3 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi) \wedge \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ definičními vztahy

$$x = \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = \varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = \varrho \sin(\vartheta), \quad (6.11)$$

pro které platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, \vartheta)} \right) = \begin{vmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -\varrho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -\varrho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & \varrho \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = -\varrho^2 \cos(\vartheta) \neq 0.$$

Zavedená transformace souřadnic $(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ je na celé množině M regulární a prostá a vyhovuje rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$. Za povšimnutí stojí, že obrazem množiny M při zobrazení (6.11) není celá množina $\mathbf{E}^3$, ale pouze její nevlastní podmnožina $\Phi(M) = \mathbf{E}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbf{E}^3 : x \geq 0\}$.

Zobecněné sférické souřadnice $\varrho, \vartheta, \varphi$ jsou na téže množině M definovány vztahy

$$x = s + a\varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = t + b\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = u + c\varrho \sin(\vartheta),$$

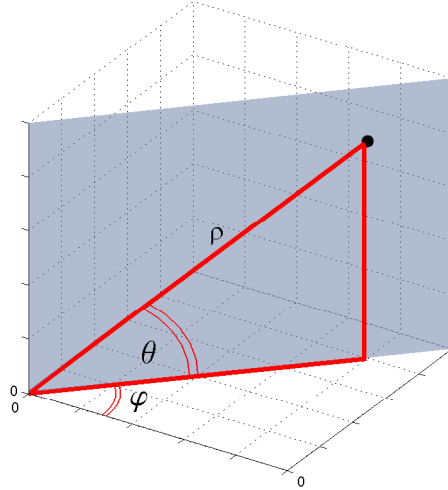
pro které platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, \vartheta)} \right) = \begin{vmatrix} a \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -a\varrho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -a\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ b \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -b\varrho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & b\varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ c \sin(\vartheta) & c\varrho \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = -abc\varrho^2 \cos \vartheta > 0.$$

V tomto případě se jedná o popis pohybu bodu po plášti elipsoidu

$$\left(\frac{x-s}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-t}{b} \right)^2 + \left(\frac{z-u}{c} \right)^2 = \varrho^2$$

s poloosami $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ a středem v bodě $(s, t, u) \in \mathbf{E}^3$.



Obrázek 6.23
Zavedení sférických souřadnic.

6.2.8 Komentář

Sférické souřadnice φ , resp. ϑ , chápané jako souřadnice zeměpisné, představují de facto zeměpisnou délku, resp. zeměpisnou šířku.

6.2.9 Příklad

Cílem tohoto příkladu je transformovat Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

do sférických souřadnic definovaných pro $\rho > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ v příkladě 6.2.7. Derivování vztahů (6.11) podle x vede na soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \sin(\vartheta) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cos(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \end{aligned}$$

jejímž řešením je uspořádaná trojice

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \left(\cos(\vartheta) \cos(\varphi), -\frac{\sin(\vartheta) \cos(\varphi)}{\rho}, -\frac{\sin(\varphi)}{\rho \cos(\vartheta)} \right).$$

Již procvičeným postupem budeme ještě řešit soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \rho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 &= \sin(\vartheta) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cos(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{aligned}$$

s výsledkem

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(\cos(\vartheta) \sin(\varphi), -\frac{\sin(\vartheta) \sin(\varphi)}{\rho}, \frac{\cos(\varphi)}{\rho \cos(\vartheta)} \right)$$

a soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \varrho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 0 &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \varrho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 1 &= \sin(\vartheta) \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \cos(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \end{aligned}$$

jejímž řešením je uspořádaná trojice

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \left(\sin(\vartheta), \frac{\cos(\vartheta)}{\varrho}, 0 \right).$$

Na tomto místě rozvažme, jak by bylo možno předešlý výpočet zautomatizovat aplikací Cramerova pravidla. Tak např.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{-\varrho^2 \cos(\vartheta)} \begin{vmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & 1 & -\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & 0 & \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sin(\vartheta) \cos(\varphi)}{\varrho}.$$

Podotýkáme, že člen $\frac{1}{-\varrho^2 \cos(\vartheta)}$ představuje dělení determinantem soustavy, tedy jacobíánem sférických souřadnic. Užitím Cramerova pravidla by se předcházející výpočet redukoval na výpočet šesti jednoduchých determinantů vzniklých záměnou vybraného sloupku v jacobíánu příslušným jednotkovým sloupcovým vektorem. Po takovém výpočtu pak tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin(\vartheta) \cos(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin(\varphi)}{\varrho \cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin(\vartheta) \sin(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos(\varphi)}{\varrho \cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos(\vartheta)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Pro získání druhých derivací je třeba právě uvedené vztahy znovu derivovat. Tak např. vypočteme, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \\ &- \frac{\sin(2\vartheta) \cos^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \vartheta} - \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\sin(\vartheta) \sin(2\varphi)}{\varrho^2 \cos(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \left(\sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \varrho} + \\ &+ \frac{1}{\varrho^2} \left(-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \sin^2(\varphi) + 2 \sin(2\vartheta) \cos^2(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \cos^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi)}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{\sin(2\vartheta) \cos^2(\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \vartheta} + \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{\sin(\vartheta) \sin(2\varphi)}{\varrho^2 \cos(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \left(\sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \varrho} + \\ &+ \frac{1}{\varrho^2} \left(-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \cos^2(\varphi) + 2 \sin(2\vartheta) \sin^2(\varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

a konečně

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sin^2(\vartheta) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \vartheta} - \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \sin(2\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Nyní již můžeme provést samotnou transformaci. Po dosazení vypočtených derivací získáme tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin(\vartheta)}{\varrho^2 \cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta},$$

který někdy bývá pro účely matematické fyziky upravován do tvaru

$$\Delta = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

6.2.10 Komentář

V analogii k pseudopolárním souřadnicím zavádějí se i v euklidovském prostoru E^3 tzv. *pseudocylindrické souřadnice*, a to vztahy

$$x = \varrho \cos^\alpha(\varphi), \quad y = \varrho \sin^\alpha(\varphi), \quad z = h,$$

kde $\alpha \notin \{0, 1\}$ je jejich parametr. Platí pro ně rovnost $x^{2/\alpha} + y^{2/\alpha} = \varrho^{2/\alpha}$. Jeden zástupce tělesa, jež je popsáno pseudocylindrickou soustavou, je vyobrazen na obrázku 6.24 vlevo. Takové těleso je v souřadné soustavě $x = \varrho \cos^4(\varphi) \operatorname{sgn}(\cos(\varphi))$, $y = \varrho \sin^4(\varphi) \operatorname{sgn}(\sin(\varphi))$, $z = h$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $h \in (0, 1)$ popsáno nerovnicí

$$\varrho = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2 < 1$$

a mohlo by být nazváno např. *pseudoválcem*. Další zajímavou souřadnou soustavou v E^3 jsou tzv. *pseudosférické souřadnice*, zavedené rovnostmi

$$x = \varrho \cos^\alpha(\vartheta) \cos^\beta(\varphi), \quad y = \varrho \cos^\alpha(\vartheta) \sin^\beta(\varphi), \quad z = \varrho \sin^\alpha(\vartheta),$$

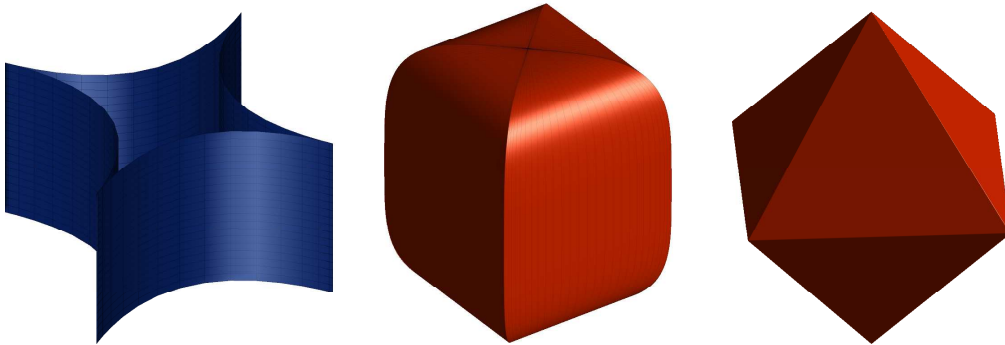
kde $\alpha, \beta \neq 0$ jsou parametry, které navíc vyhovují nerovnosti $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$. Tyto souřadnice vyhovují rovnosti

$$\left(x^{2/\beta} + y^{2/\beta} \right)^{\beta/\alpha} + z^{2/\alpha} = \varrho^{2/\alpha}.$$

Zvolíme-li např. $\alpha = 1/2$ a $\beta = 2$, popisuje rovnice

$$\varrho = \sqrt[4]{(|x| + |y|)^4 + z^4} < 1$$

těleso z obrázku 6.24 uprostřed. V tomto případě není od věci pojmenovat vyobrazené těleso *pseudosférou*. Zajímavý jev nastává, zvolíme-li $\alpha = \beta = 2$. Pak je rovnicí hraniční plochy zkoumaného tělesa vlastně jednoduchá lineární rovnice $\varrho = |x| + |y| + |z| = 1$, a tedy tělesem není nic jiného než *osmistěn*. Všechny pseudosouřadnice mají též své zobecněné varianty. Výpočty příslušných jacobíánů a množin, na nichž jsou uvedené transformace definovány, jsou náplní cvičení.



Obrázek 6.24

Pseudoválec $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} = 1$, pseudosféra $\left(|x| + |y| \right)^4 + z^4 = 1$ a osmistěn $|x| + |y| + |z| = 1$.

6.2.11 Hodnoty jacobíánů vybraných souřadnic

$\vec{x} = \mathbb{A}\vec{y} + \vec{b}$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}\vec{x}}{\mathcal{D}\vec{y}}\right) = \det(\mathbb{A}).$
$x = s + a\varrho \cos(\varphi)$ $y = t + b\varrho \sin(\varphi)$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)}\right) = ab\varrho.$
$x = s + a\varrho \cos^\alpha(\varphi)$ $y = t + b\varrho \sin^\alpha(\varphi)$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi)}\right) = ab\alpha\varrho \cos^{\alpha-1}(\varphi) \sin^{\alpha-1}(\varphi).$
$x = s + a\varrho \cos(\varphi)$ $y = t + b\varrho \sin(\varphi)$ $z = u + ch$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, h)}\right) = abc\varrho.$
$x = s + a\varrho \cos^\alpha(\varphi)$ $y = t + b\varrho \sin^\alpha(\varphi)$ $z = u + ch$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, h)}\right) = abc\alpha\varrho \cos^{\alpha-1}(\varphi) \sin^{\alpha-1}(\varphi).$
$x = s + a\varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi)$ $y = t + b\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi)$ $z = u + c\varrho \sin(\vartheta)$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, \vartheta)}\right) = abc\varrho^2 \cos(\vartheta).$
$x = s + a\varrho \cos^\beta(\vartheta) \cos^\alpha(\varphi)$ $y = t + b\varrho \cos^\beta(\vartheta) \sin^\alpha(\varphi)$ $z = u + c\varrho \sin^\beta(\vartheta)$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \varphi, \vartheta)}\right) =$ $= abc\alpha\beta\varrho^2 \cos^{2\beta-1}(\vartheta) \sin^{\beta-1}(\vartheta) \cos^{\alpha-1}(\varphi) \sin^{\alpha-1}(\varphi).$
$x = s + a\varrho \cos(\omega) \cos(\vartheta) \cos(\varphi)$ $y = t + b\varrho \cos(\omega) \cos(\vartheta) \sin(\varphi)$ $z = u + c\varrho \cos(\omega) \sin(\vartheta)$ $w = v + d\varrho \sin(\omega),$	$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z, w)}{\mathcal{D}(\varrho, \omega, \varphi, \vartheta)}\right) = abcd\varrho^3 \cos^2(\omega) \cos(\vartheta).$

Kapitola 7

Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic

Matematický popis většiny fyzikálních, biologických či sociofyzikálních systémů vede, jak je dobře známo, na řešení diferenciálních rovnic druhého řádu. Pro systémy jednodimenzionální tedy jde o obyčejnou diferenciální rovnici, resp. o její tzv. *Cauchyovu úlohu*, tj. o úlohu s počátečními podmínkami jistého typu. To souvisí zejména se skutečností, že Newtonova pohybová rovnice má de facto tvar diferenciální rovnice druhého řádu, protože jde o rovnici pro zrychlení, které je druhou derivací tzv. polohového vektoru, který reprezentuje to, co při řešení hledáme (tj. závislost polohy objektu na čase). Jedná-li se ale o systém vícerozměrný, nebo zajímá-li nás závislost nějaké veličiny jednodimenzionálního systému na více proměnných (typicky na prostorové souřadnici a čase), vznikají úlohy na parciální diferenciální rovnice. Teorie řešení parciálních diferenciálních rovnic je jednou z hlavních náplní tzv. *matematické fyziky*. V ní se řeší např. rovnice vedení tepla, vlnová rovnice, rovnice dopravního proudění, Schrödingera rovnice, atd.

V této kapitole ale seznámíme čtenáře pouze s úvodními partiemi matematické fyziky. Předvedeme nejprve zúženou klasifikaci parciálních diferenciálních rovnic a poté se seznámíme se způsoby, jak parciální diferenciální rovnice normalizovat, jak ideální transformační vztahy vyhledávat a jak podle normálních tvarů celou oblast klasifikovat.

7.1 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Rozsáhlou oblast parciálních diferenciálních rovnic na úvod kapitoly razantně zúžíme na lineární diferenciální rovnice druhého řádu, tj. na případ, kdy nejvyšší derivací v rovnici je libovolná parciální derivace druhého řádu. Důvod pro takové zúžení je ukryt zejména v praktickém pozadí zkoumaných rovnic. Většina z nich totiž vzešla ze studia konkrétních fyzikálních či příbuzných systémů (úlohy na vedení tepla, šíření jednorozměrných či vícerozměrných vln, teorie kmitání, úlohy kvantové mechaniky, úlohy z teorie mikroskopických dopravních modelů apod). V prvním oddíle této kapitoly tedy budeme definovat pojem parciální diferenciální rovnice druhého řádu a specifikovat některé její speciální typy.

7.1.1 Definice

Nechť $\mathbb{A}(\vec{x}) = (a_{ij}(\vec{x}))_{i,j=1}^r$ je nenulová symetrická matice spojitých funkcí $a_{ij}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Nechť je dán r -rozměrný vektor $\vec{b}(\vec{x})$ spojitých funkcí $b_i(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ a spojitá funkce $c(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. *Parciálním diferenciálním operátorem druhého řádu* na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ rozumíme operátor

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(\vec{x}). \quad (7.1)$$

Přitom za definiční obor operátoru $\hat{L}$ klademe $\text{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{C}^2(G)$. Je-li matice $\mathbb{A}$ číselná, tj. jsou-li všechny funkce $a_{ij}(\vec{x})$ konstantní, a jsou-li rovněž všechny funkce $b_1(\vec{x}), b_2(\vec{x}), \dots, b_r(\vec{x}), c(\vec{x})$ konstantní, specifikujeme dále, že operátor $\hat{L}$ je operátorem s *konstantními koeficienty*.

7.1.2 Věta

Parciální diferenciální operátor druhého řádu $\hat{L}$ je lineární na $\text{Dom}(\hat{L})$.

Důkaz:

- úkolem je dokázat, že $\hat{L}$ je aditivní a homogenní
- zvolíme libovolné $u(\vec{x}), v(\vec{x}) \in \text{Dom}(\hat{L})$
- z linearity derivace vyplývá

$$\begin{aligned}
\hat{L}(u+v) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(\vec{x}) \frac{\partial(u+v)}{\partial x_i} + c(\vec{x})(u+v) = \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(\vec{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(\vec{x})v = \\
&= \hat{L}(u) + \hat{L}(v)
\end{aligned}$$

- to dokazuje aditivitu operátoru $\hat{L}$
- podobným způsobem dokážeme pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ homogenitu tvaru $\hat{L}(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \hat{L}(u)$

7.1.3 Definice

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\hat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$. Pak rovnici

$$\hat{L}(u) = f(\vec{x}) \tag{7.2}$$

nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu*. Zkráceně ji někdy značíme zkratkou *PDE* z anglického *partial differential equation*. Rovnici $\hat{L}(u) = 0$ nazýváme lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu s nulovou pravou stranou přidruženou k rovnici (7.2).

7.1.4 Definice

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\hat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$. Řešením rovnice (7.2) na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ rozumíme každou funkci $u(\vec{x}) \in \text{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{C}^2(G)$, pro niž $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$.

7.1.5 Lemma

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\hat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$. Množina všech řešení rovnice $\hat{L}(u) = 0$ tvoří vektorový prostor. Množina všech řešení rovnice $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$, kde $f(\vec{x})$ je spojitou funkcí na G , tvoří lineární varietu.

7.1.6 Věta

Všechna řešení rovnice $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$ jsou tvaru

$$u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x}), \tag{7.3}$$

kde $z(\vec{x})$ jsou všechna řešení rovnice $\hat{L}(z) = 0$ a $z_p(\vec{x})$ je jedno řešení rovnice $\hat{L}(z_p) = f(\vec{x})$.

Důkaz:

- jako první dokážeme, že funkce $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ řeší rovnici $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$

- jelikož $\hat{L}(z) = 0$ a $\hat{L}(z_p) = f(\vec{x})$, pak snadno z linearit y operátoru $\hat{L}$ vyvozujeme, že

$$\hat{L}(u) = \hat{L}(z) + \hat{L}(z_p) = 0 + f(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

- sporem dokážeme, že řešení, které není ve tvaru (7.3), neexistuje
- nechť $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ je výše uvedeného tvaru
- předpokládejme pro spor, že $\hat{L}(v) = f(\vec{x})$, ale $v(\vec{x})$ nelze zapsat jako (7.3)
- zjevně tedy platí $\hat{L}(u - v) = \hat{L}(u) - \hat{L}(v) = 0$
- rozdíl $u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ proto řeší rovnici s nulovou pravou stranou, tj. $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) = \tilde{z}(\vec{x})$
- odtud $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \tilde{z}(\vec{x}) = z(\vec{x}) - \tilde{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x}) = \hat{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$, přičemž $\hat{z}(\vec{x})$ řeší rovnici s nulovou pravou stranou
- to je očekávaný spor

7.1.7 Komentář

Funkci $z_p(\vec{x})$ z předešlé věty nazýváme *partikulárním řešením* parciální diferenciální rovnice (7.2). Upozorňujeme raději, že rovnice $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$ má obvykle nekonečně mnoho partikulárních řešení. Navíc, označíme-li

$$\Omega_0 = \{y(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G) : \hat{L}(y) = 0\}, \quad \Omega_q = \{y(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G) : \hat{L}(y) = q(\vec{x})\},$$

pak je Ω_0 vektorovým prostorem a Ω_q lineární varietou.

7.2 Transformace parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

V této části skript se zaměříme na hledání vhodných transformací nezávislých proměnných v parciálních diferenciálních rovnicích. Hledat přitom budeme takové transformace, které parciální diferenciální rovnici převedou do výhodnějších tvarů, jež budou snáze řešitelné.

7.2.1 Definice

Nechť je dána lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu (7.2) na oblasti G . Pak kvadratickou formu

$$q_{\vec{x}}(\vec{v}) = \vec{v}^T \mathbb{A}(\vec{x}) \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_r) \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{x}) & a_{12}(\vec{x}) & a_{13}(\vec{x}) & \dots & a_{1r}(\vec{x}) \\ a_{21}(\vec{x}) & a_{22}(\vec{x}) & a_{23}(\vec{x}) & \dots & a_{2r}(\vec{x}) \\ a_{31}(\vec{x}) & a_{32}(\vec{x}) & a_{33}(\vec{x}) & \dots & a_{3r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}(\vec{x}) & a_{r2}(\vec{x}) & a_{r3}(\vec{x}) & \dots & a_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

příslušnou každému bodu $\vec{x} \in G$ nazýváme *kvadratickou formou přidruženou* k parciální diferenciální rovnici (7.2).

7.2.2 Úmluva

Budeme-li hovořit v dalším textu o parciální diferenciální rovnici, budeme mít na mysli lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, není-li uvedeno jinak.

7.2.3 Definice

Řekněme, že parciální diferenciální rovnice (7.2) je v bodě $\vec{x} \in G$ *eliptická*, resp. *parabolická*, resp. *hyperbolická* právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická její přidružená kvadratická forma. Řekněme, že parciální diferenciální rovnice (7.2) je *eliptická*, resp. *parabolická*, resp. *hyperbolická* na množině $M \subset G$ právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická v každém bodě $\vec{x} \in M$.

7.2.4 Komentář

Pro úplnost dodáváme, že kvadratická forma je eliptická, má-li všechna vlastní čísla nenulová a stejného znaménka, parabolická, má-li alespoň jedno vlastní číslo nulové, a hyperbolická, má-li všechna vlastní čísla nenulová ale s různými znaménky. Pro bližší studium kvadratických forem doporučujeme učebnici [7].

7.2.5 Definice

Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je parciální diferenciální rovnice (7.2) eliptická, budeme označovat symbolem G_E a nazývat *oborem elipticity* parciální diferenciální rovnice. Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (7.2) hyperbolická, budeme označovat symbolem G_H a nazývat *oborem hyperbolicity*. Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (7.2) parabolická, budeme označovat symbolem G_P a nazývat *oborem parabolicity*. Souhrnně nazýváme množiny G_E , G_H , a G_P *oblastmi excentricity*.

7.2.6 Věta

Nechť G_E , G_P a G_H jsou množiny z definice 7.2.5. Potom platí $G_E \uplus G_P \uplus G_H = G$.

Důkaz:

- tvrzení plyne ze skutečnosti, že typ kvadratické formy je dán jednoznačně, tj. každá kvadratická forma je právě jednoho typu

7.2.7 Příklad

Rozhodněme o typu parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

je-li chápána jako diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u = u(x, y)$. Z definice 7.2.1 pro matici příslušné kvadratické formy platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že pro $x = 0$ je daná rovnice parabolická, pro $x \neq 0$ je rovnice hyperbolická a žádná jiná možnost nastat nemůže. Proto tedy $G_E = \emptyset$, $G_P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$ a $G_H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$.

7.2.8 Definice

Řekněme, že parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^r \tilde{b}_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y}) u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y})$$

je v *normálním tvaru* právě tehdy, když matice $\tilde{A}(\vec{y})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y})$ je maticí konstantních funkcí (přesněji po částech konstantních funkcí), pro niž

$$\tilde{A}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix}$$

a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0, -1, 1\}$.

7.2.9 Příklad

Uvažujme následující parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x, y)$ a zjistíme jejich typy. Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 8y$$

je v normálním tvaru a všude v $\mathbf{R}^2$ je parabolická. Zajímavostí je, že tato rovnice je pouze *kvaziparciální* lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, tj. lze na ni nahlížet jako na obyčejnou diferenciální rovnici s parametrem y . Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$$

je rovněž v normálním tvaru, ale je hyperbolická na $\mathbf{R}^2$. Parciální diferenciální rovnice $\Delta u = 0$ je rovněž v normálním tvaru, je ale na $\mathbf{R}^2$ eliptická. Běžně se nazývá *Laplaceovou rovnicí*. Funkce řešící Laplaceovu rovnici nazýváme *harmonickými funkcemi* (viz také definice 2.2.7).

7.2.10 Definice

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice (7.2) je v *alternativním normálním tvaru*, právě tehdy, když je rovnicí pro funkci $u(x, y)$ dvou proměnných a je ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Phi(\text{gradu}, u(x, y)) = f(x, y).$$

7.2.11 Komentář

Parciální diferenciální rovnici (7.2) bývá někdy zvykem zapisovat ve zformalizovaném tvaru

$$(\nabla^T u) A(\vec{x}) (\nabla u) + \Phi(\nabla u, u(\vec{x})) = f(\vec{x}),$$

kde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right)^T$$

je *Hamiltonův operátor*, a tudíž $\text{gradu} = \nabla u$. Výraz $\Phi(\nabla u, u)$ někdy nazýváme *lineární částí* parciální diferenciální rovnice.

7.2.12 Komentář

Parciální diferenciální rovnice v alternativním normálním tvaru je vždy hyperbolická, neboť po zavedení regulární substituce $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ dostáváme transformovaný tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u(\xi, \eta)\right) = \tilde{f}(\xi, \eta).$$

Alternativní normální tvar je výhodný z hlediska řešení. Např. zavedením substituce $v = \frac{\partial u}{\partial y}$ v rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dostáváme kvaziparciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 2yv = 0$$

reprezentující lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty s parametrem y .

7.2.13 Komentář

Naším cílem je za pomoci vhodného zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ převést obecnou parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^r b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

na normální tvar

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^r \tilde{b}_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y})u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}),$$

pro který platí, že matice $\tilde{\mathbf{A}}(\vec{x})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{x})$ je maticí konstantních funkcí, pro níž $\tilde{a}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell} \delta_{k\ell}$ a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0, -1, 1\}$. Přitom požadujeme, aby zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ bylo regulární a prosté na $G \subset \mathbf{E}^r$, a navíc, aby $\vec{\varphi}(\vec{x}) \in \mathcal{C}^2(G)$. To implikuje vztah

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}\right)^G \neq 0,$$

a existuje tudíž inverzní zobrazení $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{y})$, pro nějž $\vec{\psi}(\vec{\varphi}(\vec{x})) = \text{id}_G$. Pomocí vztahů pro derivaci složené funkce dostaneme vzorec

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial u}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad (i \in \hat{r}); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial u}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j \in \hat{r}). \end{aligned}$$

Z nich již snadno vyjádříme hledané vztahy

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{\psi}(\vec{y})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}, \\ \tilde{b}_k(\vec{y}) &= \sum_{i=1}^r b_i(\vec{\psi}(\vec{y})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{\psi}(\vec{y})) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \tilde{c}(\vec{y}) &= c(\vec{\psi}(\vec{y})), \\ \tilde{f}(\vec{y}) &= f(\vec{\psi}(\vec{y})), \end{aligned}$$

7.3 Kvaziparciální diferenciální rovnice

Do kategorie parciálních diferenciálních rovnic spadají také rovnice, jež jsou převeditelné na obyčejné diferenciální rovnice. Lze pak na ně aplikovat celou rozsáhlou teorii o řešení obyčejných diferenciálních rovnic, tedy např. metodu integračního faktoru, Bernoulliovu metodu, separaci proměnných, snížení řádu, popř. metodu variace konstant. Podrobněji je problematika zpracována ve čtvrté kapitole skript [7]. Pro ilustraci zde uvedeme několik možných aplikací.

7.3.1 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 8x^3 y.$$

Zavedeme-li substituci $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, přejde rovnice do kvazi-obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 2xv = 8x^3 y$$

řešitelné metodou integračního faktoru. Vynásobíme-li tuto rovnici faktorem e^{x^2} , dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{x^2} \cdot v) = 8x^3 e^{x^2} y.$$

$$e^{x^2} \cdot v = 4ye^{x^2}(x^2 - 1) + C(y),$$

odkud

$$v(x, y) = C(y) e^{-x^2} + 4y(x^2 - 1).$$

Návratem k původní funkci (tedy integrací funkce $v(x, y)$ podle nezávisle proměnné y) získáme úplné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$u(x, y) = C(y) e^{-x^2} + \tilde{C}(x) + 2y^2(x^2 - 1), \quad \text{Dom}(u) = \mathbf{R}^2.$$

Podotýkáme, že $C(y)$, $\tilde{C}(x)$ jsou libovolné funkce nezávisle proměnné y , resp. x . Navíc musí platit $C(y) \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

7.3.2 Příklad

Budeme nyní řešit parciální diferenciální rovnici

$$y^2 \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} = 8xy.$$

Zavedme substituci

$$v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pak zadaná rovnice přechází do tvaru

$$y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2y \frac{\partial v}{\partial y} - 6v = 8xy.$$

Zde se opět jedná o kvazi-obyčejnou diferenciální rovnici, která je viditelně Eulerovou diferenciální rovnicí. Pro kladná y ji budeme řešit osvědčenou substitucí $y = e^t$, resp. $t = \ln(y)$. Odtud

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial v}{\partial t},$$

což po dosazení vede na rovnici $\ddot{v} + \dot{v} - 6v = 8xe^t$ s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Jelikož pro charakteristický polynom této rovnice platí $\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, je fundamentálním systémem rovnice množina $\{e^{2t}, e^{-3t}\}$. Řešení s pravou stranou navrhuje (podle příslušné věty) ve tvaru $v_p(y) = ae^t$, kde hodnotu neznámé konstanty stanovíme pouhým dosazením na $a = -2$. Pak tedy

$$v(x, t) = C_1(x) e^{2t} + C_2(x) e^{-3t} - 2xe^t.$$

Návratem k původním proměnným získáme

$$v(x, y) = C_1(x) y^2 + \frac{C_2(x)}{y^3} - 2xy. \quad (7.4)$$

Pokud bychom hledali řešení pro $y < 0$, převedla by substituce $y = -e^t$ rovnici na lehce pozměněný tvar $\ddot{v} + \dot{v} - 6v = -8xe^t$, který ale generuje tentýž výsledek (7.4). Uvažte proč. Sumarizujeme tedy, že výsledkem této úlohy je funkce

$$u(x, y) = C_1(x) y^2 + \frac{C_2(x)}{y^3} + C_3(y) - yx^2,$$

kde $\text{Dom}(u) = \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ a $C_i \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ pro $i \in \widehat{3}$.

7.3.3 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \frac{e^{3(x+y)}}{x}.$$

Aplikujeme-li substituci

$$v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial v}{\partial x} + 9v = 3 \frac{e^{3(x+y)}}{x}.$$

Opět se jedná o rovnici s konstantními koeficienty. Jelikož pro charakteristický polynom této rovnice platí

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

je fundamentálním systémem rovnice množina $\{e^{3x}; xe^{3x}\}$. Řešení s pravou stranou získáme metodou variace konstant (viz věta 4.4.27 v [7]), neboť pravá strana není v žádném ze speciálních tvarů. Pro wronskián funkcí z fundamentálního systému platí

$$\det = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (1+3x)e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x}.$$

Dále platí

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{3x} \\ 3 \frac{e^{3(x+y)}}{x} & (1+3x)e^{3x} \end{vmatrix} = -3e^{6x+3y},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & 3 \frac{e^{3(x+y)}}{x} \end{vmatrix} = 3 \frac{e^{6x+3y}}{x}.$$

Označíme-li v souladu s větou o metodě variace konstant

$$f_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \equiv -3e^{3y}, \quad f_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} \equiv 3\frac{e^{3y}}{x},$$

obdržíme

$$F_1(x, y) = \int f_1(x) dx = -3xe^{3y} + C_1(y),$$

$$F_2(x, y) = \int f_2(x) dx = 3e^{3y} \ln|x| + C_2(y).$$

Pak tedy

$$v(x, y) = F_1(x, y) e^{3x} + F_2(x, y) x e^{3x} \equiv C_1(y) e^{3x} + C_2(y) x e^{3x} - 3xe^{3(x+y)} + 3xe^{3(x+y)} \ln|x|,$$

což po úpravě vede na

$$v(x, y) = C_1(y) e^{3x} + C_2(y) x e^{3x} + 3xe^{3(x+y)} \ln|x|.$$

Finální podoba výsledku celé úlohy je tudíž

$$u(x, y) = C_1(y) e^{3x} + C_2(y) x e^{3x} + C_3(x) + xe^{3(x+y)} \ln|x|,$$

$\text{Dom}(u) = (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$ a $C_i \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ pro $i \in \widehat{3}$.

7.4 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro funkci dvou proměnných

Ze širokého spektra parciálních diferenciálních rovnic se v tomto oddíle budeme blíže zabývat lineárními parciálními diferenciálními rovnicemi funkcí dvou proměnných. Ty se při zachování platnosti definice 7.1.3 dají sumarizovat do obecného tvaru

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad } u, u(x, y)) = f(x, y), \quad (7.5)$$

kde $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$ a $G \subset \mathbf{E}^2$ je libovolná neprázdná dvoudimenzionální oblast.

7.4.1 Odvození

Rovnici (7.5) zamýšlíme převést do normálního tvaru. Pro tento účel si určíme vlastní čísla příslušné matice

$$\mathbb{A}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & \frac{b(x, y)}{2} \\ \frac{b(x, y)}{2} & c(x, y) \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice, tj. rovnice pro výpočet vlastních čísel, má známý tvar

$$\begin{vmatrix} a(x, y) - \lambda(x, y) & \frac{b(x, y)}{2} \\ \frac{b(x, y)}{2} & c(x, y) - \lambda(x, y) \end{vmatrix} = (\lambda(x, y) - a(x, y)) \cdot (\lambda(x, y) - c(x, y)) - \frac{b(x, y)^2}{4} = \\ = \lambda^2(x, y) - (a(x, y) + c(x, y))\lambda(x, y) - \frac{b(x, y)^2}{4} + a(x, y)c(x, y) = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbb{A}(x, y)$ tedy budou tvaru

$$\lambda_{1,2}(x, y) = \frac{a(x, y) + c(x, y) \pm \sqrt{(a(x, y) - c(x, y))^2 - b^2(x, y)}}{2}.$$

Pro zadanou rovnici nyní hledíme oblasti excentricity G_E , G_P a G_H . Pro obor parabolicity G_P vychází podmínka, že se alespoň jedno vlastní číslo musí rovnat nule. Tedy

$$a(x, y) + c(x, y) \pm \sqrt{(a(x, y) - c(x, y))^2 + b^2(x, y)} = 0,$$

což je ekvivalentní podmínce $b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y) = 0$. Zavedeme-li diskriminant předpisem

$$d(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y),$$

lze snadno stanovit, že $G_P = \{(x, y) \in G : d(x, y) = 0\}$. Analogicky pak zjišťujeme, že oborem hyperbolicity, resp. elipticity zadané rovnice jsou množiny $G_H = \{(x, y) \in G : d(x, y) > 0\}$, resp. $G_E = \{(x, y) \in G : d(x, y) < 0\}$. Nyní se zabýváme samotným hledáním ideálních transformačních vztahů. Prozatím je označme obecně jako

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Předpokládáme pochopitelně, že se jedná o regulární transformaci, čili

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) \neq 0.$$

Zjistíme tedy čemu se rovnají jednotlivé první parciální derivace podle nových souřadnic. Snadno

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Zderivujeme ještě jednou podle nových souřadnic, čímž dostaneme příslušné druhé parciální derivace a vynásobíme je příslušnými koeficienty

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Sečteme a vytkneme před závorku druhé parciální derivace podle nových proměnných, čímž dostaneme transformovanou původní rovnici (7.5), a to

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \quad (7.6)$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} + b \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \tilde{\Phi}(\text{gradu}, u(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta). \quad (7.7)$$

Požadavek na nulovost závorek směřuje na normální tvar druhého druhu, pokud splníme podmínky

$$a(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) = 0, \quad a(x, y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x, y) = 0,$$

což jsou vlastně dvě kvadratické rovnice

$$a(x, y)\lambda^2(x, y) + b(x, y)\lambda(x, y) + c(x, y) = 0, \quad (7.8)$$

kde

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}, \quad \text{resp.} \quad \lambda = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}.$$

Při bližším pohledu zjistíme, že se podíly $\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial y}$ podobají derivaci implicitně zadané funkce $y(x)$ podle nezávislé proměnné x . Uvažujme tedy implicitně zadané rovnice

$$\xi(x, y) = C, \quad \eta(x, y) = D. \quad (7.9)$$

Pro příslušnou obyčejnou derivaci y' implicitní funkce $y(x)$ tudíž dostáváme

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\lambda(x, y), \quad (7.10)$$

což není nic jiného než diferenciální rovnice prvního řádu. Transformační rovnice (7.9) jsou jejími formálními řešeními. Tímto způsobem jsme tudíž schopni nalézt požadované transformační vztahy. Názornější bude ukázat si daný postup na následujícím příkladě.

Podotýkáme, že v předvedeném postupu byla prokázána konstrukce optimalizujících transformačních vztahů pouze pro hyperbolickou rovnici, neboť požadavek na nulovost závorek ve vztahu (7.7) vede na alternativní tvar hyperbolické rovnice. Ukážeme si ale nyní, že analogického postupu může být využito i na oblastech parabolicity, či elipticity.

7.4.2 Odvození

Nyní probereme normalizaci parabolické parciální diferenciální rovnice. Pro převod rovnice

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad } u, u(x, y)) = f(x, y)$$

do normálního tvaru

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ & + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{=0} + \tilde{\Phi}(\text{grad } u, u(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

užijeme jeden transformační vztah $\xi = \xi(x, y)$ odvozený z řešení rovnice

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\lambda(x, y) = \frac{b(x, y)}{2a(x, y)} \quad (7.11)$$

a druhý volíme libovolně, nejčastěji však v nejjednodušší možné verzi, a sice $\eta(x, y) = x$. Pro uvedenou transformaci platí, že

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= a(x, y), \end{aligned}$$

ale také

$$2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

neboť

$$2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Poslední rovnost plyne ze skutečnosti, že transformační vztah $\xi = \xi(\eta)$ splňuje díky formuli (7.11) rovnost

$$2a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = -b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Normálním tvarem parabolické parciální diferenciální rovnice je tudíž očekávaný tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a(x, y)} \Phi(\text{grad} u, u(\xi, \eta)) = \frac{1}{a(x, y)} \tilde{f}(\xi, \eta).$$

7.4.3 Odvození

Nyní probereme normalizaci eliptické parciální diferenciální rovnice. Ukážeme, že transformační vztahy

$$\alpha(x, y) := \frac{\xi(x, y) + \eta(x, y)}{2} = \Re(\xi(x, y)), \quad \beta(x, y) := \frac{\xi(x, y) - \eta(x, y)}{2i} = \Im(\xi(x, y)),$$

kde komplexně sdružené funkce $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ byly získány řešením rovnic

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} = \lambda_2(x, y) = \lambda_1^*(x, y),$$

převodou eliptickou rovnici

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad} u, u(x, y)) = f(x, y)$$

do normálního tvaru. Transformovaná rovnice bude jistě tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \left(a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ & + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \left(2a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + b \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)}_{=0} + \tilde{\Phi}(\text{grad} u, u(\alpha, \beta)) = \tilde{f}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

To, že smíšený člen označený vodorovnou závorkou vymizí, nyní dokážeme:

$$\begin{aligned} & 2a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + b \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \\ & \frac{a}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{b}{2i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ & = \frac{a}{2i} \left(\lambda_1^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \lambda_2^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{b}{2i} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ & \frac{1}{2i} (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2i} (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

neboť $\lambda_{1,2}$ jsou kořeny asociované kvadratické rovnice. Zbývá ještě dokázat, že koeficienty

$$\mathcal{K}_1(x, y) := a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2$$

a

$$\mathcal{K}_2(x, y) := a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2$$

jsou po aplikaci navržené substituce totožné. Snadno

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(x, y) &= \frac{a}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{b}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{a}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{b}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} (2\lambda_1\lambda_2a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + 2c) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= -\frac{d(x, y)}{4a(x, y)} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{aligned}$$

kde bylo využito vztahů pro kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}.$$

Analogicky:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(x, y) &= -\frac{a}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \frac{b}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= -\frac{a}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 - \frac{b}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{4} (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4} (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} (2\lambda_1\lambda_2a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + 2c) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= -\frac{d(x, y)}{4a(x, y)} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mathcal{K}_1(x, y) \end{aligned}$$

Eliptická parciální diferenciální rovnice se tedy transformuje do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\mathcal{K}_1(x, y)} \Phi(\text{gradu}, u(\alpha, \beta)) = \frac{1}{\mathcal{K}_1(x, y)} \tilde{f}(\alpha, \beta)$$

7.4.4 Příklad

Pokusme se nalézt transformaci, jež převádí diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na normální tvar. Podle rovnice (7.5) platí pro její koeficienty následující vztahy: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$ a $c(x, y) = -x^2$. Řešíme nejprve kvadratickou rovnici $\lambda^2(x, y) - x^2 = 0$. Pro ni $\lambda_{1,2}(x, y) = \pm x$. Podle zásadního výsledku (7.10) bude mít pomocná diferenciální rovnice tvar

$$y' = \frac{dy}{dx} = \mp x,$$

odkud $C = 2y \pm x^2$. Tím se dostáváme k hledaným transformačním vztahům $\xi = 2y + x^2$, $\eta = 2y - x^2$. Podotýkáme, že v případě, kdy by zadaná rovnice byla parabolická (tj. rovnice (7.8) by měla jediné řešení), našli bychom výše uvedeným postupem pouze jednu transformační rovnici. Druhou můžeme v tomto případě volit libovolně, tj. tak, aby byla co nejjednodušší, ale zároveň aby byla zachována regularita transformace.

7.4.5 Věta

Nechť $G \subset \mathbb{E}^2$ je libovolná neprázdná dvoudimenzionální oblast a $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Definujme funkci $d(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$. Pak oblastmi excentricity parciální diferenciální rovnice

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad } u, u(x, y)) = f(x, y), \quad (7.12)$$

jsou třídy $G_P = \{(x, y) \in G : d(x, y) = 0\}$, $G_H = \{(x, y) \in G : d(x, y) > 0\}$, resp. $G_E = \{(x, y) \in G : d(x, y) < 0\}$.

Důkaz:

- uvedená skutečnost byla prokázána v rámci odvození 7.4.1

7.4.6 Definice

Funkci definovanou ve větě 7.4.5 nazýváme *diskriminantem* parciální diferenciální rovnice (7.12).

7.4.7 Příklad

Budeme nyní řešit parciální diferenciální rovnici

$$x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3xy \frac{\partial u}{\partial y} + 8x^4 y^5 = 0$$

pro hledanou funkci $u = u(x, y)$. Vypočteme nejprve diskriminant $d(x, y) = 4x^4 y^2$, jehož hodnota je skoro všude kladná. Zadaná parciální diferenciální rovnice je tedy skoro všude v $\mathbb{R}^2$ hyperbolická, resp. všude v množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$. Na doplňku $\mathbb{R}^2 \setminus M$ je pak uvedená rovnice parabolická a představuje triviální identitu $0 = 0$. Jelikož

$$\lambda_{1,2}(x, y) = \pm \frac{y}{x},$$

řešíme obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \pm \frac{y}{x}.$$

Při použití metody separace proměnných dostaneme

$$\ln |y| = \pm \ln |x| + C,$$

tj. $C = y \cdot x^{\pm 1}$. Tyto dvě integrační konstanty vedou k určení transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Tato transformace je na množině M regulární, neboť pro její jacobíán platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x}.$$

Nyní budeme provádět samotnou transformaci. Zřejmě

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$-4xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8y \frac{\partial u}{\partial \eta} + 8x^4 y^5 = 0,$$

kterou snadno upravíme do finálního tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\xi^3 = 0.$$

Jak je patrné, normalizovaná rovnice je skutečně hyperbolického typu. Navíc je snadno řešitelná, a sice substitucí

$$v(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ta transformuje posledně uvedenou rovnici do tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi} v = 2\xi^3. \quad (7.13)$$

Jedná se fakticky o obyčejnou diferenciální rovnici (navíc lineární), řešitelnou metodou integračního faktoru, kterým je v tomto případě výraz ξ^{-2} . Vynásobíme-li rovnici (7.13) tímto faktorem získáme rovnici

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi^3} v = 2\xi,$$

respektive

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{\xi^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 + C).$$

Odtud pak snadno

$$v(\xi, \eta) = C(\eta) \xi^2 + \xi^4 \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Pak ale

$$u(\xi, \eta) = C(\eta) \xi^2 + D(\xi) + \eta \xi^4.$$

Uzavíráme tedy, že hledaným obecným řešením zadané rovnice jsou funkce tvaru

$$u(x, y) = C\left(\frac{y}{x}\right) x^2 y^2 + D(xy) + x^3 y^5,$$

kde $\text{Dom}(u) = M$ a funkce $C\left(\frac{y}{x}\right)$ a $D(xy)$ jsou třídy $\mathcal{C}^2(M)$.

7.4.8 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4x \frac{\partial u}{\partial x} - 6y \frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0.$$

Tentokrát se na celém $\mathbf{R}^2$ jedná o parabolickou diferenciální rovnici, neboť příslušný diskriminant je nulový, tj. $d(x, y) = 0$. Díky nulovosti diskriminantu bude existovat pouze jediný kořen přidružené kvadratické rovnice, tj.

$$\lambda(x, y) = -2\frac{y}{x}.$$

Řešíme tedy jedinou obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = 2\frac{y}{x}.$$

Použijeme opět osvědčenou metodu separace proměnných a dostaneme $\ln |y| = 2 \ln |x| + C$, odkud $C = \ln |y| - \ln(x^2)$. Tato integrační konstanta určuje první z normalizačních transformačních vztahů. Druhý z nich je v tomto případě možno volit libovolně s jediným omezením, a sice aby vzniklá transformace byla regulární. Volíme tedy transformaci

$$\xi = \frac{y}{x^2}, \quad \eta = x.$$

Jelikož má odpovídající jacobíán tvar

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2},$$

je zvolená transformace regulární pouze na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$. Vyjádříme-li potřebné parciální derivace pomocí derivací podle nových proměnných, obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4\frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 6\frac{y}{x^4} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\frac{y}{x^5} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + 6u = 0.$$

V tomto případě se jedná o Eulerovu diferenciální rovnici, již budeme řešit substitucí $\eta = e^t$, která povede na rovnici $\ddot{u} - 5\dot{u} + 6u = 0$ s konstantními koeficienty. Kořeny charakteristického polynomu jsou čísla 2 a 3. Proto tedy $u(t) = Ce^{2t} + De^{3t}$, potažmo

$$u(\xi, \eta) = C(\xi)\eta^2 + D(\xi)\eta^3.$$

Hledaným řešením na množině M je tudíž systém funkcí

$$u(x, y) = C\left(\frac{y}{x^2}\right)x^2 + D\left(\frac{y}{x^2}\right)x^3.$$

Všimněte si, že podoba množiny M eliminuje všechny problémy, jež by mohly v předpisu funkce $u(x, y)$ nastat.

7.4.9 Příklad

Posledním ze zástupců parciálních diferenciálních rovnic jsou rovnice eliptického typu. Jednou z nich je také rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (2 - \cos^2(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

neboť její diskriminant je všude na $\mathbf{R}^2$ záporný:

$$d(x, y) = 4 \sin^2(x) - 4(2 - \cos^2(x)) = -4.$$

Funkce $\lambda_{1,2}(x, y)$ budou tedy různé a navíc komplexně sdružené, konkrétně

$$\lambda_{1,2}(x, y) = \sin(x) \pm i.$$

Zvolme libovolně jednoho zástupce z uvedených dvou, zde např. $\lambda(x, y) = \sin(x) + i$, a řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = -\lambda(x, y) \equiv -\sin(x) - i.$$

Odtud (po separaci proměnných) $C = y - \cos(x) + ix$. Za hledané substituční vztahy v případě eliptických rovnic volíme reálnou, resp. imaginární část integrační konstanty, a sice

$$\xi = \Im(C) = x, \quad \eta = \Re(C) = y - \cos(x).$$

Transformace zadaná těmito vztahy je regulární na celém $\mathbf{R}^2$, protože pro všechny uspořádané dvojice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí:

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sin(x) & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Nyní spočteme potřebné derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \sin(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \cos(x) \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Dosazením do původní rovnice získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cos(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

z níž po drobné úpravě dostaneme výslednou rovnici v normálním tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cos(\xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv \Delta u + \cos(\xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Normální tvar není bohužel v tomto případě triviálně řešitelný, jako tomu bylo v předešlých dvou příkladech. Na řešení této rovnice bude nutno vybudovat poměrně rozsáhlou teorii, která bude náplní dalších partií matematické analýzy.

7.5 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Dalším zástupcem parciálních diferenciálních rovnic, které jsou snáze řešitelné, jsou lineární rovnice druhého řádu, jejichž parciální diferenciální operátor je operátorem s konstantními koeficienty. Za těchto okolností je totiž taková rovnice asociovaná s jistou kvadratickou formou, jejíž polární báze přímo generuje hledanou sérii normalizačních transformačních vztahů. Blíže se s celým postupem seznámíme právě v této sekci.

7.5.1 Definice

Parciální diferenciální rovnici s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(\nabla u, u(\vec{x})) = f(\vec{x}), \quad (7.14)$$

kde $\mathbb{A}$ je nenulová symetrická číselná matice a $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$.

7.5.2 Komentář

Předchozí definici je též možno zapsat ve formálním tvaru

$$(\nabla u)^\top \mathbb{A} (\nabla u) + \Phi(\nabla u, u(\vec{x})) = f(\vec{x}),$$

kde $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Je však nutno mít na paměti, že formální výraz $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ zde představuje dvojité derivování $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, nikoliv součin.

7.5.3 Odvození

Aplikujme nyní na rovnici (7.14) regulární transformaci $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$. Její matice $\mathbb{A}$ tak přejde v matici $\widetilde{\mathbb{A}}$ s koeficienty ve tvaru

$$\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij}(\vec{\varphi}^\ominus(\vec{y})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}. \quad (7.15)$$

Nášim cílem je najít takovou transformaci, aby výsledná rovnice v normálním tvaru byla opět rovnicí s konstantními koeficienty. Jelikož $a_{ij}(\vec{\varphi}^\ominus(\vec{y}))$ jsou prvky z $\mathbf{R}$, postačí, aby derivace $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}$ byly rovněž čísla. Tuto podmínku zajistíme použitím lineárních transformačních vztahů

$$y_k = \sum_{i=1}^r r_{ki} x_i, \quad (k \in \hat{r}).$$

Prvky matice $\widetilde{\mathbb{A}}$ tedy přejdou do tvaru

$$\tilde{a}_{k\ell} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} r_{ki} r_{lj} = \sum_{i=1}^r r_{ki} \left(\sum_{j=1}^r a_{ij} r_{lj} \right),$$

odkud při použití maticového zápisu dostáváme maticovou rovnost $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R}^\top \mathbb{A} \mathbb{R}$. Z učiva o kvadratických formách probraného v [7] víme, že pro převod parciální diferenciální rovnice do normálního tvaru je třeba matici $\mathbb{R}$ sestavit z vektorů polární báze matice $\mathbb{A}$. Pokud tuto bázi označíme

$$B_P = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_r\},$$

dostaneme také hledané transformační vztahy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1r} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2r} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \dots & w_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & w_{r2} & w_{r3} & \dots & w_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Každý řádek transformační matice je tvořen složkami jednoho z vektorů $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \dots, \vec{w}_r$. Během normalizačního procesu tedy původní rovnice (7.14) přejde na novou rovnici tvaru

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^r q(\vec{w}_k, \vec{w}_\ell) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \Phi(\nabla u, u(\vec{y})) = f(\vec{y}),$$

respektive

$$\sum_{k=1}^r q(\vec{w}_k) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \Phi(\nabla u, u(\vec{y})) = f(\vec{y}).$$

Díky vlastnostem vektorů polární báze smíšené parciální derivace vymizí a druhé derivace podle téže proměnné budou mít hodnoty rovné 0, +1 nebo -1. Navíc lze tedy nové diagonální koeficienty vypočítat ze znalosti sdružené kvadratické formy podle vztahu

$$\widetilde{a}_{\ell\ell} = q(\vec{w}_\ell) = \vec{w}_\ell^\top \mathbb{A} \vec{w}_\ell.$$

Tudíž typ excentricity parciální diferenciální rovnice koresponduje s typem excentricity přidružené kvadratické formy.

7.5.4 Komentář

Postup při řešení parciální diferenciální rovnice tedy můžeme shrnout do následujících kroků. 1) Nalezení transformačních vztahů. 2) Převod rovnice do normálního tvaru. 3) Řešení daného typu normálního tvaru. 4) Návrat k původním proměnným, tj. převod řešení normálního tvaru do původních proměnných.

7.5.5 Příklad

Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + u = 0$$

pro neznámou funkci $u = u(x_1, x_2, x_3)$ převedme na normální tvar a diskutujme její typ. Přidružená kvadratická forma má tvar

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Aktuálním cílem je stanovení normálního tvaru a typu dané formy a nalezení alespoň jedné její polární báze. Pro určení normálního tvaru zadané kvadratické formy, pro stanovení její signatury a příslušné polární báze se běžně používá tzv. *babylonská redukce*, někdy nazývaná též *Lagrangeovým algoritmem*. Ten spočívá v převedení kvadratické formy v $\mathbf{R}^r$ na maximálně r čtverců. V našem případě např.

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2.$$

Tedy normální tvar zadané formy má podobu

$$q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

kde $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_2$ a $z_3 = x_2 + x_3$. Jedná se tedy o eliptickou kvadratickou formu, a tudíž půjde o eliptickou parciální diferenciální rovnici. Pro inverzní vztahy platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé sloupce matice přechodu představují vektory polární báze. Tedy

$$\mathcal{B}_p = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \equiv \{(1, 0, 0)^\top; (-1, 1, -1)^\top; (0, 0, 1)^\top\}.$$

Snadno ověříme, že se skutečně o polární bázi jedná, neboť $q(\vec{w}_1) = 1$, $q(\vec{w}_2) = 1$, $q(\vec{w}_3) = 1$ a $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = qq(\vec{w}_1, \vec{w}_3) = qq(\vec{w}_2, \vec{w}_3) = 0$. Ze znalosti polární báze odvodíme podle návodu diskutovaného výše tvar normalizační substituce. V našem případě se jedná o vztahy

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad y_3 = x_3. \quad (7.16)$$

Podle již citovaného návodu bude mít transformovaná parciální diferenciální rovnice tvar

$$\sum_{\ell=1}^3 q(\vec{w}_\ell) \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell^2} + \widetilde{\Phi}(\text{grad}(u), u(\vec{y})) = 0.$$

Jelikož $q(\vec{w}_1) = q(\vec{w}_2) = q(\vec{w}_3) = 1$, zbývá pouze konkretizovat tvar obecného symbolu $\widetilde{\Phi}(\text{grad}(u), u(\vec{y}))$ v tomto našem příkladě. Provedme tedy transformaci (7.16). Snadno

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial y_3}.$$

Výsledný normální tvar zkoumané rovnice má tedy podobu

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial y_3} + u = 0. \quad (7.17)$$

7.5.6 Komentář

Parciální diferenciální rovnici v normálním tvaru

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell^2} + \sum_{\ell=1}^n b_\ell \frac{\partial u}{\partial y_\ell} + c u(\vec{y}) = 0,$$

kde $a_\ell \in \{0; -1; 1\}$ a $b, c \in \mathbf{R}$ lze substitucí

$$u(\vec{y}) = v(\vec{y}) \cdot \exp \left[\sum_{\ell=1}^n \mu_\ell y_\ell \right], \quad (\mu_\ell \in \mathbf{R})$$

v závisle proměnných převést buď na tvar

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell^2} + \widetilde{c} v = 0$$

bez lineárních členů (to lze vždy) nebo v některých případech na tvar

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell^2} + \sum_{\ell=1}^n \widetilde{b}_\ell \frac{\partial v}{\partial y_\ell} = 0$$

bez absolutního členu. Toho lze docílit vhodnou volbou koeficientů $\mu_i \in \mathbf{R}$.

7.5.7 Příklad

Pokusme se upravit výsledek (7.17) příkladu 7.5.5 na jednodušší tvar podle předešlé poznámky. Uvažme substituci

$$u(\vec{y}) = v(\vec{y}) e^{\mu y_3}.$$

Pro příslušné parciální derivace platí vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial v}{\partial y_1} e^{\mu y_3}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} e^{\mu y_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \frac{\partial v}{\partial y_2} e^{\mu y_3}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} e^{\mu y_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial y_3} &= \frac{\partial v}{\partial y_3} e^{\mu y_3} + \mu v(\vec{y}) e^{\mu y_3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2} e^{\mu y_3} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y_3} e^{\mu y_3} + \mu^2 v(\vec{y}) e^{\mu y_3}, \end{aligned}$$

které po dosazení do původní rovnice vedou na tvar

$$e^{\mu y_3} \Delta v + (2\mu + 1) \frac{\partial v}{\partial y_3} e^{\mu y_3} + (\mu^2 + \mu + 1) v(\vec{y}) e^{\mu y_3} = 0.$$

Zvolíme-li $\mu = -1/2$ a vydělíme-li výrazem $e^{\mu y_3}$, získáme finální zjednodušení

$$\Delta v + \frac{3v}{4} = 0.$$

7.5.8 Komentář

Hyperbolickou parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u(x, y) \right) = 0 \quad (7.18)$$

pro neznámou funkci $u = u(x, y)$ lze jednoduchou substitucí $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ převést na normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u(\xi, \eta) \right) = 0.$$

Z tohoto důvodu bývá rovnice (7.18) nazývána, jak už bylo zmíněno, alternativním normálním tvarem hyperbolické parciální diferenciální rovnice (viz definice 7.2.10). Rovnice ve tvaru (7.18) bývá v mnoha případech snadněji řešitelná (viz např. příklad 7.3.1).

7.5.9 Příklad

Pokusme se nalézt transformaci, která převádí parciální diferenciální rovnici

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - 10 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

na rovnici

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} = 0.$$

Hledat transformaci, jež převádí jednu rovnici na druhou, znamená hledat lineární zobrazení mezi příslušnými kvadratickými formami. V našem případě tedy mezi formou

$$q(x, y, z) = x^2 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + 4xy - 2xz - 5yz = (x + 2y - z)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2$$

a formou

$$\tilde{q}(a, b, c) = a^2 + \frac{3}{2}b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac + 4bc = (a - b - c)^2 + \frac{1}{2}(b + cz)^2.$$

Jelikož mají obě formy stejnou signaturu, tj. $\text{sg}(q) = \text{sg}(\tilde{q}) = (2, 0, 1)$, bude mít naše úloha řešení. Z výše uvedené babylonské redukce určíme polární bázi první kvadratické formy na

$$\mathcal{B}_P = \{(1, 0, 0)^\top; (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^\top; (-1, 1, 1)^\top\}.$$

Ze znalosti polární báze odvodíme tvar normalizační substituce

$$\xi = x, \quad \eta = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y, \quad \lambda = -x + y + z,$$

která převede první z rovnic na parabolický normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (7.19)$$

Zcela obdobně určíme polární bázi druhé kvadratické formy na

$$\widetilde{\mathcal{B}}_P = \{(1, 0, 0)^\top, (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^\top, (-1, -2, 1)^\top\}.$$

Normalizační vztahy

$$\xi = a, \quad \eta = \sqrt{2}a + \sqrt{2}b, \quad \lambda = -a - 2b + c$$

převedou druhou rovnici na tentýž normální tvar (7.19). Jelikož jsou ale oba normální tvary stejné, tak pouhým srovnáním obou transformačních trojic získáme hledanou substituci, a sice

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

7.5.10 Příklad

Pokusme se nalézt vztahy $\eta = \eta(x, y, z)$, $\lambda = \lambda(x, y, z)$, které vyhovují (alespoň v jednom případě) podmínce $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ a tvoří společně s funkcí $\xi = x + 7y + 4z$ transformaci, jež převádí parciální diferenciální rovnici

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 18\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 3\frac{\partial u}{\partial y} - 5\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

na normální tvar. Úloha se de facto redukuje na hledání takové polární báze, jež obsahuje vektor $\vec{w}_1 = (1, 7, 4)^\top$ a další vektor $\vec{w}_2$, jehož první složka w_{2_1} je nulová. Pokud ovšem taková báze vůbec existuje. Sdružená kvadratická forma má maticový zápis tvaru

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bilineární forma sdružená se zadanou kvadratickou formou má tedy podobu

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Jelikož je

$$\textcircled{1} \quad q(\vec{w}_1) = 1,$$

bude taková polární báze existovat. Její konstrukci provedeme přímo užitím patřičné definice. Začneme hledáním vektoru $\vec{w}_2 = (x_1, x_2, x_3)$ splňujícího podmínky $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = 0$ a $q(\vec{w}_2) \in \{0; -1; 1\}$. Protože ale máme pouze dvě podmínky pro tři neznámé x_1, x_2, x_3 , bylo by v obecném případě možno jednu z nich volit. My zde ovšem upotřebíme požadavek $w_{2_1} = 0$. První z uvedených podmínek dává rovnost

$$(1, 7, 4) \begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

a tedy (pro volbu $w_{2_1} = 0$) dostáváme $x_2 = 2x_3$. Dosadíme-li oba získané vztahy do druhé podmínky, obdržíme

$$\textcircled{2} \quad q(\vec{w}_2) = -x_3^2 = -1.$$

Zde podotýkáme, že hodnoty 0 nebo -1 na pravé straně této rovnosti byly z pochopitelných důvodů zavrhnuty. Rovnici řeší např. hodnota $x_3 = 1$, což vede k nalezení druhého vektoru polární báze ve tvaru $\vec{w}_2 = (0, 2, 1)^T$. Dále pokračujeme analogicky hledáním posledního vektoru $\vec{w}_3 = (x_1, x_2, x_3)$, splňujícího podmínky $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_3) = 0$, $qq(\vec{w}_2, \vec{w}_3) = 0$ a $q(\vec{w}_3) \in \{0; -1; 1\}$. Uvedené podmínky q -ortogonalit vedou k rovnostem

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Po vyjádření $x_2 = 8x_1$ a $x_3 = 5x_1$ získává třetí podmínka jednoduchou podobu

$$\textcircled{3} \quad q(\vec{w}_3) = x_1^2 = 1.$$

Opět jsme z množiny $\{0; -1; 1\}$ vyloučili hodnoty 0, -1 . Řešením rovnice je např. hodnota $x_1 = 1$, a tedy $\vec{w}_3 = (1, 8, 5)^T$. Uzavíráme tedy, že hledanou polární bází je množina $\mathcal{B}_p = \{(1, 7, 4)^T; (0, 2, 1)^T; (1, 8, 5)^T\}$. Určíme transformační vztahy

$$\xi = x + 7y + 4z, \quad \eta = 2y + z, \quad \lambda = x + 8y + 5z$$

pro převod zadané parciální diferenciální rovnice na normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$$

hyperbolického typu.

7.6 Parciální diferenciální rovnice vyšších řádů

V posledním odstavci této kapitoly probereme obecné poznatky o lineárních parciálních diferenciálních rovnicích, jejichž řád není omezen dvojkou, jako tomu bylo v předešlých odstavcích.

7.6.1 Značení

Symbole $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ a $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$, kde $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{N}_0$, budou v dalším textu vždy reprezentovat tzv. *multiindexy*. Dále pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ definujeme *absolutní hodnotu multiindexu* $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ a *multifaktoriál* $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_r!$. Pomocí tohoto značení lze zavést úsporný zápis umocňování

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_r^{\alpha_r} = \vec{x}^\alpha$$

a také parciálního derivování funkce $u(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$. Ve druhém případě se jedná o zápis tvaru

$$\mathcal{D}^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Je-li z nějakého důvodu třeba specifikovat, podle jakých proměnných byla funkce $u(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{E}^{r+s})$ derivována, pak pro multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^s$ definujeme symbol

$$\mathcal{D}_{\vec{y}}^\alpha u(\vec{x}, \vec{y}) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_s^{\alpha_s}}.$$

Symbol $\sum_{\beta=0}^m$ bude v kontextu *multiindexového sčítání* značit sumaci $\sum_{\beta_1=0}^m \sum_{\beta_2=0}^m \dots \sum_{\beta_r=0}^m$.

7.6.2 Komentář

Díky vlastnosti $u(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ je počet parciálních derivací, jež jsou záměnné s parciální derivací $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$, roven číslu

$$k_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

jak plyne ze vztahu (2.13).

7.6.3 Definice

Nechť $m \in \mathbf{N}$ a G je oblast v $\mathbf{E}^r$. Nechť pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ jsou definovány funkce $a_\alpha(\vec{x}) \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Pak *diferenciálním operátorem řádu m* budeme rozumět operátor

$$\hat{L} := \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha. \quad (7.20)$$

Funkce $a_\alpha(\vec{x})$ nazýváme (*funkčními*) *koeficienty operátoru $\hat{L}$* . *Definičním oborem* operátoru $\hat{L}$ přitom rozumíme třídu $\text{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{C}^m(G)$. Je-li pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ a všechna $\vec{x} \in G$ splněn vztah $a_\alpha(\vec{x}) = a_\alpha \in \mathbf{R}$, specifikujeme dále, že operátor $\hat{L}$ je operátorem s *konstantními koeficienty*.

7.6.4 Věta

Diferenciální operátor (7.20) je lineární na $\text{Dom}(\hat{L})$.

Důkaz:

- úkolem je dokázat, že $\hat{L}$ je aditivní a homogenní
- zvolíme libovolné $u(\vec{x}), v(\vec{x}) \in \text{Dom}(\hat{L})$
- z linearity derivace vyplývá

$$\begin{aligned} \hat{L}(u + v) &= \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha (u(\vec{x}) + v(\vec{x})) = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(\vec{x}) (\mathcal{D}^\alpha (u(\vec{x})) + \mathcal{D}^\alpha (v(\vec{x}))) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha (u(\vec{x})) + \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha (v(\vec{x})) = \hat{L}(u) + \hat{L}(v) \end{aligned}$$

- to dokazuje aditivitu operátoru $\hat{L}$
- podobným způsobem dokážeme pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ homogenitu tvaru $\hat{L}(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \hat{L}(u)$

7.6.5 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor (7.20) řádu m na G a funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je oblast. Pak rovnici

$$\hat{L}(u) = f(\vec{x}) \quad (7.21)$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnici řádu m* . Funkci $f(\vec{x})$ nazýváme *pravou stranou diferenciální rovnice* (7.21) a koeficienty $a_\alpha(\vec{x})$ operátoru $\hat{L}$ někdy též nazýváme *koeficienty diferenciální rovnice* (7.21). Rovnici $\hat{L}(u) = 0$ nazýváme *lineární diferenciální rovnici s nulovou pravou stranou* přidruženou k rovnici (7.21). Přitom za definiční obor operátoru $\hat{L}$ klademe $\text{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{C}^m(G)$.

7.6.6 Definice

Řešením diferenciální rovnice (7.21) na oblasti G rozumíme každou funkci $u(\vec{x}) \in \text{Dom}(\hat{L}) = \mathcal{C}^m(G)$, pro níž je splněna rovnost $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$.

7.6.7 Lemma

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán diferenciální operátor $\hat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$. Množina všech řešení rovnice $\hat{L}(u) = 0$ tvoří vektorový prostor. Množina všech řešení rovnice $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$, kde $f(\vec{x})$ je spojitou funkcí na G , tvoří lineární varietu.

7.6.8 Věta

Všechna řešení rovnice $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$ jsou tvaru

$$u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x}), \quad (7.22)$$

kde $z(\vec{x})$ jsou všechna řešení rovnice $\hat{L}(z) = 0$ a $z_p(\vec{x})$ je jedno řešení rovnice $\hat{L}(z_p) = f(\vec{x})$.

Důkaz:

- jako první dokážeme, že funkce $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ řeší rovnici $\hat{L}(u) = f(\vec{x})$
- jelikož $\hat{L}(z) = 0$ a $\hat{L}(z_p) = f(\vec{x})$, pak snadno $\hat{L}(u) = \hat{L}(z) + \hat{L}(z_p) = 0 + f(\vec{x}) = f(\vec{x})$
- sporem dokážeme, že řešení, které není ve tvaru (7.22), neexistuje
- nechť $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ je výše uvedeného tvaru
- předpokládejme pro spor, že $\hat{L}(v) = f(\vec{x})$, ale $v(\vec{x})$ nelze zapsat jako (7.22)
- zjevně tedy platí $\hat{L}(u - v) = \hat{L}(u) - \hat{L}(v) = 0$
- rozdíl $u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ proto řeší rovnici s nulovou pravou stranou, tj. $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) = \tilde{z}(\vec{x})$
- odtud $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \tilde{z}(\vec{x}) = z(\vec{x}) - \tilde{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x}) = \hat{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$, přičemž $\hat{z}(\vec{x})$ řeší rovnici s nulovou pravou stranou
- to je očekávaný spor

7.6.9 Komentář

Funkci $z_p(\vec{x})$ z předešlé věty nazýváme *partikulárním řešením* diferenciální rovnice (7.2).

Kapitola 8

Extrémy funkce více proměnných

Budeme se nyní zabývat hledáním lokálních a globálních extrémů funkcí více proměnných na zadaných množinách. Pro funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v tomto oddíle popíšeme analogické postupy, kterými jsme u funkcí jediné proměnné detekovali body podezřelé z extrému, a další, jimiž jsme poté rozhodli, zda a jaký typ extrému v podezřelém bodě nastává.

8.1 Lokální extrémy

Nejprve budeme zkoumat, zda a případně kde má zadaná funkce lokální extrémy, které jsou tzv. volné, tj. vymezené pouze definičním oborem funkce nebo jistou r -dimenzionální podmnožinou M tohoto oboru. Takové lokální extrémy budeme ale z logiky věci hledat pouze v hromadných bodech množiny M , neboť v bodech izolovaných vyšetřování extremálnosti postrádá smysl.

8.1.1 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ a nechť $\vec{a} \in \text{der}(M)$. Řekneme, že *funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ lokální minimum*, resp. *ostré lokální minimum* na množině M , jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(\vec{a})$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}^*(\vec{a}) \cap M$ platí $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$, resp. $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$. Řekneme, že *funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ lokální maximum*, resp. *ostré lokální maximum* na množině M , jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(\vec{a})$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathcal{U}^*(\vec{a}) \cap M$ platí $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$, resp. $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$. Lokální maxima a minima (ostrá) na množině M nazýváme souhrnně *lokálními extrémy (ostrými) na množině*. Je-li množinou M definiční obor funkce $\text{Dom}(f)$, hovoříme o *(ostrých) lokálních maximech či minimech*.

8.1.2 Věta

Má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in M \subset \mathbf{E}^r$ lokální extrém na množině M , pak má odpovídající extrém v bodě $\vec{a}$ i na libovolné podmnožině N množiny M , pro níž $\vec{a} \in \text{der}(N)$.

Důkaz:

- plyne přímo z definice 8.1.1

8.1.3 Věta – nutná podmínka pro lokální extrém

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na množině M a nechť $\vec{a} \in M$. Má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ a má-li v něm parciální derivaci podle proměnné x_k , pak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$.

Důkaz:

- vezměme $k \in \hat{r}$ a uvažme, že předpoklady věty garantují existenci jistého $\delta > 0$ takového, že $\mathcal{U}_\delta(\vec{a}) \subset M$

- má-li funkce $f(\vec{x})$ extrém v bodě $\vec{a}$ na množině M , pak má podle předešlé věty tentýž extrém i na množině

$$N = \{\vec{x} \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}) : x_j = a_j \text{ pro } j \in \hat{r} \setminus \{k\}\}$$

- definujeme funkci $\psi(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_r) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$
- tato funkce má tedy podle již konstatovaného extrém v bodě a_k a její derivace $\dot{\psi}(t)$ v bodě a_k podle předpokladů věty existuje
- tedy $\dot{\psi}(a_k) = 0$ podle nutné podmínky pro extrém funkce jedné proměnné
- to ale neznamená nic jiného než fakt, že $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$.

8.1.4 Komentář

Lokální extrémy funkce $f(\vec{x})$ na množině M tedy mohou nastávat v hromadných bodech množiny M , v nichž je derivace nulová, v hromadných bodech množiny M , v nichž funkce $f(\vec{x})$ nemá derivaci, speciálně tedy v bodech nespojitosti, nebo v hromadných bodech hranice $\text{bd}(M)$, které patří do $\text{Dom}(f)$.

8.1.5 Definice

Bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ nazveme *stacionárním bodem* funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, jestliže $\text{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

8.1.6 Věta – o Hessově matici implicitní funkce ve stacionárním bodě

Nechť je dána generující funkce $H(\vec{x}, y) : \mathbf{E}^{r+1} \mapsto \mathbf{R}$ zadávající na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ implicitní funkci $y = y(\vec{x})$. Nechť bod $\vec{a} \in G$ je stacionárním bodem této implicitní funkce. Označme $b = y(\vec{a})$ a $\vec{\lambda} = (\vec{a}, b)$. Nechť bod $\vec{\lambda}$ není pro funkci $H(\vec{x}, y)$ kritickým generujícím bodem a existuje okolí $\mathcal{U}(\vec{\lambda})$ tak, že $H(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(\vec{\lambda}))$. Označme symboly $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{H}$ Hessovy matice implicitní funkce $y(\vec{x})$ v $\vec{a}$, resp. generující funkce $H(\vec{x}, y)$ v $\vec{\lambda}$. Pak platí:

$$\mathbf{Y} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial y}(\vec{\lambda})} \mathbf{H}_{[\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(\vec{\lambda})]'} \quad (8.1)$$

kde symbolika $\mathbb{A}_{[a_{jk}]}$ reprezentuje tzv. submatici, jež vznikla z matice $\mathbb{A}$ odstraněním j -tého řádku a k -tého sloupce.

Důkaz:

- předpoklady ve větě jsou zvoleny tak příznivě, že je možno (podle věty o implicitní funkci) s jistotou tvrdit, že zmiňovaná implicitní funkce jistě existuje
- generující rovnici $H(\vec{x}, y) = 0$ je možno díky vlastnosti $H(\vec{x}, y) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(\vec{\lambda}))$ dvakrát derivovat s následujícím výsledkem

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial y} \frac{\partial y}{\partial x_\ell} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial x_\ell} \right) \frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_\ell} = 0$$

- ve stacionárním bodě se ale tato rovnost redukuje na

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_\ell}(\vec{\lambda}) + \frac{\partial H}{\partial y}(\vec{\lambda}) \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_\ell}(\vec{a}) = 0$$

- toto lze ale interpretovat jako vztah mezi prvky dotčených Hessových matic
- konkrétně $\mathbb{H}_{k\ell} + \frac{\partial H}{\partial y}(\vec{\lambda}) \mathbf{Y}_{k\ell} = 0$

- protože $\vec{\lambda}$ není bodem kritickým, je jisté $\frac{\partial H}{\partial y}(\vec{\lambda}) \neq 0$, odkud plyne, že pro všechna $k, \ell \in \hat{r}$ platí

$$Y_{k\ell} = \frac{-H_{k\ell}}{\frac{\partial H}{\partial y}(\vec{\lambda})}$$

- to dokazuje tvrzení

8.1.7 Věta – postačující podmínka pro lokální extrém

Nechť $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ je stacionární bod funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Nechť má tato funkce na určitém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ spojitě všechny parciální derivace do třetího řádu včetně. Potom jestliže je kvadratická forma druhého totálního diferenciálu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ pozitivně, resp. negativně definitní v $\mathbf{E}^r$, pak má funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ ostré lokální minimum, resp. maximum. Jestliže je kvadratická forma druhého totálního diferenciálu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ indefinitní v $\mathbf{E}^r$, pak extrém funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ nenastává.

Důkaz:

- důkaz zahajme např. tvrzením o ostrém lokálním minimu
- je-li tedy kvadratická forma $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{x})$ pozitivně definitní, pak definuje na $\mathbf{E}^r$ normu $\sqrt{d^2 f_{\vec{a}}(\vec{x})}$
- z věty 6.3.10 ze skript [7] ale víme, že všechny normy na konečně-dimenzionálním prostoru jsou ekvivalentní
- tedy existuje $\alpha > 0$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ platí $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{x}) \geq \alpha \|\vec{x}\|^2$
- vezměme nyní takové ε , že $0 < \varepsilon < \alpha$ a zároveň $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})} \subset \mathcal{U}(\vec{a})$, kde $\mathcal{U}(\vec{a})$ je okolí z předpokladů věty
- jelikož uzávěr okolí $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})}$ je kompaktní množina a třetí parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ jsou na něm spojitě, jsou tedy tyto třetí parciální derivace na $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ omezené (to platí podle věty 1.2.27)
- pro vektor $\vec{h} \in \mathbf{R}^r$, jehož euklidovská norma vyhovuje nerovnosti $\|\vec{h}\| \leq \varepsilon$, existuje podle Taylorovy věty 4.2.1 pro funkci více proměnných číslo $\tau \in (0, 1)$ tak, že platí

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_i h_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^r \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{a} + \tau \vec{h}) h_i h_j h_k \quad (8.2)$$

- v předešlém bodě jsme využili skutečnosti, že $\vec{a}$ je stacionární bod funkce $f(\vec{x})$, a tudíž její derivace $\mathcal{D}f(\vec{a})$ je nulovým vektorem
- jelikož jsou třetí parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ na $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})$ omezené, platí nerovnost

$$\frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^r \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{a} + \tau \vec{h}) h_i h_j h_k \geq -\frac{\beta}{2} \|\vec{h}\|^3,$$

kde

$$\beta := \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^r \max_{\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{a})} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}) \right|$$

- dále $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h}) \geq \alpha \|\vec{h}\|^2 > \varepsilon \|\vec{h}\|^2$, jak je patrné z první části důkazu
- v tom případě je ale pravá strana rovnosti (8.2) větší nebo rovna výrazu

$$\frac{1}{2} (\varepsilon \|\vec{h}\|^2 - \beta \|\vec{h}\|^3) = \frac{1}{2} \|\vec{h}\|^2 (\varepsilon - \beta \|\vec{h}\|)$$

- pro taková $\vec{h}$, pro která $\|\vec{h}\| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$, je pak

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) > \frac{\varepsilon}{4} \|\vec{h}\|^2,$$

což značí, že na jistém okolí bodu $\vec{a}$ jsou funkční hodnoty funkce $f(\vec{x})$ větší než $f(\vec{a})$

- tedy bod $\vec{a}$ je ostrým lokálním minimem
- při důkazu tvrzení pro lokální maximum je nejlépe užít faktu, že má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ ostré lokální maximum, pak má funkce $-f(\vec{x})$ v tomtéž bodě ostré lokální minimum
- přitom kvadratické formy druhých diferenciálů funkcí $f(\vec{x})$ a $-f(\vec{x})$ mají pouze obrácená znaménka
- tedy je-li jedna z nich pozitivně definitní, je druhá z nich negativně definitní
- odsud již plyne tvrzení o ostrém lokálním maximu
- zbývá prokázat, že v případě indefinitnosti formy $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{x})$ funkce extrém v bodě $\vec{a}$ nemá
- ukážeme tedy, že v každém okolí bodu $\vec{a}$ existují body s vyšší i nižší funkční hodnotou, než má samotný bod $\vec{a}$
- nechť tedy $\vec{h}_Z$ a $\vec{h}_K$ jsou zvoleny tak, že $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h}_Z) < 0$ a $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h}_K) > 0$
- takové vektory existují díky indefinitnosti formy $d^2 f_{\vec{a}}(\vec{x})$
- pro dostatečně malé $\lambda > 0$ a $\vec{h} := \lambda \vec{h}_K$ lze stejně jako výše ukázat, že platí nerovnost

$$\begin{aligned} f(\vec{a} + \lambda \vec{h}_K) - f(\vec{a}) &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \lambda^2 h_{K_i} h_{K_j} - \beta \lambda^3 \|\vec{h}_K\|^3 \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_{K_i} h_{K_j} - \beta \lambda \|\vec{h}_K\|^3 \right) \end{aligned}$$

- nyní ale víme, že první člen v poslední závorce je z předpokladu kladný a tudíž můžeme vhodnou volbou λ zaručit, že celá pravá strana (a tudíž i levá strana) poslední nerovnosti je kladná
- tedy $f(\vec{a} + \lambda \vec{h}_K) - f(\vec{a}) > 0$, čili v libovolném okolí bodu $\vec{a}$ jsme našli bod $\vec{a} + \lambda \vec{h}_K$, v němž je funkční hodnota vyšší než v bodě $\vec{a}$
- analogicky se dokáže, že v nějakém bodě $\vec{a} + \lambda \vec{h}_Z$ z okolí bodu $\vec{a}$ je funkční hodnota $f(\vec{a} + \lambda \vec{h}_Z)$ nižší než $f(\vec{a})$
- to dokončuje prováděný důkaz

8.1.8 Komentář

Podotýkáme, že je-li kvadratická forma druhého diferenciálu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ semidefinitní, pak podle kvadratické formy druhého diferenciálu nelze rozhodnout, zda v bodě $\vec{a}$ nastává či nenastává extrém funkce $f(\vec{x})$. To demonstrujeme na následujícím příkladě.

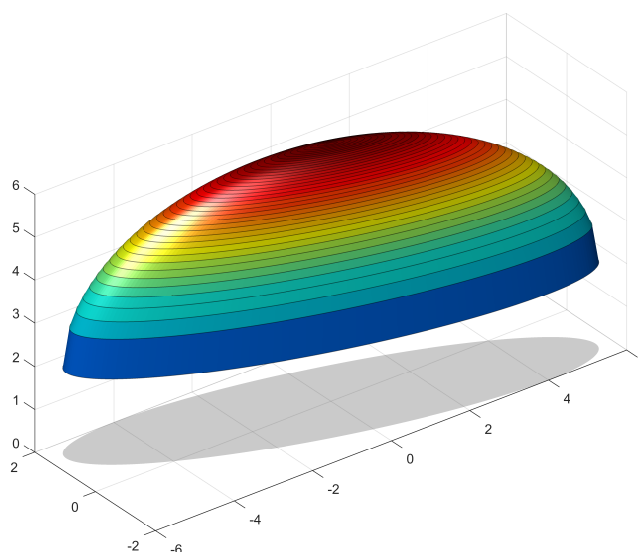
8.1.9 Příklad

Definujme funkce $f(x, y) = x^2 + y^4$, $g(x, y) = x^2 - y^4$ a $h(x, y) = -x^4 - y^4$. Všechny tyto funkce mají stacionární bod $\vec{a} = (0, 0)$. Dále

$$d^2 f_{\vec{a}}(dx, dy) = 2dx^2, \quad d^2 g_{\vec{a}}(dx, dy) = 2dx^2, \quad d^2 h_{\vec{a}}(dx, dy) = 0.$$

Funkce $f(x, y)$ má zcela zjevně v bodě $\vec{a}$ lokální minimum, ale kvadratická forma $d^2 f_{\vec{a}}(dx, dy)$ je pozitivně semidefinitní. Funkce $g(x, y)$ v bodě $\vec{a}$ extrém nemá, ale kvadratická forma $d^2 g_{\vec{a}}(dx, dy)$ je rovněž pozitivně semidefinitní. Funkce $h(x, y)$ má v $\vec{a}$ lokální maximum, ale kvadratická forma $d^2 h_{\vec{a}}(dx, dy)$ je nulová, tedy pozitivně semidefinitní i negativně semidefinitní.

8.1.10 Příklad



Obrázek 8.25

Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{8 - 8x^2 - y^2 - 4xy + 24x + 8y}$.

Budeme nyní aplikovat předchozí teorii na hledání lokálních extrémů funkce

$$f(x, y) = \sqrt{8 - 8x^2 - y^2 - 4xy + 24x + 8y}.$$

Po vypočtení parciálních derivací

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-8x - 2y + 12}{\sqrt{8 - 8x^2 - y^2 - 4xy + 24x + 8y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y - 2x + 4}{\sqrt{8 - 8x^2 - y^2 - 4xy + 24x + 8y}}$$

snadno ukážeme, že jediným stacionárním bodem je bod $\vec{a} = (1, 2)$ s funkční hodnotou $f(\vec{a}) = 2\sqrt{7}$. Pro druhé parciální derivace v tomto bodě platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) = \frac{-8}{2\sqrt{7}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}) = \frac{-1}{2\sqrt{7}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{-2}{2\sqrt{7}},$$

a tedy kvadratická forma druhého diferenciálu funkce $f(x, y)$ má v bodě $\vec{a}$ tvar

$$d^2 f_{\vec{a}}(dx, dy) = \frac{-1}{2\sqrt{7}} (8dx^2 + dy^2 + 4dxdy) = \frac{-1}{2\sqrt{7}} [(dy + 2dx)^2 + 4dx^2].$$

Po právě provedeném doplnění na čtverce je zřejmé, že zkoumaná kvadratická forma je negativně definitní, a bod $\vec{a}$ je tudíž bodem ostrého lokálního maxima zadané funkce. Navíc všude v bodech hranice $8 - 8x^2 - y^2 - 4xy + 24x + 8y = 0$ je funkční hodnota funkce $f(x, y)$ nulová, tj. všechny body elipsy $E = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : (y + 2x - 4)^2 + 4(x - 1)^2 = 28\}$ jsou neostrými lokálními minimy. Pro ilustraci na závěr vykreslujeme graf zkoumané funkce na celém jejím definičním oboru $\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : (y + 2x - 4)^2 + 4(x - 1)^2 \leq 28\}$.

8.2 Lokální vázané extrémy

V dalším pojednání se budeme zabývat hledáním lokálních extrémů funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ na tzv. vazbách, které nedovolí proměnným $\vec{x}$ měnit se libovolně, ale jen takovým způsobem, aby splňovaly tzv. rovnice vazeb. Co to konkrétně znamená, to si vysvětlíme v prvním komentáři.

8.2.1 Komentář

Vyšetřováním tzv. *vázaných extrémů* rozumíme hledání extrémů vzhledem k tzv. *vazbové množině* M , která je níže uvedeného speciálního tvaru. Jedná se o množinu

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{E}^r : G_1(\vec{x}) = 0 \wedge G_2(\vec{x}) = 0 \wedge \dots \wedge G_s(\vec{x}) = 0\},$$

jež je jednoznačně určena sadou s tzv. *vazbových rovnic (vazeb)* $G_1(\vec{x}) = 0, G_2(\vec{x}) = 0, \dots, G_s(\vec{x}) = 0$, kde $s < r$. Aby vazbové rovnice byly nezávislé (v intuitivním smyslu), budeme požadovat, aby Jacobiho matice

$$\frac{\mathcal{D}(G_1, G_2, \dots, G_s)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}(\vec{x})$$

měla pro všechna $\vec{x} \in M$ hodnotu rovnou číslu s . Tento požadavek totiž zajistí, že mezi nezávisle proměnnými $x_1, x_2, \dots, x_r$ existuje jistě s -tice vybraných (zde je označme např. $x_{v1}, x_{v2}, \dots, x_{vs}$) tak, že

$$\left| \frac{\mathcal{D}(G_1, G_2, \dots, G_s)}{\mathcal{D}(x_{v1}, x_{v2}, \dots, x_{vs})}(\vec{x}) \right| \neq 0$$

všude v M .

8.2.2 Věta – nutná podmínka pro vázané lokální extrémy

Nechť $A \subset \mathbb{E}^{r+p}$ je otevřená množina a $f(\vec{x}), G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_p(\vec{x}) : \mathbb{E}^{r+p} \mapsto \mathbb{R}$ jsou funkce mající v množině A spojitě derivace. Označme

$$M = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{r+p}) \in A : G_i(\vec{x}) = 0 \text{ pro } i \in \hat{p}\}.$$

Nechť dále Jacobiho matice

$$\frac{\mathcal{D}(G_1, G_2, \dots, G_p)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_{r+p})}(\vec{x}) \quad (8.3)$$

má pro všechna $\vec{x} \in M$ hodnotu p . Potom má-li funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém na množině M , pak existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0 \quad (8.4)$$

pro všechna $k \in \widehat{r+p}$, tj. funkce $L(\vec{x}) := f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j G_j(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ nulovou derivaci.

Důkaz:

- s ohledem na přehlednost a srozumitelnost se v důkaze nejprve omezíme na variantu jedné vazby

- volíme tedy $p = 1$
- alternativa důkazu pro více vazeb je podrobně diskutována v komentáři 8.2.6
- označme $\vec{a}_0 := (a_1, a_2, \dots, a_r)$
- podmínka (8.3) tedy dává: $(\forall \vec{x} \in M) : \text{grad } G(\vec{x}) \neq \vec{0}$
- tedy alespoň jedna ze složek vektoru gradientu je nenulová
- předpokládejme, že je to složka poslední, tedy že

$$\frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \neq 0$$

- pokud by tomu tak nebylo, provedeme triviální přeznačení proměnných
- podle věty 5.2.4 o implicitních funkcích tedy existuje funkce

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_r) = x_{r+1}$$

taková, že pro všechna $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}_0)$ platí

$$G(x_1, x_2, \dots, x_r, \psi(x_1, x_2, \dots, x_r)) = 0 \quad (8.5)$$

- předpokládejme, že $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a} \in M$ lokální extrém, a že tedy podle věty 8.1.3 platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}_0) = 0 \quad (k \in \hat{r})$$

- raději podotýkáme, že se zde jedná o extrém funkce $f(\vec{x})$ zúžené na vazbovou množinu, kde platí rovnost $x_{r+1} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_r)$
- to ale neznamená nic jiného, než že

$$\langle \text{grad } f(\vec{a}) | \vec{\chi}_k \rangle = 0, \quad (8.6)$$

kde

$$\vec{\chi}_k := \left(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^k, 0, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}_0) \right) \quad (k \in \hat{r})$$

- vektor $\vec{\chi}_k$ je podle poznámky 8.2.5 tečným vektorem ke grafu funkce $x_{r+1} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ v jeho bodě $\vec{a} \in \Gamma(\psi)$
- derivací vztahu (8.5) podle x_k dostáváme

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}_0) = 0$$

- to odpovídá rovnici

$$\langle \text{grad } G(\vec{a}) | \vec{\chi}_k \rangle = 0 \quad (k \in \hat{r})$$

- vektory $\vec{\chi}_k$ jsou lineárně nezávislé a jejich počet je r
- tedy vektor $\text{grad } G(\vec{a})$ leží v ortogonálním doplňku $Q_\perp$ lineárního obalu $Q = [\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2, \dots, \vec{\chi}_r]_\lambda$, neboli $\text{grad } G(\vec{a}) \in Q_\perp$
- také $\text{grad } f(\vec{a})$ v něm leží, jak snadno nahlédneme z rovnice (8.6)
- lehce se přesvědčíme, že zmiňovaný doplněk je jednodimenzionální, a existuje proto reálné číslo λ tak, že $\text{grad } f(\vec{a}) = \lambda \text{grad } G(\vec{a})$
- tím je důkaz dokončen

8.2.3 Komentář

Předešlá věta se velmi často nazývá také *větou o Lagrangeových multiplikátorech*.

8.2.4 Definice

Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ z věty 8.2.2 nazýváme *Lagrangeovými multiplikátory*, p rovnic $G_i = 0$ pro $i \in \hat{p}$ *vazbami* a funkci $L(\vec{x})$ *Lagrangeovou funkcí*. Extrémy funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^{r+p} \mapsto \mathbf{R}$ na množině M nazýváme také (*ostrými*) *lokálními vázanými extrémy* (*minimy* či *maximy*).

8.2.5 Komentář

Nechť rovnice

$$G(x_1, x_2, \dots, x_r, \psi(x_1, x_2, \dots, x_r)) = 0 \quad (8.7)$$

zadává na okolí bodu $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ implicitně funkci $\psi(x_1, x_2, \dots, x_r)$, tj. dle věty 5.2.4

$$\frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}(\vec{\lambda}) \neq 0.$$

Podle vztahu (2.9) z poznámky 2.3.8 je vektor

$$\vec{v} := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_r}(\vec{a}), -1 \right), \quad (8.8)$$

kde $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, normálovým vektorem funkce $\psi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ v bodě $\vec{\lambda}$ jejího grafu. Jelikož pro něj a každý vektor

$$\vec{\chi}_k := \left(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^k, 0, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}) \right)$$

platí rovnost $\langle \vec{v} | \vec{\chi}_k \rangle = 0$, je každý z vektorů $\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2, \dots, \vec{\chi}_r$ vektorem tečným ke grafu diskutované funkce.

8.2.6 Komentář

Pokusme se nyní modifikovat důkaz věty 8.2.2 pro případ dvou vazeb. Budeme tedy vyšetřovat extrém funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}) : \mathbf{E}^{r+2} \mapsto \mathbf{R} \quad (8.9)$$

na množině $M = \{\vec{x} \in \mathbf{E}^{r+2} : G(\vec{x}) = 0 \wedge H(\vec{x}) = 0\}$. Nechť podle předpokladu věty 8.2.2 má funkce (8.9) vázaný lokální extrém v bodě $\vec{a} \in \mathbf{E}^{r+2}$. Označme $\vec{a}_0 := (a_1, a_2, \dots, a_r)$. Z podmínky (8.3) citované ve větě plyne, že existují alespoň dva indexy $k, \ell \in \overline{r+2}$, tak, že pro všechny $\vec{x} \in M$ platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(G, H)}{\mathcal{D}(x_k, x_\ell)} \right) (\vec{x}) \neq 0.$$

Pro jednoduchost zápisu učiníme předpoklad, že $k = r+1$ a $\ell = r+2$. Pokud by tomu tak nebylo, snadno bychom provedli přechíslování indexů v proměnné $\vec{x}$ tak, abychom výše citovanou podmínku naplnili. Jelikož tedy

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(G, H)}{\mathcal{D}(x_{r+1}, x_{r+2})} \right) (\vec{a}) \neq 0,$$

zadává soustava dvou rovnic $G(\vec{x}) = 0, H(\vec{x}) = 0$ podle věty 5.2.4 na okolí bodu $\vec{a}$ dvě implicitní funkce

$$x_{r+1} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad x_{r+2} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

tak, že pro všechna $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathcal{U}_\delta(\vec{a}_0)$ platí

$$G(x_1, x_2, \dots, x_r, \psi(x_1, x_2, \dots, x_r), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)) = 0, \quad (8.10)$$

$$H(x_1, x_2, \dots, x_r, \psi(x_1, x_2, \dots, x_r), \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)) = 0. \quad (8.11)$$

Podle předpokladu by funkce (8.9) měla mít v bodě $\vec{a}$ vázaný lokální extrém, tj. podle věty 8.1.3 by pro každé $k \in \hat{r}$ mělo platit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}(\vec{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0. \quad (8.12)$$

Označíme-li

$$\vec{\chi}_k := \left(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^k, 0, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{a}_0) \right),$$

platí podle vztahu (8.12) rovnost

$$\langle \text{grad } f(\vec{a}) | \vec{\chi}_k \rangle = 0. \quad (8.13)$$

Parciální derivací vztahů $G(\vec{x}) = 0$, $H(\vec{x}) = 0$ podle nezávisle proměnné x_k dostáváme analogicky

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial G}{\partial x_{r+2}}(\vec{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial H}{\partial x_{r+1}}(\vec{a}) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial H}{\partial x_{r+2}}(\vec{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0.$$

Tyto rovnice stručně sumarizujeme zápisy

$$\langle \text{grad } G(\vec{a}) | \vec{\chi}_k \rangle = 0, \quad \langle \text{grad } H(\vec{a}) | \vec{\chi}_k \rangle = 0.$$

Zřetelně vidíme, že vektory $\vec{\chi}_k$ jsou lineárně nezávislé a jejich počet je r . Z předešlých úvah plyne, že vektory $\text{grad } f(\vec{a})$, $\text{grad } G(\vec{a})$ a $\text{grad } H(\vec{a})$ leží v ortogonálním doplňku lineárního obalu $[\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2, \dots, \vec{\chi}_r]_\lambda$. Jelikož je citovaný doplněk dvoudimenzionální a vektory $\text{grad } f(\vec{a})$, $\text{grad } G(\vec{a})$ a $\text{grad } H(\vec{a})$ jsou tři, musejí nutně být lineárně závislé, tj. existují reálná čísla λ_1 a λ_2 (ne obě nulová) tak, že

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \lambda_1 \text{grad } G(\vec{a}) + \lambda_2 \text{grad } H(\vec{a}).$$

Tím je důkaz věty 8.2.2 zobecněn pro případ dvou (a tedy i více) vazeb.

8.2.7 Komentář – postačující podmínka pro vázané lokální extrémy

Nechť jsou splněny předpoklady věty 8.2.2. Nechť jsou souřadnice bodu $\vec{a}$ a čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ vypočteny z $(r+p)$ rovnic (8.4) a z p rovnic $G_j(\vec{a}) = 0$ pro $j \in \hat{p}$. Tedy bod $\vec{a}$ je bodem podezřelým z vázaného lokálního extrému funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^{r+p} \mapsto \mathbf{R}$ na vazbách $G_i(\vec{x}) = 0$ pro $i \in \hat{p}$. Nechť

$$d^2 L_{\vec{a}}(dx) = d^2 L_{\vec{a}}(dx_1, dx_2, \dots, dx_{p+r}) \quad (8.14)$$

je kvadratická forma druhého totálního diferenciálu Lagrangeovy funkce $L(\vec{x}) := f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j G_j(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$. Je-li dále

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(G_1, G_2, \dots, G_p)}{\mathcal{D}(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{r+p})} \right) (\vec{a}) \neq 0, \quad (8.15)$$

pak ze soustavy rovnic pro totální diferenciály funkcí $G_k(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$

$$\sum_{j=1}^{p+r} \frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\vec{a}) dx_j = 0 \quad (k \in \hat{p})$$

lze jednoznačně vyjádřit přírůstky $dx_{r+1}, dx_{r+2}, \dots, dx_{r+p}$ pomocí zbylých přírůstků $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$ a dosadit je do kvadratické formy (8.14). Je-li takto vzniklá redukovaná forma

$$d^2L_{\vec{a}}^{(red)}(dx_1, dx_2, \dots, dx_r)$$

pozitivně, resp. negativně definitní v $\mathbf{E}^r$, pak má funkce $f(\vec{x})$ z věty 8.2.2 v bodě $\vec{a}$ ostré lokální vázané minimum, resp. maximum. Je-li tato forma indefinitní v $\mathbf{E}^r$, nemá funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ vázaný extrém vzhledem k množině M . V případě semidefinitnosti této formy v $\mathbf{E}^r$ nelze s jejím využitím existenci ani typ lokálního vázaného extrému v bodě $\vec{a}$ vyšetřit.

Malý dotatek: Pokud by podmínka (8.15) nebyla splněna, provedeme triviální přeznačení v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_{r+p}$ tak, aby splněna byla. To, že vždy existuje p -tice z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_{r+p}$ taková, že platí (8.15), je zaručeno předpokladem o hodnotě Jacobiho matice (8.3) ve větě 8.2.2.

8.2.8 Příklad

Vyšetřování vázaných extrémů budeme demonstrovat na funkci $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4$ a vazbě

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{E}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 10 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge t > 0\}.$$

Lagrangeova funkce této úlohy má tedy tvar $L(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4 + \lambda(x + 2y + 3z + 4t - 10)$ a její parciální derivace

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^2z^3t^4 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2xy^2z^3t^4 + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 3xy^2z^2t^4 + 3\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 4xy^2z^3t^3 + 4\lambda.$$

Stacionárním bodem je bod $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ pro $\lambda = -1$. Podotýkáme, že stacionární bod jednak nuluje všechny čtyři výše uvedené parciální derivace a jednak nuluje i vazbu, tedy je bodem vazby. Totální diferenciál druhého řádu Lagrangeovy funkce má tvar

$$d^2L_{\vec{a}}(dx, dy, dz, dt) = 2dy^2 + 6dz^2 + 12dt^2 + 2(2dxdy + 3dxdz + 4dxdt + 6dydz + 8dydt + 12dzdt).$$

Nyní je ještě třeba provést redukci tohoto diferenciálu za použití prvního diferenciálu vazby

$$dg_{\vec{a}}(dx, dy, dz, dt) = dx + 2dy + 3dz + 4dt = 0.$$

Položíme-li $dx = -2dy - 3dz - 4dt$, obdržíme

$$d^2L_{\vec{a}}^{(red)}(dy, dz, dt) = -6dy^2 - 12dz^2 - 20dt^2 - 12dydz - 16dydt - 24dzdt,$$

což je kvadratická forma v $\mathbf{R}^3$ s maticí

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & -8 \\ -6 & -12 & -12 \\ -8 & -12 & -20 \end{pmatrix}.$$

Její negativní definitnost v $\mathbf{R}^3$ potvrdíme Sylvesterovým kritériem. Hlavní minory jsou po řadě $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = 36$ a $\Delta_3 = -240$. Jelikož minory střídají znaménka a první z nich je záporný, je $d^2L_{\vec{a}}^{(red)}(dy, dz, dt)$ skutečně negativně definitní v $\mathbf{R}^3$, a tudíž bod $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ je bodem ostrého lokálního vázaného maxima funkce $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4$ na zadané vazbě $x + 2y + 3z + 4t = 10$.

8.3 Globální extrémy

Kromě extrémů lokálních nás budou zajímat i globální extrémy funkce více proměnných na množině M . Ty jsou podle definice 8.3.1 představovány největší a nejmenší hodnotou funkce na zadané množině. Je-li M kompaktní množina, pak dokážeme, že každá spojitá funkce na ní nabývá svého minima i maxima.

8.3.1 Definice

Nechť je funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ definována na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ a necht' $\vec{a} \in M$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ *globální minimum*, resp. *ostré globální minimum* na množině M , jestliže pro každé $\vec{x} \in M \setminus \{\vec{a}\}$ platí

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}), \text{ resp. } f(\vec{x}) > f(\vec{a}).$$

Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ *globální maximum*, resp. *ostré globální maximum* na množině M , jestliže pro každé $\vec{x} \in M \setminus \{\vec{a}\}$ platí

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}), \text{ resp. } f(\vec{x}) < f(\vec{a}).$$

Globální maxima a minima (ostrá) na množině M nazýváme souhrnně *globálními extrémami (ostrými) na množině*. Je-li množinou M definiční obor funkce $\text{Dom}(f)$, hovoříme o (*ostrých*) *globálních maximech* či *minimech*. Bod $\vec{a}$, ve kterém globální maximum nastalo, se někdy také nazývá *argumentem maxima* a označuje se jako

$$\vec{a} = \operatorname{argmax}_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}).$$

Bod $\vec{a}$, ve kterém nastalo globální minimum, se analogicky nazývá *argumentem minima* a označuje se jako

$$\vec{a} = \operatorname{argmin}_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}).$$

8.3.2 Věta – o existenci globálního extrému funkce

Spojité funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ nabývá na neprázdné kompaktní množině svého maxima i minima.

Důkaz:

- první část důkazu je založena na pomocném tvrzení, že je-li neprázdna množina $B \subset \mathbf{R}$ kompaktní, pak má maximum i minimum
- to nejprve dokážeme
- množina B je zřejmě omezená (viz věta 6.7.28. v [7]), a tedy existuje $s := \sup B$, o němž lze s jistotou tvrdit, že $s \in \overline{B}$
- B je ale také uzavřená (opět viz věta 6.7.28. v [7]), tedy $s \in B$
- tudíž s je maximem množiny B
- protože spojitým obrazem neprázdné kompaktní množiny $A \subset \mathbf{E}^r$ je podle věty 1.4.4 opět neprázdna kompaktní množina $B := f(A)$, plyne z definice globálního extrému, že $f(\vec{x})$ nabývá na A svého maxima
- při hledání minima se postupuje obdobně

8.3.3 Komentář

Body podezřelé z globálního extrému jsou, jak je zřejmé, buď body vnitřku M° , v nichž je gradient nulový, tj. stacionární body, popř. body, v nichž neexistuje derivace, nebo body hranice. V posledním případě se jedná o vyšetřování extrémů na vazbách. V praktických aplikacích je lépe do podezřelých bodů zahrnout i všechny sporné, než dlouho dokazovat, že v některých z nich extrém nenastává. Je-li totiž podezřelých bodů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ konečně mnoho (což je nejčastější varianta), pak pro globální maximum, resp. minimum platí

$$\max_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}) = \max\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \dots, f(\vec{a}_k)\},$$

resp.

$$\min_{\vec{x} \in M} f(\vec{x}) = \min\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \dots, f(\vec{a}_k)\}.$$

8.3.4 Příklad

Pokusme se řešit následující úlohu na globální extrém. Uvažme funkci

$$f(x, y) = 2 + \sqrt{16 - x^2 - 4xy - 8y^2},$$

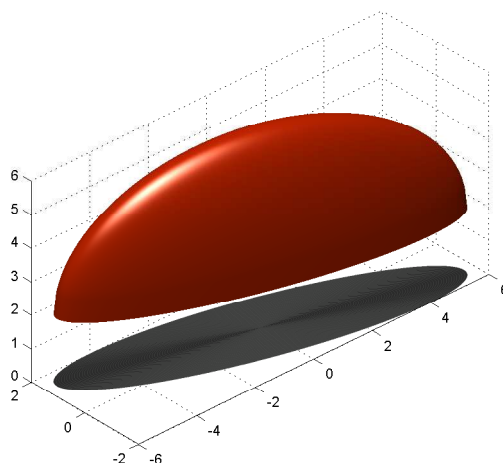
jejímž definičním oborem je uzavřená elipsa $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + 4xy + 8y^2 \leq 16\}$, neboť

$$x^2 + 4xy + 8y^2 - 16 = (x + 2y)^2 + (2y)^2 - 16 = 0.$$

Jelikož $\text{Dom}(f) = M$ je kompaktní množina, bude uvedená funkce na M nabývat jak globálního maxima, tak globálního minima. Příslušné parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x - 2y}{\sqrt{16 - x^2 - 4xy - 8y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x - 8y}{\sqrt{16 - x^2 - 4xy - 8y^2}},$$

a bodem podezřelým z globálního extrému je tedy bod $\vec{a} = (0, 0)$. Dalšími body, kde by mohl extrém nastávat, jsou body hranice množiny M , tedy $\text{bd}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + 4xy + 8y^2 = 16\}$. Žádné jiné podezřelé body již neexistují. Jednoduchou analýzou funkčních hodnot v podezřelých bodech snadno zjistíme, že bod $\vec{a} = (0, 0)$ je bodem globálního maxima a každý bod elipsy $\text{bd}(M)$ je globálním minimem. I na tomto místě jistě poslouží názorný graf zkoumané funkce. Stín pod plochou grafu představuje množinu M .



Obrázek 8.26

Graf funkce $f(x, y) = 2 + \sqrt{16 - x^2 - 4xy - 8y^2}$.

8.3.5 Příklad

Na závěr oddílu o extrémech ještě vyřešme jeden rozsáhlejší příklad na vázané extrémy, kdy zkoumanou funkcí je $f(x, y, z, u) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 2u - 1$ a množinou, na níž budeme extrémy vyšetřovat, je množina

$$M = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{E}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge u^2 = 4\}.$$

Lagrangeova funkce bude pro tuto úlohu obsahovat dva parametry, a to λ a μ . Její tvar je

$$L(x, y, z, u) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 2u - 1 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) + \mu(u^2 - 4).$$

Parciální derivace Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 12z + 2\lambda z = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = -2 + 2\mu u = 0,$$

resp. jejich nulové body, ukazují společně s rovnicemi vazeb

$$g(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, \quad h(x, y, z, u) = u^2 - 4 = 0$$

pro $\lambda = -6$ a $\mu = \pm 1/2$ na čtveřici stacionárních bodů

$$\vec{a}_1 = (0, 0, 3, 2), \quad \vec{a}_2 = (0, 0, 3, -2), \quad \vec{a}_3 = (0, 0, -3, 2), \quad \vec{a}_4 = (0, 0, -3, -2),$$

pro $\lambda = -2$ a $\mu = \pm 1/2$ na čtveřici

$$\vec{b}_1 = (0, 3, 0, 2), \quad \vec{b}_2 = (0, 3, 0, -2), \quad \vec{b}_3 = (0, -3, 0, 2), \quad \vec{b}_4 = (0, -3, 0, -2)$$

a konečně pro $\lambda = -1$ a $\mu = \pm 1/2$ na čtveřici

$$\vec{c}_1 = (3, 0, 0, 2), \quad \vec{c}_2 = (3, 0, 0, -2), \quad \vec{c}_3 = (-3, 0, 0, 2), \quad \vec{c}_4 = (-3, 0, 0, -2).$$

Tím jsou získány všechny body podezřelé z vázaného extrému. Nyní užijeme k rozřešení zásadní otázky o typu případného extrému ve zmíněných bodech postačující podmínku z poznámky 8.2.7. Jelikož jsou všechny smíšené parciální derivace lagrangiánu nulové, postačí určit následující parciální derivace.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2(1 + \lambda), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2(2 + \lambda), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2(6 + \lambda), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 2\mu.$$

Totální diferenciály vazeb v obecném bodě $\xi = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ mají jednoduchý tvar

$$dg_\xi(dx, dy, dz, du) = 2x_0 dx + 2y_0 dy + 2z_0 dz = 0, \quad dh_\xi(dx, dy, dz, du) = 2u_0 du = 0.$$

Vezměme nyní $i \in \widehat{4}$. Pro totální diferenciál Lagrangeovy funkce v bodech $\vec{a}_i$ platí

$$d^2 L_{\vec{a}_i}(dx, dy, dz, du) = -10dx^2 - 8dy^2 \pm du^2, \quad (8.16)$$

což je indefinitní (resp. negativně semidefinitní) kvadratická forma v prostoru E^4 . To ale ještě nic nevypovídá o extrému v bodech $\vec{a}_i$. V těchto bodech se totiž diferenciály vazeb redukuje na strohé rovnosti $dz = 0$, $du = 0$. To po dosazení do formy (8.16) vede na redukovanou kvadratickou formu

$$d^2 L_{\vec{a}_i}^{(red)}(dx, dy) = -10dx^2 - 8dy^2,$$

která je negativně definitní v E^2 , což nás opravňuje k tvrzení, že všechny čtyři body $\vec{a}_i$ jsou ostrými lokálními vázanými maximy zadané funkce na M . Analogicky postupujeme dále. Tedy

$$d^2 L_{\vec{b}_i}(dx, dy, dz, du) = -2dx^2 + 8dz^2 \pm du^2$$

a $dy = 0$, resp. $du = 0$. Pak tedy redukovaná kvadratická forma

$$d^2 L_{\vec{b}_i}^{(red)}(dx, dz) = -2dx^2 + 8dz^2$$

je indefinitní i v E^2 , a tedy v bodech $\vec{b}_i$ vázaný extrém nenastává. Pro poslední čtveřici bodů $\vec{c}_i$ platí

$$d^2 L_{\vec{c}_i}(dx, dy, dz, du) = 2dy^2 + 10dz^2 \pm du^2$$

a $dx = 0$, resp. $du = 0$. Kvadratická forma redukovaného druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce

$$d^2 L_{\vec{c}_i}^{(red)}(dy, dz) = 2dy^2 + 10dz^2$$

je pozitivně definitní v E^2 , tudíž body $\vec{c}_i$ jsou ostrými vázanými lokálními minimy funkce $f(x, y, z, u) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 2u - 1$ na vazbách $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $u^2 = 4$. Tím je úloha ukončena.

8.3.6 Věta – *princip maxima*

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je omezená oblast. Nachází-li se funkce $f(\vec{x})$ ve třídě $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ a je-li zároveň funkcí subharmonickou na G , pak platí, že $\operatorname{argmax}(f) \in \operatorname{bd}(G)$, což je ekvivalentní tvrzení, že $\max_{\overline{G}} f(\vec{x}) = \max_{\operatorname{bd}(G)} f(\vec{x})$. Existuje-li navíc $\vec{x}_0 \in G$ tak, že $f(\vec{x}_0) = \max_{\overline{G}} f(\vec{x})$, potom $f(\vec{x})$ je konstantní na G .

Důkaz:

- je založen na tzv. Hopfově lemmatu, které je poněkud netriviální
- detaily důkazu lze nalézt v mnoha zdrojích, např. v [14]

8.3.7 Důsledek – *princip minima*

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je omezená oblast. Nachází-li se funkce $f(\vec{x})$ ve třídě $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ a je-li zároveň funkcí superharmonickou na G , pak platí, že $\operatorname{argmin}(f) \in \operatorname{bd}(G)$, což je ekvivalentní tvrzení, že $\min_{\overline{G}} f(\vec{x}) = \min_{\operatorname{bd}(G)} f(\vec{x})$. Existuje-li navíc $\vec{x}_0 \in G$ tak, že $f(\vec{x}_0) = \min_{\overline{G}} f(\vec{x})$, potom $f(\vec{x})$ je konstantní na G .

8.3.8 Komentář

Druhé tvrzení z věty 8.3.6 se často nazývá tzv. *silným principem maxima*. Druhé tvrzení z věty 8.3.7 se analogicky nazývá tzv. *silným principem minima*.

8.3.9 Příklad

Uvažme množinu $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + 2xy + 2y^2 - 30x + 45 = 0\}$ a hledejme dva její body, které mají od sebe největší euklidovskou vzdálenost. Zavedme tedy funkci

$$\varrho(x_1, y_1, x_2, y_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

korespondující se vzdáleností libovolných bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Tyto body mají ale ležet na elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 - 30x + 45 = 0$, proto budeme uvažovat dvě rovnice vazeb, a sice

$$G(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1^2 - 30x_1 + 45 = 0, \quad (8.17)$$

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2^2 + 2x_2y_2 + 2y_2^2 - 30x_2 + 45 = 0. \quad (8.18)$$

Lagrangeovu funkci této úlohy tudíž zavedeme předpisem

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \lambda(x_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1^2 - 30x_1 + 45) + \mu(x_2^2 + 2x_2y_2 + 2y_2^2 - 30x_2 + 45).$$

Pro její parciální derivace platí

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \lambda(2x_1 + 2y_1 - 30),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \lambda(2x_1 + 4y_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \mu(2x_2 + 2y_2 - 30),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = \frac{-y_1 + y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} + \mu(2x_2 + 4y_2).$$

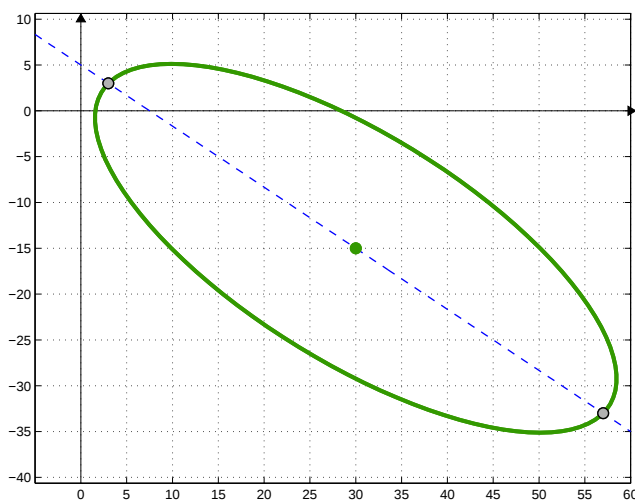
Užijeme-li nutnou podmínku pro extremalitu tvaru $\text{grad}L = (0,0,0,0)$ a symetrie úlohy, dostáváme vztah $y_1 = 5 - \frac{2}{3}x_1$, který po dosazení do rovnice (8.17) vede na kvadratickou rovnici

$$\frac{5}{9}x_1^2 - \frac{100}{3}x_1 + 95 = 0,$$

jíž řeší hodnoty $x_1 = 3$ a $x_1 = 57$, což vede ke stacionárním bodům

$$\vec{\omega}_1 = (3, 3, 57, -33), \quad \vec{\omega}_2 = (57, -33, 3, 3),$$

které ale vzhledem k symetrii úlohy představují totéž řešení úlohy. Podotýkáme, že úlohu řeší všechny body tvaru $\vec{\omega}_1 = (a, b, a, b)$, kde $a^2 + 2ab + 2b^2 - 30a + 45 = 0$. Ty ale představují globální minima, která zde nejsou předmětem zájmu. Zbývá rozhodnout, zda je např. bod $\vec{\omega}_1$ bodem lokálního minima či maxima. Zde nebudeme užívat postačující podmínku, ale užijeme faktu, že funkce $\varrho(x_1, y_1, x_2, y_2)$ je spojitá a vazba A je kompaktní, jak lze nahlédnout z toho (viz věta 6.7.28 ve skriptech [7]), že je jistě omezená v E^2 a také uzavřená. Podle věty 8.3.2 taková funkce musí nabývat globálního maxima. Bude jím tedy právě bod $\vec{\omega}_1$. Na elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 - 30x + 45 = 0$ jsou tedy nejvzdálenějšími body $(3, 3)$ a $(57, -33)$.



Obrázek 8.27

Elipsa $x^2 + 2xy + 2y^2 - 30x + 45 = 0$ a její nejvzdálenější body.

Kapitola 9

Riemannův integrál

V této kapitole se budeme zabývat riemannovskou integrací omezených funkcí typu $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ přes omezené množiny. Zavedení integrálu v $\mathbf{E}^r$ bude demonstrováno pro funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ dvou proměnných, kde bude budovaná teorie značně přehledná, a tudíž lépe pochopitelná. Už na samém počátku budované teorie ale upozorňujeme čtenáře, že riemannovská integrace bude v konečné fázi shledána jako málo účinná (tzn. aplikovatelná na příliš omezené množství funkcí), a že bude tudíž nezbytné budovat účinnější metodiku integrací. Touto osvědčenou metodikou jsou integrační postupy vyvozené z obecné teorie Lebesgueova integrálu. Ta je podrobně probrána ve skriptech [8], na která náročnější čtenáře odkazujeme. Také my se v následujícím textu budeme v mnoha případech na tuto teorii odkazovat. Usnadní nám to formulace některých vět.

9.1 Riemannův integrál přes vícedimenzionální interval

Nejprve ale budeme uvažovat omezenou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ r proměnných definovanou všude na kompaktním (omezeném a uzavřeném) intervalu $J = \times_{\ell=1}^r \langle \alpha_\ell, \beta_\ell \rangle$. Pro takovou funkci budeme nyní definovat Riemannův integrál $(\mathcal{R}) \int_J f(\vec{x}) d\vec{x}$.

9.1.1 Úmluva

V celém oddíle necht' je symbol J vymezen pro dvourozměrný uzavřený interval (dále jen 2D-interval)

$$J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle,$$

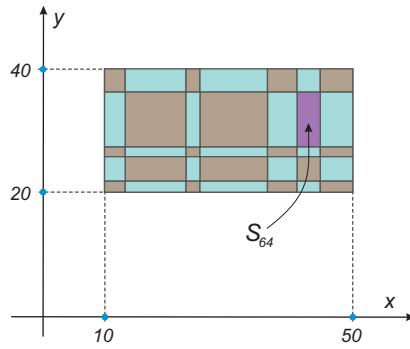
kde $b > a$ a $d > c$. Dále definujeme množinovou funkci $\mu(J)$ předpisem $\mu(J) := (b-a)(d-c)$ reprezentující obsah (klasickou dvoudimenzionální míru, chcete-li) intervalu J .

9.1.2 Definice

Necht' $\{x_i : i \in \hat{n}\}$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\{y_j : j \in \hat{m}\}$ dělení intervalu $\langle c, d \rangle$. *Dělením 2D-intervalu J* rozumíme soustavu (množinu množin) všech intervalů tvaru $S_{ij} := \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$. Označujeme $\mathcal{D} := \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$.

9.1.3 Příklad

Uvažme interval $J = \langle 10, 50 \rangle \times \langle 20, 40 \rangle$. Vezměme množinu $\{10, 13, 23, 25, 36, 41, 45, 50\}$ jako jednodimenzionální dělení intervalu $\langle 10, 50 \rangle$ a množinu $\{20, 22, 26, 28, 36, 40\}$ jako jednodimenzionální dělení intervalu $\langle 20, 40 \rangle$. Pak dvoudimenzionální dělení intervalu J je vyobrazeno na obrázku níže, přičemž např. $S_{64} = \langle 41, 45 \rangle \times \langle 28, 36 \rangle$.



Obrázek 9.28
Dělení dvoudimenzionálního intervalu.

9.1.4 Definice

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je omezená funkce definovaná na 2D-intervalu J . Nechť $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ je jeho dělení. Pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ označme

$$v_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}), \quad V_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}).$$

Dolním integrálním součtem $L(\mathcal{D}, f(\vec{x}))$, resp. *horním integrálním součtem* $U(\mathcal{D}, f(\vec{x}))$ funkce $f(\vec{x})$ na intervalu J při dělení $\mathcal{D}$ rozumíme číslo

$$L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_{ij} \mu(S_{ij}), \quad \text{resp.} \quad U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} \mu(S_{ij}).$$

9.1.5 Definice

Řekneme, že dělení $\mathcal{D}' = \{S'_{ts} : t \in \hat{m}_1 \wedge s \in \hat{m}_2\}$ je *zjemněním* dělení $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n}_1 \wedge j \in \hat{n}_2\}$, jestliže pro každé $S'_{ts} \in \mathcal{D}'$ existuje $S_{ij} \in \mathcal{D}$ tak, že $S'_{ts} \subset S_{ij}$.

9.1.6 Komentář

Uvědomme si následující skutečnost. Je-li dělení $\mathcal{D}'$ z předešlé definice zjemněním dělení $\mathcal{D}$, pak libovolný kompaktní interval $S \in \mathcal{D}$ je v rámci dělení $\mathcal{D}'$ rozdělen na určitý počet (označme jej m) kompaktních intervalů $S'_k \in \mathcal{D}'$ tak, že platí $\bigcup_{k=1}^m S'_k = S$.

9.1.7 Lemma

Ke každým dvěma dělením téhož intervalu J existuje jejich společné zjemnění.

9.1.8 Věta

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je funkce definovaná a omezená na 2D-intervalu J . Nechť $\mathcal{D}$ je dělení intervalu J a $\mathcal{D}'$ jeho zjemnění. Pak platí systém nerovností $L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) \leq L(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x}))$.

Důkaz:

- nerovnost $L(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}', f(\vec{x}))$ plyne z jednoduchého faktu, že infimum libovolné číselné množiny je menší nebo rovno jejímu supremu
- pro zbylé nerovnosti užijeme poznámky 9.1.6
- nechť $\mathcal{D}'$ je zjemněním $\mathcal{D}$

- podle poznámky 9.1.6 existují pro $S \in \mathcal{D}$ kompaktní intervaly $S'_1, S'_2, \dots, S'_m \in \mathcal{D}'$ tak, že

$$S'_1 \cup S'_2 \cup \dots \cup S'_m = S$$

- necht' dále $v'_i := \inf_{\vec{x} \in S'_i} f(\vec{x})$ pro $i \in \hat{m}$ a $v := \inf_{\vec{x} \in S} f(\vec{x})$
- pak pro každé $i \in \hat{m}$ platí nerovnost $v \leq v'_i$
- odtud $v \cdot \mu(S'_i) \leq v'_i \cdot \mu(S'_i)$
- z právě zmíněného vyplývá, že $v \cdot \mu(S) \leq \sum_{i=1}^m v'_i \cdot \mu(S'_i)$
- tato nerovnost přitom platí pro každé $S \in \mathcal{D}$
- sečteme-li tedy předchozí nerovnosti přes všechna $S \in \mathcal{D}$, získáme vztah mezi dolními integrálními součty ve tvaru $L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) \leq L(\mathcal{D}', f(\vec{x}))$
- analogicky se dokáže i nerovnost $U(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x}))$

9.1.9 Věta

Necht' $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je funkce definovaná a omezená na intervalu J . Necht' $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ jsou libovolná dvě dělení intervalu J . Potom $L(\mathcal{D}_1, f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}_2, f(\vec{x}))$.

Důkaz:

- podle věty 9.1.7 vybereme k oběma dělením $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ společné zjemnění $\mathcal{D}'$
- podle předcházející věty platí $L(\mathcal{D}_1, f(\vec{x})) \leq L(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}_1, f(\vec{x}))$
- a také $L(\mathcal{D}_2, f(\vec{x})) \leq L(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}', f(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}_2, f(\vec{x}))$
- odsud již plyne tvrzení

9.1.10 Komentář

Z věty 9.1.8 mimo jiné vyplývá, že zjemňujeme-li dělení, čísla $L(\mathcal{D}', f(\vec{x}))$ a $U(\mathcal{D}', f(\vec{x}))$ se k sobě přibližují. Vezmeme-li tedy supremum dolních integrálních součtů přes všechna možná dělení a infimum horních integrálních součtů přes všechna možná dělení, pak pokud se tyto rovnají, můžeme je prohlásit za hodnotu určitého integrálu.

9.1.11 Definice

Necht' $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je funkce omezená na intervalu J . *Horním Riemannovým integrálem* $U(f(\vec{x}))$, resp. *dolním Riemannovým integrálem* $L(f(\vec{x}))$ přes 2D-interval J rozumíme čísla

$$U(f(\vec{x})) := \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{A}} U(\mathcal{D}, f(\vec{x})), \quad \text{resp.} \quad L(f(\vec{x})) := \sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{A}} L(\mathcal{D}, f(\vec{x})),$$

kde $\mathcal{A}$ je soustava (tj. množina množin) všech dělení intervalu J . Pokud

$$U(f(\vec{x})) = L(f(\vec{x})), \tag{9.1}$$

pak řekneme, že *funkce $f(\vec{x})$ má na J Riemannův integrál*, resp. že je *riemannovsky integrovatelná (integrabilní)*. Společnou hodnotu (9.1) nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce $f(\vec{x})$ přes interval J a značíme jedním z následujících symbolů

$$(\mathcal{R}) \int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} = (\mathcal{R}) \iint_J f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2).$$

Symbol $(\mathcal{R})$ před znakem integrálu se užívá pouze v případech, kdy by mohlo dojít k záměně s jiným typem integrálu, např. Lebesgueovým.

9.1.12 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je *absolutně riemannovsky integrovatelná (integrabilní)* na intervalu $J \subset \mathbf{E}^2$, pokud existuje integrál $(\mathcal{R}) \int_J |f(\vec{x})| d\vec{x}$ a je konečný.

9.1.13 Komentář

Z definice 9.1.11 a věty 9.1.9 je zřejmo, že $L(f(\vec{x})) \leq U(f(\vec{x}))$. Navíc z věty 9.1.8 vyplývá, že funkce $f(\vec{x})$ má na J Riemannův integrál právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ intervalu J tak, že

$$U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) < \varepsilon.$$

Existuje-li Riemannův integrál funkce $f(\vec{x})$ přes J , platí jistě, že

$$L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) \leq \int_J f(\vec{x}) d\vec{x} \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) \quad (9.2)$$

pro libovolné dělení $\mathcal{D}$ intervalu J .

9.1.14 Definice

Nechť $M \subset \mathbf{E}^r$. *Diametrem množiny M* rozumíme číslo $\text{diam}(M) := \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in M} \varrho(\vec{x}, \vec{y})$, kde $\varrho(\vec{x}, \vec{y})$ je euklidovská metrika v $\mathbf{E}^r$.

9.1.15 Definice

Nechť $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ je libovolné dělení intervalu J . *Normou dělení $\mathcal{D}$* rozumíme číslo

$$\|\mathcal{D}\| := \max_{S_{ij} \in \mathcal{D}} \text{diam}(S_{ij}).$$

9.1.16 Věta – základní věta teorie Riemannova integrálu

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je funkce spojitá na J . Potom Riemannův integrál

$$\iint_J f(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$$

existuje, a je-li $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^\infty$ libovolná posloupnost dělení intervalu J taková, že $\|\mathcal{D}_n\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, pak

$$\iint_J f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})). \quad (9.3)$$

Důkaz:

- užijeme poznámky 9.1.13
- postačí tedy dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ tak, že $U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) < \varepsilon$
- zvolme proto $\varepsilon > 0$
- jelikož $f(\vec{x})$ je spojitá na kompaktním intervalu J , existuje podle Bolzano-Cauchyovy podmínky pro spojitě funkce (viz 1.3.7) k danému $\varepsilon > 0$ univerzální kladné δ tak, že pro každá $\vec{x}, \vec{y} \in J$ taková, že $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, platí

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{\mu(J)} \quad (9.4)$$

- zde se jedná o tzv. *stejnoměrnou spojitost funkce*

- nechť $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ je libovolné dělení intervalu J takové, že $\|\mathcal{D}\| < \delta$
- označme $v_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$, $V_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$
- jelikož $f(\vec{x})$ je spojitá a všechny S_{ij} kompaktní, existují podle důsledku 8.3.2 prvky $\vec{x}_{ij}, \vec{y}_{ij} \in S_{ij}$ takové, že $v_{ij} = f(\vec{x}_{ij})$ a $V_{ij} = f(\vec{y}_{ij})$
- jelikož $\varrho(\vec{x}_{ij}, \vec{y}_{ij}) \leq \text{diam}(S_{ij}) \leq \|\mathcal{D}\| \leq \delta$, platí díky (9.4) také nerovnost

$$V_{ij} - v_{ij} < \frac{\varepsilon}{\mu(J)}$$

- odsud dostáváme

$$U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) = \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} (V_{ij} - v_{ij}) \mu(S_{ij}) < \varepsilon$$

- tedy integrál z funkce $f(\vec{x})$ přes J skutečně existuje
- jelikož platí nerovnost (9.2), vidíme navíc, že pro všechna dělení $\mathcal{D}_n$, pro která $\|\mathcal{D}_n\| < \delta$, je

$$\left| L(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})) - \int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| < \varepsilon, \quad \left| U(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})) - \int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| < \varepsilon$$

- to ale neznamená nic jiného než fakt, že pokud $\|\mathcal{D}_n\| \rightarrow 0$, pak skutečně platí rovnost (9.3)

9.1.17 Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = 2x + 4y$ a pokusme se podle definice Riemannova integrálu vypočítat hodnotu

$$(\mathcal{R}) \int_J f(x, y) \, d(x, y),$$

kde $J = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Uvažme dělení $\mathcal{D}$ tohoto intervalu na n^2 stejných čtverců

$$S_{ij} = \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \times \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle$$

pro $i, j \in \hat{n}$. Na každém z těchto čtverců S_{ij} nabývá funkce $f(x, y)$ svého minima v_{ij} , resp. maxima V_{ij} v levém dolním, resp. pravém horním rohu, tedy

$$v_{ij} = 2\frac{i-1}{n} + 4\frac{j-1}{n}, \quad V_{ij} = 2\frac{i}{n} + 4\frac{j}{n}.$$

Dolní a horní integrální součet příslušné k použitému dělení mají tvar

$$L(\mathcal{D}, f(x, y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2\frac{i-1}{n} + 4\frac{j-1}{n} \right) = 3 - \frac{3}{n}$$

$$U(\mathcal{D}, f(x, y)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2\frac{i}{n} + 4\frac{j}{n} \right) = 3 + \frac{3}{n}.$$

Podle věty 9.1.16 pak platí

$$(\mathcal{R}) \int_J f(x, y) \, d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{n} \right) = 3,$$

resp.

$$(\mathcal{R}) \int_J f(x, y) \, d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{D}_n, f(\vec{x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} \right) = 3.$$

9.1.18 Příklad

Riemannův integrál existuje podle základní věty teorie Riemannova integrálu 9.1.16 pro všechny spojité funkce na kompaktním intervalu $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Existuje ovšem také i pro některé funkce nespojité, jak se nyní přesvědčíme. Uvažme integrál

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) \, dx dy,$$

kde

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \dots (x, y) \in J \setminus \{(1, 1)\} \\ 10 & \dots (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

Zvolme nyní dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ na $4n^2$ shodných čtverců

$$S_{ij} = \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \times \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle \quad (i, j \in \widehat{2n}).$$

o obsahu $\mu(S_{ij}) = n^{-2}$. Nyní snadno nahlédneme, že bod $(1, 1)$ bude náležet do čtyř množin S_{ij} . Konkrétně to budou $S_{(n-1)(n-1)}$, $S_{(n-1)n}$, $S_{n(n-1)}$ a S_{nn} . Z definice funkce $f(x, y)$ je zřejmé, že pro $(i, j) \notin \{(n-1, n-1), (n-1, n), (n, n-1), (n, n)\}$ bude platit $v_{ij} = V_{ij} = 2$, zatímco pro $(i, j) \in \{(n-1, n-1), (n-1, n), (n, n-1), (n, n)\}$ bude také $v_{ij} = 2$, ale $V_{ij} = 10$. Odtud snadno

$$L(\mathcal{D}, f(x, y)) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{2}{n^2} = 2\mu(J) = 8$$

a podobně

$$U(\mathcal{D}, f(x, y)) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{V_{ij}}{n^2} = 2\mu(J) + 4 \frac{10-2}{n^2} = 8 + \frac{32}{n^2}.$$

Pro pevné $\varepsilon > 0$ lze nyní snadno nalézt takové dělení, aby pro rozdíl integrálních součtů platilo

$$U(\mathcal{D}, f(x, y)) - L(\mathcal{D}, f(x, y)) = \frac{32}{n^2} < \varepsilon.$$

Proto podle poznámky 9.1.13 hledaný integrál existuje a platí pro něj rovnost $\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) \, dx dy = 8$.

9.2 Riemannův integrál přes obecnou množinu

Poté, co byl zaveden integrál přes interval, se nyní pokusíme vystavět konstrukci integrálu pro případ, kdy integrační množinou interval nebude.

9.2.1 Definice

Nechť $M \subset \mathbb{E}^r$. *Charakteristickou funkcí množiny M* rozumíme funkci definovanou předpisem

$$\chi_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in M, \\ 0, & \vec{x} \notin M. \end{cases}$$

9.2.2 Definice

Nechť $M \subset J$. Řekneme, že množina M má *Jordanův-Peanův obsah* $\mu_S(M)$, jestliže existuje Riemannův integrál z funkce $\chi_M(\vec{x})$ přes 2D-interval J . Pak definujeme

$$\mu_S(M) := \iint_J \chi_M(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2).$$

9.2.3 Komentář

Pro každou omezenou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^2$ však Jordanův-Peanův obsah definován není. Ukázkou takové množiny je např. množina Q , definovaná předpisem $Q := A \times A$, kde $A := \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$. Jde tedy o množinu všech prvků množiny $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, které mají obě složky racionální. Charakteristická funkce $\chi_Q(x_1, x_2)$ množiny Q tudíž dává jedničku pouze tehdy, jsou-li obě její složky x_1 a x_2 racionálními čísly z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V ostatních bodech je funkce nulová. Necht' $S \in \mathcal{D}$, kde $\mathcal{D}$ je libovolné dělení kompaktního intervalu $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Jelikož v každém takovém S leží jistě nějaký bod $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ a jistě i bod z doplňku $\mathbf{E}^2 \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$, platí nutně $L(\mathcal{D}, \chi_Q(\vec{x})) = 0$, $U(\mathcal{D}, \chi_Q(\vec{x})) = 1$ pro libovolné dělení $\mathcal{D}$. Tedy $L(f(\vec{x})) = 0$ a $U(f(\vec{x})) = 1$ a integrál $\int_Q \chi_Q(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$ tudíž neexistuje. Odtud je zřejmé, že $\mu_S(Q)$ není definováno. A to navzdory tomu, že množina Q je spočetná, a tudíž by bylo logické očekávat, že její míra bude nula. Bohužel Jordanova-Peanova míra není dostatečně způsobila takové problémy řešit.

Rigorózněji řečeno: Základní vlastností míry $\mu(X)$ množin by měla být tzv. σ -aditivita (viz teorie míry ve skriptech [8]), která spočívá v tom, že je-li $M_1, M_2, \dots$ spočetně mnoho disjunktních množin a $\mu(M_1), \mu(M_2), \dots$ jejich míry, pak

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i).$$

Jelikož je ale zřejmé, že míra jednoprvkové množiny $\{(a_1, a_2)\}$ je nula a výše zmiňovaná množina Q je disjunktním sjednocením jednoprvkových množin, měla by míra $\mu_S(Q)$ být skutečně nulová. To ale neplatí. Jordanova-Peanova míra tedy nesplňuje jeden ze základních požadavků na míru. Komplexnější přístup pro míry množin přinese teorie míry prezentovaná ve skriptech [8], kde kromě Jordanovy-Peanovy míry bude zavedena i tzv. Lebesgueova míra, která uvedenými handicapy již netrpí.

9.2.4 Definice

Necht' má množina $M \subset J$ Jordanův-Peanův obsah. Je-li $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ funkce definovaná a omezená na množině M , definujeme Riemannův integrál z funkce $f(\vec{x})$ přes množinu M předpisem

$$(\mathcal{R}) \iint_M f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) := (\mathcal{R}) \iint_J f(x_1, x_2) \chi_M(x_1, x_2) d(x_1, x_2),$$

pokud integrál napravo existuje. Přitom klademe $f(\vec{x}) \chi_M(\vec{x}) := 0$ i v těch bodech $\vec{x} \in J \setminus M$, kde $f(\vec{x})$ není případně definována.

9.2.5 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *riemannovsky integrovatelná (integrabilní)* na množině $M \subset \mathbf{E}^r$, pokud existuje integrál $(\mathcal{R}) \int_M f(\vec{x}) d\vec{x}$ a je konečný. Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je *absolutně riemannovsky integrovatelná (integrabilní)* na množině $M \subset \mathbf{E}^r$, pokud existuje integrál $(\mathcal{R}) \int_M |f(\vec{x})| d\vec{x}$ a je konečný.

9.2.6 Komentář

Problém existence Riemannova integrálu spočívá kromě jiného také v tom, že byť by sama funkce $f(x_1, x_2)$ byla spojitá na J , integrand $f(x_1, x_2) \chi_M(x_1, x_2)$ na J již spojitý být nemusí, a proto existence příslušného Riemannova integrálu není nijak garantována. To je také důvod, proč vyslovíme následující vlastnosti Riemannova integrálu pro integraci přes interval $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

9.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

Pokusme se nyní potvrdit intuitivní předpoklady o elementárních vlastnostech Riemannova integrálu a také odvodit vlastnosti pokročilé, reprezentující vícerozměrné alternativy postupů známých z jednodimenzionálních integrací.

9.3.1 Věta – o linearitě Riemannova integrálu

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a $g(\vec{x}) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jsou omezené funkce na kompaktním intervalu J , které mají na J Riemannův integrál. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ a $(cf)(\vec{x})$ mají na J Riemannův integrál a platí rovnosti

$$\int_J (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) d\vec{x} = \int_J f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_J g(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (9.5)$$

$$\int_J cf(\vec{x}) d\vec{x} = c \int_J f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (9.6)$$

Důkaz:

- integrál součtu:

- podle předpokladů existuje pro libovolně zvolené kladné $\varepsilon > 0$ dělení $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ intervalu J tak, že

$$U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(\mathcal{D}, g(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, g(\vec{x})) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- označme

$$v_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}), \quad V_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}),$$

$$v'_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} g(\vec{x}), \quad V'_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} g(\vec{x}),$$

$$v''_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} (f + g)(\vec{x}), \quad V''_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} (f + g)(\vec{x})$$

- odtud

$$L(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v''_{ij} \mu(S_{ij}) \geq \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} (v_{ij} + v'_{ij}) \mu(S_{ij}) = L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) + L(\mathcal{D}, g(\vec{x}))$$

- podobně $U(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) + U(\mathcal{D}, g(\vec{x}))$
- odsud ale vyplývá, že $U(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - L(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) < \varepsilon$
- tedy integrál z funkce $(f + g)(\vec{x})$ existuje a rovnost (9.5) platí díky nerovnostem

$$L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) + L(\mathcal{D}, g(\vec{x})) \leq L(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x}) + g(\vec{x})) \leq U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) + U(\mathcal{D}, g(\vec{x}))$$

- integrál součinu:

- existence integrálu z funkce $(cf)(\vec{x})$ i rovnost (9.6) vyplývá z jednoduchého faktu, že pro $c > 0$ je

$$\inf_{\vec{x} \in S_{ij}} (cf)(\vec{x}) = c \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}), \quad \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} (cf)(\vec{x}) = c \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$$

- pro $c < 0$ pak

$$\inf_{\vec{x} \in S_{ij}} (cf)(\vec{x}) = c \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}), \quad \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} (cf)(\vec{x}) = c \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$$

9.3.2 Věta – o monotonii Riemannova integrálu

Nechť $J \subset \mathbf{E}^2$ je kompaktní interval a $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$, $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ omezené funkce mající na J Riemannův integrál. Jestliže pro všechna $\vec{x} \in J$ platí nerovnost $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$, pak

$$\int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq \int_J g(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Důkaz:

- je-li na J splněna nerovnost $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$, pak pro libovolně zvolené dělení $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ intervalu J platí

$$\inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}) \leq \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} g(\vec{x}), \quad \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}) \leq \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} g(\vec{x})$$

- odtud již plyne tvrzení

9.3.3 Věta – o aditivitě Riemannova integrálu

Nechť M_1, M_2 jsou omezené množiny mající Jordanův-Peanův obsah. Nechť $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je omezená funkce definovaná na $M_1 \cup M_2$ a nechť existují integrály $\int_{M_1} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$ a $\int_{M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$. Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak existuje integrál $\int_{M_1 \cup M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$ a platí

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{M_1} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Důkaz:

- předně je nutno si uvědomit, že jsou-li M_1 a M_2 omezené množiny, pak také $M_1 \cup M_2$ je omezenou množinou
- je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^2$ platí $\chi_{M_1 \cup M_2}(\vec{x}) = \chi_{M_1}(\vec{x}) + \chi_{M_2}(\vec{x})$
- tvrzení pak vyplývá z bezprostřední aplikace věty 9.3.1
- jako důsledek dostáváme tvrzení

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \int_{M_1 \cup M_2} 1 \, d\vec{x} = \int_{M_1} 1 \, d\vec{x} + \int_{M_2} 1 \, d\vec{x} = \mu(M_1) + \mu(M_2),$$

což je vlastnost nazývaná v teorii míry aditivitou

9.3.4 Věta – o absolutní hodnotě Riemannova integrálu

Nechť $J \subset \mathbf{E}^2$ je kompaktní interval a $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^2 \mapsto \mathbf{R}$ je omezená funkce mající na J Riemannův integrál. Potom také funkce $|f(\vec{x})|$ má na intervalu J Riemannův integrál a navíc platí nerovnost

$$\left| \int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| \leq \int_J |f(\vec{x})| \, d\vec{x}.$$

Důkaz:

- pokud již víme, že funkce $|f(\vec{x})|$ má Riemannův integrál, plyne tvrzení z věty 9.3.2
- důkaz existence integrálu z funkce $|f(\vec{x})|$ je pro obecné funkce ovšem poněkud netriviální, nebudeme jej zde provádět
- pro spojitě funkce bychom naopak mohli vyslovit příslušnou větu v silnějším znění

9.3.5 Komentář

Věty 9.3.1, 9.3.2 a 9.3.4 platí nejen pro integrace přes kompaktní interval J , ale zůstávají v platnosti i pro integrace přes omezené množiny $M \subset J$ mající Jordanův-Peanův obsah. Toto zobecnění umožňuje definice 9.2.4.

9.3.6 Věta - Fubiniova pro Riemannův integrál

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je funkce spojitá na uzavřeném 2D-intervalu J . Pro $x_1 \in \langle a, b \rangle$ a $x_2 \in \langle c, d \rangle$ položme

$$f_1(x_1) := \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2, \quad f_2(x_2) := \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1.$$

Potom $f_1(x_1)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $f_2(x_2)$ je spojitá na $\langle c, d \rangle$ a platí

$$\iint_J f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_a^b f_1(x_1) dx_1 = \int_c^d f_2(x_2) dx_2. \quad (9.7)$$

Důkaz:

V první části dokážeme spojitost pro funkci $f_1(x_1)$ (bez újmy na obecnosti).

- jelikož $f(\vec{x})$ je spojitá funkce, existuje pro $\varepsilon > 0$ podle Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou spojitost (viz 1.3.7) $\delta > 0$ takové, že pro jakékoli $\vec{x}, \vec{y} \in J$, která vyhovují podmínce $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, platí

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

- speciálně pro $\xi \in \langle a, b \rangle$ a všechna $x_1 \in \langle a, b \rangle$, $x_2 \in \langle c, d \rangle$ vyhovující podmínce $|x_1 - \xi| < \delta$ tedy platí nerovnost

$$|f(x_1, x_2) - f(\xi, x_2)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

- odtud

$$|f_1(x_1) - f_1(\xi)| = \left| \int_c^d (f(x_1, x_2) - f(\xi, x_2)) dx_2 \right| \leq \int_c^d |f(x_1, x_2) - f(\xi, x_2)| dx_2 < \varepsilon$$

- tedy funkce $f_1(x_1)$ je spojitá pro libovolné $\xi \in \langle a, b \rangle$, tudíž všude v $\langle a, b \rangle$
- podobně se dokáže spojitost funkce $f_2(x_2)$ na $\langle c, d \rangle$

Ve druhé části dokážeme rovnost (9.7).

- vezměme $\varepsilon > 0$
- k němu existuje (opět podle 1.3.7) číslo $\delta > 0$ takové, že pro jakákoli $\vec{x}, \vec{y} \in J$, která vyhovují podmínce $\varrho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, platí nerovnost

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)} \quad (9.8)$$

- buď $\mathcal{D} = \{S_{ij} : i \in \hat{n} \wedge j \in \hat{m}\}$ dělení intervalu J takové, že $\|\mathcal{D}\| < \frac{\delta}{2}$ a $S_{ij} = \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle \times \langle \beta_{j-1}, \beta_j \rangle$
- položme $v_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$
- na J definujme pomocnou funkci $f^*(x_1, x_2)$ tak, že položíme $f^*(x_1, x_2) = v_{ij}$, je-li $x_1 \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$ a $x_2 \in \langle \beta_{j-1}, \beta_j \rangle$
- dále klademe $f^*(b, x_2) = v_{nj}$ pro $x_2 \in \langle \beta_{j-1}, \beta_j \rangle$, $f^*(x_1, d) = v_{im}$ pro $x_1 \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$ a $f^*(b, d) = v_{mn}$

- $f^\star(x_1, x_2)$ je tedy funkce, která je na obdélkách S_{ij} až na "pravé a horní okraje" konstantní
- ponecháváme čtenáři k ověření, že funkce $f^\star(x_1, x_2)$ má Riemannův integrál na J (funkci $f^\star(x_1, x_2)$ je totiž možno zapsat jako součet funkcí, které jsou na jednom "polootevřeném" obdélníku konstantní a jinde nulové)
- podle (9.8) a vzhledem k volbě $\|\mathcal{D}\| < \frac{\delta}{2}$ je

$$|f(\vec{x}) - f^\star(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$$

- odtud

$$\left| \int_J f(\vec{x}) d\vec{x} - \int_J f^\star(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \int_J |f(\vec{x}) - f^\star(\vec{x})| d\vec{x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.9)$$

- pro $x_1 \in \langle a, b \rangle$ položíme

$$f_1^\star(x_1) := \int_c^d f^\star(x_1, x_2) dx_2$$

- potom pro $x_1 \in \langle a, b \rangle$ platí

$$\begin{aligned} |f_1^\star(x_1) - f_1(x_1)| &= \left| \int_c^d f^\star(\vec{x}) dx_2 - \int_c^d f(\vec{x}) dx_2 \right| \leq \\ &\leq \int_c^d |f^\star(\vec{x}) - f(\vec{x})| dx_2 \leq \int_c^d \frac{\varepsilon dx_2}{2(b-a)(d-c)} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

- odtud

$$\left| \int_a^b f_1^\star(x_1) dx_1 - \int_a^b f_1(x_1) dx_1 \right| \leq \int_a^b |f_1^\star(x_1) - f_1(x_1)| dx_1 \leq \int_a^b \frac{\varepsilon dx_1}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.10)$$

- uvědomme si nyní, že

$$\int_a^b f_1^\star(x_1) dx_1 = \int_J f^\star(\vec{x}) d\vec{x} \quad (9.11)$$

– to vyplývá z rovnosti

$$\int_J f^\star(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{S_{ij} \in \mathcal{D}} v_{ij} \mu(S_{ij})$$

– dále je nezpochybnitelné, že pro $x_1 \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$ je

$$f_1^\star(x_1) = \int_c^d f^\star(\vec{x}) dx_2 = \sum_{j=1}^m v_{ij}(\beta_j - \beta_{j-1}),$$

tj. speciálně na $\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$ je funkce $f_1^\star(x_1)$ konstantní, a tedy platí

$$\int_a^b f_1^\star(x_1) dx_1 = \sum_{i=1}^n f_1^\star(\alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_{ij}(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\beta_j - \beta_{j-1})$$

- nyní z (9.10), (9.11) a (9.9) dostáváme

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_1(x_1) dx_1 - \int_J f(\vec{x}) d\vec{x} \right| &\leq \left| \int_a^b f_1(x_1) dx_1 - \int_a^b f_1^\star(x_1) dx_1 \right| + \\ &+ \left| \int_a^b f_1^\star(x_1) dx_1 - \int_J f^\star(\vec{x}) d\vec{x} \right| + \left| \int_J f^\star(\vec{x}) d\vec{x} - \int_J f(\vec{x}) d\vec{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

9.3.7 Komentář

Tvrzení Fubiniovy věty lze stručně zapsat ve tvaru

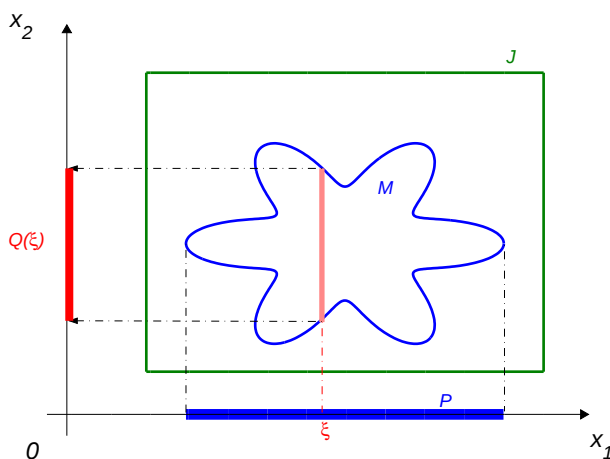
$$\iint_J f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

9.3.8 Příklad

Použijeme nyní Fubiniovu větu na potvrzení správnosti výsledku příkladu 9.1.17. Integrál z lineární funkce $f(x, y) = 2x + 4y$ přes množinu $J = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ lze jejím užitím vypočítat např. jako

$$\int_J f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x + 4y) dy \right) dx = \int_0^1 [2xy + 2y^2]_0^1 dx = \int_0^1 (2x + 2) dx = 3.$$

9.3.9 Komentář



Obrázek 9.29

K výkladu Fubiniovy věty pro integraci přes obecnou množinu.

Znění Fubiniovy věty lze pochopitelně zobecnit i na integraci přes obecnější omezenou množinu $M \subset J$. Užijeme přitom definice 9.2.4. Nechť má tedy množina M Jordanův-Peanův obsah. Otázkou je, jakým způsobem lze v analogii k rovnici (9.7) zjednodušit integrál

$$\iint_M f(x_1, x_2) d(x_1, x_2)$$

pro funkci $f(x_1, x_2)$ omezenou na M . Z tvrzení Fubiniovy věty a definice 9.2.4 vidíme např., že

$$\iint_M f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1, x_2) \chi_M(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (9.12)$$

Tento zápis je však možno upravit prostřednictvím následujících úvah. Označme

$$P = \{x_1 \in \langle a, b \rangle : \exists x_2 \in \langle c, d \rangle \text{ tak, že } (x_1, x_2) \in M\}$$

projekci množiny M do osy x_1 (viz obrázek 9.29). Dále pro pevně zvolené $\xi \in P$ označme

$$Q(\xi) := \{x_2 \in \langle c, d \rangle : (\xi, x_2) \in M\}$$

průmět (na obrázku vyznačen červeně) průniku přímky $x_1 = \xi$ s množinou M (na obrázku světle červeně) do osy x_2 . Protože $\chi_M(x_1, x_2) = 0$ vně množiny M , redukuje se rovnost (9.12) na tvar

$$\iint_M f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) = \int_P \left(\int_{Q(x_1)} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1.$$

Analogicky lze postupovat při integrování v opačném pořadí. Označíme-li tentokrát

$$P^\star = \{x_2 \in \langle c, d \rangle : \exists x_1 \in \langle a, b \rangle \text{ tak, že } (x_1, x_2) \in M\}$$

projekci množiny M do osy x_2 a $Q(\eta) := \{x_1 \in \langle a, b \rangle : (x_1, \eta) \in M\}$ průmět průniku přímky $x_2 = \eta$ s množinou M do osy x_1 , platí

$$\iint_M f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) = \int_{P^\star} \left(\int_{Q(x_2)} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2.$$

9.3.10 Příklad

Obecnou formulaci z předešlé poznámky budeme nyní demonstrovat na konkrétním příkladě. Sestavme proto integrál z funkce $f(x, y)$ přes množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Podle návodu uvedeného v poznámce 9.3.9 bude mít integrál $\int_M f(x, y) \, d(x, y)$ faktickou podobu

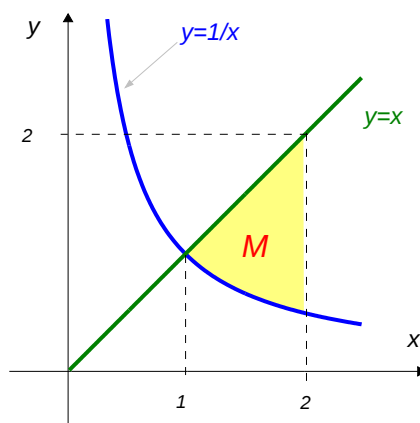
$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy,$$

neboť (pro integrál na levé straně) je-li x vybráno pro vnější integraci, hodnota proměnné y , pro níž $(x, y) \in M$, probíhá pouze interval $\langle -\sqrt{9-x^2}, \sqrt{9-x^2} \rangle$.

9.3.11 Příklad

Vypočteme integrál $Q = \int_M 4y(y-x) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < y \leq x \leq 2 \wedge xy \geq 1\}$. Množinou M je vlastně uzavřená oblast vymezená přímkou $y = x$, hyperbolou $xy = 1$ a přímkou $x = 2$ (viz obrázek). Pak snadno sestavíme a poté také vypočteme určitý integrál

$$\begin{aligned} 4 \int_1^2 \int_{1/x}^x (y^2 - xy) \, dy \, dx &= 4 \int_1^2 \left[\frac{y^3}{3} - x \frac{y^2}{2} \right]_{1/x}^x dx = 4 \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x} \right] dx = \\ &= 4 \int_1^2 \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x} \right] dx = 4 \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{2} \ln(x) \right]_1^2 = \ln(4) - 3. \end{aligned}$$



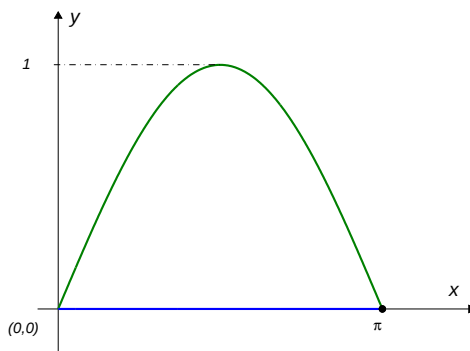
Obrázek 9.30
Vyobrazení množiny M .

9.3.12 Příklad

Ukažme si nyní, jak zaměňovat v integrálech integrační pořadí. Postup budeme demonstrovat na příkladě

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \quad (9.13)$$

Integrační množina má vzhledem k zadání (9.13) následující podobu.

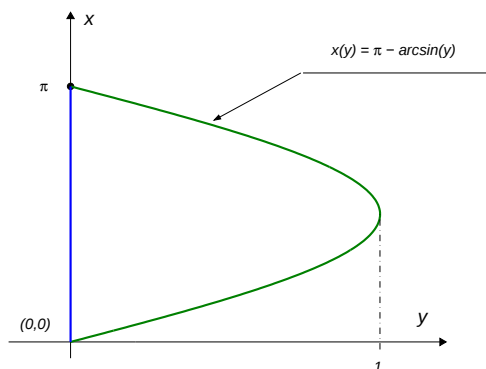


Obrázek 9.31

K záměně integračního pořadí.

Při záměně integračního pořadí, kdy vnější proměnnou bude y , ovšem nastává drobná komplikace, kdy oblouk sinusoidy $y = \sin(x)$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ nemá jednotný předpis pro inverzní funkci (viz obrázek dole). Zatímco dolní polovina oblouku má jednoduchý předpis $x(y) = \arcsin(y)$, horní polovina oblouku je popsána funkcí $x(y) = \pi - \arcsin(y)$. To je důsledkem faktu, že funkce $\arcsin(t)$ se pro t z definičního oboru $\langle -1, 1 \rangle$ zobrazuje na interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Po této analýze již snadno nahlédneme, že

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi - \arcsin(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$



Obrázek 9.32

K záměně integračního pořadí.

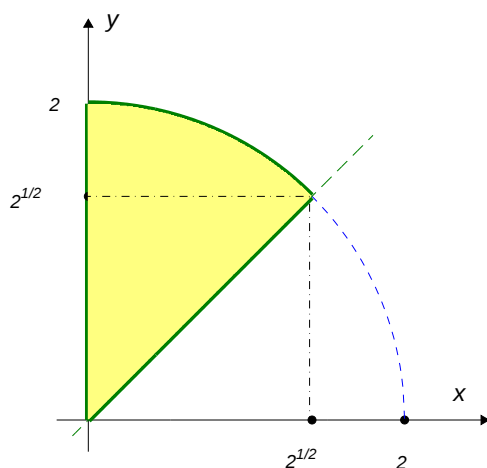
9.3.13 Příklad

Dalším problémem, který může při zaměňování integračního pořadí nastávat, je členění původně jediného integrálu na více integrálů. Tuto situaci budeme demonstrovat na příkladu $\int_M f(x, y) \, d(x, y)$, kdy integrační množinou je oblast $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge y > x\}$. Zatímco integrujeme-li s x jako s vnější proměnnou, lze integraci zapsat jediným integrálem

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx,$$

zvolíme-li za vnější proměnnou y , bude mít nutně zápis integrály dva, a sice

$$\int_M f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy.$$



Obrázek 9.33
Vyobrazení množiny M .

9.3.14 Věta – o substituci pro Riemannův integrál

Nechť $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je regulární a prosté zobrazení otevřené množiny $M \subset \mathbb{E}^r$ na množinu $Q \subset \mathbb{E}^r$. Pak pro kompaktní interval $J \subset Q$ a spojitou funkci $f(\vec{x}) : J \mapsto \mathbb{R}$ platí

$$\int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\vec{\varphi}^{-1}(J)} (f \circ \vec{\varphi})(\vec{\xi}) |\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}, \quad (9.14)$$

pokud integrál na pravé straně konverguje. Přitom

$$\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi}) = \det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)} \right) (\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- kompletní (formálně korektní) důkaz je poměrně technicky náročný
- namísto precizní formulace proto na tomto místě budeme demonstrovat jeho podstatu
- v celém důkazu je nejstěžejnějším bodem prokázání rovnosti (9.14) pro funkci $f(\vec{x}) = 1$
- pro naši demonstraci zvolme třírozměnou variantu důkazu
- chceme prokázat rovnost

$$\int_J d\vec{x} = \int_K |\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi})| \, d\vec{\xi}, \quad (9.15)$$

kde $K = \vec{\varphi}^{-1}(J)$, tj. $J = \vec{\varphi}(K)$, neboť $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ je kromě regulárnosti také prosté

- přitom $\mu(J) = \int_J d\vec{x}$ je objem intervalu J

- rovnost (9.15) dokažeme za předpokladu, že zmiňovaným zobrazením je afinní zobrazení $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) = \mathbb{A}\vec{\xi} + \vec{\alpha}$, tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{A}$ je regulární matice

- za daných předpokladů je uvedené zobrazení skutečně zobrazením regulárním a také prostým
- snadno nahlédneme, že

$$\Delta_{\vec{\varphi}} = \det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, x_3)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right) = \det(\mathbb{A}).$$

- chceme-li tedy dokázat rovnost (9.15), postačí dokázat, že

$$\mu(J) = \mu(\vec{\varphi}(K)) = |\det(\mathbb{A})| \cdot \mu(K) \quad (9.16)$$

- uvažme pro jednoduchost, že K je kvádr s hranami definovanými směrovými vektory $\vec{i} = (h_1, 0, 0)^\top$, $\vec{j} = (0, h_2, 0)^\top$ a $\vec{k} = (0, 0, h_3)^\top$, kde $h_1 h_2 h_3 \neq 0$
- označíme-li

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$$

matici sestavenou z vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$, snadno ověříme, že pro objem tělesa K platí rovnost

$$\mu(K) = h_1 h_2 h_3 = \det(\mathbb{R})$$

- je-li K kvádr, je $J = \vec{\varphi}(K)$ rovnoběžnostěn s hranami definovanými vektory $\vec{a} = \mathbb{A}\vec{i}$, $\vec{b} = \mathbb{A}\vec{j}$ a $\vec{c} = \mathbb{A}\vec{k}$
- označíme-li nyní

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

matici sestavenou z těchto vektorů, platí pro objem rovnoběžnostěnu J rovnost

$$\mu(J) = |\langle \vec{c} | \vec{a} \times \vec{b} \rangle| = |\det(\mathbb{P})|$$

- navíc však platí, že $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{R}$, a proto

$$\mu(J) = |\det(\mathbb{A}\mathbb{R})| = |\det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{R})| = |\det(\mathbb{A})| \mu(K) = \left| \det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, x_3)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right) \right| \mu(K)$$

- tím je dokázáno tvrzení (9.16)
- pokud bychom chtěli za pomoci rovnosti (9.16) dokázat obecnou rovnost (9.15), nahradili bychom zobrazení $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ lokálně vhodným lineárním zobrazením, tj. diferenciálem vektorové funkce $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ (zhruba řečeno)

9.3.15 Komentář

Věta o substituci 9.3.14 je bohužel vyslovena v poněkud omezeném znění. Srovnáme-li ji s téměř dokonalou formulací věty o substituci 5.4.8 (strana 89 v [8]) pro Lebesgueův integrál, je zřejmé, že tato je vyslovena pro "podstatně více" množin, má podstatně méně předpokladů a rovnost (9.17) platí ve smyslu hodnoty i existence, tj. integrál napravo existuje právě tehdy, když existuje integrál nalevo, a pokud tyto integrály existují, jejich hodnoty se rovnají. Problém se zobecněním věty o substituci pro Riemannův integrál spočívá v tom, že i když J je kompaktním intervalem, nemusí $\vec{\varphi}^\circ(J)$ obecně být kompaktní a dokonce ani omezenou množinou. Pro neomezené množiny ale Riemannův integrál vytvořen není. Proto budujeme ve skriptech [8] integrál jiného typu. Pro přehlednost zde ale budeme z teorie lebesgueovských integrací citovat dvě stěžejní věty, které ozřejmují vztah mezi oběma typy integrací.

9.3.16 Věta – o substituci pro Lebesgueův integrál

Nechť $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ je regulární a prosté zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbf{E}^r$ na množinu $Q \subset \mathbf{E}^r$. Pak pro libovolnou měřitelnou množinu $A \subset Q$ a libovolnou měřitelnou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ platí rovnost

$$\int_A f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{\varphi}^{-1}(A)} (f \circ \vec{\varphi})(\vec{\xi}) |\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi})| d\vec{\xi}, \quad (9.17)$$

kde

$$\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi}) = \det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)} \right) (\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- viz věta 5.4.8 na straně 89 ve skriptech [8]

9.3.17 Věta – o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu

Nechť $J = \times_{\ell=1}^r \langle \alpha_\ell, \beta_\ell \rangle$ je kompaktní interval v $\mathbf{E}^r$ a nechť existuje $(\mathcal{R}) \int_J f(\vec{x}) d\vec{x}$. Pak existuje také $(\mathcal{L}) \int_J f(\vec{x}) d\vec{x}$ a oba integrály mají tutéž hodnotu.

Důkaz:

- viz věta 5.4.2 ve skriptech [8]

9.3.18 Komentář

Odtud je ihned zřejmé, že platnost věty 9.3.14 o substituci může být po propojení s teorií Lebesgueova integrálu podstatně rozšířena.

9.3.19 Příklad

Geometrický smysl věty o substituci budeme demonstrovat na výpočtu určitého integrálu

$$\iint_M (1 + e^{-x^2-4y^2}) d(x, y), \quad (9.18)$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. Číselně se hodnota integrálu (9.18) rovná objemu tělesa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 1 + e^{-x^2-4y^2}\}.$$

Při výpočtu integrálu uijeme s výhodou zobecněných polárních souřadnic $x = 2\rho \cos(\varphi)$ a $y = \rho \sin(\varphi)$, pro jejichž jacobíán platí

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} 2 \cos(\varphi) & 2\rho \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = 2\rho.$$

Proto podle věty 9.3.14 symbolicky nahrazujeme diferenciál $d(x, y)$ vztahem $d(x, y) = 2\rho d(\rho, \varphi)$. Elipsa M se po převedení $x^2 + 4y^2 = 4\rho^2 \cos^2(\varphi) + 4\rho^2 \sin^2(\varphi) = 4\rho^2 \leq 4$ do nových souřadnic mění na obdélník

$$O = \{(\rho, \varphi) \in \mathbf{E}^2 : 0 < \rho \leq 1 \wedge 0 < \varphi \leq 2\pi\}.$$

A tedy

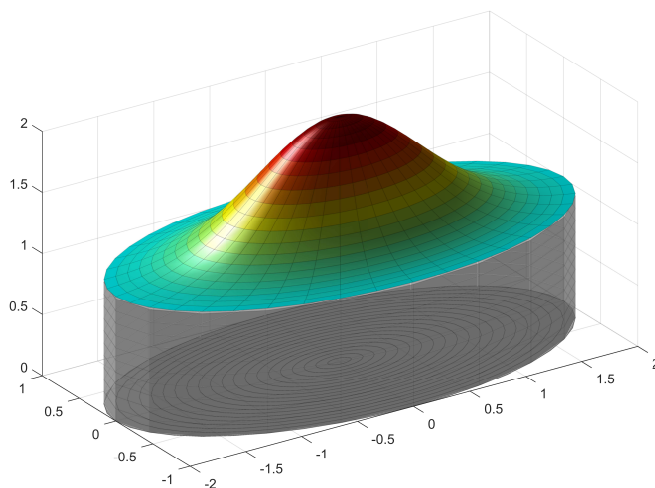
$$\iint_M (1 + e^{-x^2-4y^2}) d(x, y) = \iint_O (1 + e^{-4\rho^2}) 2\rho d(\rho, \varphi).$$

Proto je objem tělesa T roven objemu tělesa

$$S = \{(\rho, \varphi, h) \in \mathbf{E}^3 : 0 < \rho \leq 1 \wedge 0 < \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq h \leq 2\rho(1 + e^{-4\rho^2})\}.$$

Dále proto

$$\begin{aligned} \iint_M (1 + e^{-x^2-4y^2}) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + e^{-4\rho^2}) 2\rho d\varphi d\rho = 4\pi \int_0^1 \rho(1 + e^{-4\rho^2}) d\rho = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = 4\rho^2 \\ dt = 8\rho d\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} \int_0^4 (1 + e^{-t}) dt = \frac{\pi}{2} [t - e^{-t}]_0^4 = \frac{\pi}{2} (5 - e^{-4}). \end{aligned}$$



Obrázek 9.34

Těleso $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 1 + e^{-x^2-4y^2}\}$.

9.3.20 Příklad

Vypočtěme obsah kruhu $K = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ o poloměru $r > 0$. Zcela jednoduše

$$\mu(K) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = r \sin(t) \\ dx = r \cos(t) dt \end{array} \right| = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \pi r^2.$$

9.3.21 Příklad

Pokusme se znovu vypočítat obsah kruhu $K = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ o poloměru $r > 0$, tentokrátě však s pomocí věty o substituci. Podle ní pak

$$\mu(K) = \int_K 1 d(x, y) = \left| \begin{array}{ll} x = \rho \cos(\varphi) & \det\left(\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\rho,\varphi)}\right) = \rho \\ y = \rho \sin(\varphi) & dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\varphi = \pi r^2,$$

což potvrzuje jednak obecně známý vzorec a jednak také výsledek předešlého příkladu.

9.3.22 Příklad

Pomocí pseudopolárních souřadnic určíme obsah plochy, ohraničené křivkou

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = cxy \quad (9.19)$$

pro $a, b, c \in \mathbf{R}^+$. Zvolme s výhodou pseudopolární souřadnice

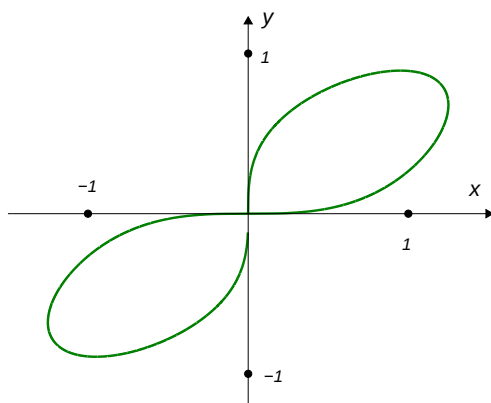
$$x = a\rho \sqrt{\cos(\varphi)}, \quad y = b\rho \sqrt{\sin(\varphi)}$$

mající jacobíán

$$\Delta_J = \frac{1}{2} \frac{ab\rho}{\sqrt{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}}.$$

Rovnice (9.19) má po transformaci do nových souřadnic tvar $\rho^2 = abc \sqrt{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}$, a proto $\sin(2\varphi)$ musí být nezáporný. Tedy $\varphi \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$. Zadaná křivka se tedy nalézá pouze v prvním a třetím kvadrantu (viz obrázek). Výpočet plochy ohraničené vyznačenou křivkou se redukuje na integrál

$$\mu(M) = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{abc}(\sin(\varphi)\cos(\varphi))^{1/4}} \frac{1}{2} \frac{ab\rho}{\sqrt{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}} d\rho d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} abc d\varphi = \frac{1}{4} \pi a^2 b^2 c.$$



Obrázek 9.35

Plocha ohraničená křivkou $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = cxy$.

9.3.23 Komentář

Všechny definice a tvrzení z této kapitoly o Riemannově integrálu lze analogicky rozšířit i na funkce více proměnných než dvou. Ovšem problémem Riemannova integrálu stále zůstává fakt, že předně neumí počítat integrály přes neomezené množiny nebo pro neomezené funkce a rovněž neumí vyčíslit objemy i tak triviálních množin, jakou je např. množina Q z poznámky 9.2.3. Všechny tyto problémy odstraní modernější přístup prezentovaný v rámci teorie Lebesgueova integrálu.

9.3.24 Příklad

Vypočtěme objem tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{3/2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad (9.20)$$

kde a, b, c jsou pozitivní parametry. Užijeme zobecněné sférické souřadnice

$$x = a\rho \cos(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = b\rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = c\rho \sin(\vartheta),$$

s jacobíánem

$$\Delta_J = \det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\varrho, \vartheta, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} a \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -a\varrho \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -a\varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ b \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -b\varrho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & b\varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ c \sin(\vartheta) & c\varrho \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = -abc\varrho^2 \cos(\vartheta).$$

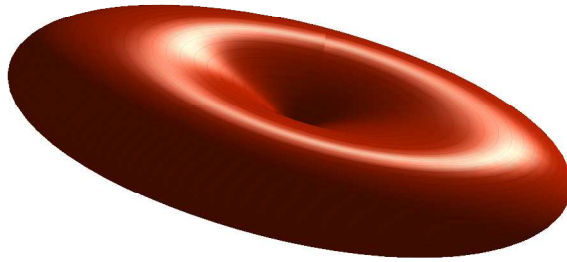
Rovnice zadané plochy se po aplikaci zobecněných sférických souřadnic transformuje na tvar $\varrho = \cos(2\vartheta)$. Jelikož sférická souřadnice ϱ musí být nezáporná, nelze připustit, aby souřadnice ϑ probíhala celý interval $(-\pi/2, \pi/2)$, ale pouze jeho část $(-\pi/4, \pi/4)$. Integrační množinou je tedy množina

$$M = \left\{ (\varrho, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{E}^3 : 0 < \varrho < \cos(2\vartheta) \wedge -\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{4} \wedge 0 < \varphi < 2\pi \right\}.$$

Odsud snadno

$$\mu(M) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos(2\vartheta)} abc\varrho^2 \cos(\vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \frac{2\pi abc}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3(2\vartheta) \cos(\vartheta) d\vartheta = \frac{32}{105} \sqrt{2} \pi abc.$$

Pro ilustraci zde vykreslujeme podobu zkoumaného tělesa.



Obrázek 9.36
Vyobrazení tělesa (9.20).

9.3.25 Příklad

Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} \leq \sqrt{a} \right\},$$

kde a je pozitivní parametr. Díky symetrii úlohy se lze snadno omezit pouze na kladná x, y, z , a tudíž lze použít pseudosférické souřadnice

$$x = \varrho \cos^4(\vartheta) \cos^4(\varphi), \quad y = \varrho \cos^4(\vartheta) \sin^4(\varphi), \quad z = \varrho \sin^4(\vartheta),$$

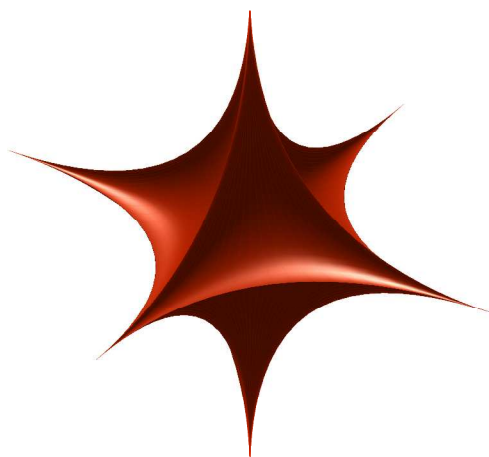
jež mají jacobíán

$$\begin{aligned} \Delta_J &= \begin{vmatrix} \cos^4(\vartheta) \cos^4(\varphi) & -4\varrho \cos^3(\vartheta) \sin(\vartheta) \cos^4(\varphi) & -4\varrho \cos^4(\vartheta) \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos^4(\vartheta) \sin^4(\varphi) & -4\varrho \cos^3(\vartheta) \sin(\vartheta) \sin^4(\varphi) & 4\varrho \cos^4(\vartheta) \sin^3(\varphi) \cos(\varphi) \\ \sin^4(\vartheta) & 4\varrho \sin^3(\vartheta) \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -16\varrho^2 \cos^7(\vartheta) \sin^3(\vartheta) \cos^3(\varphi) \sin^3(\varphi). \end{aligned}$$

Pak tedy

$$\mu(T) = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a 16\varrho^2 \cos^7(\vartheta) \sin^3(\vartheta) \cos^3(\varphi) \sin^3(\varphi) d\varrho d\vartheta d\varphi = \frac{4}{45} a^3.$$

Pro zajímavost a ilustraci také zde uvádíme grafickou podobu tělesa T .



Obrázek 9.37
Vyobrazení tělesa T .

9.3.26 Definice

Nechť je v prostoru $\mathbf{E}^r$ dána množina M . Pak r –rozměrným *objemem množiny* M budeme rozumět hodnotu

$$\mu(M) := \int_M 1 \, d\vec{x},$$

je-li integrál na pravé straně konvergentní. *Těžištěm množiny* M rozumíme bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$, jehož souřadnice jsou vypočteny pomocí rovnosti

$$a_i := \frac{1}{\mu(M)} \int_M x_i \, d\vec{x} = \frac{\int_M x_i \, d\vec{x}}{\int_M 1 \, d\vec{x}},$$

pokud oba integrály konvergují a navíc $\mu(M) \neq 0$.

9.3.27 Věta – o separabilitě vícerozměrného integrálu

Nechť $J = \times_{k=1}^r \langle a_k, b_k \rangle$ je r –rozměrný kompaktní interval. Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a nechť dále existují funkce $\ell_k(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, ($k \in \hat{r}$), jež jsou spojitě na $\langle a_k, b_k \rangle$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in J$ platí

$$f(\vec{x}) = \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r).$$

Pak platí rovnost

$$\int_J f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \ell_1(x_1) \, dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \ell_2(x_2) \, dx_2 \dots \int_{a_r}^{b_r} \ell_r(x_r) \, dx_r = \prod_{i=1}^r \int_{a_i}^{b_i} \ell_i(x_i) \, dx_i.$$

Důkaz:

- existence všech dotčených integrálů plyne ze základní věty Riemannova integrálu 9.1.16
- důkaz budeme demonstrovat na příkladě dvojrozměrného integrálu přes interval $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$
- podle předpokladu věty má být funkce $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$ tzv. *separabilní*, tj. platí pro ni $f(x_1, x_2) = \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2)$

- podle tvrzení Fubiniovy věty specifikované v poznámce 9.3.7 tedy platí

$$\begin{aligned}\iint_J f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2) \, dx_2 \right) dx_1 = \int_a^b \ell_1(x_1) \left(\int_c^d \ell_2(x_2) \, dx_2 \right) dx_1\end{aligned}$$

- jelikož integrál $\int_c^d \ell_2(x_2) \, dx_2$ je pouhým číslem (nezávisí tedy na x_1), může být vytknut před integrál podle proměnné x_1
- tím dostáváme

$$\iint_J f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) = \int_a^b \ell_1(x_1) \, dx_1 \cdot \int_c^d \ell_2(x_2) \, dx_2$$

9.3.28 Příklad

Zajímavým příkladem je výpočet objemu čtyřrozměrné koule (lépe eliptického eliptikonu podle tabulky čtyřrozměrných kvadrik – viz strana 164 ve skriptech [7])

$$K = \{(x, y, z, u) \in \mathbf{E}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq r^2\}$$

o poloměru $r > 0$. Zavedme souřadnice (čtyřrozměrné sférické)

$$x = \varrho \cos(\omega) \cos(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = \varrho \cos(\omega) \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = \varrho \cos(\omega) \sin(\vartheta), \quad t = \varrho \sin(\omega),$$

jejichž jacobíán má hodnotu $\Delta_J = \varrho^3 \cos^2(\omega) \cos(\vartheta)$. Výpočet této hodnoty je náplní cvičení 208. Jelikož čtyřrozměrný prostor je rozdělen na 16 symetrických částí (*hexadekantů*) (v třírozměrném prostoru je jich osm a nazývají se *oktanty*), postačí omezit výpočet na jeden z nich, tedy

$$\mu(K) = 16 \int_0^r \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \varrho^3 \cos^2(\omega) \cos(\vartheta) \, d\omega \, d\vartheta \, d\varphi \, d\varrho.$$

Užijeme-li nyní tvrzení 9.3.27 o separabilitě, dostáváme

$$\begin{aligned}\mu(K) &= 16 \int_0^r \varrho^3 \, d\varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(\omega) \, d\omega \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta) \, d\vartheta \cdot \int_0^{\pi/2} 1 \, d\varphi = \\ &= 16 \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^r \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin(2\omega)}{4} \right]_0^{\pi/2} [\sin(\vartheta)]_0^{\pi/2} [\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi^2 r^4.\end{aligned}$$

9.3.29 Věta – Riemannovo-Lebesgueovo lemma

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ je absolutně riemannovsky integrovatelná na konečném nebo nekonečném intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Pak

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) e^{i\lambda x} \, dx = 0.$$

Důkaz:

- bez újmy na obecnosti můžeme dokázat pouze první z uvedených tvrzení
- důkaz je rozdělen do čtyř etap
- v první z nich prokážeme platnost dokazovaného vztahu pro funkci $f(x) = 1$ na I , kde $I = \langle a, b \rangle$ je kompaktní interval

- tehdy platí

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \int_a^b \sin(\lambda x) dx = \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} \right]_a^b = \frac{\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b)}{\lambda},$$

což vede k tvrzení

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} \rightarrow 0$$

- ve druhé etapě předpokládejme, že $f(x)$ je po částech konstantní, což značí, že lze interval I rozdělit na konečně mnoho disjunktních podintervalů $I_k = (a_{k-1}, a_k)$, kde $k \in \hat{n}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, tak, že má $f(x)$ na I_k konstantní hodnotu rovnou číslu c_k

- to značí, že lze psát $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k g_k(x)$, kde $g_k(x) = \chi_{I_k}(x)$

- $\chi_E(x)$ označuje charakteristickou funkci množiny E

- odtud

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b c_k g_k(x) \sin(\lambda x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sin(\lambda x) dx$$

- tato suma má pouze konečný počet sčítanců, a protože každý z nich míří pro $\lambda \rightarrow \infty$ podle první části důkazu k nule, musí totéž činit i celý integrál

- nechť je nyní (ve třetí etapě důkazu) funkce $f(x)$ libovolnou funkcí definovanou na kompaktním intervalu $I = \langle a, b \rangle$

- zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně

- z definice Riemannova integrálu ale vyplývá, že existuje po částech konstantní funkce $g(x)$ taková, že

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pak ale

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin(\lambda x) dx + \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \cdot |\sin(\lambda x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| \end{aligned}$$

- poslední integrál konverguje pro $\lambda \rightarrow \infty$ k nule, tedy existuje λ_0 , že tento integrál je pro $\lambda > \lambda_0$ menší než $\varepsilon/2$

- pro tato λ je pak celý omezený výraz menší než ε , což dokazuje tvrzení

- nakonec uvažujme variantu, kdy I kompaktní není

- opět zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně

- protože $f(x)$ je absolutně riemannovsky integrabilní, existuje jistě kompaktní interval $J \subset I$ tak, že $\int_{J^c} |f(x)| dx < \varepsilon$

- pak lze psát

$$\left| \int_I f(x) \sin(\lambda x) \, dx \right| \leq \left| \int_J f(x) \sin(\lambda x) \, dx \right| + \int_{I \setminus J} |f(x)| \, dx,$$

kde první člen míří k nule na základě výsledku třetí etapy a druhý člen je také menší než ε

- to finalizuje celou proceduru důkazu

Kapitola 10

Integrál po křivce

Následující dvě kapitoly těchto skript představí obecnější způsoby integrací. Až do této chvíle jsme se zabývali integrací funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, kdy integrační množinou byla množina mající nenulový r -rozměrný objem. Integrovali jsme tak například funkci $f(x, y, z) = xy + e^z$ přes množinu

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}.$$

Nyní se začneme zabývat otázkou, jak integrovat přes množiny, jejichž r -rozměrný objem je nulový. Bude se tedy jednat například o integraci přes křivky ve 3D-prostoru, křivky v rovině, plochy ve 3D-prostoru a podobně. Tato teorie má významné uplatnění například v teorii funkcí komplexní proměnné nebo ve fyzice (v teorii gravitačních či elektromagnetických polí).

Hezkým příkladem aplikace teorie křivek je zpracování biomedicínských signálů (EKG, EEG apod.), kdy je na m senzorech zaznamenáván časový průběh vybrané fyzikální veličiny (např. napětí způsobené šířením potenciálu myokardem). Výsledkem je pak sada $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ funkcí, jejichž průběh byl měřen v časovém intervalu $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle$. Tím obdržíme (matematicky vzato) křivkovou parametrizaci $\vec{y}(t) : \langle t_\alpha, t_\beta \rangle \mapsto \mathbf{E}^m$. Z vlastností jejího geometrického obrazu v $\mathbf{E}^m$ lze pak vyčíst anomálie od normálního průběhu signálu, tj. detekovat např. lokalizaci nebo stádium infarktu myokardu.

10.1 Křivky

Pojem křivky bude nejprve nutné korektně definovat a specifikovat také některé příjemné vlastnosti obecných křivek.

10.1.1 Definice

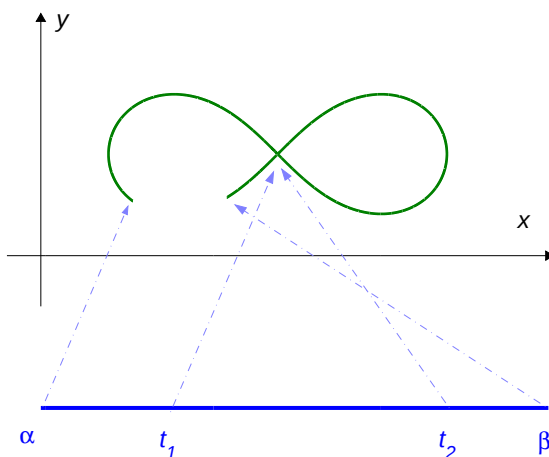
Křivkovou parametrizací v $\mathbf{E}^r$ nazveme každé spojitě zobrazení $\vec{\varphi}(t)$ intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbf{R}$ do množiny $\mathbf{E}^r$. Množinu

$$\langle \vec{\varphi} \rangle := \{ \vec{y} \in \mathbf{E}^r : \vec{y} = \vec{\varphi}(t), \text{ kde } t \in \langle a, b \rangle \}$$

nazveme *geometrickým obrazem zobrazení* $\vec{\varphi}(t)$. Množinu $C \subset \mathbf{E}^r$ nazveme *křivkou* v $\mathbf{E}^r$, existuje-li křivková parametrizace $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$ taková, že $\langle \vec{\varphi} \rangle = C$. Bod $\vec{\varphi}(a) \in \mathbf{E}^r$, resp. $\vec{\varphi}(b) \in \mathbf{E}^r$ nazveme *počátečním*, resp. *koncovým bodem křivky* $\langle \vec{\varphi} \rangle$. Dále řekneme, že *křivka* $\langle \vec{\varphi} \rangle$ je *jednoduchá*, je-li zobrazení $\vec{\varphi}(t)$ prosté na otevřeném intervalu (a, b) . *Křivku* $\langle \vec{\varphi} \rangle$ nazveme *uzavřenou*, pokud platí $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$.

10.1.2 Příklad

Názornou představu o konstrukci a vlastnostech křivky lze získat z následujícího obrázku. Spodní úsečka představuje uzavřený interval, jímž probíhá parametr. Čárkované šipky znázorňují způsob zobrazení parametru do bodu prostoru $\mathbf{E}^2$.



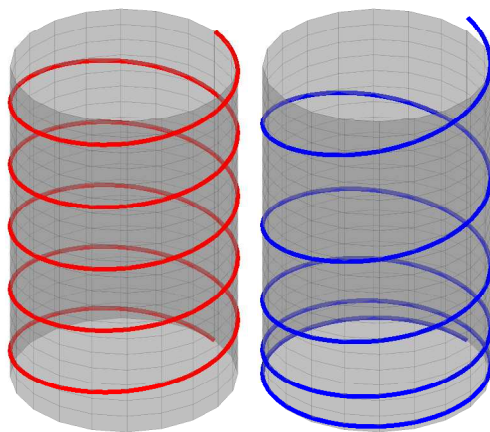
Obrázek 10.38

Ilustrace parametrizace křivky ve dvojrozměrném prostoru.

Povšimněte si, že křivka není jednoduchá, neboť existují dva různé parametry $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ takové, že se prostřednictvím zobrazení $\vec{\varphi}(t)$ zobrazují do téhož bodu v $\mathbb{E}^2$. Křivka tedy protíná sebe samu.

10.1.3 Příklad

Křivkou v $\mathbb{E}^3$ může být např. šroubovice s lineárním stoupáním zadaná na intervalu $\langle 0, 10\pi \rangle$ parametrizací $\vec{\varphi}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ nebo šroubovice s nelineárním stoupáním zadaná na tomtéž intervalu parametrizací $\vec{\psi}(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2/30)$.



Obrázek 10.39

Šroubovice s lineárním (vlevo) a nelineárním (vpravo) stoupáním.

10.1.4 Definice

Nechť je dána množina $C \subset \mathbb{E}^r$. Řekneme, že C je *hladkou regulární křivkou* v $\mathbb{E}^r$, pokud existuje její parametrizace $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{E}^r$ taková, že $\vec{\varphi}(t)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = \frac{\mathcal{D}\vec{\varphi}}{\mathcal{D}t} = (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), \dots, \dot{\varphi}_r(t))$$

a na krajích intervalu má derivace jednostranné a pro všechna $t \in (a, b)$ platí nerovnost $\dot{\vec{\varphi}}(t) \neq \vec{0}$.

10.1.5 Komentář

Pokusme se nyní stanovit obecný předpis pro tečný vektor k hladké regulární křivce. Odvození budeme demonstrovat na dvojrozměrném případě, kdy je křivka zadána na $\langle a, b \rangle$ parametrizací $(x(t), y(t))$. Tato parametrizace zadává (po eliminaci parametru t) funkci $y = y(x)$ (nebo $x = x(y)$), neboť v každém bodě τ intervalu $\langle a, b \rangle$ je buď

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(\tau) \neq 0 \quad (10.1)$$

nebo

$$\frac{d\varphi_2}{dt}(\tau) \neq 0. \quad (10.2)$$

To plyne z hladké regularity zkoumané křivky. Uvažujme dále variantu (10.1), kdy je na proměnnou y nahlíženo jako na závisle proměnnou (funkci), kdežto na proměnnou x je nahlíženo jako na nezávisle proměnnou, tedy $y = y(x)$. Cílem je tedy hledat tečnu ke grafu funkce $y(x)$ v jejím bodě (x_0, y_0) , kde $x_0 = x(\tau_0)$, resp. $y_0 = y(\tau_0)$, kde $\tau \in (a, b)$. Matematicky lze uvedený problém reformulovat takto. Dvě složky parametrizace budeme chápat jako dvě funkce

$$F(x, t, y) = \varphi_1(t) - x = 0, \quad G(x, t, y) = \varphi_2(t) - y = 0, \quad (10.3)$$

které na okolí generujícího bodu (x_0, t_0, y_0) generují dvě implicitní funkce $y = y(x)$ a $t = t(x)$. To, že uvedený generující bod není bodem kritickým, kontrolujeme snadným výpočtem:

$$\det \left(\frac{\mathcal{D}(F, G)}{\mathcal{D}(t, y)} \right) (x_0, t_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1(t_0) & 0 \\ \dot{\varphi}_2(t_0) & -1 \end{vmatrix} = -\dot{\varphi}_1(t_0) \neq 0,$$

jak ihned plyne z (10.1). Soustava (10.3) proto zadává na okolí bodu (x_0, t_0, y_0) právě jednu dvojici implicitních funkcí $y = y(x)$ a $t = t(x)$, z nichž nás zajímá jen funkce $y = y(x)$. Hledejme tedy její tečnu v bodě (x_0, y_0) jejího grafu. Derivací generující soustavy podle x a dosazením generujícího bodu dostáváme

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(t_0) & 0 \\ \dot{\varphi}_2(t_0) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odkud z Cramerova pravidla máme

$$y'(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1(t_0) & 1 \\ \dot{\varphi}_2(t_0) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1(t_0) & 0 \\ \dot{\varphi}_2(t_0) & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\varphi}_2(t_0)}{\dot{\varphi}_1(t_0)}.$$

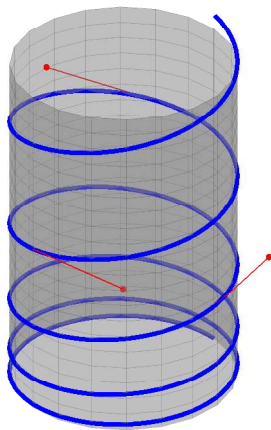
Proto je hledanou tečnou přímkou přímka

$$y - y_0 = \frac{\dot{\varphi}_2(t_0)}{\dot{\varphi}_1(t_0)}(x - x_0),$$

resp.

$$\varphi_1(t_0)y - \varphi_2(t_0)x = y_0\varphi_1(t_0) - x_0\varphi_2(t_0),$$

jejímž normálovým vektorem je vektor $(-\dot{\varphi}_2(t_0), \dot{\varphi}_1(t_0))$. Tečným vektorem je tedy vektor $(\dot{\varphi}_1(t_0), \dot{\varphi}_2(t_0)) = \dot{\vec{\varphi}}(t_0)$. Zcela analogicky představuje vektor $\dot{\vec{\varphi}}(t)$ tečný vektor ke křivce $C = \langle \vec{\varphi} \rangle$ v jejím bodě $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t))$.



Obrázek 10.40

Těčné vektory ve vybraných bodech šroubovice s nelineárním stoupáním.

10.1.6 Definice

Nechť jsou dány křivky $C, D \subset \mathbb{E}^r$ a jejich parametrizace $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{E}^r$, resp. $\vec{\psi}(t) : \langle c, d \rangle \mapsto \mathbb{E}^r$ splňující podmínku $\vec{\varphi}(b) = \vec{\psi}(c)$. (Direktním) součtem křivek C a D nazýváme křivku $C \oplus D$ definovanou na intervalu $\langle a, b + d - c \rangle$ parametrizací

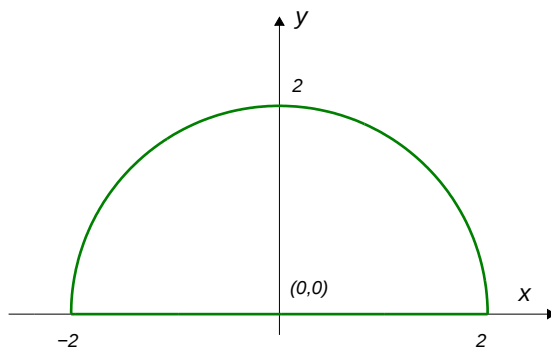
$$(\vec{\varphi} \oplus \vec{\psi})(t) := \begin{cases} \vec{\varphi}(t); & t \in \langle a, b \rangle; \\ \vec{\psi}(t - b + c); & t \in (b, b + d - c). \end{cases}$$

10.1.7 Příklad

Nechť jsou dány dvě křivkové parametrizace $\vec{\varphi}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a $\vec{\psi}(t) = (t, 0)$ pro $t \in \langle -2, 2 \rangle$. Součtem příslušných křivek pak rozumíme křivku zadanou na intervalu $\langle 0, \pi + 4 \rangle$ parametrizací $\vec{\omega}(t) := (\vec{\varphi} \oplus \vec{\psi})(t)$:

$$\vec{\omega}(t) := \begin{cases} (2 \cos(t), 2 \sin(t)); & t \in \langle 0, \pi \rangle; \\ (t - \pi - 2, 0); & t \in (\pi, \pi + 4). \end{cases} \quad (10.4)$$

Křivka je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 10.41

Křivka $\langle \vec{\omega} \rangle$ zadaná parametrizací (10.4).

10.1.8 Definice

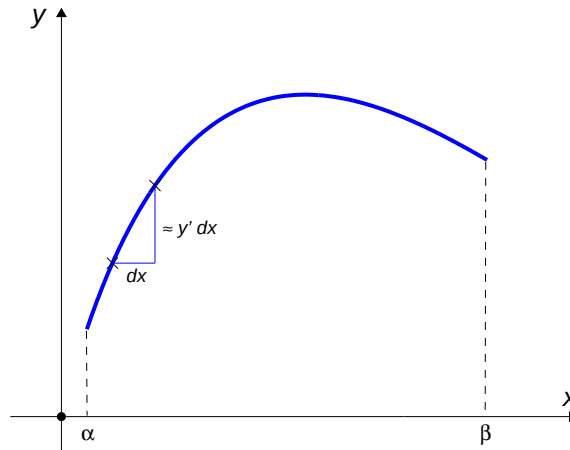
Nechť je dána křivka $C \subset \mathbb{E}^r$. Řekneme, že křivka C je *po částech hladkou regulární křivkou*, jestliže existuje její parametrizace $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{E}^r$ a parametrizace jednoduchých hladkých regulárních křivek $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \dots, \vec{\varphi}_k(t)$ tak, že $\vec{\varphi}(t) = (\vec{\varphi}_1 \oplus \vec{\varphi}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\varphi}_k)(t)$.

10.2 Křivkový integrál

Nyní se budeme zabývat integrací funkcí a vektorů funkcí více proměnných přes integrační množinu, kterou bude představovat jistá křivka v prostoru $\mathbb{E}^r$.

10.2.1 Komentář

Ukážeme nyní, jak získat názornou představu při určování délky zadané křivky. Konstrukci příslušného vzorce budeme opět demonstrovat na dvojrozměrné křivce zadané parametrizací $(x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Označme $\alpha = x(a)$ a $\beta = x(b)$. Zkoumaná křivka budiž pro jednoduchost grafem funkce $y = y(x)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.



Obrázek 10.42
K výpočtu délky křivky.

Elementární úsek délky křivky (viz obrázek) lze přibližně nahradit elementem o délce přepony $\sqrt{(dx)^2 + (y'dx)^2}$ trojúhelníku z obrázku. Proto je délka křivky odhadnuta integrálem

$$\ell \doteq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (y'dx)^2} \doteq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Vzhledem k faktu, že $x = \varphi_1(t)$ a $y = \varphi_2(t)$, plyne odsud

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1}.$$

Z věty o substituci pro jednorozměrný integrál pak vyplývá, že dx musí být ve výše uvedeném integrále formálně nahrazeno výrazem $\dot{\varphi}_1 dt$. Proto

$$\ell = \int_{\varphi_1^{-1}(\alpha)}^{\varphi_1^{-1}(\beta)} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1}\right)^2} \dot{\varphi}_1 dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_2)^2} dt = \int_a^b \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt.$$

10.2.2 Úmluva

V celé kapitole budeme předpokládat, že je-li pro křivku C požadována jistá vlastnost, pak příslušná křivková parametrizace tuto vlastnost garantuje. Tedy řekneme-li například, že křivka $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ je hladká a $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$ je její parametrizace, pak budeme předpokládat, že $\vec{\varphi}(t)$ je právě ono prosté zobrazení na otevřeném intervalu (a, b) . Pro křivku K by bylo totiž jistě možné nalézt parametrizaci, která prostým zobrazením není.

10.2.3 Definice

Nechť $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$ je parametrizace jednoduché a hladké regulární křivky C a necht' $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je funkce definovaná alespoň na množině $\langle \vec{\varphi} \rangle$. Pak definujeme *křivkový integrál prvního druhu z funkce $f(\vec{x})$ podél křivky $\langle \vec{\varphi} \rangle$* předpisem

$$\int_C f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) := \int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje. Je-li C jednoduchá a po částech hladká regulární křivka, pro niž existují parametrizace jednoduchých a hladkých regulárních křivek $\vec{\varphi}_i(t)$ v $\mathbf{E}^r$ tak, že $\vec{\psi}(t) = (\vec{\varphi}_1 \oplus \vec{\varphi}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\varphi}_k)(t)$ a $\langle \vec{\varphi}(t) \rangle = C$, pak definujeme *křivkový integrál prvního druhu z funkce $f(\vec{x})$ podél křivky C* předpisem

$$\int_C f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) := \sum_{i=1}^k \int_{\langle \vec{\varphi}_i \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}),$$

má-li pravá strana smysl. Číslo $\ell := \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} d\mu_c(\vec{x})$ nazýváme *délkou křivky $\langle \vec{\varphi} \rangle$* .

10.2.4 Komentář

Demonstrujme nyní geometrický význam křivkového integrálu $\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x})$. Necht' je pro náš účel funkce $f(\vec{x})$ nezáporná na množině $C = \{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in \text{Dom}(\vec{\varphi})\}$. Označme nyní $S = \{(\vec{x}, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in C \wedge 0 < y < f(\vec{x})\}$. Pak platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = \mu_2(S),$$

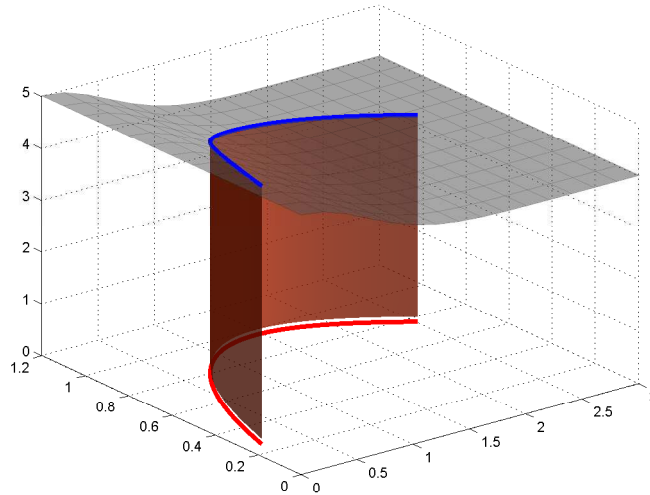
kde symbol $\mu_2(S)$ reprezentuje obsah dvojrozměrné množiny S ležící v $(r+1)$ -dimenzionálním prostoru. Lépe bude vše pochopitelné na následujícím příkladě. Uvažme dvojrozměrnou křivku C (na obrázku červeně) a funkci $f(x, y)$, jejíž graf $\Gamma(f)$ je na obrázku vyobrazen šedou plochou ležící ve třídímenzionálním prostoru $\mathbf{E}^3$. V této ploše $\Gamma(f)$ leží kolmý průmět křivky C do plochy $\Gamma(f)$ (na obrázku modře). Potom výše diskutovanou množinou S je plocha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (x, y) \in C \wedge 0 < z < f(x, y)\},$$

jež je kolmá k množině $\mathbf{E}^2$, v níž leží křivka C . Obsah této plochy $\mu_2(S)$ je pak podle předešlého roven právě integrálu $\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(x, y) d\mu_c(x, y)$. Odtud je také pochopitelná rovnost

$$\ell = \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} 1 d\mu_c(x, y),$$

kterou lze interpretovat tak, že obsah plochy $\mu_2(S)$ pod jednotkovou funkcí se (až na jednotku rozměru) rovná délce křivky C .



Obrázek 10.43

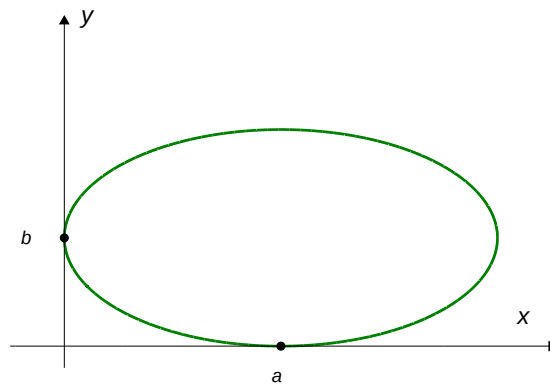
K demonstraci křivkového integrálu prvního druhu.

10.2.5 Příklad

Vypočtěme křivkový integrál

$$\int_E |(x-a)(y-b)| d\mu_c(x, y),$$

kde E je elipsa $b^2(x-a)^2 + a^2(y-b)^2 = a^2b^2$. Volme $a, b > 0$. Zvolíme parametrizaci $\vec{\varphi}(t) = (a+a \cos(t), b+b \sin(t))$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vzešlou ze zobecněných polárních souřadnic.



Obrázek 10.44

Elipsa $b^2(x-a)^2 + a^2(y-b)^2 = a^2b^2$.

Jelikož $\dot{\vec{\varphi}}(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$, je normou

$$\|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$$

a zadaný integrál má tvar

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} ab |\sin(t) \cos(t)| \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt &= 2ab \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2(t)} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos^2(t) \\ du = -2 \cos(t) \sin(t) dt \end{array} \right| = 2ab \int_0^1 \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)u} du = \frac{4}{3} ab \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

10.2.6 Věta – existence křivkového integrálu prvního druhu

Nechť $\vec{\varphi}(t)$ je parametrizace jednoduché a hladké regulární křivky C v $\mathbf{E}^r$ a $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá funkce. Pak křivkový integrál

$$\int_C f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x})$$

existuje a je konečný.

Důkaz:

- uvedený křivkový integrál je definován pomocí jednorozměrného Riemannova (popř. Newtonova) integrálu
- toto tvrzení tudíž přímo vyplývá z faktu, že integrand v definičním integrálu

$$\int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt \quad (10.5)$$

je spojitou funkcí, neboť $f(\vec{x})$ je spojitá a vnitřní funkce $\vec{\varphi}(t)$ také (viz definici křivky)

- navíc i norma $\|\dot{\vec{\varphi}}(t)\|$ je spojitá podle definice 10.1.4
- tudíž i součin funkcí $f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\|$ je spojitou funkcí
- protože se v integrálu (10.5) integruje spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je podle teorie Riemannova integrálu integrál (10.5) konvergentní

10.2.7 Věta – o nezávislosti křivkového integrálu prvního druhu na parametrizaci

Nechť $\vec{\varphi}(t), \vec{\psi}(t)$ jsou parametrizace jednoduchých a hladkých regulárních křivek, pro něž $\langle \vec{\varphi} \rangle = \langle \vec{\psi} \rangle$. Pak pro každou spojitou funkci $f(\vec{x})$ definovanou na množině $\langle \vec{\varphi} \rangle$, platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = \int_{\langle \vec{\psi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}).$$

Důkaz:

- integrand je spojitou funkcí, tedy integrál existuje (viz věta 10.2.6)
- obě zobrazení $\vec{\varphi}(t), \vec{\psi}(t)$ jsou podle předpokladů prostá (jedná se o jednoduché křivky)
- nechť např. $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$ a $\vec{\psi}(s) : \langle c, d \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$
- aplikujme na rovnost $\vec{\psi}(\langle c, d \rangle) = \vec{\varphi}(\langle a, b \rangle) = \langle \vec{\varphi} \rangle$ inverzní zobrazení $\vec{\varphi}^\ominus(t)$ k zobrazení $\vec{\varphi}(t)$
- zmíněné inverzní zobrazení existuje díky prostotě zobrazení $\vec{\varphi}(t)$
- pak tedy

$$(\vec{\varphi}^\ominus \circ \vec{\psi})(\langle c, d \rangle) = \langle a, b \rangle$$

- označme $v(t) := (\vec{\varphi}^\ominus \circ \vec{\psi})(t)$ zobrazení, jež číslu $t \in \langle c, d \rangle$ přiřazuje číslo $s = v(t) \in \langle a, b \rangle$
- pak platí $\vec{\psi}(t) = (\vec{\varphi} \circ v)(t)$ a podle věty o derivaci složeného zobrazení také $\dot{\vec{\psi}} = \dot{\vec{\varphi}} \cdot \dot{v}$
- dále také $\|\dot{\vec{\psi}}\| = \|\dot{\vec{\varphi}}\| \cdot \|\dot{v}\| = \|\dot{\vec{\varphi}}\| \cdot |\dot{v}|$, neboť $v(t)$ je funkce jedné proměnné, a tudíž norma derivace splývá s absolutní hodnotou derivace

- vyčíslíme nyní křivkový integrál (za použití substituce $s = v(t)$)

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\vec{\psi}(t)) \|\dot{\vec{\psi}}(t)\| dt &= \int_c^d f((\vec{\varphi} \circ v)(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(v(t))\| \cdot |\dot{v}(t)| dt = \left| \begin{array}{l} s = v(t) \\ ds = \dot{v}(t) dt \end{array} \right| = \\ &= \int_a^b f(\vec{\varphi}(s)) \|\dot{\vec{\varphi}}(s)\| |\dot{v}(t)| \frac{ds}{|\dot{v}(t)|} = \int_a^b f(\vec{\varphi}(s)) \|\dot{\vec{\varphi}}(s)\| ds \end{aligned}$$

- zde nabádáme čtenáře, aby důkladně zvážil, proč se v posledně uvedeném zápise objevuje absolutní hodnota $|\dot{v}(t)|$ také v podílu $\frac{ds}{|\dot{v}(t)|}$

10.2.8 Definice

Nechť $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{E}^r$ je parametrizace jednoduché a hladké regulární křivky a necht' $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{E}^r$ je funkční vektor definovaný alespoň na množině $\langle \vec{\varphi} \rangle$. Pak definujeme *křivkový integrál druhého druhu* z vektoru funkcí $\vec{F}(\vec{x})$ podél křivky $\langle \vec{\varphi} \rangle$ předpisem

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) := \int_a^b \sum_{i=1}^r F_i(\vec{\varphi}(t)) \dot{\varphi}_i(t) dt, \quad (10.6)$$

pokud pravá strana této rovnosti existuje. Tento integrál zapisujeme též v méně formálním tvaru

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} F_1(\vec{x}) dx_1 + \dots + F_r(\vec{x}) dx_r.$$

Je-li C jednoduchá a po částech hladká regulární křivka, pro niž existují parametrizace jednoduchých a hladkých regulárních křivek $\vec{\varphi}_i(t)$ v $\mathbb{E}^r$ tak, že $\vec{\psi}(t) = (\vec{\varphi}_1 \oplus \vec{\varphi}_2 \oplus \dots \oplus \vec{\varphi}_k)(t)$ a $\langle \vec{\psi}(t) \rangle = C$, pak definujeme *křivkový integrál druhého druhu* z funkčního vektoru $\vec{F}(\vec{x})$ podél křivky $\langle \vec{\psi} \rangle$ předpisem

$$\int_{\langle \vec{\psi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) := \sum_{i=1}^k \int_{\langle \vec{\varphi}_i \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}),$$

má-li pravá strana smysl.

10.2.9 Komentář

Zápis (10.6) lze sumarizovat pomocí symbolu pro skalární součin do kompaktního tvaru

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) := \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{\varphi}) | \dot{\vec{\varphi}} \rangle dt.$$

Přitom hodnota součinu $\langle \vec{F}(\vec{\varphi}) | \dot{\vec{\varphi}} \rangle$ reprezentuje délku kolmého průmětu vektoru $\vec{F}(\vec{\varphi})$ do směru $\dot{\vec{\varphi}}$ tečného vektoru ke křivce. Tedy speciálně: je-li vektor $\vec{F}(\vec{x})$ kolmý ke křivce v každém jejím bodě $\vec{x}$, pak je příslušný křivkový integrál druhého druhu nulový.

10.2.10 Příklad

Vypočtěme křivkový integrál druhého druhu

$$\int_M (x + y, x - y) d\mu_c(x, y),$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$. Zvolme nejjednodušší možnou parametrizaci tvaru $\vec{\varphi}(t) = (t, 4t^2)$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak $\dot{\vec{\varphi}}(t) = (1, 8t)$ a vyšetřovaný integrál přechází do tvaru

$$\int_0^1 (t + 4t^2 + 8t^2 - 32t^3) dt = \left[\frac{t^2}{2} + 4t^3 - 8t^4 \right]_0^1 = -\frac{7}{2}.$$

10.2.11 Věta – existence křivkového integrálu druhého druhu

Nechť $\vec{\varphi}(t)$ je parametrizace jednoduché a hladké regulární křivky C v $\mathbf{E}^r$ a $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je spojitá vektorová funkce. Pak křivkový integrál

$$\int_C \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x})$$

existuje a je konečný.

Důkaz:

- jedná se o analogii důkazu věty 10.2.6

10.2.12 Lemma – o nezávislosti křivkového integrálu druhého druhu na parametrizaci

Nechť $\vec{\varphi}(t), \vec{\psi}(t)$ jsou parametrizace jednoduchých a hladkých regulárních křivek, pro něž $\langle \vec{\varphi} \rangle = \langle \vec{\psi} \rangle$. Pak pro každý spojitý funkční vektor $\vec{F}(\vec{x})$ definovaný na množině $\langle \vec{\varphi} \rangle$ platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = a \int_{\langle \vec{\psi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}),$$

kde buď $a = 1$, nebo $a = -1$.

10.2.13 Definice

Nechť je jednoduchá a hladká regulární křivka C zadána parametrizací $\vec{\varphi}(t) : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbf{E}^r$, jejíž délka je ℓ . *Těžištěm křivky* $\langle \vec{\varphi} \rangle$ rozumíme bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$, pro jehož souřadnice platí

$$a_i := \frac{1}{\ell} \int_C x_i d\mu_c(\vec{x}) = \frac{\int_C x_i d\mu_c(\vec{x})}{\int_C 1 d\mu_c(\vec{x})}, \quad (i \in \hat{r}).$$

10.2.14 Příklad

Na tomto místě určíme polohu těžiště čtvrtiny kružnice o poloměru r . Zkoumanou křivkou je tedy množina

$$K = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 = r^2 \wedge x > 0 \wedge y > 0\}$$

a její parametrizací zobrazení $\vec{\varphi}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, kde $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Pak pro délku množiny K platí

$$\ell = \int_0^{\pi/2} r dt = \frac{\pi}{2} r,$$

neboť pro normu zobrazení $\vec{\varphi}(t)$ platí jednoduchý vztah $\|\vec{\varphi}(t)\| = r$. Pro x -ovou souřadnici těžiště podle předešlé definice platí rovnost

$$x_T = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos(t) dt = \frac{2r}{\pi}.$$

Podobně pro y -ovou souřadnici těžiště platí

$$y_T = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin(t) dt = \frac{2r}{\pi}.$$

Tedy čtvrtkružnice K o poloměru r má těžiště v bodě

$$\vec{a} = \left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi} \right).$$

10.2.15 Komentář

Doporučujeme také čtenáři, aby zvážil, proč by předešlá věta neplatila, kdyby $\vec{\varphi}(t)$ nebo $\vec{\psi}(t)$ nebyly parametrizacemi jednoduchých křivek.

10.2.16 Věta – linearita křivkového integrálu

Nechť $\vec{\varphi}(t)$ je parametrizace křivky v $\mathbf{E}^r$, $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ necht' jsou funkce a $\vec{F}(\vec{x}), \vec{G}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ necht' jsou funkční vektory. Necht' dále $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak platí rovnosti

$$\begin{aligned} \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} (\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})) d\mu_c(\vec{x}) &= \alpha \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) + \beta \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} g(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}), \\ \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} (\alpha \vec{F}(\vec{x}) + \beta \vec{G}(\vec{x})) d\mu_c(\vec{x}) &= \alpha \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) + \beta \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{G}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}), \end{aligned}$$

pokud výrazy na pravých stranách existují.

Důkaz:

- jelikož je křivkový integrál definován pomocí jednorozměrného Riemannova (či Newtonova) integrálu, je linearita křivkového integrálu důsledkem linearity v Riemannově pojetí integrálu
- tedy např.

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} (\alpha f)(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = \int_a^b \alpha f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt = \alpha \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x})$$

- podobně se využije definice křivkových integrálů a adekvátních vlastností Riemannových integrálů také u dalších vlastností

10.2.17 Věta – aditivita křivkového integrálu v mezích

Nechť $\vec{\varphi}(t), \vec{\psi}(t)$ jsou parametrizace křivek takových, že součet křivek $\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle$ je definován. Jestliže má funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ křivkový integrál podél $\langle \vec{\varphi} \rangle$ i podél $\langle \vec{\psi} \rangle$, má jej i podél $\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle$ a platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) + \int_{\langle \vec{\psi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}).$$

Má-li vektorové pole $\vec{F}(\vec{x})$ křivkový integrál podél $\langle \vec{\varphi} \rangle$ i podél $\langle \vec{\psi} \rangle$, má jej i podél $\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle$ a platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) + \int_{\langle \vec{\psi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}).$$

Důkaz:

- užijeme definice součtu křivek 10.1.6
- pak

$$\begin{aligned} \int_{\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) &= \int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| dt + \int_b^{b+d-c} f(\vec{\psi}(t-b+c)) \|\dot{\vec{\psi}}(t-b+c)\| dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} s = t - b + c \\ ds = dt \end{array} \right| = \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) + \int_{\langle \vec{\psi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) \end{aligned}$$

- analogicky dokážeme druhou část věty

10.2.18 Komentář

Další vlastnosti známé z teorie Riemannova integrálu, jako jsou např. monotonie či absolutní hodnota, již pro křivkový integrál obecně neplatí. Jisté analogie by však bylo možno vyslovit pro křivkový integrál prvního druhu. Jednou z nich je následující věta.

10.2.19 Věta – monotonie křivkového integrálu

Nechť $\vec{\varphi}(t)$ je křivková parametrizace jednoduché a hladké regulární křivky v $\mathbf{E}^r$ a $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ funkce takové, že pro všechna $\vec{x} \in \langle \vec{\varphi} \rangle$ platí nerovnost $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$. Pak platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) \leq \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} g(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}),$$

pokud oba křivkové integrály existují.

Důkaz:

- důkaz opět vychází z analogické vlastnosti Riemannova integrálu
- pokud totiž $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$, pak také $f(\vec{\varphi}(t)) \|\vec{\varphi}'(t)\| \leq g(\vec{\varphi}(t)) \|\vec{\varphi}'(t)\|$
- tedy první integrand je menší nebo roven integrandu druhého integrálu, a lze tudíž aplikovat větu o monotonii Riemannova integrálu pro funkci jedné proměnné

10.2.20 Komentář

Pokud je integrační množinou v křivkovém integrálu uzavřená křivka, lze tento fakt zohlednit i v zápise integrálu, a sice kroužkem ve znaku integrálu

$$\oint_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}).$$

Tohoto značení se hojně užívá např. v matematické fyzice.

10.2.21 Příklad

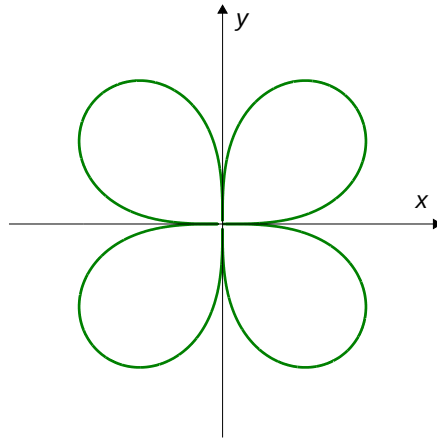
Cílem tohoto příkladu je ukázat způsob, jak parametrizovat některé křivky. Zvolme např. čtyřlístek z následujícího obrázku. Budeme-li nahlížet na vykreslený útvar jako na křivku v polárních souřadnicích $x = \varrho \cos(t)$, $y = \varrho \sin(t)$, bude zřejmé, že vzdálenost ϱ bodu křivky od počátku souřadného systému se mění s úhlem $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Tedy $\varrho = \varrho(t)$. Pak bude systém rovnic

$$x = \varrho(t) \cos(t), \quad y = \varrho(t) \sin(t) \tag{10.7}$$

skutečně jednoparametrickým, a bude tudíž představovat parametrizaci křivky v $\mathbf{E}^2$. Zbývá tedy nalézt vhodnou funkci $\varrho = \varrho(t)$ tak, aby parametrizace (10.7) popisovala čtyřlístek z obrázku. Cílem je najít jistou elementární funkci, která bude pro $t = 0$ a $t = \pi/2$ vykazovat nulovou hodnotu a pro $t = \pi/4$ bude nabývat maxima. Takovou funkcí je např. $\varrho(t) = \sin(2t)$. Chceme-li ale, aby $\varrho(t)$ bylo na $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ nezáporné, musíme ještě opatřit užitý sinus absolutní hodnotou. Pak skutečně geometrickým obrazem zobrazení

$$\vec{\varphi}(t) = (|\sin(2t)| \cos(t), |\sin(2t)| \sin(t)) \tag{10.8}$$

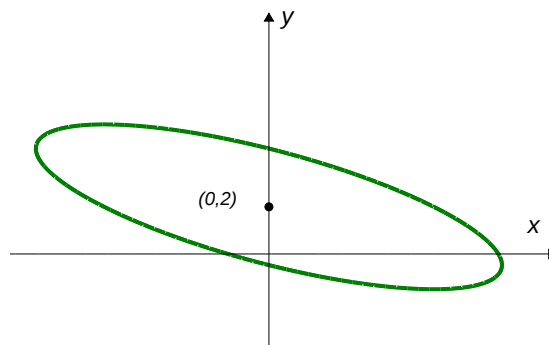
je křivka z obrázku 10.45.



Obrázek 10.45
Křivka s parametrizací (10.8).

10.2.22 Příklad

Nechť je zadána křivka $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + 8y^2 + 4xy - 8x - 32y = 17\}$. Pokusme se nalézt její parametrizaci. Rovnice křivky, jak je jistě patrné, představuje kvadriku v $\mathbb{E}^2$, tedy kuželosečku. Po doplnění na čtverce se zadaná rovnice transformuje na tvar $(x + 2y - 4)^2 + (2y - 4)^2 = 49$, který se po zavedení nových souřadnic $\xi = x + 2y - 4$ a $\eta = 2y - 4$ redukuje na normální tvar $\xi^2 + \eta^2 = 49$. Tento tvar představuje elipsu, kterou je ale snadné parametrizovat např. funkčním vektorem $(\xi, \eta) = (7 \cos(t), 7 \sin(t))$, kde parametr t je pochopitelně vybrán z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Návratem k původním proměnným x a y získáme hledanou parametrizaci $x = 7 \cos(t) - 7 \sin(t)$, $y = 2 + \frac{7}{2} \sin(t)$. Takováto parametrizace pak může sloužit k dalším výpočtům nebo k samotnému vykreslení křivky v některém z vhodných programů, jakým je např. MATLAB. Tímto způsobem byla provedena i vizualizace výše uvedené křivky na následujícím obrázku. Jedná se tedy o elipsu se středem v bodě $(0, 2)$, jejíž hlavní a vedlejší poloosy mají v souřadném systému obecnou polohu, tedy nejsou rovnoběžné se souřadnými osami, jak bývá vesměs zvykem.



Obrázek 10.46
Elipsa v obecné poloze.

10.2.23 Věta – Greenova

Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a $\langle \vec{\varphi} \rangle$ uzavřená, po částech hladká regulární křivka taková, že $\langle \vec{\varphi} \rangle = \text{bd}(S)$. Nechť G je otevřená množina taková, že $\bar{S} \subset G$. Pak pro každé spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}))$ na množině G platí

$$\oint_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) \, d\mu_c(\vec{x}) = a \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) (\vec{x}) \, d(x_1, x_2),$$

kde buď $a = 1$, nebo $a = -1$.

Důkaz:

- tvrzení této věty plyne ze Stokesovy věty 11.3.1, jež bude vyslovena v dalším textu
- položíme ve větě 11.3.1 za vektorové pole $\vec{F}(\vec{x})$ funkční vektor $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), 0)$
- pak platí

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(\vec{x}) & F_2(\vec{x}) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right),$$

neboť ani $F_1(\vec{x})$ ani $F_2(\vec{x})$ nezávisí na proměnné x_3

- plochou S je ale v dokazované větě plocha ležící v rovině $x_3 = 0$ a pro její parametrizaci tudíž volíme přirozenou parametrizaci $\vec{\phi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$
- normálovým vektorem ke zkoumané ploše je, jak se snadno přesvědčíme, vektor

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}x_1} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}x_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

- pak podle věty 11.3.1 a citovaných mezivýpočtů platí

$$\begin{aligned} \oint_{\langle \vec{\phi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) \, d\mu_c(\vec{x}) &= a \iint_S \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) \, d\mu_s(\vec{x}) = a \iint_S \left\langle \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \mid (0, 0, 1) \right\rangle d(x_1, x_2) = \\ &= a \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

10.2.24 Komentář

O znaménku v Greenově větě rozhoduje způsob proběhnutí geometrického obrazu $\langle \vec{\phi} \rangle$ zobrazením $\vec{\phi}(t)$. Tak např. kružnice $x^2 + y^2 = 1$ je proběhnuta parametrizací $\vec{\phi}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ proti směru hodinových ručiček. Naproti tomu parametrizace $\vec{\psi}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ probíhá tentýž geometrický obraz po směru hodinových ručiček. Podotýkáme, že v Greenově větě odpovídá znaménku $a = 1$ rotace proti směru hodinových ručiček.

10.2.25 Příklad

Aplikaci Greenovy věty ukážeme v následujícím příkladu. Uvažme vektor funkcí $\vec{F}(x, y) = (x^3 - y^3, x^3 + y^3)$ a kružnici $K = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Snahou je vypočíst křivkový integrál druhého druhu $\int_K \vec{F}(x, y) \, d\mu_c(x, y)$. Vypočteme hledaný integrál nejprve podle definice. K tomu bude zapotřebí parametrizace kružnice $\vec{\phi}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ pro $0 \leq t \leq 2\pi$. Dále snadno $\dot{\vec{\phi}}(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$. Pak tedy

$$\int_K \vec{F}(x, y) \, d\mu_c(x, y) = \int_0^{2\pi} -16(\cos^3(t) - \sin^3(t)) \sin(t) \, dt + \int_0^{2\pi} 16(\cos^3(t) + \sin^3(t)) \cos(t) \, dt.$$

Po poměrně dlouhém výpočtu vychází, že $\int_K \vec{F}(x, y) \, d\mu_c(x, y) = 12\pi + 12\pi = 24\pi$. Jelikož je ale křivka $\vec{\phi}(t)$ uzavřená a uzavírá plochu (oblast) $S = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ a jelikož je vektorové pole $\vec{F}(x, y)$ spojitě diferencovatelné na $\mathbb{E}^2$, lze s výhodou použít Greenovy věty. Vypočteme tedy $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$. Pak platí

$$\int_K \vec{F}(x, y) \, d\mu_c(x, y) = \iint_S 3(x^2 + y^2) \, d(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x = \varrho \cos(\mu) & |\Delta_J| = \varrho \\ y = \varrho \sin(\mu) & d(x, y) = \varrho \, d(\varrho, \mu) \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3\varrho^3 \, d\varrho \, d\mu = 24\pi.$$

I na tomto jednoduchém příkladě je patrná značná užitečnost Greenovy věty 10.2.23.

Kapitola 11

Integrál po ploše

Logickou alternativou pro křivkové integrály probrané v předcházející kapitole budou integrály plošné. V této variantě integrálního počtu tudíž budou příslušnými integračními množinami obecné zakřivené dvoudimenzionální plochy ležící v třídimenziálním prostoru $\mathbf{E}^3$. A integrandy budou reprezentovány buď funkcemi nebo funkčními vektory, jejichž definiční obory danou plochu obsahují.

11.1 Dvoudimenzionální plochy ve třídimenziálním prostoru

Ačkoliv by bylo jistě možno definovat (v analogii s křivkou v prostoru $\mathbf{E}^r$) obecnou plochu v $\mathbf{E}^r$, my se v této kapitole zaměříme pouze na plochy v $\mathbf{E}^3$.

11.1.1 Definice

Plošnou parametrizací v $\mathbf{E}^3$ nazveme každé spojitě zobrazení $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbf{E}^3$, kde $G \subset \mathbf{E}^2$ je oblast. Množinu

$$\langle \vec{\phi} \rangle := \{ \vec{y} \in \mathbf{E}^3 : \vec{y} = \vec{\phi}(u, v) \text{ pro } (u, v) \in G \}$$

nazveme *geometrickým obrazem zobrazení* $\vec{\phi}(u, v)$. Množinu $S \subset \mathbf{E}^3$ nazveme *plochou* v $\mathbf{E}^3$, existuje-li plošná parametrizace $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbf{E}^3$, kde $G \subset \mathbf{E}^2$ je oblast a $\langle \vec{\phi} \rangle = S$. Řekneme, že plocha S je *jednoduchá*, existuje-li $\vec{\phi}(u, v)$ tak, že $\langle \vec{\phi} \rangle = S$ a $\vec{\phi}(u, v)$ je na oblasti G prostým zobrazením.

11.1.2 Příklad

Plochou v $\mathbf{E}^3$ je např. polokoule (rozumíme samozřejmě plášť polokoule). Parametrizace

$$\vec{\phi}(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta) \quad (11.1)$$

zadaná na množině $G = \{(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi/2) \times (0, 2\pi)\}$, jež vychází ze sférických souřadnic, nicméně nepopisuje celou polokouli. To je v souladu s tím, co jsme již poznali u definice sférických souřadnic, které se rovněž nezobrazují na celé $\mathbf{E}^3$. Zde, jak je zřejmo i z obrázku 11.47, je geometrickým obrazem plošné parametrizace $\vec{\phi}(u, v)$ polokoule

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z > 0$$

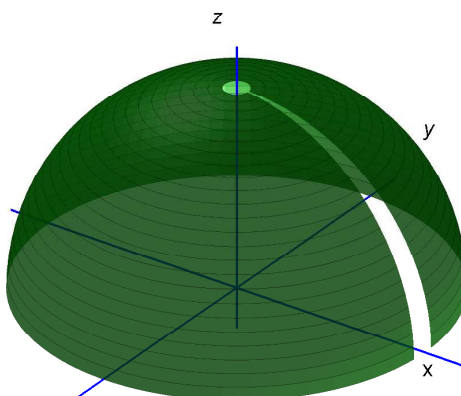
bez jejího "severního pólu" $(0, 0, 1)$ a "nultého poledníku," pro nějž je $\varphi = 0$ (viz obrázek níže). Ani kružnice

$$x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 0$$

není zadanou parametrizací popsána. Teprve uzávěr zmiňovaného geometrického obrazu zacílí "rány" způsobené faktem, že G je otevřená, a teprve tehdy pak platí rovnost

$$\overline{\langle \vec{\phi} \rangle} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0 \}.$$

Zde nabádáme čtenáře, aby důkladně promyslel, které body jsou hraničními body množiny $\langle \vec{\phi} \rangle$.

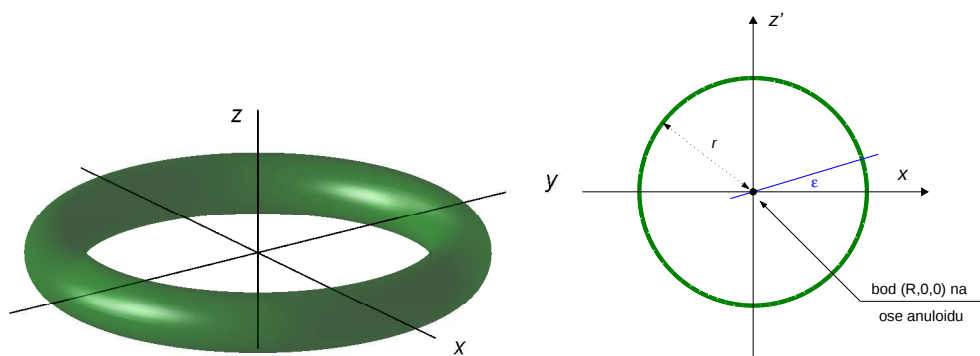


Obrázek 11.47
Geometrický obraz parametrizace (11.1).

11.1.3 Příklad – *matematický anuloid*

Zajímavým zástupcem ploch v E^3 je *matematický anuloid*, nazývaný někdy též *toroid* či *tórus*. Tato plocha představuje vlastně jakousi ideální pneumatiku. Její rozměry jsou popsány dvěma poloměry – velkým R , jež dimenzuje poloměr anuloidu (vzdálenost středu a osy anuloidu) a malým r , jež dimenzuje poloměr kruhového kolmého řezu toroidem. Parametrizací matematického anuloidu může být pro $\varepsilon, \varphi \in (0, 2\pi)$ např. zobrazení

$$\vec{\phi}(\varphi, \varepsilon) = ((R + r \cos(\varepsilon)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\varepsilon)) \sin(\varphi), r \sin(\varepsilon)).$$



Obrázek 11.48
Vizualizace a řez matematického anuloidu.

11.1.4 Příklad – *matematický cimrmanoid*

Unikátní ukázkou plochy v E^3 je plocha vyobrazená na obrázku níže. Tato plocha byla poprvé zmíněna velkým myslitelem Járou da Cimrmanem¹ v jeho nedokončené knize *Časové osmičky*, v níž se jako jeden z prvních Cimrman pokusil vysvětlit vágnost pojmu čas. Jeho plynutí vysvětloval na všelidových shromážděních právě za pomoci duté osmičky protínající sebe samu v nekonečně úzké štěrbině, ve které jako v jediném místě mohlo podle Cimrmána docházet k přesunu v čase. Již tehdy velký myslitel ve své genialitě předpovídal, že prostoročas, který nazýval časomírem², je zakřiven. Není se tedy čemu divit, že někteří (i méně slavní) následovatelé (např. A. Einstein) nehodlali myšlenku J. da Cimrmána opustit a rozvinuli ji do ucelenějších teorií. Škodou je, že

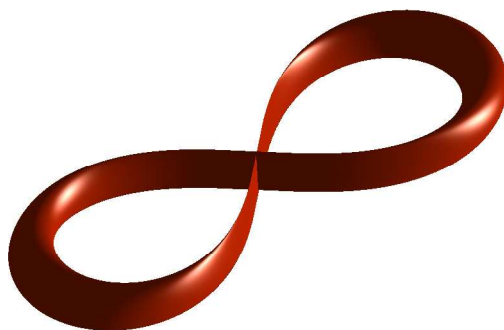
¹Jára da Cimrman (*1843-1859 Vídeň, † neznámo, posledně bezpečně zjištěný pobyt: Liptákov v Jizerských horách) - národní multioborový génius, dodnes nedoceněný, faktický vítěz ankety "Největší Čech."

²Cimrman sám se názvu *prostoročas* bránil, říka, že nadměrný výskyt písmene "o" vede podvědomí k nepodložené asociaci, že vesmír je kulatý.

původní Cimirmanovo označení *časové osmičky* bylo z důvodu poškození původního rukopisu spleteno na *časové smyčky*, což bohužel přetrvalo dodnes. Cimirman sám svou plochu o dvou pevných tzv. poloměrech a (*poloměr časové osmičky*) a b (*poloměr řezu časové osmičky*) zparametrizoval. Zde uvádíme původní Cimirmanův zápis parametrizace s úhlovými parametry $\varrho \in (0, 2\pi)$ a $\zeta \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)$

$$\begin{aligned}x &= (a + b \cos(\varrho)) \sqrt{\cos(2\zeta)} \cos(\zeta); \\y &= (a + b \cos(\varrho)) \sqrt{\cos(2\zeta)} \sin(\zeta); \\z &= b \sin(\varrho).\end{aligned}$$

Matematictí odborníci se po léta přeli, proč Cimirman zvolil pro popis své parametrizace právě řecká písmena ϱ, ζ . Odpověď našla až vědecká sekce Divadla Járy Cimrmana, která nade vši pochybnost potvrdila, že zmíněným výběrem Cimirman vzdal hold své tajné lásce Rozetě Steinitzové (ϱ - ro, ζ - zeta). Cimirmanův velký obdivovatel Karl Weierstrass v roce 1896 pojmenoval živě diskutovanou plochu *matematickým cimrmanoidem*, což vzbudilo v matematické komunitě nečekaný ohlas.



Obrázek 11.49

Vizualizace matematického cimrmanoidu.

11.1.5 Definice

Nechť je dána plošná parametrizace $\vec{\varphi}(u, v) : G \mapsto \mathbb{E}^3$. Plochu $\langle \vec{\varphi} \rangle$ v $\mathbb{E}^3$ nazveme *jednoduše uzavřenou*, je-li omezenou množinou v $\mathbb{E}^3$ a existují-li disjunktní oblasti $A, B \subset \mathbb{E}^3$ takové, že pro ně a uzávěr $S := \overline{\langle \vec{\varphi} \rangle}$ plochy $\langle \vec{\varphi} \rangle$ platí rovnosti

- $A \cap S = B \cap S = \emptyset$;
- $A \cup B \cup S = \mathbb{E}^3$.

11.1.6 Komentář

Množinu A z předešlé definice lze jednoduše interpretovat např. jako "vnitřek" obepnutý množinou S . Množina B pak představuje "vnějšek."

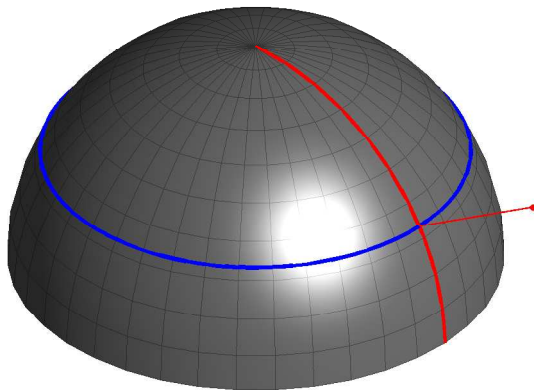
11.1.7 Definice

Řekneme, že plocha $S \subset \mathbb{E}^3$ je *hladkou regulární plochou* v $\mathbb{E}^3$, pokud existuje plošná parametrizace $\vec{\varphi}(u, v) : G \mapsto \mathbb{E}^3$ tak, $S = \langle \vec{\varphi} \rangle$, funkční vektor $\vec{\varphi}(u, v)$ je spojitě diferencovatelný na G a pro každé $(u, v) \in G$ platí

$$\left\| \frac{D\vec{\varphi}}{Du} \times \frac{D\vec{\varphi}}{Dv} \right\| (u, v) = \left\| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \right\| (u, v) \neq 0.$$

11.1.8 Komentář

Pokud se na parametrizaci $\vec{\phi}(u, v)$ díváme jako na křivkovou parametrizaci s parametrem v , představuje $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}$ podle poznámky 10.1.5 vlastně tečný vektor ke křivce ležící na zadané ploše (viz červený "poledník" na obrázku níže). Analogicky $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}$ představuje tečný vektor k jiné křivce ležící na zadané ploše (viz modrá "rovnoběžka" na obrázku níže). Proto tedy představuje vektorový součin $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}$ normálový vektor k ploše, neboť z definice vektorového součinu víme, že vektor $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}$ musí být kolmý k oběma vektorům tečným k ploše.



Obrázek 11.50

Ke konstrukci normálového vektoru.

11.1.9 Definice

Nechť je dána plošná parametrizace $\vec{\phi}(u, v)$ a její geometrický obraz $\langle \vec{\phi} \rangle \subset \mathbf{E}^3$. Označme S jeho uzávěr, tj. $S := \overline{\langle \vec{\phi} \rangle}$. Řekneme, že bod $\vec{a} \in S$ *neleží na okraji plochy* S , existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta \in (0, \varepsilon)$ je průnikem koule

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = \delta^2\}$$

a plochy S jedna nebo několik uzavřených křivek. Označíme-li S° množinu všech takových bodů, pak *okrajem plochy* rozumíme množinu

$$\text{edge}(S) := S \setminus S^\circ.$$

11.1.10 Komentář

Zde nabádáme čtenáře, aby promyslel rozdíl mezi hranicí plochy a jejím okrajem, a aby tyto pojmy zřetelně odlišoval.

11.2 Plošné integrály

Je-li nyní korektně zaveden pojem dvoudimenzionální plochy ve třídimeznionálním prostoru, lze přejít k definicím obou základních typů plošných integrací.

11.2.1 Úmluva

Ve zbytku kapitoly budeme předpokládat, že je-li pro plochu S požadována jistá vlastnost, pak příslušná plošná parametrizace tuto vlastnost garantuje. Tedy řekneme-li například, že plocha $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 = 4\}$ je hladká a $\vec{\phi}(u, w) : G \mapsto \mathbf{E}^3$ je její parametrizace, pak budeme předpokládat, že $\vec{\phi}(u, w)$ je právě ono prosté zobrazení na G . Pro plochu S by bylo totiž jisté možné nalézt parametrizaci, která prostým zobrazením není.

11.2.2 Definice

Nechť $\vec{\phi}(u, v)$ je parametrizace jednoduché hladké regulární plochy v $S \subset \mathbb{E}^3$. Nechť $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je funkce definovaná alespoň na množině S . Potom definujeme *plošný integrál prvního druhu* z funkce $f(\vec{x})$ přes plochu $\langle \vec{\phi} \rangle$ předpisem

$$\iint_S f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) := \iint_G f(\vec{\phi}(u, v)) \cdot \left\| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\| (u, v) d(u, v),$$

pokud integrál napravo existuje (buď jako Riemannův nebo jako Lebesgueův). Číslo $\iint_S 1 d\mu_s(\vec{x})$, pokud existuje, nazýváme *obsahem plochy* S v $\mathbb{E}^3$.

11.2.3 Komentář

Podotýkáme, že hodnota $\mu(S) = \iint_S 1 d\mu_s(\vec{x})$ představuje klasickou dvojrozměrnou míru plochy S ve třídimen-
zionálním prostoru.

11.2.4 Definice

Nechť je zadána plocha S parametrizací $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbb{E}^3$ a její obsah nechť je roven číslu $\sigma \in \mathbb{R}$. *Těžištěm plochy* S rozumíme bod $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}^3$, pro jehož souřadnice platí

$$a_i := \frac{1}{\sigma} \iint_S x_i d\mu_s(\vec{x}) = \frac{\iint_S x_i d\mu_s(\vec{x})}{\iint_S 1 d\mu_s(\vec{x})},$$

pokud integrál v čitateli existuje a je konečný.

11.2.5 Definice

Nechť $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbb{E}^3$ je parametrizace jisté jednoduché a hladké regulární plochy v $S \subset \mathbb{E}^3$. Pak funkci

$$\Delta_g(u, v) := \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \right\rangle & \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \right\rangle & \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\rangle \end{pmatrix} (u, v)$$

definovanou všude na G nazýváme *Gramovým determinantem (gramiánem)* plošné parametrizace $\vec{\phi}(u, v)$.

11.2.6 Komentář

Není bez zajímavosti, že v již zmíněném díle Járy da Címrmana se autor zabýval také obecnějšími pojmy, než jsou plochy v $\mathbb{E}^3$. Při této příležitosti studoval také zobecnění Gramova determinantu na tzv. *Cimrmanův determinant (cimrmanián)*. Gramův determinant je tedy speciálním případem determinantu Cimrmanova. Ponecháme na čtenáři, které označení přijme za své.

11.2.7 Věta – o gramiánu

Nechť $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbb{E}^3$ je parametrizace jisté jednoduché a hladké regulární plochy v $S \subset \mathbb{E}^3$. Pak je matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \right\rangle & \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \right\rangle & \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\rangle \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní pro jakoukoli uspořádanou dvojici $(u, v) \in G$, a Gramův determinant (přesněji: Cimrmanův determinant) je tudíž na G kladnou funkcí.

Důkaz:

- označme $\vec{a} = \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u}$ a $\vec{b} = \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v}$
- jedná se o třidimenzionální vektory, které jsou na základě definice hladké regulární plochy zcela jistě lineárně nezávislé
- ve tvrzení Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (viz věta 6.2.3 ve skriptech [7]) tudíž platí nerovnost ostrá, konkrétně $|\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle|^2 < \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle$
- pozitivní definitnost matice $\mathbb{G}$ prokážeme Sylvesterovým kritériem
- první hlavní minor matice $\mathbb{G}$ je roven číslu $\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$, o kterém z axiomů normy zcela jistě víme, že je nulové tehdy a jen tehdy, je-li $\vec{a} = \vec{0}$, což jistě není případ tohoto důkazu kvůli již diskutované lineární nezávislosti vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$
- druhým hlavním minorem matice $\mathbb{G}$ je právě gramián, tj. výraz $\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle^* = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - |\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle|^2$
- z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti ale ihned vyplývá, že $\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle^* > 0$
- tím jsou obě dokazovaná tvrzení beze zbytku prokázána

11.2.8 Věta

Nechť jsou splněny předpoklady definice 11.2.2 a $\Delta_g(u, v)$ je Gramův determinant (přesněji: Címrmanův determinant) plošné parametrizace $\vec{\phi}(u, v)$. Pak platí rovnost

$$\iint_{\langle \vec{\phi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) = \iint_G f(\vec{\phi}(u, v)) \sqrt{\Delta_g(u, v)} d(u, v).$$

Důkaz:

- v následujících úvahách uvažujeme plošnou parametrizaci $\vec{\phi}(u, v) : G \mapsto \mathbf{E}^3$
- označme pro jednoduchost $\vec{a} = \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u}$ a $\vec{b} = \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v}$
- pro důkaz tvrzení postačí ukázat, že na G platí rovnost

$$\left\| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right\|^2 (u, v) = \Delta_g(u, v),$$

což je ekvivalentní rovnosti

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle & \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle & \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle \end{pmatrix}$$

- snadno

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \left\| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|(a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - b_1 a_2)\|^2$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

- přitom ale

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle & \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle & \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle \end{pmatrix} &= \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle \langle \vec{b} | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - |\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle|^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \\ &= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \end{aligned}$$

- tím je důkaz proveden

11.2.9 Příklad

Pokusme se nyní ověřit známý vzorec pro obsah pláště koule o poloměru r . Zvolme parametrizaci vzešlou ze sférických souřadnic, a sice

$$x = r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = r \sin(\vartheta). \quad (11.2)$$

Podotýkáme, že r je pevný parametr, tedy nikoliv proměnná, jako je tomu u klasických sférických souřadnic. Dále $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Tedy

$$\vec{\phi}(\vartheta, \varphi) = (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)).$$

Dále

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\vartheta} &= (-r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta)), \\ \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\varphi} &= (-r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), 0). \end{aligned}$$

Odtud snadno vypočteme skalární součiny

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\vartheta} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\vartheta} \right\rangle &= r^2 \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta) = r^2, \\ \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\varphi} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\varphi} \right\rangle &= r^2 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\vartheta) \cos^2(\varphi) = r^2 \cos^2(\vartheta), \\ \left\langle \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\vartheta} \middle| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\varphi} \right\rangle &= r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) - r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) = 0, \end{aligned}$$

jež jsou nutné k vyčíslení Gramova determinantu $\Delta_g = r^4 \cos^2(\vartheta)$. Podle definice plošného integrálu prvního druhu pak tedy platí

$$\iint_{\langle \vec{\phi} \rangle} 1 \, d\mu_s(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi r^2.$$

11.2.10 Příklad

Pro kladné parametry a, b a plochu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : y^2 + z^2 = 2ay + 2bz\}$ vypočteme plošný integrál

$$\int_S e^{-|x|} \, d\mu_s(x, y, z).$$

Je nasnadě, že zadanou plochou je válec $(y-a)^2 + (z-b)^2 = a^2 + b^2$ o poloměru kolmého řezu $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podotýkáme, že osa válce je rovnoběžná se souřadnou osou x . Tedy volíme parametrizaci vzešlou z cylindrických souřadnic

$$x = s, \quad y = a + r \cos(t), \quad z = b + r \sin(t),$$

kde $s \in \mathbf{R}$ a $t \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}s} = (1, 0, 0), \quad \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}t} = (0, -r \sin(t), r \cos(t))$$

a Gramův determinant má jednoduchý tvar $\Delta_g = r^2$. Odtud snadno

$$\int_S e^{-|x|} d\mu_s(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|} r ds dt = 4\pi r = 4\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

11.2.11 Definice

Nechť $\vec{\phi}(u, v)$ je parametrizace jednoduché hladké regulární plochy v euklidovském prostoru $\mathbf{E}^3$. Nechť je dán funkční vektor $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{E}^3$ definovaný alespoň na množině $\langle \vec{\phi} \rangle$. Pak definujeme *plošný integrál druhého druhu* z funkčního vektoru $\vec{F}(\vec{x})$ přes plochu $\langle \vec{\phi} \rangle$ předpisem

$$\iint_{\langle \vec{\phi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) := \iint_G \left\langle \vec{F}(\vec{\phi}(u, v)) \left| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u}(u, v) \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v}(u, v) \right. \right\rangle d(u, v),$$

je-li pravá strana definována. Tento integrál někdy zapisujeme též v méně formálním tvaru

$$\int_{\langle \vec{\phi} \rangle} F_1(\vec{x}) dx_2 dx_3 + F_2(\vec{x}) dx_3 dx_1 + F_3(\vec{x}) dx_1 dx_2.$$

11.2.12 Příklad

Vypočtěme plošný integrál druhého druhu z funkčního vektoru (x, y, z) přes plášť koule (11.2) zavedené v příkladu 11.2.9. Nejprve vypočteme vektorový součin

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\vartheta} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}\varphi} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \\ -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-r^2 \cos^2(\vartheta) \cos(\varphi), -r^2 \cos^2(\vartheta) \sin(\varphi), -r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)). \end{aligned}$$

A protože

$$\begin{aligned} &\left\langle (x, y, z) \left| \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}u} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\phi}}{\mathcal{D}v} \right. \right\rangle = \\ &= -r^3 \left\langle (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta)) \left| (\cos^2(\vartheta) \cos(\varphi), \cos^2(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)) \right. \right\rangle = \\ &= -r^3 \cos^3(\vartheta) \cos^2(\varphi) - r^3 \cos^3(\vartheta) \sin^2(\varphi) - r^3 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) = -r^3 \cos(\vartheta), \end{aligned}$$

redukuje se hledaný plošný integrál na jednoduchý výpočet

$$- \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \cos(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -4\pi r^3.$$

11.2.13 Věta – o nezávislosti plošného integrálu na parametrizaci

Nechť $\vec{\varphi}_1(u, v)$ a $\vec{\varphi}_2(u, v)$ jsou dvě parametrizace téže jednoduché hladké regulární plochy v $\mathbf{E}^3$ takové, že $\langle \vec{\varphi}_1 \rangle = \langle \vec{\varphi}_2 \rangle$. Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{R}$ a vektor funkcí $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{E}^3$ jsou definovány alespoň na $\langle \vec{\varphi}_1 \rangle$. Pak platí rovnosti

$$\iint_{\langle \vec{\varphi}_1 \rangle} f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) = \iint_{\langle \vec{\varphi}_2 \rangle} f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}), \quad \iint_{\langle \vec{\varphi}_1 \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) = a \iint_{\langle \vec{\varphi}_2 \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}),$$

kde buď $a = 1$, nebo $a = -1$, jsou-li integrály na pravých stranách definovány.

Důkaz:

- je náplní cvičení 337

11.2.14 Příklad

Vypočtěme z -ovou souřadnici těžiště polokoule $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge z > 0\}$. Zvolme parametrizaci $\vec{\varphi}(\vartheta, \varphi) = (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi); r \cos(\vartheta) \sin(\varphi); r \sin(\vartheta))$, kde v našem případě $\vartheta \in (0, \pi/2)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Obsah (tj. plošná míra) diskutované polokoule je zjevně $\mu_s(K) = 2\pi r^2$. Gramův determinant byl již vypočten v příkladě 11.2.9 a jeho hodnota je $\Delta_g = r^4 \cos^2(\vartheta)$. Třetí (z -ovou) souřadnici těžiště vypočteme podle definičního vztahu jako

$$\frac{1}{2\pi r^2} \iint_{\langle \vec{\varphi} \rangle} z d\mu_s(x, y, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \frac{r}{2}.$$

Těžiště množiny K se tedy nachází v bodě $(0, 0, r/2)$.

11.2.15 Věta – linearita plošného integrálu

Nechť $\vec{\varphi}(u, v)$ je parametrizace plochy v $\mathbf{E}^3$, $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{R}$ necht' jsou funkce a $\vec{F}(\vec{x}), \vec{G}(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{E}^3$ necht' jsou funkční vektory. Necht' dále $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak platí rovnosti

$$\begin{aligned} \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} (\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})) d\mu_s(\vec{x}) &= \alpha \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) + \beta \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} g(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}), \\ \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} (\alpha \vec{F}(\vec{x}) + \beta \vec{G}(\vec{x})) d\mu_s(\vec{x}) &= \alpha \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) + \beta \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{G}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}), \end{aligned}$$

pokud integrály na pravých stranách existují.

Důkaz:

- je náplní cvičení 338

11.2.16 Věta – monotonie plošného integrálu

Nechť $\vec{\varphi}(u, v)$ je plošná parametrizace v $\mathbf{E}^3$ a $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{R}$ funkce takové, že pro všechna $\vec{x} \in \langle \vec{\varphi} \rangle$ platí nerovnost $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$. Pak platí

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} f(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) \leq \int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} g(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}),$$

pokud oba plošné integrály existují.

Důkaz:

- je náplní cvičení 339

11.3 Integrální věty teorie plošných integrací

Jednou z nejznámějších oblastí problematiky plošných integrací jsou tzv. integrální věty. Pro svou hloubku, eleganci i široké spektrum aplikací bývají tyto věty považovány za jedny z nejkrásnějších výsledků klasické matematické analýzy. Jsou mimo jiné proslulé svým aplikačním potenciálem. Lze se s nimi setkat např. při odvozování rovnice kontinuity v mechanice kapalin, při elegantní reformulaci Maxwellových rovnic elektrodynamiky nebo při výpočtech komplikovaných vícerozměrných integrálů.

11.3.1 Věta – Stokesova

Nechť je množina S jednoduchou hladkou regulární plochou v $\mathbb{E}^3$, jejíž okraj tvoří uzavřená, jednoduchá a po částech hladká regulární křivka $\langle \vec{\varphi} \rangle$. Nechť dále existuje otevřená množina G taková, že pro uzávěr množiny S platí $\bar{S} \subset G$. Nechť dále $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$ je vektor funkcí spojitě diferencovatelný na množině G . Potom

$$\oint_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_c(\vec{x}) = a \iint_S \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}),$$

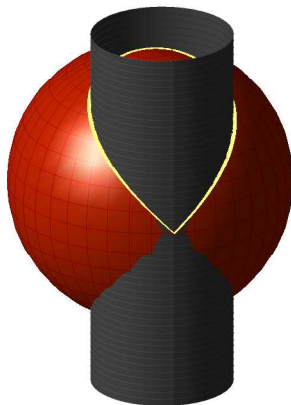
kde buď $a = 1$, nebo $a = -1$.

Důkaz:

- viz [10] str. 209–211

11.3.2 Příklad

Vypočtěme křivkový integrál $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, kde $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge x^2 + y^2 = rx \wedge z \geq 0\}$. Z definice množiny C je jasné, že C je křivkou, která vznikne jako průnik pláště koule $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ a pláště válce $(x - r/2)^2 + y^2 = r^2/4$. Křivka je vyobrazena na následujícím obrázku.



Obrázek 11.51

Průsek pláště koule a válce.

Jelikož křivka uzavírá plochu

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{r^2}{4} \wedge z \geq 0 \right\},$$

lze použít Stokesovu větu. Podotýkáme, že křivka uzavírá i jiné plochy než S , ale zvolená plocha se jednak nabízí a jednak je jednoduchá k parametrizování. K její aplikaci potřebujeme vypočítat rotaci

$$\operatorname{rot}(y^2, z^2, x^2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2(z, x, y)$$

a také parametrizovat plochu S . Zvolíme zcela logicky parametrizaci

$$\vec{\varphi}(\varrho, t) = \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\varrho \cos(t), \frac{r}{2}\varrho \sin(t), \frac{r}{2}\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2} \right),$$

jež vzešla ze zobecněných válcových souřadnic a v níž je parametr ϱ vybrán z oblasti $(0, 1)$ a parametr t z oblasti $(0, 2\pi)$. Pak platí

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\varphi}}{\mathcal{D}\varrho} = \left(\frac{r}{2} \cos(t), \frac{r}{2} \sin(t), -\frac{r}{2} \frac{\cos(t) + \varrho}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}} \right), \quad \frac{\mathcal{D}\vec{\varphi}}{\mathcal{D}t} = \left(-\frac{r}{2}\varrho \sin(t), \frac{r}{2}\varrho \cos(t), \frac{r}{2} \frac{\varrho \sin(t)}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}} \right).$$

Dále platí

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\varphi}}{\mathcal{D}\varrho} \times \frac{\mathcal{D}\vec{\varphi}}{\mathcal{D}t} = \frac{r^2}{4} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos(t) & \sin(t) & -\frac{\cos(t) + \varrho}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}} \\ -\varrho \sin(t) & \varrho \cos(t) & \frac{\varrho \sin(t)}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{4} \left(\frac{\varrho(1 + \varrho \cos(t))}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}}, \frac{\varrho^2 \sin(t)}{\sqrt{3 - 2\varrho \cos(t) - \varrho^2}}, \varrho \right).$$

Pak podle tvrzení Stokesovy věty platí

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= a \int_S \operatorname{rot}(y^2, z^2, x^2) d\mu_s(x, y, z) = \\ &= -\frac{ar^3}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\varrho + \varrho^2 \cos(t) + 2\varrho^2 \sin(t) + \varrho^3 \cos(t) \sin(t)) dt d\varrho = -\frac{ar^3}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho dt d\varrho = -\frac{\pi a}{4} r^3, \end{aligned}$$

kde tedy a je buď plus, nebo minus jedna. Ve cvičení 336 se přímým výpočtem ukáže, že $a = 1$. Podotýkáme, že v předešlém zápise byly vynechány některé integrály, které jsou zcela zjevně nulové díky periodicitě goniometrických funkcí, které v nich vystupují, a faktu, že integrační proměnná t probíhá interval $(0, 2\pi)$.

11.3.3 Věta – Gaussova-Ostrogradského

Nechť $V \subset \mathbb{E}^3$ je omezená oblast, k níž existuje jednoduchá, jednoduše uzavřená a hladká regulární plocha $\langle \vec{\varphi} \rangle$ taková, že pro $S := \langle \vec{\varphi} \rangle$ je $\bar{S} = \operatorname{bd}(V)$. Nechť dále existuje otevřená množina G taková, že pro uzávěr množiny V platí $\bar{V} \subset G$. Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$ je funkční vektor spojitě diferencovatelný na G . Pak

$$\iint_S \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) = a \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) d(x_1, x_2, x_3),$$

kde a je buď 1 nebo -1 .

Důkaz:

- viz [10] str. 195–204

11.3.4 Komentář

Tvrzení Gaussovy-Ostrogradského věty lze zobecnit i na *po částech hladké regulární plochy* v $\mathbb{E}^3$. My jsme ovšem v těchto skriptech zmíněný pojem nedefinovali. Spokojíme se tudíž se slabším tvrzením věty 11.3.3.

11.3.5 Příklad

Navraťme se k příkladu 11.2.12 a vypočtěme ho znovu, tentokrát za použití věty Karla Friedricha Gausse a Michaila Vasiljeviče Ostrogradského. Jelikož plocha (koule) $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, přes níž hodláme integrovat, je uzavřená, lze uvedenou větu použít s tím, že plocha K uzavírá množinu $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. Vypočtěme tedy divergenci funkčního vektoru $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Výpočet je snadný, neboť $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$. Pak tedy

$$\iint_S \vec{F}(\vec{x}) d\mu_s(\vec{x}) = a \iiint_V 3 dx dy dz = 3a \frac{4}{3} \pi r^3 = 4a\pi r^3,$$

což pro volbu $a = -1$ potvrzuje správnost výsledku příkladu 11.2.12.

11.3.6 Příklad

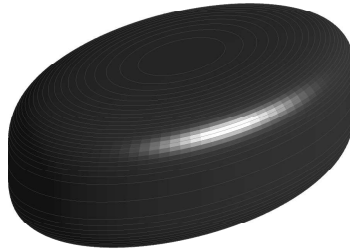
Další aplikaci Gaussovy-Ostrogradského věty budeme demonstrovat na výpočtu plošného integrálu

$$\int_S x|z| dy dz + y|z| dz dx + x|y| dx dy,$$

kde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1 \right\} \quad (11.3)$$

je uzavřená plocha vyobrazená pro $a = 2$, $b = 3$ a $c = 5$ na následujícím obrázku.



Obrázek 11.52
Pseudoelipsoid (11.3).

Zvolíme-li pseudosférické souřadnice

$$x = \varrho a \cos^{1/2}(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = \varrho b \cos^{1/2}(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = \varrho c \sin^{1/2}(\vartheta),$$

přechází v nich rovnice plochy (11.3) na úsporný tvar $\varrho = 1$. Zde je díky odmocnině nutno volit $\vartheta \in (0, \pi/2)$, což popisuje pouze horní polovinu uvažované pseudosféry. Z Gaussovy věty pak po krátkém výpočtu $\operatorname{div}(x|z|, y|z|, x|y|) = 2|z|$ plyne výchozí rovnost

$$\int_S x|z| dy dz + y|z| dz dx + x|y| dx dy = \iiint_V 2|z| d(x, y, z),$$

kde V je objem uzavřený plochou S . S hodnotou jacobíanu

$$\Delta = abc\varrho^2 \begin{vmatrix} \cos^{1/2}(\vartheta) \cos(\varphi) & -\frac{1}{2} \cos^{-1/2}(\vartheta) \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -\cos^{1/2}(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos^{1/2}(\vartheta) \sin(\varphi) & -\frac{1}{2} \cos^{-1/2}(\vartheta) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \cos^{1/2}(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin^{1/2}(\vartheta) & \frac{1}{2} \sin^{-1/2}(\vartheta) \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} abc\varrho^2 \sin^{-1/2}(\vartheta)$$

pak snadno vypočteme, že

$$\iiint_V 2|z| d(x, y, z) = 2abc^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \varrho^3 \sin^{1/2}(\vartheta) \sin^{-1/2}(\vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \pi^2 abc^2.$$

Kapitola 12

Neřešené příklady

V poslední kapitole skript nabízíme čtenářům soubor neřešených příkladů k samostatnému procvičování. Výsledky jednotlivých příkladů jsou uvedeny na konci kapitoly.

12.1 Zadání příkladů

Cvičení 1

Ukažte, že pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

jsou příslušné parciální limity v bodě $(0, 0)$ nulové, ale limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ neexistuje.

Cvičení 2

Vyšetřete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Cvičení 3

Ukažte, že funkce

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4}$$

nemá v bodě $(0, 0)$ limitu.

Cvičení 4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in M} \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3},$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y - e^{-x} + 1 = 0\}$.

Cvičení 5

Rozhodněte o spojitosti funkce

$$f(x, y) = \sin \left(\frac{\pi x}{2x + y} \right).$$

Cvičení 6

Zjistěte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

Cvičení 7

Vypočtete hodnotu limity funkce

$$f(x, y) = (1 + x)^{\frac{1}{x(1+xy)}}$$

v bodě $(x, y) = (0, a)$, kde $a \in \mathbf{R}$ je parametr, víte-li, že existuje.

Cvičení 8

Rozhodněte o spojitosti funkce $f(x, y) = |x|^y$ na množině $\mathbf{E}^2$.

Cvičení 9

Vyšetřete definiční obor funkce

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 8x - y^2}}.$$

Cvičení 10

Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} \frac{y}{x} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x+y}\right).$$

Cvičení 11

Vypočtete limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2},$$

víte-li, že existuje.

Cvičení 12

Pro parametr $a \in \mathbf{R}$ vypočtete limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{x},$$

víte-li, že existuje.

Cvičení 13

Rozhodněte o existenci limity funkce

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

v bodě $(0, 0)$.

Cvičení 14

Pro funkci $f(x, y, z) = xyz$ určete podle definice $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 1, 2)$.

Cvičení 15

Odvoďte tvar parciální derivace funkce $f(x, y, z) = xy^2 + xe^z + yx^2$ podle y v libovolném bodě (x_0, y_0, z_0) .

Cvičení 16

Pro funkci $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$ určete podle definice $\frac{\partial f}{\partial y}(9, 5)$.

Cvičení 17

Podle definice vypočtete

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\pi}{3}, 7\frac{\pi}{3} \right),$$

kde $f(x, y) = \sin(x) \cos^2(y)$.**Cvičení 18**Dokažte, že pro funkci $f(x, y) = xy + x \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ platí rovnost

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = xy + f(x, y).$$

Cvičení 19Pro funkci $f(x, y) = x^y y^x$, kde $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, dokažte rovnost

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y + \ln(f(x, y))) f(x, y).$$

Cvičení 20

Pro funkci

$$f(x, y) = \arctg\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$$

vypočtete $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$.**Cvičení 21**

Vypočtete

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

pro funkci $f(x, y, z) = e^{xyz}$.**Cvičení 22**

Přesvědčte se o záměnnosti smíšených partiálních derivací druhého řádu funkce

$$f(x, y) = \arctg(xy^2).$$

Diskutujte.

Cvičení 23

Vypočtete derivaci

$$\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}(x, y, z)}(\pi, \pi, 0)$$

funkce $f(x, y, z) = y \cos(2x - y - z)$.**Cvičení 24**Vypočtete partiální derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2 y^2 + x^2 z^2$ ve směru $\vec{s} = (1, 1, 1)$ v bodě $\vec{a} = (1, 2, 3)$.**Cvičení 25**Vypočtete partiální derivaci funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ v bodě $\vec{a} = (1, 2)$ ve směru kladné poloosy x^+ .

Cvičení 26

Je dána funkce $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^3 + y^2$. Určete směr a velikost nulové, resp. maximální směrové derivace v bodě $(1, 1)$.

Cvičení 27

Nechť $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, $\vec{a} \in \text{Dom}(f)$ a $c \in \mathbb{R}^+$. Nechť $\vec{s}$ je nenulový vektor z $\mathbb{E}^r$. Dokažte, že pro $\vec{r} = c\vec{s}$ platí rovnost

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{a}).$$

Cvičení 28

Nalezněte hodnotu třetí parciální směrové derivace funkce $f(x, y, z) = xye^{xz}$ ve směrech $\vec{s} = (1, 1, 0)$, $\vec{r} = (0, 1, 1)$ a $\vec{t} = (0, 1, 0)$ v bodě $(1, 112, 0)$.

Cvičení 29

Nechť je zadán funkční vektor $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 2x^2 + 3y^2, 4x^2 + 5y^2 + 6z^2)$. Vypočtete $\Delta \vec{F}$, kde Δ je Laplaceův operátor.

Cvičení 30

Nalezněte totální diferenciál pátého řádu funkce $f(x, y, z) = xy^2e^z$ v bodě $\vec{a} = (1, 1, 0)$.

Cvičení 31

Nalezněte totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = xy^2e^z$ v bodě $(3, 1, 0)$.

Cvičení 32

Určete rovnici tečné roviny k ploše $x^2 + y^2 - z = 0$ v bodě $\vec{a} = (1, 1, ?)$.

Cvičení 33

Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{R}$ a vektory funkcí $\vec{F}(\vec{x}), \vec{G}(\vec{x}) : \mathbb{E}^3 \mapsto \mathbb{E}^3$ mají na oblasti $G \subset \mathbb{E}^r$ spojitě derivace do druhého řádu včetně. Dokažte, že na G platí rovnosti:

- $\text{grad } f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$
- $\text{rot grad } f(\vec{x}) = \vec{0}$
- $\text{div rot } \vec{F}(\vec{x}) = 0$
- $\text{div grad } f(\vec{x}) = \Delta f(\vec{x})$
- $\text{rot rot } \vec{F}(\vec{x}) = \text{grad div } \vec{F}(\vec{x}) - \Delta \vec{F}(\vec{x})$
- $\text{div}(\vec{F}(\vec{x}) \times \vec{G}(\vec{x})) = \langle \vec{G}(\vec{x}) | \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) \rangle - \langle \vec{F}(\vec{x}) | \text{rot } \vec{G}(\vec{x}) \rangle$
- $\text{div}(f(\vec{x}) \vec{F}(\vec{x})) = f(\vec{x}) \text{div } \vec{F}(\vec{x}) + \langle \vec{F}(\vec{x}) | \text{grad } f(\vec{x}) \rangle$

Cvičení 34

Určete bodu dotyku a rovnici té tečné roviny k ploše $x^2 + ye^x - z = 0$, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

Cvičení 35

Výraz

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x+y}{1-x+y}\right)$$

rozviňte pro $|x| \ll 1$ a $|y| \ll 1$ do polynomu druhého stupně.**Cvičení 36**Pro funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{R}$ a pro vektor funkcí $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^3 \mapsto \mathbf{E}^3$ dokažte rovnost

$$\operatorname{rot}(f(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x})) = f(\vec{x}) \cdot \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) + \operatorname{grad} f(\vec{x}) \times \vec{F}(\vec{x}).$$

Cvičení 37Vypočtete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x, y) = \sin(2x + y)$ v bodě $\vec{a} = (0, \pi/4)$.**Cvičení 38**Nalezněte parciální směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ve směru, který svírá se zápornou částí osy x úhel 60° a s kladnou částí osy y úhel 30° , v bodě $\vec{a} = (3, 4)$.**Cvičení 39**Určete rovnici a bod dotyku té tečné roviny k ploše $z(x, y) = 2x^2 + 3y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $4x - 6y + z = 5$.**Cvičení 40**Vypočtete třetí diferenciál funkce $f(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z$ v obecném bodě $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.**Cvičení 41**Pomocí totálního diferenciálu vhodné funkce vypočtete přibližnou hodnotu čísla $4,07 \cdot 2,01^{2,97}$.**Cvičení 42**Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce $f(x, y, z) = x^3 yz$ v bodě $\vec{a} = (1, 2, -1)$.**Cvičení 43**

Pomocí vhodné Taylorovy řady druhého řádu vypočtete přibližně

$$\frac{1,03}{\sqrt[3]{0,98} \cdot \sqrt[4]{1,05^3}}.$$

Cvičení 44Funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg}(1 + xy)$ rozviňte v okolí bodu $(0, 0)$ do polynomu šestého stupně.**Cvičení 45**Vypočtete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ v bodě $\vec{a} = (0, \sqrt{\pi})$.**Cvičení 46**Užitím totálního diferenciálu vhodné funkce vypočtete přibližně $\sin(29^\circ) \cdot \operatorname{tg}(46^\circ)$.**Cvičení 47**

Ověřte, že funkce

$$f(x, y) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

kde $a, b \in \mathbf{R}$, je harmonická v $\mathbf{E}^2$.

Cvičení 48

Je dána funkce $f(x, y, z) = x^2 y z^3$ a funkční vektor $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, 2x^2 y)$. Vypočtěte grad $f(x, y, z)$, $\text{div} \vec{F}(x, y, z)$ a $\text{rot} \vec{F}(x, y, z)$.

Cvičení 49

Nechť je funkce $F(x, y, z)$ zadána jako složená funkce s vnější funkcí $F(u, v)$ a vnitřními funkcemi $u = u(x, y, z)$ a $v = v(x, y, z)$. Dokažte následující rovnosti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Cvičení 50

Vypočtěte přibližně číslo

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$$

pomocí příslušného Taylorova polynomu druhého stupně.

Cvičení 51

Zapište polynom druhého stupně, který pro $|x| \ll 1$ a $|y| \ll 1$ aproximuje výraz

$$\frac{\cos(x)}{\cos(y)}.$$

Cvičení 52

Funkci $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ rozložte do Taylorovy řady sestavené v bodě $\vec{a} = (1, -2)$.

Cvičení 53

V rozkladu funkce $f(x, y) = x^y$ v okolí bodu $\vec{a} = (1, 1)$ vypište členy do třetí mocniny včetně.

Cvičení 54

Rozložte funkci $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do Maclaurinova polynomu třetího stupně.

Cvičení 55

Rozložte funkci $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ do Maclaurinovy řady.

Cvičení 56

Hodnoty odporu dvou rezistorů jsou změřeny na $R_1 = (1000 \pm 1)\Omega$ a $R_2 = (750,0 \pm 0,2)\Omega$. Určete, v jakém intervalu se bude nacházet odpor rezistoru, který vznikne z uvedených dvou a) sériovým zapojením nebo b) paralelním zapojením.

Cvičení 57

V okolí bodu $(0, 0)$ nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(x, y) = \sin(x + y) - \sin(x - y)$.

Cvičení 58

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, kde $a > 0$ je parametr.

Cvičení 59

Určete všechny parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $z(x, y)$ v bodě $\vec{a} = (1, 0)$. Funkce $z(x, y)$ nechť je zadána rovnicí $x + y + z = e^z$.

Cvičení 60

Řešte předchozí příklad pro bod $\vec{a} = (-1, e)$, v němž $z(\vec{a}) = 1$.

Cvičení 61

Nalezněte Taylorovy polynomy prvního řádu v bodě $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a) = (1, -1, 0)$ všech funkcí, které jsou zadány soustavou

$$\begin{aligned} u^2 y^2 + v^2 x^2 - x^2 y^2 e^{2x+2y} &= 0, \\ vx - yu \operatorname{tg}\left(\frac{z}{x}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ověřte podmínku existence těchto funkcí na okolí vybraného bodu. Řešte pro $u > 0$.

Cvičení 62

Určete první a druhý totální diferenciál funkce $z(x, y)$, jež je zadána implicitně rovnicí $z^3 - 3yz^2 + 9xz + 2x - y = 0$, v bodě $\vec{a} = (1, 2)$.

Cvičení 63

Nalezněte totální diferenciál prvního a druhého řádu funkce $z(x, y)$ zadané na okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ vztahem

$$\frac{x}{z} = \ln\left(\frac{z}{y}\right).$$

Cvičení 64

Na množině $\{(x, y, u, v) \in \mathbf{R}^4 : u \in \mathbf{R}^+ \wedge v \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ je zadána soustava rovnic

$$x = u \cos\left(\frac{v}{u}\right), \quad y = u \sin\left(\frac{v}{u}\right).$$

Vypočítejte Taylorův polynom druhého stupně funkce $u(x, y)$ v bodě $\vec{a} = (0, 2)$.

Cvičení 65

Nalezněte Taylorovy řady prvního řádu funkcí $z(x, y)$, $u(x, y)$ a $w(x, y)$ zadaných implicitně soustavou rovnic

$$xy + y^2 + zy - u - yw = 0, \quad x^2 y + y^3 + zy + u - yw^2 = 0, \quad x^3 y^2 (x + 2y) + u^2 - z^2 w^2 = 0$$

na okolí jednoho z bodů: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0, u_0, w_0) = (0, 1, 0, 0, 1)$; $\vec{b} = (x_0, y_0, z_0, u_0, w_0) = (0, 0, 0, 0, 0)$; $\vec{c} = (x_0, y_0, z_0, u_0, w_0) = (1, 1, 1, 1, 2)$; $\vec{d} = (x_0, y_0, z_0, u_0, w_0) = (2, 1, 2, 1, 2)$.

Cvičení 66

Nalezněte totální diferenciál funkce $u(x, y, z)$ zadané implicitně rovnicí $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$ v bodě $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, -1)$.

Cvičení 67

Nechť jsou funkce $x(y, z)$, resp. $y(x, z)$, resp. $z(x, y)$ zadány implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Upřesněte ji.

Cvičení 68

Nalezněte Taylorovy polynomy prvního řádu funkcí zadaných implicitně rovnicemi

$$\begin{aligned}x + y + z + u &= 10, \\x^2 + y^2 - z^2 + u^2 &= 12, \\u^2 - z^2 + y - x &= 8\end{aligned}$$

v bodě $x = 1$. Rovnice necht' jsou zadány na množině $M := \{(x, y, z, u) \in \mathbb{E}^4 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge u > 0\}$.

Cvičení 69

Na základě platnosti věty o implicitních funkcích stanovte, jaké největší, resp. nejmenší hodnoty může nabývat proměnná z vyhovující rovnostem $x^2 + y^2 = 2$, $x + y + z = 5$.

Cvičení 70

Necht' jsou v prostoru $\mathbb{E}^4$ zadány rovnice

$$x_1 e^{y_2} + y_1 \ln(x_2) - e = 0, \quad x_1 y_1 + x_2 e^{y_2} - 2 - e = 0.$$

Vypočtete $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, 1)$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(1, 1)$.

Cvičení 71

Pro předchozí příklad hledejte $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1, 1)$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}(1, 1)$.

Cvičení 72

Necht' rovnice $z^3 - 2xz + y = 0$ zadává implicitně funkci $z(x, y)$, pro níž $z(1, 1) = 1$. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu této funkce v bodě $(1, 1)$.

Cvičení 73

Nalezněte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ v bodě $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pro funkce zadané implicitně soustavou

$$xu - yv = 0, \quad yu + xv = 1.$$

Cvičení 74

Vypočtete $y'(x)$ a $y''(x)$, je-li $\ln(x^2 + y^2) = 2 \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$. Pokuste se načrtnout grafy implicitní funkce $y = y(x)$.

Cvičení 75

Necht' je funkce $z(x, y)$ implicitně zadána rovnicí $z^3 + xz - 2y = 0$. Nalezněte $dz_{(-3,1)}(x, y)$ a $d^2z_{(-3,1)}(x, y)$.

Cvičení 76

Soustava rovnic $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$, $f = xy^2z^3$ zadává na okolí bodu $\vec{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$ funkci $f(x, y)$. Vypočtete její totální diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $\vec{a} = (1, 1)$.

Cvičení 77

Necht' je funkce $z(x, y)$ zadána na okolí bodu $\vec{\lambda} = (x_0, y_0, z_0, u_0 = 2, v_0 = 1)$ soustavou rovnic

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3, \quad z = 2uv.$$

Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $z(x, y)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0)$ a hodnotu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Cvičení 78

Vypočtete Taylorovy polynomy prvního stupně funkcí zadaných rovnicemi

$$xe^{u+v} + 2uv = 1,$$

$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$$

v bodě $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Stanovte, zda-li uvedené rovnice tyto implicitní funkce na okolí bodu $\vec{\lambda} = (1, 2, 0, 0)$ zadávají a proč.

Cvičení 79

Nalezněte totální diferenciály funkcí zadaných na okolí bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 2, 2, 1)$ rovnicemi

$$\begin{aligned} xu^2 + yu^2v^4 &= v^2(x+y)^2, \\ u^4 - 2y^2v^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

v bodě (x_0, y_0) .

Cvičení 80

Pro funkci $y(x)$ zadanou vztahem $x^y = y^x$ dokažte rovnost

$$y' = \frac{y^2(1 - \ln(x))}{x^2(1 - \ln(y))}.$$

Cvičení 81

V bodě $z = 2$ nalezněte první a druhou derivaci funkcí zadaných na okolí bodu $\vec{\lambda} = (1, -1, 2)$ rovnicemi

$$2x^2 + 2y^2 = z^2, \quad x + y + z = 2.$$

Cvičení 82

Soustava rovnic $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ zadává na okolí bodu $\vec{\lambda} = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (?, ?, ?, 1, 0)$ funkci $z(x, y)$. Vypočtete její diferenciál prvního a druhého řádu v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0)$.

Cvičení 83

Určete totální diferenciály funkcí definovaných soustavou

$$e^{u/x} \cos\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{u/x} \sin\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

v bodě $\vec{a} = (a_x, a_y) = (1, 1)$, v němž platí $u(\vec{a}) = 0$ a $v(\vec{a}) = \frac{\pi}{4}$.

Cvičení 84

Nechť jsou funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ zadány implicitně rovnicemi

$$u + v = x + y, \quad \frac{\sin(u)}{\sin(v)} = \frac{x}{y}.$$

Dokažte rovnost

$$dv = \frac{-(\sin(v) - y \cos(u)) dx + (\sin(u) + y \cos(u)) dy}{x \cos(v) + y \cos(u)}.$$

Cvičení 85

Vypočtete první a druhý totální diferenciál funkce $z(x, y)$ zadané rovnicí

$$z = x + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z-x}\right).$$

Cvičení 86

Rovnici

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

převeďte transformací $\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Diskutujte regularitu zadané transformace.

Cvičení 87

Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

pro funkci $z(x, y)$ převeďte na parciální diferenciální rovnici pro novou funkci $w(u, v)$ nových nezávisle proměnných u, v . Transformace je zadána soustavou rovnic

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}.$$

Stanovte maximální množinu, na níž je zadaná transformace regulární.

Cvičení 88

Substituuje parciální diferenciální rovnici

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

pro neznámou funkci $z = z(x, y)$ transformačními vztahy $x = \sin(u)$, $y = \sin(v)$, $z = e^w$, kde $w = w(u, v)$.

Cvičení 89

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

vztahy

$$u = x + y, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Stanovte maximální množinu, na níž je zadaná transformace regulární.

Cvičení 90

Rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

transformujte vztahy $\xi = \frac{y}{x}$ a $\eta = x$.

Cvičení 91

Substituuje parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{4xy^2}{x^2 - y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

pro neznámou funkci $u = u(x, y)$ transformačními vztahy

$$\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = 2xy, \quad w = \frac{u}{xy},$$

kde $w = w(\xi, \eta)$ je nová funkce. Stanovte, kde lze uvedenou transformaci provést.

Cvičení 92

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y^3 \frac{\partial f}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

převeďte substitucí $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$ na nejjednodušší možný tvar.

Cvičení 93

Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

pro neznámou funkci $u(x, y)$ transformujte vztahy $\xi = y^2 e^{-x}$ a $\eta = y e^{-x}$.

Cvičení 94

Parciální diferenciální rovnici

$$\sin^2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2y \sin(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

pro funkci $f(x, y)$ převeďte do nových nezávisle proměnných $\xi = y \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ a $\eta = y$. Stanovte, na jaké množině je zadaná transformace regulární.

Cvičení 95

Parciální diferenciální výraz

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

pro funkci $f(x, y, z)$ převeďte do sférických souřadnic. Stanovte, na jaké množině je zadaná transformace regulární a prostá.

Cvičení 96

Parciální diferenciální rovnici

$$\operatorname{tg}^2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

pro neznámou funkci $f(x, y)$ transformujte do nových nezávisle u, v , zavedených transformačními vztahy $u = y \sin(x)$ a $v = y$.

Cvičení 97

Nechť je zadána transformace $(x, y, z) = \Phi(\varrho, \vartheta, \varphi)$ vztahy

$$x = \varrho \cos^4(\vartheta) \cos^4(\varphi), \quad y = \varrho \cos^4(\vartheta) \sin^4(\varphi), \quad z = \varrho \sin^4(\vartheta).$$

Nalezněte jacobíán zobrazení Φ , a to v co nejkompaktnějším tvaru; maximální množinu M , na níž je Φ regulární a prosté; obraz $\Phi(M)$ množiny M při zadaném zobrazení Φ ; číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro $\varrho = 1$ platí $(x, y, z) \in \Phi(M) \Rightarrow x^a + y^a + z^a = 1$.

Cvičení 98

Do rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + f = 0$$

dosad'te vztah $f(\vec{x}) = g(\vec{x})e^{\mu x_3}$. Určete číslo $\mu \in \mathbf{R}$ tak, aby výsledek byl co nejjednodušší.

Cvičení 99

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

pro neznámou funkci $f(x, y)$ transformujte do nových nezávisle proměnných ϱ, φ , zavedených transformačními vztahy $x = \varrho \cos^2(\varphi)$, $y = \varrho \sin^2(\varphi)$. Stanovte maximální množinu, na níž je zadaná transformace regulární a prostá.

Cvičení 100

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$5x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 6xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{2x+y}{x+y} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} \frac{x+2y}{x+y} = 0$$

do nových souřadnic $x = \varrho^2 \operatorname{tg}(\varphi)$ a $y = \varrho^2 \operatorname{cotg}(\varphi)$.

Cvičení 101

Do rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} = 0$$

zaved'te nové proměnné $x = \varrho \cos(\varphi)$ a $y = \varrho \sin(\varphi)$ na množině $M = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$.

Cvičení 102

Rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

pro funkci $z(x, y)$ запиšte v nových proměnných $u = x + y$, $v = x - y$ a $w = xy - z$.

Cvičení 103

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

do nových souřadnic x a y , které jsou definovány rovnostmi $\xi = e^{x^2+y^2}$, $\eta = e^{xy}$. Dále stanovte maximální množinu, na níž je zadaná transformace regulární.

Cvičení 104

Výraz

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

převeďte do nových proměnných u, v, w , pro které platí $u = xe^z$, $v = ye^z$ a $w = ze^z$, kde $w(u, v)$ je nově zaváděná funkce.

Cvičení 105

Transformujte Laplaceův operátor do cylindrických souřadnic.

Cvičení 106

Parciální diferenciální rovnici

$$4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

převeďte v oblasti $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ na normální tvar substitucí popsanou substitučními vztahy $\xi = y^2 + e^x$ a $\eta = y^2 - e^x$.

Cvičení 107

Transformujte rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

do proměnných $\xi = xy$ a $\eta = \frac{y}{x}$.

Cvičení 108

Rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

převeďte do proměnných u, v , pro které platí $v = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ a $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

Cvičení 109Nalezněte maximální množinu M , na níž je transformace $(u, v) = \Phi(x, y)$ zadaná vztahy

$$u = y \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad v = y,$$

regulární a prostá. Dále nalezněte obraz $\Phi(M)$ množiny M .

Cvičení 110

V rovnici

$$y''''(y')^2 - 10y'y''y''' + 15(y'')^3 = 0$$

proved'te záměnu nezávisle proměnné za závislou.

Cvičení 111

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

do polárních souřadnic jako transformaci prvního druhu.

Cvičení 112

Transformujte Laplaceův operátor do sférických souřadnic.

Cvičení 113

Substituuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

transformačními vztahy $\xi = \sqrt{y} + \frac{1}{3} \sqrt{-x^3}$ a $\eta = \sqrt{y} - \frac{1}{3} \sqrt{-x^3}$.

Cvičení 114

Nechť $a > 1$ je parametr. Nalezněte maximální množinu, na níž je níže uvedená transformace $(x, y, z) \mapsto (r, \varphi, \vartheta)$

$$x = r \cos^a(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = r \cos^a(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = r \sin^a(\vartheta)$$

regulární a prostá. Regularitu dokažte. Dále určete jacobíán zadaného zobrazení, a to v co nejkompaktnějším tvaru.

Cvičení 115

Do parciální diferenciální rovnice

$$xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

zaveďte nové nezávisle proměnné

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad v = xy.$$

Cvičení 116

Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Existuje regulární transformace $(x, y) \mapsto (r, s)$ taková, že pro libovolnou funkci $f(x, y) : \mathbb{E}^2 \mapsto \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}.$$

Všechna tvrzení řádně zdůvodněte!

Cvičení 117

Převeďte rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

do nových souřadnic ξ, η , pro které platí $x = e^{\xi+\eta}$ a $y = e^{\xi-\eta}$.

Cvičení 118

Upravte rovnici

$$y''' y' - 3(y'')^2 = x$$

tím, že budete považovat y za novou nezávisle proměnnou a x za novou neznámou funkci.

Cvičení 119

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cos(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2(x)) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

vztahy $\xi = y + 2x + \sin(x)$ a $\eta = y - 2x + \sin(x)$.

Cvičení 120

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y).$$

Cvičení 121

Nalezněte lokální extrémy funkce $z(x, y)$, zadané implicitně rovnicí $8x^2 + y^2 + 7z^2 + 4xy - 12xz - 4yz = 8$.

Cvičení 122

Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{2x + 2y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

Cvičení 123

Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = \sin(x) \sin(2y) \sin(3z)$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : 2x + 4y + 6z = \pi \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}.$$

Cvičení 124

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y) + \cos(x - y)$ na množině $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Cvičení 125

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ vázané vazbou $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Cvičení 126

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $u = u(x, y)$ zadané implicitně rovnicemi

$$\begin{aligned} x + y + u + v &= 6, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 &= 12 \end{aligned}$$

a stanovte korektně jejich typ.

Cvičení 127

Nalezněte všechny globální extrémy funkce $f(x, y) = xy \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ na jejím definičním oboru.

Cvičení 128

Nalezněte všechny vázané extrémy funkce $u = xyz$, když vazbou je plášť koule o poloměru $\sqrt{3}$ se středem v počátku souřadného systému $Oxyz$.

Cvičení 129

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2y^2 + 12yz + 2z^2 - 2x^2$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Cvičení 130

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$ na množině

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 = 2 \wedge x + y + z = 5\}.$$

Cvičení 131

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$.

Cvičení 132

Nechť $0 < a < b < c$. Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ na vazbě

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cvičení 133

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 5$ na $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

Cvičení 134

Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z)$ na množině

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2} \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \right\}.$$

Cvičení 135

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na uzavřeném obdélníku s vrcholy $\vec{d}_1 = (0, -1)$, $\vec{d}_2 = (2, -1)$, $\vec{d}_3 = (2, 2)$ a $\vec{d}_4 = (0, 2)$.

Cvičení 136

Číslo $c \in \mathbf{R}$ rozložte na tři sčítance tak, aby součet jejich čtverců byl minimální.

Cvičení 137

Vyšetřete supremum a infimum funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ a stanovte všechny body, v nichž tyto extrémy nastávají. Množinu M načrtněte.

Cvičení 138

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

platí-li pro parametry nerovnost $0 < a < b$.

Cvičení 139

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} -yx + \ln|xy| & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : 2x^2 + 2y^2 = 1\}$.

Cvičení 140

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 = 2 \wedge y + z = 2 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$.

Cvičení 141

Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

platí-li pro parametry $a, b, c \in \mathbf{R}$ nerovnice $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Cvičení 142

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Cvičení 143

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

na jejím definičním oboru.

Cvičení 144

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = xy^2z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$.

Cvičení 145

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ a stanovte jejich typ.

Cvičení 146

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = e^{x+y-1}(2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1)$ na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Cvičení 147

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $z(x, y)$ definované implicitně rovnicí

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Cvičení 148

Vypočtěte

$$\int_M \frac{x}{y} \, d(x, y),$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : 0 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq e\}$.

Cvičení 149

Vypočtěte

$$\int_M 12(x + y)^2 \, d(x, y),$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$.

Cvičení 150

Vypočtěte obsah elipsy o poloosách $a, b \in \mathbf{R}^+$.

Cvičení 151

Vypočtěte

$$\int_M (x^2 + y) \, d(x, y),$$

kde M je omezená množina v rovině ohraničená parabolami $y = x^2$ a $x = y^2$.

Cvičení 152

Vypočtete

$$\int_M 4y(y-x) \, d(x,y),$$

kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : 0 < y \leq x \leq 2 \wedge xy \geq 1\}.$$

Cvičení 153Nechť je zadán interval $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 3, 4 \rangle$ a jeho dělení $\mathcal{D}_n = \{S_{ij} : i, j \in \widehat{n-1}\}$, kde

$$S_{ij} = \left\langle \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right\rangle \times \left\langle 3 + \frac{j}{n}, 3 + \frac{j+1}{n} \right\rangle.$$

Pro funkci $f(x,y) = x + y$ vypočtete (podle definice Riemannova integrálu) horní a dolní integrální součet $U(\mathcal{D}_n, f(x,y))$, resp. $L(\mathcal{D}_n, f(x,y))$ a s jejich pomocí poté vypočtete $(\mathcal{R}) \iint_I f(x,y) \, d(x,y)$.**Cvičení 154**

Vypočtete obsah plochy

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^3 \leq \frac{xy}{c^2} \right\},$$

kde a, b, c jsou pozitivní parametry úlohy.**Cvičení 155**

Vypočtete integrál

$$\int_{\mathbf{R}^2} \cos(x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} \, d(x,y).$$

Cvičení 156Vypočtete obsah plochy ohraničené křivkami $y = 0$ a

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^{10} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

jsou-li a, b kladné parametry.**Cvičení 157**Určete obsah rovinné uzavřené oblasti ohraničené křivkami $y^2 = 2px + p^2$ a $y^2 = -2qx + q^2$, kde $p, q \in \mathbf{R}^+$.**Cvičení 158**Určete meze integrálu (pro obojí pořadí integrování) $\int_M f(x,y) \, d(x,y)$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : 0 < y \leq 2 \wedge y \leq x \leq 2y - 1\}.$$

Cvičení 159

Vypočtete obsah plochy ohraničené křivkou

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbf{E}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (x^{2/3} + y^{2/3})^{7/2} = a^2 (x^{1/3} - y^{1/3}) \right\}$$

a kladnou částí osy x . Parametr a necht' je kladný.

Cvičení 160

Zaměňte integrační pořadí

$$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Cvičení 161

Pomocí věty o substituci určete obsah plochy ohraničené elipsou

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

kde $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

Cvičení 162

Zaměňte pořadí integrování v integrálu

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Cvičení 163

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \sqrt{x}$ a $y = \sqrt{2x}$.

Cvičení 164

Zaměňte pořadí integrování v integrálu

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Cvičení 165

Vypočtěte obsah plochy, která vznikne průnikem množin

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Parametry a, b nechť jsou kladné.

Cvičení 166

Vypočtěte obsah množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : (x^2 + y^2)^{5/2} \leq a^2(x^3 - xy^2) \right\},$$

kde a je kladný parametr.

Cvičení 167

Nalezněte těžiště čtvrtkruhu o poloměru r .

Cvičení 168

Vypočtěte

$$\int_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, d(x, y),$$

kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

pro $a > 0$ a $b > 0$.

Cvičení 169

Vypočtete obsah množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 3 \wedge 3x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Cvičení 170Nalezněte souřadnice těžiště homogenní desky ohraničené křivkami $ay = x^2$ a $x + y = 2a$, kde $a > 0$ je parametr.**Cvičení 171**Nalezněte x -ovou souřadnici těžiště pro oblast ohraničenou křivkami $y = 3 - x^2$ a $y = 2x - 5$.**Cvičení 172**Nalezněte souřadnice těžiště homogenní desky ohraničené křivkami $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$ a $y = 0$.**Cvičení 173**Pro obecné parametry $a, b \in \mathbb{R}^+$ vypočtete obsah plochy, která je ohraničena křivkou

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = x \quad (x > 0 \wedge y > 0)$$

a kladnou částí osy x .**Cvičení 174**

Vypočtete obsah plochy ohraničené křivkou

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$$

pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.**Cvičení 175**Nalezněte souřadnice těžiště homogenní desky ohraničené křivkami $x + y - 4 = 0$ a $2y - x^2 = 0$.**Cvičení 176**

Vypočtete

$$\int_A e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} d(x, y),$$

kde

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1\right\}.$$

Cvičení 177

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k},$$

kde $a, b, h, k \in \mathbb{R}^+$.**Cvičení 178**

Ověřte regularitu zobecněných pseudopolárních souřadnic.

Cvičení 179

Nalezněte souřadnice těžiště homogenní desky ohraničené křivkou

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

v prvním kvadrantu. Konstanta a necht' je kladná.

Cvičení 180

Vypočtete $\int_A d(x, y, z)$, kde $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge z \leq 1 + x + y\}$.

Cvičení 181

Vypočtete

$$\int_A \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} d(x, y, z),$$

kde $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

Cvičení 182

Užitím pseudosférických souřadnic vypočtete objem tělesa ohraničeného v $\mathbf{E}^3$ plochou o rovnici

$$\sqrt{\frac{|x|}{a}} + \sqrt{\frac{|y|}{b}} + \sqrt{\frac{|z|}{c}} = 1.$$

Parametry a, b, c jsou kladná reálná čísla.

Cvičení 183

Necht' $a, b \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry. Vypočtete integrál

$$I = \iiint_A \left(x^2 + \frac{y^2}{b^2} \right) d(x, y, z),$$

kde $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : b^2 x^2 + y^2 + b^2 z^2 \leq 2xab^2\}$.

Cvičení 184

Necht' $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ a $v > c$ jsou parametry. Vypočtete objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq -1 \wedge 0 \leq z \leq v \right\}.$$

Cvičení 185

Vypočtete

$$\int_M xyz \, d(x, y, z),$$

kde

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x \geq 1 \wedge y \geq 1 \wedge z \geq 1 \wedge xyz \leq 2\}.$$

Cvičení 186

Vypočtete objem elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

kde $a, b, c \in \mathbf{R}^+$.

Cvičení 187

Nechť $v > 0$. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 - 2z \leq 0 \wedge z \leq v\}.$$

Cvičení 188

Nechť $a, b, c, v \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge |z| \leq \frac{v}{2} \right\}.$$

Cvičení 189

Vypočtěte

$$\int_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} d(x, y, z),$$

kde $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2\}$. Parametr r je vybrán z množiny $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 190

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte integrál $\int_M z d(x, y, z)$, kde

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge z \geq 0 \right\}.$$

Cvičení 191

Nechť $r > 0$ je parametr. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$z = e^{-x^2-y^2}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Cvičení 192

Vypočtěte integrál

$$\iiint_{\mathbf{E}^3} e^{-x^2-y^2-z^2} d(x, y, z).$$

Cvičení 193

Nechť $a, b > 0$. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \wedge |y| \leq b \wedge 0 \leq z \leq x^2|y| \right\}.$$

Cvičení 194

Nechť a, b, v jsou kladné parametry. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \sqrt{\frac{|x|}{a}} + \sqrt{\frac{|y|}{b}} \leq 1 \wedge |z| \leq \frac{v}{2} \right\}.$$

Cvičení 195

Odvoďte vzorec pro objem rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v .

Cvičení 196

Nechť $a > 0$. Vypočtěte objem tělesa $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z\}$.

Cvičení 197

Nalezněte těžiště oblasti vymezené plochami

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x + y = -1, \quad x - y = 1, \quad y - x = 1, \quad z = 0.$$

Cvičení 198

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivky

$$z(x) = \sin(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

kolem osy z .

Cvičení 199

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry. Vypočítejte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 \leq 6xyz \right\}.$$

Cvičení 200

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^+$. Pomocí vhodně definovaného souřadného systému vypočítejte objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Cvičení 201

Vypočítejte objem kulového vrchlíku o výšce v vyřízlého z koule o poloměru r .

Cvičení 202

Vypočítejte objem rotačního jednodílného hyperboloidu

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1 \wedge |z| \leq v \right\},$$

kde v je kladný parametr.

Cvičení 203

Vypočítejte integrál $\int_T 15y^2 \, d(x, y, z)$, kde

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax + 2by + 2cz \right\},$$

jsou-li a, b, c kladná čísla.

Cvičení 204

Spočítejte

$$\int_T (x + y + z) \, d(x, y, z),$$

kde T je koule o poloměru $r > 0$ se středem v bodě $(a, b, c) \in \mathbf{E}^3$.

Cvičení 205

Nalezněte těžiště oblasti

$$O = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \right\},$$

kde $a, b, c > 0$.

Cvičení 206

Vypočtete objem tělesa ohraničeného plochami $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cvičení 207

Nechť je dáno těleso

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Rovina určená body $\vec{a} = (-1, 0, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ a $\vec{c} = (1, 0, \lambda)$ rozděluje těleso na dvě části. Vypočtete jejich objem a stanovte hodnotu parametru $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, aby se zmíněné objemy rovnaly.

Cvičení 208

Vypočtete jacobíán čtyřrozměrných sférických souřadnic z příkladu 9.3.28.

Cvičení 209

Vypočtete objem tělesa $A = \{(x, y, u, v) \in \mathbf{E}^4 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge u^2 + v^2 \leq s^2\}$, kde $r, s \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry.

Cvičení 210

Vypočtete objem čtyřrozměrného eliptického eliptikonu

$$K = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbf{E}^4 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{u^2}{d^2} \leq 1 \right\},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry.

Cvičení 211

Dokažte větu 6.1.11.

Cvičení 212

Dokažte větu 6.1.14.

Cvičení 213

Dokažte v analogii k příkladu 9.1.18, že Jordanova-Peanova míra jednoprvkové množiny $M = \{a_1, a_2\}$ je nulová.

Cvičení 214

Převeďte Laplaceův operátor do souřadnic $x = 1 + \varrho \sin(2\varphi)$, $y = \varrho \cos(2\varphi)$. Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

Cvičení 215

Na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 9\}$ vyšetřete extrémy funkce $f(x, y, z) = 4z - 2x + y$.

Cvičení 216

Nalezněte takovou tečnou rovinu k ploše $y^2 + 5z^2 + 4yz - 2x - 10y - 4z = 3$, která je rovnoběžná s rovinou $3x + 9y - 3z = 1$.

Cvičení 217

Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \vec{0}} \frac{3x^3y^3}{4x^4 + y^{12}}.$$

Cvičení 218

Do parciální diferenciální rovnice

$$3x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

zaveďte nové proměnné $r = \frac{y^3}{x}$ a $s = xy$. Nalezněte příslušnou maximální množinu regularity.

Cvičení 219

Jaký úhel svírají derivace funkcí

$$f(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4(y - 2)^2 + \sqrt{3}y + \sin(z)$$

$$g(x, y, z) = x^y + \sin(2z)$$

v bodě $(1, 2, \frac{\pi}{2})$?

Cvičení 220

Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x, y)$, jež je zadána implicitně rovnicí

$$x^2 + 3y^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz + 10yz + z = 1.$$

Cvičení 221

Dokažte, že funkce

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + x + 4y$$

nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.

Cvičení 222

Vyšetřete lokální extrémy funkce $z(x, y)$, jež je zadána implicitně rovnicí

$$x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy + 2xz - 2yz + z = 1.$$

Cvičení 223

Pod jakým úhlem (ve stupních) stoupá (či klesá) graf funkce

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 6y^2 + 5x + (4 + 3\sqrt{2})y + 8z^2$$

ve směru $(1, -\sqrt{2}, 0)$ v bodě $(2, -1, 1)$.

Cvičení 224

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

transformujte do nových proměnných

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

Cvičení 225

Na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : y^2 + z^2 = 5\}$ vyšetřete extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz - 4x - 8y - 4z + 2.$$

Cvičení 226

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

transformujte do nových proměnných $r = x^2 \cos(y)$, $s = x^2 \sin(y)$.

Cvičení 227

Nalezněte úplný Maclaurinův rozvoj funkce $f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$. Výsledek upravte do jediné dvojsomy. Dále stanovte obor konvergence získané řady a jeho podobu podrobně načrtněte.

Cvičení 228

Parciální diferenciální rovnici

$$6 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 5y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4e^{2x} y^5 \frac{\partial f}{\partial x} + (y - 2y^6 e^{2x}) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

transformujte do nových proměnných $r = y^2 e^x$, $s = y^3 e^x$.

Cvičení 229

Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 e^{-x^2} - y^2 + 2yz - 2z^2 + 6y - 2z$.

Cvičení 230

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte třírozměrnou míru (objem) množiny

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} \leq \frac{z^2}{c^2} \wedge z \geq 0 \right\}$$

a z -ovou souřadnici jejího těžiště.

Cvičení 231

Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^3 = \sqrt{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}, \quad y = 0.$$

Cvičení 232

Vypočtěte těžiště množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^4}{b^4} \leq 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \right\}.$$

Užijte nápovědy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} dx \doteq \frac{3}{2}\pi.$$

Cvičení 233

Pro dvojný integrál

$$\int_0^2 \int_0^{2^{x+1}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_2^4 \int_0^{16-4x} f(x, y) \, dy \, dx$$

zameňte integrační pořadí.

Cvičení 234

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete třírozměrnou míru (objem) množiny

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right\}.$$

Cvičení 235

Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete dvojrozměrnou míru (obsah) množiny

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right)^{3/2} \leq \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4} \right\}.$$

Cvičení 236

Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete integrál

$$\int_A |xy| \, d(x, y),$$

kde

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \right)^{3/2} \leq \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4} \right\}.$$

Cvičení 237

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete třírozměrnou míru (objem) množiny

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \right\}$$

a y -ovou souřadnici jejího těžiště.

Cvičení 238

Nechť a, b, c jsou kladné parametry. Vypočtete třírozměrnou míru (objem) tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leq z \exp \left[-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \right] \right\}.$$

Cvičení 239

Nechť $a, b > 0$. Určete dvojrozměrnou míru (obsah) oblasti, ohraničené křivkou

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^{20} = 16 \frac{xy}{ab}.$$

Zadanou křivku načrtněte!

Cvičení 240

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtete třírozměrnou míru (objem) tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1 \right\}.$$

Cvičení 241

Vypočtete obsah plochy ohraničené uzavřenou křivkou $x^2 + 4xy + 13y^2 + 2x - 8y + 5 = R^2$, kde $R > 0$ je parametr. Užijte větu o substituci a základní poznatky o kuželosečkách.

Cvičení 242

Nalezněte lokální extrémy implicitní funkce $u(x, y)$ definované rovnicí

$$u^3 + 3u^2 + 2u(x + y)^2 + 4(x + 2)^2 + 4(y - 2)^2 = 4.$$

Cvičení 243

Za pomoci substituce $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$ řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + 8x^2 y^2) \left(x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Cvičení 244

Vyšetřete extrémy funkce $u(x, y, z)$ zadané rovnicí $x + y^2 + 4z + xze^u + 4e^{-u} = u$.

Cvičení 245

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete třírozměrnou míru (objem) tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\left| \frac{x}{a} \right|} + \sqrt{\left| \frac{y}{b} \right|} + \sqrt{\left| \frac{z}{c} \right|} \right)^7 \leq \sqrt{\left| \frac{x}{a} \right|} - \sqrt{\left| \frac{y}{b} \right|} \right\}.$$

Cvičení 246

Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Transformujte Laplaceův operátor z kartézských souřadnic (x, y, z) do pseudo-cylindrických souřadnic (ϱ, φ, h) zadaných rovnicemi $x = a + \varrho^2 \cos(\varphi)$, $y = b + \varrho^2 \sin(\varphi)$, $z = ch^2$.

Cvičení 247

Vypočtete $\iiint_T |z| \, d(x, y, z)$, kde

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left[\left(\frac{x^2}{a^2} \right)^{1/3} + \left(\frac{y^2}{b^2} \right)^{1/3} + \left(\frac{z^2}{c^2} \right)^{1/3} \right]^7 \leq \left(\frac{x^2}{a^2} \right)^{1/3} + \left(\frac{y^2}{b^2} \right)^{1/3} - \left(\frac{z^2}{c^2} \right)^{1/3} \right\}.$$

Cvičení 248

Sestavte úplný Taylorův rozvoj funkce $f(x, y) = ye^{2x+y}$ v bodě $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.

Cvičení 249

Nalezněte hodnoty reálných konstant $a, b \in \mathbf{R}$, pro něž transformace

$$\xi = ay - x, \quad \eta = x - by, \quad g = \frac{f}{y}$$

převádí parciální diferenciální rovnici pro funkci $f(x, y)$

$$6y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 5y \frac{\partial f}{\partial x} - 2y \frac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0$$

na rovnici

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

pro neznámou funkci $g(\xi, \eta)$.

Cvičení 250

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = \sin(2x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(2z)$ na množině

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : 4x + 2y + 4z = \pi \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}.$$

Cvičení 251

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte těžiště množiny

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} \leq \frac{z}{c} \right\}.$$

Užijte faktu, že

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2/3}(x) \, dx = \frac{5}{8} \sqrt{\pi}.$$

Cvičení 252

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 6y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 8y \leq 15\}$.

Cvičení 253

Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

transformujte do souřadnic $x = \varrho \cos(\varphi)$, $y = \varrho \sin(\varphi)$ a $z = h^2$.

Cvičení 254

Pro funkci $z(x, y)$, jež je implicitně zadána soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 16u &= 22, \\ z^3 - 2z^2y - 4xyz + 8x^2y^2 &= 0, \end{aligned}$$

určete hodnotu Laplaceova operátoru Δz v bodě $\vec{a} = (1, 1)$.

Cvičení 255

Nalezněte Maclarinovu řadu funkce

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(y+1)^2}$$

a určete její obor konvergence.

Cvičení 256

Na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

vyšetřete extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2\sqrt{2}y$. Dále stanovte hodnoty těchto extrémů.

Cvičení 257

Vymyslete funkci, pro níž existuje právě šest partiálních limit v bodě $\vec{0}$, a to s hodnotami 1, 1, 4, 4, 7, 7.

Cvičení 258

Pro kladná x a y vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{3}}.$$

Cvičení 259

Transformujte výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

do pseudosférických souřadnic $x = \varrho \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi)$, $y = \varrho \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi)$, $z = \varrho \sin(\vartheta)$.

Cvičení 260

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\cos^2(x) - \sin^2(y) + \sin(x + y)}$$

na množině $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Cvičení 261

Nalezněte lineární aproximaci funkce $z(x, y)$ v bodě $\vec{a} = (1, 1)$, je-li $z(x, y)$ zadána rovnicí $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$.
Dále vypočtěte hodnotu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\vec{a})$.

Cvičení 262

Pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 y \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^6 + y^2} + 4y; & (x, y) \neq \vec{0}; \\ 0; & (x, y) = \vec{0}; \end{cases}$$

vypočtěte podle definice partiální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})$. Dále rozhodněte, má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $\vec{a} = \vec{0}$ totální diferenciál.

Cvičení 263

Nechť $a, b, c > 0$. Transformujte operátor

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

do zobecněných cylindrických souřadnic $x = a\varrho \cos(\varphi)$, $y = b\varrho \sin(\varphi)$, $z = c\hbar$.

Cvičení 264

Partiální diferenciální rovnici

$$9y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 24x \sqrt{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

substituuje transformačními vztahy $\xi = x^2 + y^{3/2}$, $\eta = y$. Stanovte příslušnou maximální množinu regularity zadaného zobrazení a výsledek transformace upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

Cvičení 265

Nechť je zadána funkce

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 4\sqrt{11} \frac{x^2 \sqrt{yz}}{2x^2 + y^2 + z^2}; & (x, y, z) \neq \vec{0} \wedge yz > 0; \\ 0; & (x, y, z) = \vec{0} \vee yz \leq 0; \end{cases}$$

Pod jakým úhlem stoupá tečna (vedená ve směru $\vec{s} = (1, 3, 1)$) ke grafu funkce $f(x, y, z)$ v bodě $\vec{0}$?

Cvičení 266

Na množině $M = \{(x, y, z, u) \in \mathbf{E}^4 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge u > 0 \wedge y^2 + 9z^2 = 18 \wedge xu = 4\}$ vyšetřujte lokální extrémy funkce $f(x, y, z, u) = x^2 + 4xu + y + 16u^2 + 3z$.

Cvičení 267

Pro funkci

$$f(x, y, z) = \frac{64}{x + 2y^2 + \sqrt{z}}$$

sestavte příslušný Taylorův polynom druhého stupně v bodě $\vec{a} = (3, 0, 1)$.

Cvičení 268

Pro funkci

$$f(x, y) = \sqrt{2y(1 - 2x) - x^2 - 5y^2}$$

určete, čemu je roven obor hodnot $\text{Ran}(f)$.

Cvičení 269

Nalezněte tečnou rovinu $\wp$ k ploše

$$2x(1 + x) - 2y(3x - 1) + 6y^2 + 2xz - 4yz + z^2 = -4$$

v jejím bodě $(-3, -2, 0)$. Zjistěte dále, existuje-li na uvedené ploše bod (kromě výše uvedeného), v němž je příslušná tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\wp$.

Cvičení 270

Rozhodněte, zda funkce $z(x, y)$ zadaná rovnicí

$$(x^4 - y^4 + z^4)^2 = 3z^4 + 4x^4$$

stoupá v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ve směru $\vec{s} = (-2, 2)$ strměji než 45° .

Cvičení 271

Pro funkci $f(x, y) = \sqrt{1 + y^2 + 2x}$ vypočtěte $\frac{\partial^{40} f}{\partial y^{30} \partial x^{10}}(\vec{0})$.

Cvičení 272

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Nalezněte obecnou rovnici tečné roviny k ploše

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{z^3}{c^3} = 1$$

v jejím bodě (x_0, y_0, z_0) .

Cvičení 273

Vypočtete objem množiny

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (2x + y + 1)^2 + (3x - 2y + 2)^2 + z^2 \leq R^2 \right\},$$

kde $R > 0$ je pevně zvolený parametr.

Cvičení 274

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtete klasickou třírozměrnou míru množiny

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \right\}.$$

Cvičení 275

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

pro neznámou funkci $z(x, y)$ substituujte transformačními vztahy $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, $w = x + y + z$ na diferenciální rovnici pro neznámou funkci $w(u, v)$.

Cvičení 276

Rozhodněte, zda je možno funkci

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^4 + y^4}$$

dodefinovat v bodě $(0, 0)$ tak, aby byla spojitá v $\mathbf{E}^2$. Stanovte případnou hodnotu $f(0, 0)$.

Cvičení 277

Vypočtete křivkový integrál

$$\int_M x \, d\mu_c(\vec{x}),$$

kde M je část paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(\sqrt{2}, 2)$.

Cvičení 278

Vypočtete délku kružnice o poloměru r .

Cvičení 279

Vypočtete

$$I = \int_C x^{4/3} + y^{4/3} \, d\mu_c(\vec{x}),$$

kde $C = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$. Parametr a nechť je z množiny $\mathbf{R}^+$.

Cvičení 280

Vypočtete délku grafu funkce $y(x) = \ln(\cos(x))$, kde $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Cvičení 281

Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_M \sqrt{\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2}} d\mu_c(\vec{x}),$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = xy\}$.

Cvičení 282

Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_M x d\mu_c(\vec{x}),$$

kde M je sjednocení úsečky mezi body $(0, 0)$ a $(2, 2)$ a úsečky mezi body $(2, 2)$ a $(4, 0)$.

Cvičení 283

Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_M (x, -y) d\mu_c(\vec{x}),$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y = 2x^2 \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle\}$.

Cvičení 284

Pro pevně zvolené $a > 0$ vypočítejte integrál $\int_C |y| d\mu_c(\vec{x})$, kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}$. Množinu C načrtněte!

Cvičení 285

Přímým výpočtem určete hodnotu křivkového integrálu

$$\int_C (x + y)^2 dx + (x^2 + y^2) dy,$$

kde C je trojúhelník s vrcholy $(2, 2)$, $(8, 2)$ a $(4, 6)$ obíhaný proti směru hodinových ručiček.

Cvičení 286

Řešte předchozí úlohu užitím Greenovy věty.

Cvičení 287

Spočítejte

$$\int_C x^2 d\mu_c(x, y)$$

pro $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 = 2ax + 2by\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Cvičení 288

Nalezněte délku a souřadnice těžiště zobecněné křivky, popsané v $\mathbb{E}^3$ parametrizací $(e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$, probíhá-li parametr t množinu $(-\infty, 0)$.

Cvičení 289

Nalezněte délku a x -ovou souřadnici těžiště křivky určené parametrizací

$$\vec{\varphi}(t) = \left(t \cos(t), t \sin(t), \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \right); \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Cvičení 290

Nechť kladné číslo a je pevně zvoleno. Určete těžiště množiny

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \wedge x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Cvičení 291

Nechť je v množině $\mathbb{E}^2$ zadána křivková parametrizace

$$\vec{\varphi}(t) = (t^2 \cos(t), t^2 \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

a vektorové pole $\vec{F}(x, y) = ((x^2 + y^2)^{-1/4}, (x^2 + y^2)^{-1/4})$. Vypočtěte $\int_{\langle \vec{\varphi} \rangle} \vec{F}(x, y) d\mu_c(x, y)$ a délku křivky $\langle \vec{\varphi} \rangle$.

Cvičení 292

Vypočtěte

$$\int_A xy^2 dy - x^2 y dx,$$

kde A je kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ probíhaná proti směru hodinových ručiček.

Cvičení 293

Nalezněte délku křivky zadané parametrizací $\vec{\psi}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, od bodu $(0, 0, 0)$ do bodu $(3, 3, 2)$.

Cvičení 294

Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_M (x^2 + y^2 + z^2) d\mu_c(x, y, z),$$

kde M je část šroubovice $(a \cos(t), a \sin(t), bt)$ pro $t \in (0, 2\pi)$.

Cvičení 295

Vypočtěte

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} d\mu_c(x, y),$$

kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 = ay\}$ pro parametr $a \in \mathbb{R}^+$.

Cvičení 296

Vypočtěte

$$\int_M y^2 d\mu_c(x, y),$$

kde M je oblouk cykloidy $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$ pro $0 \leq t \leq 2\pi$.

Cvičení 297

Vypočítejte

$$\int_M e^x ((1 - \cos(y)) dx - (y - \sin(y)) dy),$$

kde M je hranice oblasti $O = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : 0 < x < \pi \wedge 0 < y < \sin(x)\}$ probíhaná v kladném směru.

Cvičení 298

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte y -ovou souřadnici těžiště části cykloidy

$$x = at - a \sin(t), \quad y = a - a \cos(t),$$

ležící mezi body $(0, 0)$ a $(a\pi, 2a)$.

Cvičení 299

Spočtete

$$\int_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy,$$

kde $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 = ax \wedge y \geq 0\}$. Číslo $a \in \mathbb{R}^+$ nechť je chápáno jako parametr.

Cvičení 300

Nechť $a > 0$ je parametr. Vypočtete křivkový integrál

$$\int_M z d\mu_c(x, y, z),$$

kde $x = t \cos(t)$, $y = t \sin(t)$ a $z = t$ pro $t \in \langle 0, a \rangle$.

Cvičení 301

Vypočítejte

$$\int_M \sin(y) dx + \sin(x) dy,$$

kde M je úsečka s krajními body $(0, \pi)$ a $(\pi, 0)$.

Cvičení 302

Samostatně vyslovte a dokažte větu o absolutní hodnotě křivkového integrálu prvního druhu.

Cvičení 303

Bez použití Greenovy věty vypočtete

$$\int_{\langle \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi} \rangle} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dy - dx,$$

kde $\langle \vec{\varphi} \rangle$ je část paraboly (s vrcholem v počátku souřadného systému) mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a $\langle \vec{\psi} \rangle$ je orientovaná úsečka mezi body $(1, 1)$ a $(0, 0)$.

Cvičení 304

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Nalezněte x -ovou souřadnici těžiště části cykloidy

$$x = at - a \sin(t), \quad y = a - a \cos(t),$$

ležící mezi body $(0, 0)$ a $(a\pi, 2a)$.

Cvičení 305

Vypočítejte

$$\int_M (x + y) dx - (x - y) dy,$$

kde M je hranice oblasti ohraničené funkcemi $y = x^2 - 1$ a $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, která je probíhána ve směru hodinových ručiček.

Cvičení 306

Vypočtete křivkový integrál

$$\int_M (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

kde M je dána rovnicí $y = 1 - |1 - x|$ s omezením $0 \leq x \leq 2$.

Cvičení 307

Vypočtete

$$\int_C xy \, d\mu_c(x, y),$$

kde C je oblouk hyperboly $x = a \cosh(t)$, $y = a \sinh(t)$ pro $t \in \langle 0, b \rangle$. Čísla a, b jsou kladné parametry.

Cvičení 308Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Vypočtete

$$\int_C (2a - y) \, dx + x \, dy,$$

kde C je oblouk cykloidy $x = at - a \sin(t)$, $y = a - a \cos(t)$ pro taková t , pro něž $0 \leq t \leq 2\pi$.

Cvičení 309Vypočtete plošný integrál $\int_S z \, d\mu_s(\vec{x})$, kde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : z = x + y \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + y < 1\}.$$

Cvičení 310Nalezněte obsah plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ omezené vnitřkem válce $x^2 + y^2 = 2x$.**Cvičení 311**Kolik km^2 měří mírné pásmo na severní polokouli, které se rozprostírá mezi $23^\circ 27'$ a $66^\circ 23'$ severní šířky?**Cvičení 312**

Vypočítejte plošný integrál

$$I := \int_S x^2 e^{-z^2} \, d\mu_s(x, y, z),$$

kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Cvičení 313

Vypočtete obsah plochy $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge 0 < v_1 < z < v_2 < r\}$, kde $v_1, v_2, r \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry.

Cvičení 314

Vypočtete obsah plochy $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge x + y + z = 1\}$, r je kladný parametr.

Cvičení 315

Vypočtete plošný integrál druhého druhu $\int_S (y - z, x - z, x - y) \, d\mu_s(x, y, z)$ přes vnější plášť S kužele $x^2 + y^2 = z^2$, kde $0 \leq z \leq v$ pro parametr $v > 0$.

Cvičení 316

Vypočítejte

$$\int_S x \, dydz + y \, dzdx + z \, d(x, y),$$

kde S je vnější strana polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pro $z \geq 0$.

Cvičení 317Parametrizujte matematický anuloid (toroid) o poloměrech $r > 0$, $R > r$ a vypočtete jeho povrch.

Cvičení 318

Vypočtete

$$\int_S 6xy^2 \, dydz + y^3 \, dzdx + 6y^2z \, d(x, y),$$

pro $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2ax + 2by + 2cz\}$, kde čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolena.

Cvičení 319

Vypočtete

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dydz + (y^2 + z^2) \, dzdx + z^2 \, d(x, y)$$

pro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : (x+a)^2 + (y+2a)^2 + (z+3a)^2 = r^2\},$$

kde $a, r \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry.

Cvičení 320

Vypočtete

$$\iint_S \frac{x \, dydz + y \, dzdx + z \, d(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

je-li $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, kde r je kladný parametr.

Cvičení 321

Nechť čísla $a, b \in \mathbb{R}^+$ jsou zvolena pevně. Vypočtete integrál $\int_S z^2 \, d\mu_s(x, y, z)$, je-li S anuloid popsany parametrizací

$$\begin{aligned} x &= (b + a \cos(u)) \cos(v), \\ y &= (b + a \cos(u)) \sin(v), \\ z &= a \sin(u), \end{aligned}$$

kde oba parametry probíhají množinu $(0, 2\pi)$.

Cvičení 322

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$. Vypočtete plošný integrál

$$\int_S x^2 \, dydz + y^2 \, dzdx + z^2 \, d(x, y),$$

kde S je vnější plášť tělesa $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq a \wedge 0 \leq z \leq a\}$.

Cvičení 323

Nalezněte obsah plochy, kterou na povrchu koule o poloměru r vytíná válec o poloměru $a \leq r$, jehož osa prochází středem zadané koule.

Cvičení 324

Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtete plošný integrál druhého druhu

$$\iint_S (x - y + z) \, dydz + (y - z + x) \, dzdx + (z - x + y) \, d(x, y),$$

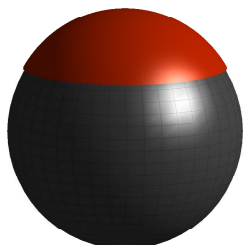
kde S je zobecněná plocha $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

Cvičení 325

Určete obsah plochy, která vznikne rotací funkce $z(x) = x^3$, $(0 \leq x \leq 2)$ kolem osy z .

Cvičení 326

Nechť S je plášť koule o poloměru r se středem v bodě $(a, b, c) \in \mathbb{E}^3$. Vypočtěte $\int_S (x^2 + y^2) d\mu_s(x, y, z)$.

Cvičení 327

Vypočtěte obsah pláště kulového vrchlíku výšky v vyříznutého z koule o poloměru r (viz obrázek).

Cvičení 328

Vypočtěte obsah následující plochy

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \wedge 0 < z < v \right\},$$

kde $a, b, v > 0$ jsou parametry.

Cvičení 329

Vypočtěte integrál

$$\iint_S |z|(x^2 + y^2) \sqrt{r^2 + x^2 + y^2} d\mu_s(x, y, z),$$

kde S je plášť koule o poloměru $r > 0$ mající střed v bodě $(0, 0, 0)$.

Cvičení 330

Vypočtěte integrál

$$\iint_S x^3 |z| dy dz + y^3 |z| dz dx + x^3 |y| d(x, y),$$

kde S je plocha v $\mathbb{E}^3$ popsaná rovnicí

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2.$$

Cvičení 331

Spočtěte

$$\int_S |y| e^{-z^2} d\mu_s(x, y, z)$$

kde S je plášť válce o poloměru 3, jehož osou je osa z souřadného systému.

Cvičení 332

Spočtěte $\int_S x^2 z d\mu_s(x, y, z)$, kde S je plášť kužele s vrcholem ležícím v počátku souřadného systému a s podstavou ležící v rovině $z = 2$. Poloměr podstavy kužele nechť je 2.

Cvičení 333

Vypočtěte povrch pláště kužele o poloměru podstavy r a výšce v . Výsledek poté vyjádřete pomocí tzv. délky strany kužele $s := \sqrt{r^2 + v^2}$.

Cvičení 334

Vypočtete plošný integrál

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy,$$

kde S je vnější strana koule $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ pro $a, b, c, r > 0$.

Cvičení 335

Užitím Stokesovy věty vypočtete křivkový integrál druhého druhu

$$\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

kde $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge x + z = 1\}$.

Cvičení 336

Bez použití Stokesovy věty řešte příklad 11.3.2.

Cvičení 337

Dokažte tvrzení věty 11.2.13.

Cvičení 338

Dokažte tvrzení věty 11.2.15.

Cvičení 339

Dokažte tvrzení věty 11.2.16.

Cvičení 340

Vypočtete dvojrozměrnou míru (povrch) množiny

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2\frac{z}{c} = 0 \wedge 0 < z < H \right\},$$

kde a, c, H jsou kladné parametry.

Cvičení 341

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Bez použití Stokesovy věty vypočtete integrál

$$\int_Q (-y, x, z) d\mu_c(x, y, z),$$

kde

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \right\}.$$

Cvičení 342

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Gaussovou větou vypočtete integrál

$$\int_M (yz, xz, xyz) d\mu_s(x, y, z),$$

kde M je hranice oblasti $\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} < 1 \wedge x, y, z > 0\}$.

Cvičení 343

Nechť $a, b > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_K \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2} \, d\mu_c(x, y),$$

kde K je hranice množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\}$$

obíhaná proti směru hodinových ručiček.

Cvičení 344

Nechť $a > 0$. Nechť je dána křivková parametrizace $x = at + a \sin(t)$, $y = a \cos(t) + a$ pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Co nejpřesněji načrtněte geometrický obraz této křivky a rozhodněte, zda se jedná o hladkou regulární křivku. Výsledek zohledněte v obrázku.

Cvičení 345

Vypočtěte

$$\iint_S yz \, dydz + zx \, dzdx + xy \, dxdy,$$

kde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1 \wedge x, y, z > 0\}$.

Cvičení 346

Nechť a, c jsou kladné parametry. Určete polohu těžiště plochy

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \wedge 0 \leq z \leq c \right\}.$$

Cvičení 347

Nechť a, b, c jsou pevně zvolené kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\iint_M x \, dydz + 3y \, dzdx + \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{b^2}} \right) d(x, y),$$

kde

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{b^2}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{c^2}} = 1 \right\}.$$

Cvičení 348

Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte integrál

$$\int_S (yz; y|z|; e^{xy}) \, d\mu_S(x, y, z),$$

kde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1 \right\}.$$

Cvičení 349

Vypočtete integrál

$$\oint_S (0; 2x^2y^3|z|; 0) \, d\mu_S(x, y, z),$$

kde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1 \right\}.$$

Užijte faktu, že

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(x) \cos(x)} \, dx = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}.$$

Cvičení 350Vypočtete plošný integrál $\iint_B (x^2 - y^2) d\mu_S(x, y, z)$, kde je pro kladný parametr R zadáno

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge x + y + z = 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge x > y \right\}.$$

Cvičení 351Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Nalezněte tečný vektor ke křivce

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

v jejím bodě

$$\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a; \frac{\sqrt{2}}{4}b; \frac{\sqrt{2}}{2}c \right).$$

Dále ve stejném bodě $\vec{a}$ nalezněte normálový vektor k ploše

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

12.2 Výsledky cvičení

- 2** $\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : |x| > |y|\}$ **4** $4/3$ **5** nespojitá **6** neexistuje **7** e **8** nespojitá **9** vnitřek válce: $\text{Dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : (x-1)^2 + y^2/4 < 1\}$ **10** neexistuje **11** 1 **12** a **13** existuje (podle definice) a je nulová **14** 8
15 $2x_0y_0 + x_0^2$ **16** $\frac{5}{4}$ **17** $\frac{1}{8}$ **20** $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1/5$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1/2$ **21** obě $(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$ **23** $(0, -1, 0)$
24 $12\sqrt{3}$ **25** 8 **26** nulová derivace: $\vec{s} = (a, 10a)$ pro jakékoli nenulové a , maximální derivace: $\vec{s} = (10b, -b)$ pro jakékoli kladné b **28** 1 **29** $(2, 10, 30)$ **30** $d^5 f_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = dz^5 + 5dz^4dx + 10dz^4dy + 20dz^3dy^2 + 40d(x, y, z)^3 + 60d(x, y)^2dz^2$
31 $dx + 6dy + 3dz$ **32** $2x + 2y - z - 2 = 0$ **34** $2x + y - z = 0$, bod dotyku: $(0, 2, 2)$ **35** $\pi/4 + x - xy$ **37**
 $d^3 f_{(0, \pi/4)}(dx, dy) = -\sqrt{2}(4dx^3 + dy^3/2 + 3d(x, y)^2 + 6dx^2dy)$ **38** $(-3 + 4\sqrt{3})/50$ **39** $4x - 6y + z + 5 = 0$, bod dotyku: $(-1, 1, 5)$
40 $d^3 f_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = 6d(x, y, z)$ **41** $\doteq 32.375$ **42** $d^4 f_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = -24dx^3dy + 48dx^3dz + 72dx^2dydz$ **43** $\doteq 1,0243788$
44 $\pi/4 + xy/2 - x^2y^2/4 + x^3y^3/12$ **45** $12\sqrt{\pi}dy(dx^2 + dy^2)$ **46** 0, 5023... **48** $\text{grad } f(x, y, z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$,
 $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = z - 2y$ a $\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (2x^2, x - 4xy, 0)$ **50** $\doteq 2,95069$ **51** $1 + (y^2 - x^2)/2$ **52** $2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ **53**
 $x^y \doteq x + (x^2y - x^2 - y + 1)/2$ **54** $1 - (x^2 + y^2)/2$ **55** $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n$ **56** a) $(1750, 0 \pm 1, 2)\Omega$, b) $(428, 6 \pm 0, 2)\Omega$
57 $2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^n (2n+1)! x^{2m} y^{2(n-m)+1} / ((2m)!(2n+1-2m)!)$ **58** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}$ **59** uvedená
rovnice funkci $z(x, y)$ na okolí bodu $\vec{a}$ nezadává **60** $\frac{\partial z}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{\partial z}{\partial y}(\vec{a}) = (e-1)^{-1}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = e(1-e)^{-3}$ **61**
 $u(x, y, z) \doteq 2x + y$ a $v(x, y, z) \doteq -z$ **62** $dz_{\vec{a}}(dx, dy) = (dy - 2dx)/9$ a $dz_{\vec{a}}^2(dx, dy) = (124dx^2 - 70d(x, y) + 4dy^2)/243$ **63**

$dz_{\vec{a}}(dx, dy) = dx + dy$ a $dz_{\vec{a}}^2(dx, dy) = -dx^2$ **64** $x^2/4 + y$ **65** soustava definuje implicitní funkce pouze na okolí bodu $\vec{c}$, tam platí $z(x, y) \doteq x + y - 1$, $u(x, y) \doteq x + 2y - 2$ a $w(x, y) \doteq x + y$ **66** $du_{(1,-1,-1)} = dx + dy - dz$ **67** $\frac{\partial x}{\partial y}(y_0, z_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(x_0, z_0) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -1$ **68** $y(x) \doteq 3 - x$, $z(x) \doteq (22 - x)/7$ a $u(x) \doteq (27 + x)/7$ **69** nejnižší hodnota: 3, nejvyšší hodnota: 7 **70** $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, 1) = e - 2$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(1, 1) = -1$ **71** $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1, 1) = 2 - e$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}(1, 1) = -2/e$ **72** $z(x, y) \doteq -8x^2 - 3y^2 + 10xy + 8x - 5y - 1$ **73** $\frac{\partial u}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ **74** $y'(x) = \frac{x+y}{x-y}$ a $y''(x) = 2 \frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$ **75** $dz_{(-3,1)}(dx, dy) = 2(dy - dx)/9$ a $d^2z_{(-3,1)}(dx, dy) = 4(-dx^2 + 5d(x, y) - 4dy^2)/243$ **76** $df_{\vec{a}}(x, y) = -2x - y + 3$ a $df_{\vec{a}}^2(x, y) = 30(x-1)^2 + 26(y-1)^2 + 28(x-1)(y-1)$ **77** $z(x, y) \doteq 2x - 2$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 26/121$ **78** $du(dx, dy) \doteq -dy/3$ a $dv(dx, dy) \doteq -dx + dy/3$ **79** $du_{(2,2)}(dx, dy) = (dx + dy)/4$ a $dv_{(2,2)}(dx, dy) = (dx - dy)/4$ **81** $x'(2) = 0$, $y'(2) = -1$, $x''(2) = -1/4$ a $y''(2) = 1/4$ **82** $dz_{\vec{a}}(dx, dy) = 3dy/2$ a $dz_{\vec{a}}^2(dx, dy) = -3dx(dx - dy)$ **83** $du_{\vec{a}}(dx, dy) = (dx + dy)/2$ a $dv_{\vec{a}}(dx, dy) = -dx/2 + (1/2 + \pi/4)dy$ **85** $dz(dx, dy) = dx + \frac{z-x}{(z-x)^2+y(y+1)}dy$ a $d^2z(dx, dy) = \frac{2(x-z)(y+1)[(z-x)^2+y^2]}{[(z-x)^2+y(y+1)]^3}dy^2$ **86** $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ **87** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ na množině $M_{reg} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq -x\}$ **88** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0$ **89** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$ na množině $M_{reg} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq \pm y\}$ **90** $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ **91** $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$ **92** $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \eta}$ **93** $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ **94** $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\eta^2+\xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi}$ na množině $M_{reg} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \neq 0 \wedge x \in (-\pi, \pi)\}$ **95** $\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2$ na množině $M_{reg} = \{(\varrho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{E}^3 : \varrho > 0 \wedge |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \wedge \varphi \in (0, 2\pi)\}$ **96** $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{u}{v^2} \frac{2v^2-u^2}{v^2-u^2} \frac{\partial f}{\partial u} = 0$ **97** jacobíán: $-16\varrho^2 \cos^7(\vartheta) \sin^3(\vartheta) \cos^3(\varphi) \sin^3(\varphi)$ na množině $M = \{(\varrho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{E}^3 : \varrho > 0 \wedge \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}) \wedge \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$, $\Phi(M) = (\mathbb{R}^+)^3$ a $a = 1/2$ **98** $\mu = -1/2$ **99** $\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} = 0$ na množině $\{(\varrho, \varphi) \in \mathbb{E}^2 : \varrho \neq 0 \wedge \varphi \in (0, \pi/2)\}$ **100** $\varrho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$ **101** $\Delta f(x, y) = 0$ **102** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$ **103** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : |x| \neq |y|\}$ **104** $\frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}$ **105** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}$ **106** $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4(\xi+\eta)} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0$ **107** $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\xi} \frac{\partial f}{\partial \eta}$ **108** $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ **109** $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \neq 0 \wedge x \in (-\pi, \pi)\}$ a $\Phi(M) = \{(u, v) \in \mathbb{E}^2 : v \neq 0\}$ **110** $\frac{d^4 x}{dy^4} = 0$ **111** $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ **112** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos(\vartheta)}{\varrho^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ **113** $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ **114** $M = \{(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{E}^3 : r > 0 \wedge \varphi \in (0, 2\pi) \wedge \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$, jacobíán: $ar^2 \cos^{2a-1}(\vartheta) \sin^{a-1}(\vartheta)$ **115** $(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial f}{\partial u}$ **116** neplatí **117** $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial \xi}$ **118** $\frac{d^3 x}{dy^3} + x \left(\frac{dx}{dy}\right)^5 = 0$ **119** $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\xi+\eta}{32} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0$ **120** nemá extrém **121** $\vec{a} = (1, 2)$ bod lokálního maxima a $\vec{b} = (-1, -2)$ bod lokálního minima **122** $\vec{a} = (2, 2)$ bod lokálního maxima **123** $\vec{a} = (\pi/6, \pi/12, \pi/18)$ bod lokálního vázaného maxima **124** $\vec{a} = (\pi/3, \pi/6)$ bod lokálního maxima **125** $\vec{a} = (2, -2)$ bod lokálního vázaného maxima a $\vec{b} = (0, 0)$ bod lokálního vázaného minima **126** $\vec{a} = (1, 1)$ bod lokálního maxima a $\vec{b} = (2, 2)$ bod lokálního minima **127** $\vec{a}_1 = (1, 1)$ a $\vec{a}_2 = (-1, -1)$ body globálního maxima a $\vec{b}_1 = (-1, 1)$ a $\vec{b}_2 = (1, -1)$ body globálního minima **128** $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{a}_3 = (-1, 1, -1)$ a $\vec{a}_4 = (-1, -1, 1)$ body lokálního vázaného maxima a $\vec{b}_1 = (-1, -1, -1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, -1, 1)$ a $\vec{b}_4 = (1, 1, -1)$ body lokálního vázaného minima **129** $\vec{a}_1 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a $\vec{a}_2 = (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ body lokálního vázaného maxima a $\vec{b}_1 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ a $\vec{b}_2 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ body lokálního vázaného minima **130** $\vec{a} = (-1, -1, 7)$ bod lokálního vázaného maxima a $\vec{b} = (1, 1, 3)$ bod lokálního vázaného minima **131** $\vec{a} = (0, 0)$ bod globálního minima a $\vec{b}_1 = (0, 2)$, $\vec{b}_2 = (0, -2)$ body globálního maxima **132** $\vec{a}_1 = (0, 0, c)$ a $\vec{a}_2 = (0, 0, -c)$ body lokálního vázaného maxima a $\vec{b}_1 = (0, b, 0)$ a $\vec{b}_2 = (0, -b, 0)$ body lokálního vázaného minima **133** $\vec{a}_1 = (0, 0, 3)$ a $\vec{a}_2 = (0, 0, -3)$ body lokálního vázaného maxima a $\vec{b}_1 = (3, 0, 0)$ a $\vec{b}_2 = (-3, 0, 0)$ body lokálního vázaného minima **134** $\vec{a} = (\pi/6, \pi/6, \pi/6)$ bod lokálního vázaného maxima **135** $\vec{a}_2$ bod globálního maxima a $\vec{a}_1$ a $\vec{a} = (1, 1)$ body globálního minima **136** $\left(\frac{\xi}{5}, \frac{\xi}{5}, \frac{\xi}{5}\right)$ **137** supremum $1 + \sqrt{2}$ nastává v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ a infimum $-1/2$ nastává v bodě $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **138** $(0, 0)$ bod lokálního minima **139** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ jsou body ostrých vázaných maxim **140** bod $\vec{a} = (1, 1, 1)$ je vázaným lokálním maximem s hodnotou $f(\vec{a}) = 2$ **141** pro $c = 0$ funkce extrém nemá, pro $c > 0$ je bod $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ bodem lokálního maxima a pro $c < 0$ je bod $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ bodem lokálního minima **142** funkce extrém nemá **143** bod $(0, 0)$ je lokálním minimem **144** globální maxima: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ a $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, globální minima: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ a $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ **145**

- pro $\lambda := 1/\sqrt{2}e$ jsou body (λ, λ) a $(-\lambda, -\lambda)$ lokálními minimy a body $(\lambda, -\lambda)$ a $(-\lambda, \lambda)$ lokálními maximy **146** $(1/2, 1/2)$ globální minimum a $(1, 1)$ globální maximum **147** $(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$ lokální maximum a $(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$ lokální minimum **148** 8 **149** 7 **150** πab **151** $\frac{33}{140}$ **152** $\ln(4) - 3$ **153** $U(\mathcal{D}_n, f(x, y)) = 4 + \frac{1}{n}$ a $L(\mathcal{D}_n, f(x, y)) = 4 - \frac{1}{n}$, tedy $(R) \iint_I f(x, y) \, d(x, y) = 4$. **154** $\frac{1}{60} \frac{a^3 b^3}{c^4}$ **155** $\frac{\pi}{2}$ **156** $\frac{ab}{21}$ **157** $\frac{2}{3} \sqrt{pq}(p+q)$ **158** $\int_1^2 \int_y^{2y-1} f(x, y) \, d(x, y)$ nebo $\int_1^2 \int_{(x+1)/2}^x f(x, y) \, dy \, dx + \int_2^3 \int_{(x+1)/2}^2 f(x, y) \, dy \, dx$ **159** $\frac{7\sqrt{2}-8}{40} a^2$ **160** $\int_0^{48} \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x, y) \, d(x, y)$ **161** $\frac{\pi}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}$ **162** $\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, d(x, y)$. **163** $\frac{1}{6}$ **164** $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, d(x, y) + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, d(x, y)$ **165** $2ab \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ **166** $\frac{a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ **167** $\left(\frac{4}{3\pi} r, \frac{4}{3\pi} r \right)$ **168** $\frac{2}{3} \pi ab$ **169** $\frac{2}{3} \sqrt{3} \pi$ **170** $\left(-\frac{1}{2} a, \frac{8}{5} a \right)$ **171** -1 **172** $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5} \right)$ **173** $\frac{a^3 b}{6}$ **174** $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$ **175** $\left(-1, \frac{16}{5} \right)$ **176** $\frac{\pi ab}{e}$ **177** $\frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right)$ **178** $\det \left(\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\varphi, \psi)} \right) = ab \alpha \varrho (\sin(\varphi) \cos(\varphi))^{\alpha-1}$ **179** $\left(\frac{256}{315} \frac{a}{\pi}, \frac{256}{315} \frac{a}{\pi} \right)$ **180** $\frac{5}{6}$ **181** $-\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln(2)$ **182** $\frac{4}{45} abc$ **183** $\frac{28}{15} \pi a^5 b$ **184** $\pi abv \left(\frac{v^2}{3c^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \pi abc$ **185** $\ln^2(2) - \ln(2) + \frac{3}{8}$ **186** $\frac{4}{3} \pi abc$ **187** πv^2 **188** $\pi abv \left(1 + \frac{v^2}{12c^2} \right)$ **189** $2\pi e^{-r^2} (1 + r^2)$ **190** $\frac{\pi abc^2}{4}$ **191** $\pi(1 - e^{-r^2})$ **192** $\pi^{3/2}$ **193** $\frac{4}{15} a^3 b^2 (4\sqrt{2} - 1)$ **194** $\frac{2}{3} abv$ **195** $\frac{1}{3} \pi r^2 v$ **196** $\frac{1}{3} \pi a^3$ **197** $(0, 0, \frac{7}{30})$ **198** $\frac{\pi}{4} (\pi^2 - 8)$ **199** $a^2 b^2 c^2$ **200** $\frac{1}{3} abc$ **201** $\pi v^2 \left(r - \frac{v}{3} \right)$ **202** $2\pi v \left(1 + \frac{v^2}{3} \right)$ **203** $4\pi(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2} (a^2 + 6b^2 + c^2)$ **204** $\frac{4\pi}{3} r^3 (a+b+c)$ **205** $\left(\frac{3}{8} a, \frac{3}{8} b, \frac{3}{8} c \right)$ **206** $\frac{32}{3} \pi$ **207** $\mu_V(T_1) = \frac{1}{2} \pi \lambda$, $\mu_V(T_2) = \frac{1}{2} \pi (2 - \lambda)$, tedy $\lambda = 1$ **208** $\pm \varrho^3 \cos^2(\omega) \cos(\vartheta)$ **209** $\pi^2 r^2 s^2$ **210** $abcd\pi^2/2$ **211** **212** $\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{4\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho}$ **213** **214** **215** $(-2, 1, 1)$ ostré lokální vázané maximum, $(2, -1, -1)$ ostré lokální vázané minimum **216** $x + 3y - z + 4 = 0$ **217** neexistuje **218** $-4 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \frac{3}{s} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ **219** $\arccos(\sqrt{3}/8)$ **220** funkce extrém nemá **221** nemá totální diferenciál **222** maximum v bodě $(-7, 3)$ **223** 60° (stoupá) **224** $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0$ **225** minima: $(-3, 2, 1)$ a $(7, -2, 1)$ **226** $\Delta f = 0$ **227** $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+1}}{n} \binom{n}{k} x^k y^{2(n-k)}$ **228** $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + 2s \frac{\partial u}{\partial s} = 0$ **229** $(0, 2, 5)$ není extrémem, $(\pm 1, 2, 5)$ maximum **230** $\lambda^3(T) = \pi abc/3$, $t_3 = 3\pi c/16$ **231** $ab/32$ **232** $\left(\frac{4a}{5\pi}, \frac{b}{4} \right)$ **233** $\int_0^2 \int_0^{4-y/4} f(x, y) \, d(x, y) + \int_2^8 \int_{\log_2(y)-1}^{4-y/4} f(x, y) \, d(x, y)$ **234** $\sqrt{2} \pi^2 abc/8$ **235** $\sqrt{2} ab$ **236** $\pi a^2 b^2/16$ **237** $\lambda^3(C) = abc/3$ a $y_T = 3\pi b/32$ **238** $\pi abc^2/3(1 - e^{-1})$ **239** $3\pi ab/64$ **240** $8\pi abc/5$ **241** $\frac{\pi}{3} R^2$ **242** maximum $(-2, 2)$ **243** $u(x, y) = C \left(\frac{x}{y} \right) e^{-2x^2 y^2} + \tilde{C}(xy)$ **244** nemá extrém, stacionární bod $(-4, 0, -1)$ **245** $abc/90$ **246** $\frac{1}{4\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{r\varrho^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4\varrho^4} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{2h^2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} - \frac{1}{4c^2 h^3} \frac{\partial}{\partial h}$ **247** $3\pi abc^2/1024$ **248** $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2+n+k}{k!(n-k)!} (2x+2)^k (y-2)^{n-k}$ **249** $(a, b) = (3, 2)$ nebo $(a, b) = (2, 3)$ **250** maximum $(\pi/12, \pi/6, \pi/12)$ **251** $(0, 0, 15c/16/\sqrt{\pi})$ **252** minimum $(1, -10)$, maximum $(5, 2)$ **253** $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0$ **254** $\Delta z(1, 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ **255** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^3 y^n$, $O = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ **256** maxima $(1, 2\sqrt{2}, \pm 4)$, minima $(-1, -2\sqrt{2}, \pm 4)$, $\text{Ran}(f) = \langle -9, 9 \rangle$ **257** $f(x, y, z) = \frac{x^2 + 4y^2 + 7z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ **258** maximum $(3, 1)$, na elipse $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{3} = 1$ jsou minima **259** $\sin^2(\vartheta) \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{\varrho} \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho \partial \vartheta} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} - \frac{\sin(2\vartheta)}{\varrho^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ **260** maximum $(\pi/8, \pi/8)$, minimum $(3\pi/8, 3\pi/8)$ **261** $z(x, y) \doteq 2 - \frac{2}{11}(x-1) - \frac{1}{11}(y-1)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{205}{11^3}$. **262** $\text{grad} f(\vec{0}) = (0, 4)$, ale totální diferenciál neexistuje **263** $\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}$. **264** $9(\xi \sqrt{\eta} - \eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (3\eta^{3/2} + 8\xi^2) \frac{\partial u}{\partial \xi}$ **265** 30° **266** stacionární bod $(4, 3, 1, 1)$ není bodem extrému **267** $16 - 4dx - 2dz + dx^2 - 8dy^2 + \frac{3}{4} dz^2 + dx dz$ **268** $\text{Ran}(f) = \langle 0, 1 \rangle$ **270** (méně strmě) $\arctg(\frac{3}{5}) < \frac{\pi}{4}$ **271** $47!! \cdot 29!!$ **272** $\frac{xx_0^2}{a^3} + \frac{yy_0^2}{b^3} - \frac{zz_0^2}{c^3} = 1$ **273** $\frac{4}{21} \pi R^3$ **274** $\frac{1}{24} \pi abc$ **275** $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} - \frac{v}{u^2 - 4v^2} \frac{\partial v}{\partial v} = 0$ **276** neexistuje limita, tedy funkci dodefinovat na spojitou nelze **277** $\frac{13}{6}$ **278** $2\pi r$ **279** $a^{7/3}$ **280** $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) = \ln(1 + \sqrt{2})$ **281** $\frac{5}{8} \pi$ **282** $8\sqrt{2}$ **283** $-\frac{3}{2}$ **284** $2a^2(2 - \sqrt{2})$ **285** -80 **286** -80 **287** $\pi \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + b^2)$ **288** $\ell = \sqrt{3}$ a $\vec{t} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right)$ **289** $\ell = 2\pi(1 + \pi)$ a $t_x = \frac{2}{\pi+1}$ **290** $\vec{t} = \left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5} \right)$ **291** $\int_{(\varphi)} \vec{F}(x, y) \, d\mu_c(x, y) = 2 + \frac{\pi}{2}$ a $\ell = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{4} + 4 \right)^{3/2} - \frac{8}{3}$ **292** $\frac{1}{2} \pi r^4$ **293** $\ell = 5$ **294** $\frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$ **295** $2a^2$ **296** $\frac{256}{15} a^3$ **297** $\frac{1}{5} (e^\pi - 1)$ **298** $\frac{4}{3} a$ **299** $\frac{1}{8} \pi a^2$ **300** $\frac{1}{3} ((2+a^2)^{3/2} - 2^{3/2})$ **301** 0 **303** $\frac{\pi}{4} - 1$ **304** $\frac{4}{3} a$ **305** $\frac{8}{3\pi} (\pi + 3)$ **306** $\frac{4}{3}$ **307** $\frac{a^2}{6} (\cosh^{3/2}(2b) - 1)$ **308** $-2\pi a^2$ **309** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **310** $\sqrt{2} \pi$ **311** $\doteq 1, 3247 \cdot 10^8 \text{ km}^2$ **312** $\pi^{3/2}$ **313** $2\pi r(v_2 - v_1)$ **314** $\sqrt{3} \pi r^2$ **315** 0 **316** -2π **317** $x = (R + r \cos(u)) \cos(v)$, $y = (R + r \cos(u)) \sin(v)$, $z = r \sin(u)$ a $\mu(A) = 4\pi^2 r R$ **318** $4\pi(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2} (a^2 + 6b^2 + c^2)$ **319**

$$\begin{array}{l}
-16a\pi r^3 \quad \boxed{320} \quad 4\pi r^2 \quad \boxed{321} \quad 2\pi^2 a^3 b \quad \boxed{322} \quad 3a^4 \quad \boxed{323} \quad 4\pi r(r - \sqrt{r^2 - a^2}) \quad \boxed{324} \quad 1 \quad \boxed{325} \quad 2\pi\sqrt{145} + \frac{\pi}{6}\ln(12 + \sqrt{145}) \\
\boxed{326} \quad 4\pi(a^2 + b^2)r^2 + \frac{8}{3}\pi r^4 \quad \boxed{327} \quad 2\pi r v \quad \boxed{328} \quad \pi\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 v^2}{b^2}} \quad \boxed{329} \quad \frac{8}{15}\pi r^6(\sqrt{2} + 1) \quad \boxed{330} \quad \frac{\pi}{5} \quad \boxed{331} \quad 36\sqrt{\pi} \quad \boxed{332} \\
\frac{32}{5}\sqrt{2}\pi \quad \boxed{333} \quad \pi r\sqrt{r^2 + v^2} = \pi r s \quad \boxed{334} \quad \frac{8}{3}\pi r^3(a + b + c) \quad \boxed{335} \quad 4\pi \quad \boxed{336} \quad -\pi r^3/4 \quad \boxed{340} \quad \frac{2\pi a}{3c^2}[(a^2 + 2Hc)^{3/2} - a^3] \quad \boxed{341} \\
2\pi ab \quad \boxed{342} \quad \pi a^2 b^2 c/20 \quad \boxed{343} \quad \pi(a^2 + b^2)/2 + ab \quad \boxed{344} \quad \text{není hladká} \quad \boxed{345} \quad -3\pi/16 \quad \boxed{346} \quad (0, 0, 2c/3) \quad \boxed{347} \quad 16\pi abc/35 \\
\boxed{348} \quad \pi^2 abc^2/4 \quad \boxed{349} \quad 9\sqrt{\pi} a^3 b^3 c^2/16 \quad \boxed{350} \quad \frac{\sqrt{3}}{8}R^4 \quad \boxed{351} \quad \vec{t} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{6}}{4}b, 0\right) \text{ a } \vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}bc, \frac{\sqrt{1}}{4}ac, \frac{1}{2}ac\right), \text{ navíc: } \vec{t} \perp \vec{n}
\end{array}$$

Literatura

- [1] L. Balková: *Lineární algebra 2*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014
- [2] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova – vydavatelství Karolinum, Praha 1993
- [3] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Praha 2004
- [4] E. Dontová: *Matematika IV*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1995
- [5] V. Jarník: *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1984
- [6] V. Jarník: *Integrální počet (II)*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1955
- [7] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011
- [8] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014
- [9] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 1998
- [10] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 1999
- [11] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 2003
- [12] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 2003
- [13] K. Rektorys: *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, Praha 1995
- [14] R.T. Rockafellar: *Convex analysis*, Princeton: Princeton University Press 1970

Index

- absolutní hodnota multiindexu **138**
- absolutní integrabilita (riemannovská) **163**
- absolutní integrovatelnost (riemannovská) **163**
- aditivita křivkového integrálu v mezích **191**
- afinní transformace **106**
- alternativní normální tvar parciální diferenciální rovnice **119**
- analytická funkce **67**
- argument maxima **151**
- argument minima **151**
- asteroida **107**
- babylonská redukce **133**
- bodová konvergence posloupnosti funkcí **55**
- bodová konvergence řady funkcí **60**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro limitu funkce bez přívlastku **24**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro limitu funkce vzhledem k množině **23**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro spojitost bez přívlastku **26**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro spojitost vzhledem k množině **25**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí **56**
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí **60**
- Cauchyova úloha **115**
- cimrmanián **199**
- cimrmanoid **197**
- Cimrmanův determinant **199**
- cylindrické souřadnice **108**
- částečný součet řady funkcí **60**
- definiční obor funkce **11**
- definiční obor operátoru vyššího řádu **138**
- dělení 2D-intervalu **157**
- délka křivky **186**
- derivace funkce více proměnných **33**
- diametr množiny **160**
- diference **44**
- diferenciální operátorem vyššího řádu **138**
- diferencovatelnost funkce více proměnných **44**
- diskriminant parciální diferenciální rovnice **128**
- divergence funkčního vektoru **41**
- dolní Riemannův integrál **159**
- dolní součet **158**
- domain **11**
- eliptická parciální diferenciální rovnice **118**
- euklidovský prostor E^r **9**
- existence křivkového integrálu druhého druhu **190**
- existence křivkového integrálu prvního druhu **188**
- existenční věta (malá) teorie implicitních funkcí **78**
- existenční věta (velá) teorie implicitních funkcí **84**
- explicitní zadání funkce **77**
- Fubiniova věta pro Riemannův integrál **166**
- funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(G)$ **36**
- funkce třídy $\mathcal{C}^n(G)$ **36**
- funkce více proměnných. **10**
- funkce zadaná implicitně **77**
- funkce zadané implicitně **84**
- funkční koeficienty operátoru **138**
- funkční vektor **40**
- Gaussova-Ostrogradského věta **205**
- generující bod (pro generující soustavu) **84**
- generující bod **81**
- generující funkce **81**
- generující rovnice **81**
- generující soustava **84**
- geometrický obraz křivkové parametrizace **181**
- geometrický obraz plošné parametrizace **195**
- globální extrémy **151**
- gradient funkce **41**
- graf funkce **11**
- gramián **199**
- Gramův determinant **199**
- Greenova věta **193**
- Hamiltonův nabla operátor **41**
- Hamiltonův operátor **119**
- harmonická funkce **42**
- Heineho věta pro limitu **21**
- Heineho věta pro spojitost **25**
- hessián **36**
- Hessova matice **36**
- hexadekant **178**
- Hilbertův prostor E^r **9**
- hladká funkce **36**
- hladká regulární křivka **182**
- hladká regulární plocha **197**
- horní Riemannův integrál **159**
- horní součet **158**
- hyperbolická parciální diferenciální rovnice **118**
- charakteristická funkce množiny **162**
- identita **97**
- implicitní funkce **77**
- implicitní funkce **84**
- index posloupnosti funkcí **55**
- integrabilita (riemannovská) **163**
- integrovatelnost (riemannovská) **163**
- inverzní vektorová funkce **98**
- Jacobián funkčního vektoru **41**
- Jacobiho matice funkčního vektoru **41**
- jednoduchá křivka **181**
- jednoduchá plocha **195**
- jednoduše uzavřená plocha **197**
- Jordanův-Peanův obsah dvourozměrné množiny **162**
- kód parciální limity **18**
- koeficienty diferenciální rovnice **139**
- koeficienty mocninné řady **64**
- koeficienty operátoru **138**
- kompaktní množina **10**
- koncový bod křivky **181**
- kritický bod (pro generující soustavu) **84**

- kritický bod **81**
 kritický generující bod (pro generující soustavu) **84**
 kritický generující bod **81**
 křivka **181**
 křivková parametrizace **181**
 křivkový integrál druhého druhu **189**
 křivkový integrál prvního druhu z funkce **186**
 křivkový integrál prvního druhu **186**
 kvadratická forma přidružená k parciální diferenciální rovnici **117**
 kvaziparciální diferenciální rovnice **119**
 Lagrangeova funkce **148**
 Lagrangeovy multiplikátory **148**
 Lagrangeův algoritmus **133**
 Laplaceova rovnice **119**
 laplacián **41**
 lemma o nezávislosti křivkového integrálu druhého druhu na parametrizaci **190**
 lemniskáta **82**
 limita bez přívlastku **12**
 limita posloupnosti funkcí **55**
 limita vzhledem k množině **13**
 limita **12**
 limitní funkce **55**
 linearita křivkového integrálu **191**
 linearita plošného integrálu **203**
 lineární část parciální diferenciální rovnice **119**
 lineární diferenciální rovnice druhého řádu **116**
 lineární diferenciální rovnice řádu m **139**
 lineární diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou **139**
 lokální extrémy **141**
 Maclaurinova řada funkce **67**
 Maclaurinův polynom **70**
 Maclaurinův vzorec **70**
 majorantní řada funkcí **61**
 matematická fyzika **105**
 matematický anuloid **196**
 matematický cimrmanoid **197**
 množina souvislá **10**
 monotonie křivkového integrálu **192**
 monotonie plošného integrálu **203**
 multifaktoriál **138**
 multiindex **138**
 multiindexového sčítání **138**
 nesmíšená derivace **36**
 nevlastní limita funkce více proměnných vzhledem k množině **15**
 nevlastní limita funkce více proměnných **15**
 norma dělení **160**
 normální tvar parciální diferenciální rovnice **119**
 nutná podmínka pro vázané lokální extrémy **146**
 nutná podmínka stejnoměrné konvergence **61**
 objem množiny **177**
 oblast **10**
 oblasti excentricity parciální diferenciální rovnice **118**
 obor elipticity parciální diferenciální rovnice **118**
 obor hodnot funkce **11**
 obor hyperbolicity parciální diferenciální rovnice **118**
 obor konvergence posloupnosti funkcí **55**
 obor konvergence řady funkcí **60**
 obor parabolicity parciální diferenciální rovnice **118**
 obraz množiny při zobrazení **11**
 obsah plochy **199**
 okraj plochy **198**
 oktant **178**
 omezená funkce **12**
 operátor druhého řádu s konstantními koeficienty **115**
 operátor s konstantními koeficienty **138**
 osmistěn **113**
 otevřený interval **10**
 parabolická parciální diferenciální rovnice **118**
 parametrické zadání funkce **77**
 parciální derivace funkce **31**
 parciální derivace ve směru **38**
 parciální derivace vyššího řádu **36**
 parciální diferenciální operátor druhého řádu **115**
 parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty **132**
 parciální limita **18**
 parciální lineární diferenciální rovnice druhého řádu s nulovou pravou stranou **116**
 partial differential equation **116**
 partikulární řešení diferenciální rovnice **139**
 partikulární řešení parciální diferenciální rovnice **117**
 PDE **116**
 plocha v E^3 **195**
 plošná parametrizace v E^3 **195**
 plošný integrál druhého druhu **202**
 plošný integrál prvního druhu **199**
 po částech hladká regulární křivka **185**
 po částech hladká regulární plocha **205**
 počáteční bod křivky **181**
 polární souřadnice **106**
 polouzavřený interval **10**
 posloupnost částečných součtů **60**
 posloupnost funkcí **55**
 postačující podmínka pro vázané lokální extrémy **149**
 pravá strana diferenciální rovnice **139**
 princip maxima **154**
 princip minima **154**
 prosté zobrazení **95**
 pseudocylindrické souřadnice **113**
 pseudokružnice **108**
 pseudopolární souřadnice **107**
 pseudosféra **113**
 pseudosférické souřadnice **113**
 pseudoválec **113**
 r -dimenzionální mocnná řada **64**
 range **11**
 regulární konvergence řady funkcí **61**
 regulární zobrazení **96**
 rekurence definice totálního diferenciálu **49**
 restrikce funkce **12**
 Riemannovo-Lebesgueovo lemma **178**
 Riemannův integrál **159**
 rotace funkčního vektoru **41**
 řada funkcí **60**
 řešení parciální diferenciální rovnice **116**
 separabilní funkce **177**
 sférické souřadnice **110**
 silný princip maxima **154**
 silný princip minima **154**
 složená funkce **12**
 smíšená derivace **36**
 součet řady funkcí **60**
 součtová funkce **60**
 soustava generujících rovnic **84**
 spojitost bez přívlastku **25**
 spojitost funkce na množině **25**
 spojitost funkce vzhledem k množině **25**
 spojitost funkce **25**

- stacionární bod **142**
 - stejněměrná konvergence posloupnosti funkcí **56**
 - stejněměrná konvergence řady funkcí **60**
 - stejněměrná spojitost funkce **160**
 - Stokesova věta **204**
 - subharmonická funkce **42**
 - superharmonická funkce **42**
 - supremální kritérium pro řady funkcí **62**
 - supremální kritérium **57**
 - Taylorova řada funkce **67**
 - Taylorova věta pro funkci více proměnných **67**
 - Taylorovy koeficienty **67**
 - Taylorův polynom **70**
 - Taylorův vzorec **70**
 - tečná nadrovina ke grafu funkce **46**
 - tečná nadrovina ke grafu funkce **46**
 - těžiště křivky **190**
 - těžiště množiny **177**
 - těžiště plochy **199**
 - topologické vlastnosti množin **27**
 - toroid **196**
 - tórus **196**
 - totální diferenciál funkce více proměnných **44**
 - totální diferenciál vyššího řádu **49**
 - transformace druhého druhu **103**
 - transformace prvního druhu **101**
 - transformační vztahy druhého druhu **103**
 - transformační vztahy prvního druhu **101**
 - uzavřená křivka **181**
 - uzavřená oblast **10**
 - uzavřený interval **10**
 - válcové souřadnice **108**
 - vázané extrémy **146**
 - vázané extrémy **148**
 - vazba **148**
 - vazbová množina **146**
 - vazbové rovnice **146**
 - vazby **146**
 - vektor funkcí **40**
 - vektorová generující funkce **84**
 - věta o dědičnosti limity **15**
 - věta o derivaci složené funkce **34**
 - věta o derivaci složené vektorové funkce **53**
 - věta o Hessevě matici implicitní funkce ve stacionárním bodě **142**
 - věta o Hessevě matici **38**
 - věta o implicitní funkci **82**
 - věta o kompaktní množině **29**
 - věta o Lagrangeových multiplikátorech **148**
 - věta o limitě složené funkce více proměnných **24**
 - věta o lokální prostotě **98**
 - věta o nezávislosti křivkového integrálu druhého druhu na parametrizaci **190**
 - věta o nezávislosti křivkového prvního druhu integrálu na parametrizaci **188**
 - věta o otevřené množině **27**
 - věta o parciálních limitách **18**
 - věta o polynomiální aproximaci **71**
 - věta o separabilitě vícerozměrného integrálu **177**
 - věta o souvislé množině **28**
 - věta o spojitosti složené funkce více proměnných **26**
 - věta o substituci pro Lebesgueův integrál **173**
 - věta o substituci pro Riemannův integrál **171**
 - věta o Taylorově vzorci **69**
 - věta o vztahu dvojrozměrné limity a limit parciálních **17**
 - věta o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu **173**
 - vzor množiny při zobrazení **11**
 - vzor prvku při zobrazení **11**
 - Weierstrassovo kritérium **62**
 - zbytek v Taylorově vzorci **70**
 - zobecněná transformace druhého druhu **104**
 - zobecněná transformace prvního druhu **104**
 - zobecněné polární souřadnice **107**
 - zobecněné sférické souřadnice **110**
 - zvrhlý interval **10**