

Obsah

1	Obecné vlastnosti množinových soustav	7
1.1	Výchozí terminologie	7
1.2	Borelovské množiny	12
2	Míra jako množinová funkce	15
2.1	Vlastnosti množinových funkcí	15
2.2	Definice míry	18
2.3	Zavedení míry na soustavě $\mathcal{H}_r$	22
3	Abstraktní Jordanova míra	31
3.1	Zavedení míry na $\mathcal{H}_r$	31
3.2	Finalizace konstrukce Jordanovy míry	32
4	Abstraktní Lebesgueova míra	43
4.1	Zavedení míry na $\mathcal{S}_r$	43
4.2	Finalizace konstrukce Lebesgueovy míry	47
4.3	Restrikce Lebesgueovy míry	57
5	Teorie abstraktního Lebesgueova integrálu	59
5.1	Výchozí pojmy	59
5.2	Měřitelné funkce	60
5.3	Abstraktní Lebesgueův integrál	66
5.4	Klasický Lebesgueův integrál	86
6	Lebesgueův integrál s reálným parametrem	99
6.1	Limita a spojitost integrálu s parametrem	99
6.2	Derivace integrálu s parametrem	103
7	Zobecněný Lebesgueův integrál a faktorizace prostoru kvadraticky integrabilních funkcí	109
7.1	Zobecněný Lebesgueův integrál	109
7.2	Prostor kvadraticky integrabilních funkcí a jeho faktorizace	112
8	Úlohy k procvičování	119
8.1	Úlohy na teorii abstraktní míry	119
8.2	Úlohy na teorii lebesgueovských integrací	126
9	Dodatek	137
9.1	Základní pojmy teorie množin	137
10	Výsledky cvičení	141

Značení

Symbol	Význam
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\mathbf{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{R}^r$	množina uspořádaných r -tic reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbf{R}^\otimes$	$\mathbf{R}^\otimes = \mathbf{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$
$\mathbf{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolná číselná množina
$\mathbf{R}^\star$	$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbf{E}^r$	r -rozměrný euklidovský prostor
$\widehat{n}$	$\{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$
$\underline{\widehat{n}}$	$\{m \in \mathbf{N}_0 : m \leq n\}$
A, B, C	množiny
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	matice
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	vektorové prostory
$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$	operátory
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	soustavy množin
$\mathcal{C}^n(G)$	třída všech funkcí, jež mají na oblasti G spojitě derivace až do řádu n
$\mathcal{C}^\infty(G)$	třída všech funkcí, jež mají na oblasti G spojitě derivace všech řádů
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x)$	n -tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$	první, druhá derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}$	n -tá derivace funkce $f(\varepsilon)$ podle proměnné ε
$d^n f_a(h)$	n -tý totální diferenciál funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $a \in \mathbf{R}$
$d^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$	n -tý totální diferenciál funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_\varepsilon(x)$	okolí bodu x
$\mathcal{U}^\star(x), \mathcal{U}_\varepsilon^\star(x)$	redukované okolí bodu x
$\cup, \cap$	sjednocení a průnik množin
$\subset, \subsetneq$	podmnožina a vlastní podmnožina množiny
Δ	symetrický doplněk množin
$\text{Dom}(f)$	definiční obor funkce $f(x)$
$\text{Ran}(f)$	obor hodnot funkce $f(x)$
$f(A)$	obraz množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(A)$	vzor množiny A při zobrazení $f(x)$
$f^{-1}(a)$	vzor jednoprvkové množiny $\{a\}$ při zobrazení $f(x)$

Symbol	Význam
$\approx$	přibližně
$\propto$	úměrně
$\sim$	ekvivalence množin či funkcí
$A^\circ, \bar{A}$	vnitřek, resp. uzávěr množiny A
$\text{bd}(A)$	hranice množiny A
$\text{der}(A)$	derivate množiny A
$\vec{b}^\tau = (b_1, b_2, \dots, b_r)$	řádkový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)^\tau$	sloupcový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b}_k$	k -tý vektor posloupnosti $(\vec{b}_n)_{n=1}^\infty$
b_{k_ℓ}	ℓ -tá složka vektoru $\vec{b}_k$
$\mathbb{A}_{ij}$	prvek matice $\mathbb{A}$ v i -tém řádku a j -tém sloupci
$\mathbb{A}_{\bullet j}$	j -tý sloupec matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}_{i\bullet}$	i -tý řádek matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\tau$	matice transponovaná k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^*$	komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}^\# = (\mathbb{A}^*)^\tau$	hermitovsky sdružená matice k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{I}$	jednotková (Croneckerova) matice
δ_{ij}	prvek Croneckerovy matice
$\det(\mathbb{A})$	determinant matice $\mathbb{A}$
$h(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r)$	diagonální matice s prvky $x_1, x_2, \dots, x_r$ na hlavní diagonále
$\mathcal{E}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$	standardní báze v $\mathbf{R}^r$, tj. $e_{ij} = \delta_{ij}$
a^*	komplexně sdružené číslo k číslu a
$[x]$	dolní celá část čísla x
$\lceil x \rceil$	horní celá část čísla x
$\mathcal{O}$	symbol vymezený pro obor konvergence
$\mathcal{R}$	symbol vymezený pro poloměr konvergence
$\mathcal{C}$	symbol vymezený pro libovolnou reálnou konstantu (zejména integrační)
$x \mapsto f(x, \beta)$	funkce proměnné x s parametrem β
$\text{sgn}(x)$	funkce signum
$\Theta(x)$	jednorozměrná Heavisideova funkce
$\Theta(\vec{x})$	vícerozměrná Heavisideova funkce
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r]_\lambda$	lineární obal souboru vektorů
$\deg(\wp)$	stupeň polynomu $\wp$
$q(\vec{x}) \succ 0$	pozitivní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \succeq 0$	pozitivní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \prec 0$	negativní definitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \preceq 0$	negativní semidefinitnost kvadratické formy
$q(\vec{x}) \nprec 0$	indefinitnost kvadratické formy

Symbol	Význam
$\text{card}(X)$	kardinální číslo, resp. mohutnost množiny
$\aleph_0$	mohutnost množiny přirozených čísel
$\aleph_1$	mohutnost množiny reálných čísel
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{M} f(\vec{x})$	bodová konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{M} f(\vec{x})$	stejněměrná konvergence funkční posloupnosti na množině M
$f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$	konvergence podle normy
$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{norm}_{f_n(\vec{x})}$	limita vzhledem ke konvergenci podle normy
$\ \vec{x}\ $	norma vektoru $\vec{x}$
$\langle \vec{x} \vec{y} \rangle$	skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$
$\mathcal{M}_\mu$	Lebesgueova σ -algebra
$\mu_r(X)$	Lebesgueova r -dimenzionální míra
$\mathcal{M}_\lambda$	klasická Lebesgueova σ -algebra
$\lambda_r(X)$	klasická Lebesgueova r -dimenzionální míra
Λ_μ	třída všech μ -měřitelných funkcí
$\mathcal{L}^*(E, \mu)$	třída všech funkcí, jež mají integrál $(\mathcal{L}) \int_E g(x) d\mu(x)$
$\mathcal{L}(E, \mu)$	třída všech lebesgueovsky integrabilních funkcí přes množinu E při míře $\mu(x)$
$\mathcal{Z}_\mu$	základní systém funkcí
$\mathcal{Z}_\mu^+$	rozšířený systém funkcí
$\mathcal{L}_p(G)$	třída funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p d\vec{x}$ konečný
$\mathcal{L}_2(G)$	třída kvadraticky integrabilních funkcí
$\mathcal{L}_p(G)$	třída funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p d\vec{x}$ konečný
$\mathbb{L}(G)$	třída faktorových funkcí, jež jsou lebesgueovsky integrovatelné na množině G
$\mathbb{L}_2(G)$	třída kvadraticky integrabilních faktorových funkcí
$\mathbb{L}_p(G)$	třída faktorových funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p d\vec{x}$ konečný
$\mathbb{L}_p^{(w)}(G)$	třída faktorových funkcí, pro něž je integrál $(\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) ^p w(\vec{x}) d\vec{x}$ konečný
$\chi_G(\vec{x})$	charakteristická funkce množiny $G \subset \mathbb{E}^r$

PŘEDMLUVA

Za jeden z nejcharakterističtějších rysů matematiky se všeobecně považuje snaha generalizovat elementární (mnohdy intuitivní) pojmy a vystavět pokud možno bezespornou axiomatickou teorii takových zobecnění. Analogickými postupy byly již dříve vybudovány např. teorie skalárních součinů v prehilbertovských prostorech, norem v prostorech normovaných či metrik v obecných metrických prostorech. Úlohou těchto skript je vystavět obecnou a ucelenou teorii, jež rozšiřuje vágně zavedené pojmy délky, obsahu či objemu v konečně-dimenzionálních prostorech. Teorie míry, jak se tato partie matematiky nejčastěji nazývá, byla systematictěji rozvíjena na konci devatenáctého století a na začátku století dvacátého. Mezi přední osobnosti, které se na jejím rozvoji velkou měrou podíleli, je nutno zahrnout tři Francouze Émila Borela (1871-1956), Henriho Lebesguea (1875-1941) a Maurice Frécheta (1878-1973), ale také např. Rakušana Johanna Radona (1887-1956) nebo Itala Guida Fubiniho (1879-1943). Abstraktní teorii míry se velice úspěšně podařilo odstranit celou řadu technických problémů, před kterými matematika zmíněné doby stála. To umožnilo také rozvoj disciplín, které na teorii míry bezprostředně navazují. Jedná se především o teorii abstraktního integrálu, tj. integrálu s ohledem na Lebesgueovu míru vybudovanou ne nutně na euklidovských prostorech. V porovnání se svým předchůdcem (Riemannovým integrálem) koncept Lebesgueova integrálu podstatně rozšířil integrační možnosti a významně zjednodušil metodiku integrací.

Nahlédněme tedy společně do tajů teorie míry a abstraktního integrálu a pokusme se rozkrýt, jakými postupy bylo takového pokroku v matematické analýze funkce více proměnných docíleno. K tomu, jak doufám, nám bude nápomocen následující text.

Poděkování: Dovolte mi, abych před samotným zahájením odborných pojednání poděkoval těm, kteří mi s přípravou textu výrazně pomohli. Je to v první řadě kolega ing. Tomáš Hobza, Ph.D., který svolil s lektorováním těchto skript. Svými připomínkami a korekturami přispěl k odstranění celé řady chyb a nesrovnalostí a k celkovému vylepšení textové části. Dále bych rád poděkoval posluchačům Viktorovi Kocurovi, Vojtěchovi Stránskému a Jaroslavě Ryplové, kteří celé skriptum pečlivě pročetli a kromě detekce překlepů upozornili také na problematičtější místa textu, kde bylo vhodné výklad doprovázet detailnějšími komentáři.

autor

Kapitola 1

Obecné vlastnosti množinových soustav

Budování míry není zcela jistě banální matematickou procedurou. Ucelená koncepce množinové míry většinou vyžaduje vytváření měr v navazujících krocích, tj. přenášením měr z užších množinových soustav na soustavy širší s tím, že je nezbytné zachovat kontinuitu míry. Z tohoto důvodu je zásadní chápat míru jako množinovou funkci, která na svém definičním oboru, který je představován určitou soustavou množin, naplňuje sadu jistých axiomů. Axiomatická výstavba míry má mnoho nepřehlédnutelných výhod, které plně doceníme až během následujících kapitol. V úvodní kapitole se nejprve seznámíme se základními vizemi celého tématu.

1.1 Výchozí terminologie

Jelikož bude míra v budoucích kapitolách zavedena jako speciální případ množinové funkce, je třeba nejprve podrobněji prozkoumat vlastnosti jejího definičního oboru. A tím budou množiny, jejichž prvky jsou opět množiny.

1.1.1 Úmluva

Pro přehlednost budeme označovat množiny množin raději termínem *soustavy množin* a budeme je značit psacími symboly $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$

1.1.2 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná soustava množin. Řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ je *aditivní*, jestliže pro každé $X, Y \in \mathcal{A}$ platí $X \cup Y \in \mathcal{A}$. Řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ je *konečně aditivní*, jestliže pro každé $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathcal{A}$ platí $\bigcup_{k=1}^m X_k \in \mathcal{A}$.

1.1.3 Věta

Soustava množin je aditivní právě tehdy, když je konečně aditivní.

Důkaz:

- je-li $(A_k)_{k=1}^m$ libovolná konečná posloupnost množin v aditivní soustavě $\mathcal{A}$, pak jistě platí, že $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$
- indukčním předpokladem první části důkazu je tedy skutečnost, že $\bigcup_{k=1}^{\ell} A_k \in \mathcal{A}$, kde $\ell < m$
- jelikož $\bigcup_{k=1}^{\ell} A_k$ a $A_{\ell+1}$ jsou dvě množiny z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je aditivní, platí zřejmě, že také $\bigcup_{k=1}^{\ell+1} A_k \in \mathcal{A}$, což vzhledem k libovolnosti posloupnosti $(A_k)_{k=1}^m$ prokazuje konečnou aditivitu soustavy $\mathcal{A}$
- nechť jsou naopak dány dvě množiny X, Y z konečně aditivní soustavy $\mathcal{A}$
- položíme-li $A_1 = X, A_2 = Y, m = 2$ a užijeme-li definici konečné aditivity, dostáváme, že $X \cup Y = \bigcup_{k=1}^2 A_k \in \mathcal{A}$, což prokazuje druhou implikaci v dokazované ekvivalenci

1.1.4 Úmluva

Z ohledem na platnost věty 1.1.3 nebudeme již dále termín *konečná aditivita soustavy množin* užívat. Nahradíme ho pojmem *aditivita soustavy množin*.

1.1.5 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná soustava množin. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *množinovým okruhem*, jestliže $\mathcal{A}$ je aditivní a pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ platí $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

1.1.6 Příklad

Příkladem aditivní soustavy, jež není okruhem, je soustava $\mathcal{D} = \{X \subset \mathbf{R} : X = X^o\}$ všech otevřených množin v $\mathbf{R}$. Zatímco sjednocením dvou otevřených množin je zjevně otevřená množina, což dokládá aditivitu soustavy, není $\mathcal{D}$ uzavřená na rozdíl. To lze lehce demonstrovat na příkladě množin $(0, 4), (3, 4)$, které obě do $\mathcal{D}$ patří, zatímco jejich rozdíl $(0, 4) \setminus (3, 4) = (0, 3)$ ne. Jako příklad okruhu může posloužit soustava $\mathcal{B} = \{X \subset \mathbf{N} : \text{card}(X) < \aleph_0\}$. Tato soustava všech konečných podmnožin množiny přirozených čísel je uzavřená jak na sjednocení, tak na rozdíl. Podobně také soustava $\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \subset \langle 0, 5 \rangle\}$ je okruhem.

1.1.7 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná soustava množin. Existuje-li v $\mathcal{A}$ množina $E \in \mathcal{A}$ taková, že pro každou množinu $X \in \mathcal{A}$ platí inkluze $X \subset E$, nazveme každou takovou množinu E *prezidentem soustavy* $\mathcal{A}$.

1.1.8 Lemma

Má-li soustava prezidenta, pak je určen jednoznačně.

1.1.9 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná soustava množin. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *množinovou algebrou*, jestliže je $\mathcal{A}$ okruhem a existuje v něm prezident.

1.1.10 Příklad

Vybíráme-li ze soustav prezentovaných v příkladě 1.1.6 ty, jež naplňují definici algebry, zbývá pouze soustava $\mathcal{A}$, která je jak okruhem, tak také obsahuje prezidenta. Tím je v $\mathcal{A}$ množina $\langle 0, 5 \rangle$. Soustava $\mathcal{B}$ sice definici okruhu naplňuje také, ale nelze v ní nalézt prezidenta.

1.1.11 Věta

Nechť $\mathcal{A}$ je množinový okruh. Pak pro každé dvě množiny $X, Y \in \mathcal{A}$ platí $X \cap Y \in \mathcal{A}$.

Důkaz:

- zvolme libovolně $X, Y \in \mathcal{A}$
- vzhledem k tomu, že $\mathcal{A}$ je aditivní, platí odtud, že $X \cup Y \in \mathcal{A}$
- snadno nahlédneme, že pro jakékoli dvě množiny X, Y platí rovnost

$$X \cap Y = (X \cup Y) \setminus ((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \quad (1.1)$$

- jelikož do okruhu $\mathcal{A}$ patří rozdíl každých dvou množin z $\mathcal{A}$, plyne z rovnosti (1.1) dokazovaná vlastnost

1.1.12 Definice

Potencí množiny X nazýváme soustavu všech podmnožin množiny X a značíme ji 2^X . Platí tedy $2^X = \{Y : Y \subset X\}$.

1.1.13 Definice

Řekneme, že neprázdná soustava množin $\mathcal{A}$ je *disjunktní*, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ ($A \neq B$) platí, že $A \cap B = \emptyset$. Označíme-li E sjednocení všech množin takové disjunktní soustavy, říkáme, že E je *disjunktním sjednocením soustavy*. Tuto vlastnost zapisujeme symbolickým zápisem $E = \uplus_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$, popř. krátce $E = \uplus A_i$.

1.1.14 Poznámka

Pro analogické značení disjunktních sjednocení nahlédněte do definic 9.1.3, resp. 9.1.4.

1.1.15 Příklad

Uved'me nyní některé jednoduché zástupce výše zavedených soustav.

- Soustava $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$ není aditivní.
- Soustava $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ je aditivní, ale není okruhem.
- Soustava $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\circ\}, \{\diamond\}, \{\diamond, \circ\}\}$ je okruhem i algebrou.
- Soustava $\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{Z} : \text{card}(X) < \aleph_0\}$ je okruhem, ale není algebrou.
- Pro množinu $X = \{1, 2, 3\}$ je potenci soustava $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, která je navíc také algebrou.

1.1.16 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná soustava množin. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ -aditivní (spočetně aditivní), jestliže pro libovolnou posloupnost množin $(A_n)_{n=1}^\infty$, kde $A_n \in \mathcal{A}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, platí $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

1.1.17 Věta

Každá σ -aditivní soustava je aditivní.

Důkaz:

- nechť $(A_n)_{n=1}^m$ je libovolná posloupnost (ne nutně různých) množin ze σ -aditivní soustavy $\mathcal{A}$
- pro $k > m$ položme $A_k := A_1$
- to lze provést, neboť $\mathcal{A}$ je podle definice 1.1.16 neprázdná
- pak $(A_n)_{n=1}^\infty$ je nekonečná posloupnost, pro níž ze σ -aditivity soustavy $\mathcal{A}$ platí $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$
- jelikož ale $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^m A_n \in \mathcal{A}$, je aditivita prokázána

1.1.18 Příklad

Soustava $\mathcal{B} = \{X = \langle \alpha, 1 \rangle : 0 < \alpha < 1\}$ je aditivní, ale není σ -aditivní, neboť $\bigcup_{k=1}^\infty \langle \frac{1}{k+1}, 1 \rangle = (0, 1) \notin \mathcal{B}$. Naproti tomu soustava $\mathcal{D} = \{X \subset \mathbf{R} : X = X^o\}$ všech otevřených množin v $\mathbf{R}$ je aditivní i σ -aditivní, neboť spočetným sjednocením otevřených množin je podle lemmatu 6.7.15 ve skriptech [5] opět množina otevřená.

1.1.19 Definice

Je-li množinový okruh σ -aditivní soustavou, nazýváme ho σ -okruhem. Je-li množinová algebra navíc σ -aditivní, nazýváme ji σ -algebrou.

1.1.20 Lemma

Každá potencia je algebrou i σ -algebrou.

1.1.21 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je soustava množin. Okruh $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, pro který navíc platí, že je-li $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ také okruh, pak $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, nazveme *minimálním okruhem* generovaným soustavou $\mathcal{A}$.

1.1.22 Věta – věta o minimálním okruhu

Pro každou soustavu množin $\mathcal{A}$ existuje právě jeden minimální okruh generovaný soustavou $\mathcal{A}$.

Důkaz:

- položíme $E = \cup\{A_k : A_k \in \mathcal{A}\}$
- E tedy představuje sjednocení všech množin z $\mathcal{A}$
- potence 2^E je podle lemmatu 1.1.20 σ -algebrou a navíc platí vztah $\mathcal{A} \subset 2^E$
- jelikož jsme našli alespoň jeden σ -okruh, který je nad $\mathcal{A}$, lze tvrdit, že soustava $\sqsupset$ všech okruhů, jež jsou nad soustavou $\mathcal{A}$, je neprázdná
- nyní využijeme tvrzení, že průnik neprázdné soustavy okruhů je opět okruh (viz cvičení 8.12)
- položíme $\mathcal{B} := \cap_k \{\mathcal{O}_k : \mathcal{O}_k \in \sqsupset\}$
- jde tedy o průnik všech okruhů $\mathcal{O}$, jež jsou zahrnuty v soustavě soustav $\sqsupset$
- podle tvrzení ze cvičení 8.12 je $\mathcal{B}$ okruhem
- zbývá ukázat, že jde o okruh minimální
- vezměme tedy okruh $\mathcal{C}$, pro který platí $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$
- zřejmě $(\mathcal{C} \cap 2^E) \in \sqsupset$
- vzhledem k definici soustavy $\mathcal{B}$ platí vztah $\mathcal{B} \subset (\mathcal{C} \cap 2^E)$
- jelikož ale $(\mathcal{C} \cap 2^E) \subset \mathcal{C}$, plyne odsud, že $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$
- tím je důkaz dokončen

1.1.23 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je soustava množin. σ -okruh $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, pro který navíc platí, že je-li $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ také σ -okruh, pak $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, nazveme *minimálním σ -okruhem* generovaným soustavou $\mathcal{A}$ nebo někdy též *borelovským uzávěrem* soustavy $\mathcal{A}$.

1.1.24 Věta – věta o borelovském uzávěru

Pro každou soustavu množin $\mathcal{A}$ existuje právě jeden borelovský uzávěr generovaný soustavou $\mathcal{A}$.

Důkaz:

- dokazuje se analogicky jako věta 1.1.22

1.1.25 Definice

Řekneme, že neprázdná soustava množin $\mathcal{A}$ je *polookruhem*, splňuje-li následující axiomy:

- (uzavřenost na průniky): $X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{A}$,
- (separabilita množinového rozdílu): pro každé dvě množiny $X, Y \in \mathcal{A}$ existuje konečná disjunktní posloupnost $(C_k)_{k=1}^n$ taková, že $C_k \in \mathcal{A}$ pro každé $k \in \overline{n}$ a $X \setminus Y = \uplus_{k=1}^n C_k$.

1.1.26 Příklad

Měli bychom rozhodnout, zda soustava množin $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ je polookruhem. S každými dvěma množinami v $\mathcal{A}$ by měl do $\mathcal{A}$ patřit i jejich průnik, což je zjevně splněno. Dále by pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{A}$ měly existovat disjunktní množiny $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{A}$ tak, že rozdíl množin $A \setminus B$ lze vyjádřit jako sjednocení množin C_j . Tedy např. $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1\} \uplus \{2\} \uplus \{4\}$. Tedy $\mathcal{A}$ je polookruhem. Navíc minimálním okruhem generovaným soustavou $\mathcal{A}$ je soustava $\mathcal{B} = 2^{\{1, 2, 3, 4\}}$.

1.1.27 Věta

Každý okruh je polookruhem.

Důkaz:

- nechť je tedy $\mathcal{A}$ okruh, který je již z definice neprázdný
- separabilita množinového rozdílu v soustavě $\mathcal{A}$ je splněna triviálně, neboť pro libovolné dvě množiny $X, Y \in \mathcal{A}$ musí z definice okruhu platit, že $X \setminus Y \in \mathcal{A}$
- lze tedy volit $n = 1$ a $C_1 = X \setminus Y$
- odtud banálně: $X \setminus Y = \biguplus_{k=1}^1 C_k$
- uzavřenost na průniky je prokázána ve větě 1.1.11

1.1.28 Věta – o konstrukci minimálního okruhu

Minimálním okruhem $\mathcal{B}$ generovaným polookruhem $\mathcal{A}$ je právě soustava všech konečných disjunktích sjednocení množin z $\mathcal{A}$.

Důkaz:

- nechť $\mathcal{B}$ je soustava všech konečných disjunktích sjednocení množin z $\mathcal{A}$
- dokážeme, že $\mathcal{B}$ je okruh
- nechť tedy $X, Y \in \mathcal{B}$
- podle zavedení soustavy $\mathcal{B}$ jistě existují $A_i, B_j \in \mathcal{A}$ tak, že

$$X = \biguplus_{i=1}^m A_i, \quad Y = \biguplus_{j=1}^n B_j$$

- dokazujeme nyní, že i průnik $X \cap Y$ patří do $\mathcal{B}$
 - zjevně platí (po aplikaci de Morganových vzorců)

$$X \cap Y = \left(\biguplus_{i=1}^m A_i \right) \cap \left(\biguplus_{j=1}^n B_j \right) = \biguplus_{i=1}^m \biguplus_{j=1}^n (A_i \cap B_j)$$

- jelikož všechny množiny $A_i \cap B_j$ jsou jistě z polookruhu $\mathcal{A}$, jejich konečné disjunktí sjednocení je také v soustavě $\mathcal{B}$ (podle konstrukce soustavy $\mathcal{B}$)
- nyní dokážeme, že i sjednocení $X \cup Y$ patří do $\mathcal{B}$
 - nechť nejprve $X \cap Y = \emptyset$
 - pak i všechny A_i, B_j musejí být disjunktí
 - dále zjevně platí

$$X \uplus Y = \left(\biguplus_{i=1}^m A_i \right) \uplus \left(\biguplus_{j=1}^n B_j \right)$$

- jelikož $A_i, B_j \in \mathcal{A}$, plyne odtud, že $X \uplus Y \in \mathcal{B}$
- stejné tvrzení pro obecné sjednocení $X \cup Y$ dokážeme na úplný závěr důkazu
- pokusme se ukázat, že rozdíl $X \setminus Y$ patří také do $\mathcal{B}$
 - jednoduše prokážeme sadu rovností

$$X \setminus Y = \left(\biguplus_{i=1}^m A_i \right) \setminus \left(\biguplus_{j=1}^n B_j \right) = \biguplus_{i=1}^m \left(A_i \setminus \biguplus_{j=1}^n B_j \right)$$

- uijeme-li nyní opět de Morganových vzorců, získáme rovnost

$$X \setminus Y = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcap_{j=1}^n (A_i \setminus B_j) \right)$$

- existují zjevně $D_k \in \mathcal{A}$ tak, že $A_i \setminus B_j = \bigcup_{k=1}^p D_k$
- a tudíž $A_i \setminus B_j$ zřejmě patří do $\mathcal{B}$ a potažmo také průnik $\bigcap_{j=1}^n (A_i \setminus B_j)$ patří do $\mathcal{B}$ podle prvního bodu důkazu
- označme $C_i = \bigcap_{j=1}^n (A_i \setminus B_j)$
- zřejmě $C_i \subset A_i$, a proto jsou všechna C_i disjunktní (neboť A_i jsou disjunktní) a lze na ně aplikovat druhou část důkazu
- odtud

$$\bigcup_{i=1}^m C_i = X \setminus Y \in \mathcal{B}$$

- dokážeme, že $X \cup Y \in \mathcal{B}$ pro obecné (tedy již ne pouze disjunktní) množiny
 - uijeme rovnosti $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$
 - množiny X a $Y \setminus X$ jsou již ale disjunktní, tudíž pro ně platí první část důkazu
 - a tedy

$$X \cup Y = X \cup (Y \setminus X) \in \mathcal{B}$$

- to, že okruh $\mathcal{B}$ je skutečně okruhem minimálním, je jasné, neboť kdyby tomu tak nebylo, pak by do užšího okruhu nemohlo patřit některé z disjunktních sjednocení množin z $\mathcal{A}$, což je zjevný spor

1.2 Borelovské množiny

V této sekci se budeme věnovat pojmu borelovské množiny, který je stěžejním pojmem zejména pro axiomatickou výstavbu teorie pravděpodobnosti.

1.2.1 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou ϱ . Nechť $\mathcal{D}$ je soustava všech otevřených množin z $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ a $\mathcal{D}'$ je její borelovský uzávěr. Pak *borelovskými množinami* z metrického prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ nazýváme všechny množiny ze soustavy $\mathcal{D}'$.

1.2.2 Věta

Nechť je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou ϱ . Soustava $\mathcal{D}$ všech otevřených množin z $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ je aditivní i σ -aditivní, má prezidenta, ale není okruhem, polookruhem, algebrou ani σ -algebrou. Navíc je také soustava $\mathcal{D}$ uzavřená na konečné průniky.

Důkaz:

- část dokazovaného tvrzení vyplývá z vět 6.7.11 – 6.7.15 ze skript [5], kde je mimo jiné dokázáno, že sjednocení a průnik konečného počtu otevřených množin je množina otevřená a navíc, že sjednocení spočetného počtu otevřených množin je množina otevřená
- soustava $\mathcal{D}$ není okruhem, neboť např. rozdíl množin $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$ a $B = (0, 1) \times (-1, 1)$, který je reprezentován množinou $C = (-1, 0) \times (-1, 1)$ není otevřenou množinou, a D tedy není uzavřená na rozdíly
- proto také nemůže jít o algebru
- množinu C z předešlé úvahy však nelze nakombinovat ani jako konečné sjednocení otevřených množin, což značí, že $\mathcal{D}$ není ani polookruhem

1.2.3 Poznámka

Pro hloubavější čtenáře se na tomto místě drobně rozhovoříme o způsobu konstrukce borelovského uzávěru. K tomu upotřebíme následující dvě definice.

1.2.4 Definice

Nechť $E \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} \subset 2^E$. Pro soustavu $\mathcal{A}$ budeme symboly $[\mathcal{A}]_\sigma$, $[\mathcal{A}]_\delta$, resp. $[\mathcal{A}]_{\delta\sigma}$ rozumět soustavu všech spočetných sjednocení množin z $\mathcal{A}$, soustavu všech spočetných průniků množin z $\mathcal{A}$, resp. $[\mathcal{A}]_{\delta\sigma} := [[\mathcal{A}]_\delta]_\sigma$.

1.2.5 Definice

Nechť je dána množina $E \neq \emptyset$. Nechť $m \in \mathbf{N}_0$ nebo $m = \aleph_0$. *Transfinitní posloupností řádu m* rozumíme posloupnost $(\mathcal{B}_\ell)_{\ell=0}^m$ definovanou rekurentně takto: $\mathcal{B}_0$ je soustava všech otevřených podmnožin množiny E . Pro $\ell \in \hat{m}$ klademe $\mathcal{B}_\ell := [\mathcal{B}_{\ell-1}]_{\delta\sigma}$. Při variantě $m = \aleph_0$ klademe $\mathcal{B}_{\aleph_0} := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell$. Vrcholem *transfinitní posloupnosti* pak rozumíme soustavu $\mathcal{B}_m$.

1.2.6 Věta – o konstrukci borelovského uzávěru

Nechť $\mathcal{D}$ je soustava všech otevřených množin v E' . Pak jejím borelovským uzávěrem $\mathcal{D}'$ je právě vrchol $\mathcal{B}_{\aleph_0}$ transfinitní posloupnosti generované množinou E' , resp. soustavou $\mathcal{B}_0 = \mathcal{D}$.

Bez důkazu.

1.2.7 Věta

Nechť $\mathcal{D}'$ je borelovský uzávěr soustavy všech otevřených množin v $\mathbf{R}$. Pak $\mathcal{D}'$ obsahuje všechny otevřené a uzavřené množiny, všechny konečněprvkové i spočetněprvkové množiny a všechny (omezené i neomezené) intervaly v $\mathbf{R}$.

Důkaz:

- již z definice borelovského uzávěru plyne, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, a tedy každá otevřená množina zároveň patří také do soustavy $\mathcal{D}'$
- je-li $X \subset \mathbf{R}$ uzavřená, pak $Y = \mathbf{R} \setminus X$ je otevřená, a proto $Y \in \mathcal{D}'$
- jelikož $X = \mathbf{R} \setminus Y$, množiny $Y, \mathbf{R} \in \mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}'$ je okruh (dokonce σ -okruh), musí X jakožto rozdíl dvou množin z $\mathcal{D}'$ rovněž patřit do $\mathcal{D}'$
- označme $X = \{q\}$, kde $q \in \mathbf{R}$ je zvoleno pevně
- protože $\langle q, q+1 \rangle, (q, q+1) \in \mathcal{D}'$ a $X = \langle q, q+1 \rangle \setminus (q, q+1)$, plyne z uzavřenosti $\mathcal{D}'$ na rozdíly, že každá jednoprvková množina do $\mathcal{D}'$ patřit musí
- protože lze ale každou spočetněprvkovou množinu zapsat jako disjunktní sjednocení jednoprvkových množin, a protože $\mathcal{D}'$ je σ -aditivní, je zřejmé, že také spočetněprvkové množiny do $\mathcal{D}'$ patří
- kombinací předešlého lze tvrzení o přináležitosti do třídy $\mathcal{D}'$ dokázat také pro všechny (omezené i neomezené) intervaly v $\mathbf{R}$

1.2.8 Lemma

Nechť $\mathcal{D}'$ je borelovský uzávěr soustavy všech otevřených množin v E' . Pak $\mathcal{D}'$ obsahuje všechny otevřené a uzavřené množiny, všechny konečněprvkové i spočetněprvkové množiny a všechny (omezené i neomezené) intervaly v E' .

Kapitola 2

Míra jako množinová funkce

Jak už bylo předesláno, míra bude speciální variantou tzv. množinové funkce, která množinám přiřazuje prvky z číselné množiny $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zkoumání vlastností množinových funkcí v úvodních partiích textu nás přirozenou cestou přivede k axiomatické formulaci pojmu *míra*, což je hlavním cílem této kapitoly.

2.1 Vlastnosti množinových funkcí

V úvodním oddíle této kapitoly zavedeme obecnou terminologii, již budeme v dalším textu rozvíjet. Budeme zde definovat výchozí pojmy a vyslovovat elementární souvislosti mezi nimi. Tím zformulujeme prvotní východisko celé teorie o množinových funkcích, které se v následujících oddílech a kapitolách bude postupně transformovat do ucelené teorie abstraktních množinových měr.

2.1.1 Definice

Množinovou funkci nazveme jakékoliv zobrazení do množiny $\mathbf{R}^*$, jehož definičním oborem je vybraná soustava množin $\mathcal{A}$. Tuto skutečnost budeme označovat symbolicky formou $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$. *Reálnou množinovou funkci* nazveme každé takové zobrazení, pro něž $\text{Ran}(F) \subset \mathbf{R}$.

2.1.2 Poznámka

Na tomto místě upozorňujeme, že symbol $F(X)$ má tedy dvojí význam. Jednak reprezentuje množinovou funkci jakožto zobrazení ze soustavy množin do číselné množiny, ale ve druhé interpretaci reprezentuje hodnotu množinové funkce $F(X)$ pro konkrétní množinu $X \in \text{Dom}(F)$. Z kontextu ale bude vždy jasné, o kterou interpretaci se bude jednat.

2.1.3 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je na soustavě $\mathcal{A}$ *aditivní*, jestliže pro libovolné dvě množiny $X, Y \in \mathcal{A}$, pro které platí $X \cap Y = \emptyset$ a $X \uplus Y \in \mathcal{A}$, je $F(X \uplus Y) = F(X) + F(Y)$.

2.1.4 Příklad

Ačkoliv např. sama soustava $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{5, 6, 7\}\}$ není aditivní, množinová funkce $F(X)$, pro niž definujeme

$$F(\emptyset) := 0, F(\{1\}) := 5, F(\{2, 3\}) := 10, F(\{5, 6, 7\}) := 211,$$

na ní aditivní je! Pozor tedy na správné (nepovrchní) pochopení definice 2.1.3.

2.1.5 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je na soustavě $\mathcal{A}$ *konečně aditivní*, jestliže pro libovolnou konečnou disjunktní posloupnost $(X_n)_{n=1}^m$ takovou, že $X_n \in \mathcal{A}$ pro všechny indexy $n \in \widehat{m}$, pro niž navíc $X = \biguplus_{n=1}^m X_n \in \mathcal{A}$, je $F(X) = \sum_{n=1}^m F(X_n)$.

2.1.6 Věta

Je-li množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ konečně aditivní na $\mathcal{A}$, pak je na $\mathcal{A}$ také aditivní.

Důkaz:

- zvolme nejprve $X, Y \in \mathcal{A}$ tak, aby $X \cap Y = \emptyset$ a $Z = X \uplus Y \in \mathcal{A}$
- položíme-li v definici 2.1.5 $X_1 = X, X_2 = Y$ a $m = 2$, je zřejmé, že $F(Z) = \sum_{n=1}^m F(X_n) = F(X) + F(Y)$
- z konečné aditivity tudíž přímo vyplývá aditivita

2.1.7 Věta

Aditivita a konečná aditivita množinové funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou na aditivní soustavě ekvivalentní.

Důkaz:

- první část důkazu vyplývá bezprostředně z předcházející věty
- je-li nyní $F(X)$ aditivní množinová funkce a jsou-li disjunktní množiny $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathcal{A}$ zvoleny tak, aby $X = \uplus_{n=1}^m X_n \in \mathcal{A}$, plyne z aditivity soustavy $\mathcal{A}$, že $X_1 \uplus X_2 \in \mathcal{A}, X_1 \uplus X_2 \uplus X_3 \in \mathcal{A}$, atd.
- pro množiny $X_1, X_2, X_1 \uplus X_2$ jsou naplněny předpoklady definice 2.1.4, a tudíž $F(X_1 \uplus X_2) = F(X_1) + F(X_2)$
- jelikož nyní $X_1 \uplus X_2 \in \mathcal{A}, X_3 \in \mathcal{A}$ a $X_1 \uplus X_2 \uplus X_3 \in \mathcal{A}$, jsou opět naplněny předpoklady definice 2.1.4, a proto $F(X_1 \uplus X_2 \uplus X_3) = F(X_1 \uplus X_2) + F(X_3)$
- analogicky: $F(X_1 \uplus X_2 \uplus \dots \uplus X_m) = \sum_{n=1}^m F(X_n)$, což kompletuje důkaz konečné aditivity

2.1.8 Věta

Nechť $F(X)$ je aditivní množinová funkce na soustavě $\mathcal{A}$ a nechť $\emptyset \in \mathcal{A}$. Je-li $F(\emptyset) \in \mathbf{R}$, je $F(\emptyset) = 0$. Je-li $F(\emptyset) = \pm\infty$, je $F(X)$ na $\mathcal{A}$ konstantní.

Důkaz:

- jelikož platí $\emptyset = \emptyset \uplus \emptyset$, musí pro aditivní množinovou funkci platit $F(\emptyset) = F(\emptyset) + F(\emptyset)$
- je-li $F(\emptyset) \in \mathbf{R}$, pak nutně $F(\emptyset) = 0$
- pokud $F(\emptyset) = \infty$, vezmeme libovolnou množinu $A \in \mathcal{A}$
- platí $A = A \uplus \emptyset$, a tedy $F(A) = F(A) + \infty$
- aby tato rovnost mohla být splněna, musí být $F(A) = \infty$ pro jakoukoli množinu $A \in \mathcal{A}$
- analogicky pro $F(\emptyset) = -\infty$

2.1.9 Věta

Nechť $F(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}^*$ je aditivní množinová funkce na okruhu $\mathcal{B}$. Pak pro libovolné množiny $X, Y \in \mathcal{B}$ platí

- $F(X \setminus Y) + F(Y) = F(Y \setminus X) + F(X)$,
- $F(X \cup Y) + F(X \cap Y) = F(X) + F(Y)$,
- je-li $F(Y) \in \mathbf{R}$, pak $F(X \setminus Y) = F(Y \setminus X) + F(X) - F(Y)$ a pokud navíc $Y \subset X$, pak $F(X \setminus Y) = F(X) - F(Y)$,
- je-li $F(X \cap Y) \in \mathbf{R}$, pak $F(X \cup Y) = F(X) + F(Y) - F(X \cap Y)$.

Důkaz:

- jelikož pro libovolné dvě množiny $X, Y \in \mathcal{B}$ platí množinová rovnost $X \cup Y = (X \setminus Y) \uplus Y = (Y \setminus X) \uplus X$ a z definice okruhu vyplývá, že jak $X \setminus Y$, tak $Y \setminus X$, jakož i $X \cup Y$ do $\mathcal{B}$ patří, lze snadno nahlédnout, že

$$F(X \cup Y) = F(X \setminus Y) + F(Y) = F(Y \setminus X) + F(X)$$

- jelikož pro každou množinu $X \in \mathcal{B}$ platí množinová rovnost $X = (X \setminus Y) \uplus (X \cap Y)$ a jak $X \setminus Y$, tak $X \cap Y$ do $\mathcal{B}$ patří, dostáváme z aditivity množinové funkce rovnost $F(X) = F(X \setminus Y) + F(X \cap Y)$
- analogicky také $F(Y) = F(Y \setminus X) + F(X \cap Y)$
- dále jistě platí rovnost $F(X \cup Y) = F(X \setminus Y) + F(Y \setminus X) + F(X \cap Y)$, ke které přičteme výraz $F(X \cap Y)$
- odtud $F(X \cup Y) + F(X \cap Y) = F(X \setminus Y) + F(Y \setminus X) + 2F(X \cap Y)$, což společně se dvěma výše odvozenými vztahy dává dokazovanou rovnost $F(X \cup Y) + F(X \cap Y) = F(X) + F(Y)$
- od již dokázané rovnosti $F(X \setminus Y) + F(Y) = F(Y \setminus X) + F(X)$ lze odečíst výraz $F(Y)$ pouze tehdy, je-li $F(Y) \in \mathbf{R}$
- za těchto okolností: $F(X \setminus Y) = F(Y \setminus X) + F(X) - F(Y)$
- je-li navíc $Y \subset X$, je $Y \setminus X = \emptyset$, a podle věty 2.1.8 tedy $F(Y \setminus X) = 0$
- proto $F(X \setminus Y) = F(X) - F(Y)$
- je-li $F(X \cap Y) \in \mathbf{R}$, pak lze v rovnosti $F(X \cup Y) + F(X \cap Y) = F(X) + F(Y)$ odečíst výraz $F(X \cap Y)$ a platí, že $F(X \cup Y) = F(X) + F(Y) - F(X \cap Y)$

2.1.10 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je na soustavě $\mathcal{A}$ σ -aditivní, jestliže pro libovolnou nekonečnou disjunktní posloupnost $(X_n)_{n=1}^\infty$ takovou, že $X_n \in \mathcal{A}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $X = \uplus_{n=1}^\infty X_n \in \mathcal{A}$, je

$$F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} F(X_n).$$

2.1.11 Lemma

Nechť $F(X)$ je σ -aditivní množinová funkce definovaná na soustavě $\mathcal{A}$ a nechť $\emptyset \in \mathcal{A}$. Je-li $F(\emptyset) \in \mathbf{R}$, je $F(\emptyset) = 0$. Je-li $F(\emptyset) = \pm\infty$, je $F(X)$ na $\mathcal{A}$ konstantní.

2.1.12 Věta

Nechť $F(X)$ je σ -aditivní množinová funkce na soustavě $\mathcal{A}$ a nechť $\emptyset \in \mathcal{A}$. Pak $F(X)$ je konečně aditivní na $\mathcal{A}$.

Důkaz:

- pro důkaz konečné aditivity vezměme $(X_i)_{i=1}^n$ konečnou disjunktní posloupnost množin $X_i \in \mathcal{A}$ takovou, že $\uplus_{i=1}^n X_i =: X \in \mathcal{A}$
- položíme $X_i := \emptyset$ pro $i > n$
- $(X_i)_{i=1}^\infty$ je tedy nekonečná disjunktní posloupnost, pro níž $\uplus_{i=1}^\infty X_i = \uplus_{i=1}^n X_i = X \in \mathcal{A}$
- podle lemmatu 2.1.11 je buď $F(\emptyset) = 0$ nebo $F(\emptyset) = \pm\infty$
- pokud $F(\emptyset) = 0$, platí

$$F(X) = F(\uplus_{i=1}^n X_i) = F(\uplus_{i=1}^\infty X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} F(X_i) = \sum_{i=1}^n F(X_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} F(X_i) = \sum_{i=1}^n F(X_i) + 0 = \sum_{i=1}^n F(X_i)$$

- to dokazuje aditivitu pro reálné množinové funkce
- pokud $F(\emptyset) = \pm\infty$, je podle lemmatu 2.1.11 $F(X)$ konstantní množinovou funkcí, tj. pro jakoukoli $Z \in \mathcal{A}$ platí $F(Z) = \pm\infty$
- odsud $F(\uplus_{i=1}^n X_i) = \pm\infty$, čímž je důkaz uzavřen

2.1.13 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je na soustavě $\mathcal{A}$ *monotónní*, jestliže pro všechny množiny $X, Y \in \mathcal{A}$ platí implikace

$$X \subset Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y).$$

2.1.14 Definice

Množinovou funkci $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ nazveme *nezápornou* na soustavě $\mathcal{A}$, jestliže pro každou množinu $X \in \mathcal{A}$ platí nerovnost $F(X) \geq 0$.

2.2 Definice míry

Nyní ze všech množinových funkcí vybereme pouze ty, které budou disponovat obecnými vlastnostmi délky, obsahu, objemu či r -dimenzionálního objemu. Jak přirozeně očekáváme, musí budoucí míra naplňovat intuitivní obecné vlastnosti, jakými jsou např. nezápornost, monotonie či aditivita. Tento přístup zcela logicky vyústí v následující axiomatické zavedení pojmu míra.

2.2.1 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je *mírou na $\mathcal{A}$* , splňuje-li následující axiomy:

- *Axiom prázdné množiny:* $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- *Axiom nulovosti:* $F(\emptyset) = 0$.
- *Axiom nezápornosti:* $\forall X \in \mathcal{A} : F(X) \geq 0$.
- *Axiom aditivity:* $\forall X, Y \in \mathcal{A} : (X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y \in \mathcal{A}) \Rightarrow F(X \uplus Y) = F(X) + F(Y)$.
- *Axiom monotonie:* $\forall X, Y \in \mathcal{A} : X \subset Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y)$.

2.2.2 Příklad

Nechť je dána soustava množin

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

a dvě množinové funkce $F(X), G(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{N}$ definované pro $X \in \mathcal{A}$ předpisy

$$F(X) := \text{card}(X), \quad G(X) := \begin{cases} \max(X) & \dots & X \neq \emptyset \\ 0 & \dots & X = \emptyset, \end{cases}$$

kde symbol $\text{card}(X)$ představuje počet prvků množiny X . Rozhodněme nejprve o typu soustavy. Soustava $\mathcal{A}$ je zjevně aditivní, ale není okruhem, neboť je sice aditivní, ale např. rozdíl množin $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 4\}$, který je reprezentován množinou $\{2\}$, do $\mathcal{A}$ nepatří. Tedy $\mathcal{A}$ nemůže být ani algebrou. Soustava $\mathcal{A}$ není ani polookruhem, neboť množina $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{2\}$ nemůže být zapsána jako disjunkt ní sjednocení množin z $\mathcal{A}$. Minimálním okruhem generovaným soustavou $\mathcal{A}$ je soustava

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Množinová funkce $F(X)$ je nezáporná (jedná se o počet prvků) a také zjevně aditivní, neboť počet prvků disjunkt ního sjednocení dvou množin z $\mathcal{A}$ je roven součtu počtu prvků obou množin, tedy např.

$$F(\{1\}) + F(\{3, 4\}) = 1 + 2 = 3 = F(\{1, 3, 4\}) = F(\{1\} \uplus \{3, 4\}).$$

$F(X)$ je také monotónní, neboť je-li $X \subset Y$, pak má X ve srovnání s Y jistě méně nebo stejně prvků. Protože $\emptyset \in \mathcal{A}$ a $F(\emptyset) = 0$ (neboť $\text{card}(\emptyset) = 0$), jsou splněny všechny podmínky pro to, aby $F(X)$ mohla být prohlášena za míru. Naproti tomu množinová funkce $G(X)$ nesplňuje požadavek aditivity, neboť pro dvě disjunkt ní množiny $X = \{1\}$ a $Y = \{3\}$ zcela jistě neplatí rovnost $G(X \uplus Y) = G(X) + G(Y)$. Naopak zde platí

$$G(X \uplus Y) = 3 \quad \wedge \quad G(X) + G(Y) = 1 + 3 = 4.$$

Tedy $G(X)$ mírou být nemůže.

2.2.3 Poznámka

Axiomy míry z definice 2.2.1 nejsou na některých soustavách nezávislé. Tj. kombinací některých axiomů lze již garantovat naplnění axiomu jiného. Několik takových příkladů probereme v následujících větách.

2.2.4 Věta – o závislosti axiomů míry na polookruhu

Nechť $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^*$ je aditivní na polookruhu $\mathcal{A}$. Je-li $F(X)$ nezáporná, pak je také monotónní. Je-li $F(X)$ monotónní a $F(\emptyset) > -\infty$, pak je $F(X)$ nutně nezáporná.

Důkaz:

- zvolme množiny $X, Y \in \mathcal{A}$ tak, že např. $X \subset Y$
- podle definice polookruhu existují množiny $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathcal{A}$ tak, že $Y \setminus X = \uplus_{k=1}^m C_k$
- tedy $Y = X \uplus \left(\uplus_{k=1}^m C_k \right)$
- z aditivity množinové funkce $F(X)$ pak vidíme, že $F(Y) = F(X) + \sum_{k=1}^m F(C_k)$
- a jelikož z nezápornosti víme, že pro všechny $k \in \hat{m}$ je $F(C_k) \geq 0$, je zřejmé, že $F(Y) \geq F(X)$
- nechť nyní naopak $F(X)$ monotónní a $F(\emptyset) > -\infty$
- jelikož každý polookruh obsahuje prázdnou množinu (jak plyne přímo z definice 1.1.25), platí podle věty 2.1.8, že buď $F(\emptyset) = +\infty$ a $F(X)$ je konstantní, nebo $F(\emptyset) = 0$
- je-li ale $F(X)$ je konstantní, pak je nutně nezáporná
- je-li $F(\emptyset) = 0$, pak z monotonie přímo plyne, že $0 = F(\emptyset) \leq F(X)$, neboť pro každou množinu $X \in \mathcal{A}$ platí, že $\emptyset \subset X$
- to prokazuje nezápornost

2.2.5 Věta – o závislosti axiomů míry na okruhu

Aditivní a nezáporná reálná množinová funkce na neprázdném okruhu je mírou.

Důkaz:

- je-li okruh $\mathcal{A}$ neprázdný, existuje v něm jistě alespoň jedna množina $X \in \mathcal{A}$
- z definice okruhu ale musí také rozdíl $X \setminus X$ patřit do $\mathcal{A}$, proto je naplněn axiom prázdné množiny
- navíc jistě $F(\emptyset) = F(\emptyset) + F(\emptyset)$, což při reálnosti míry může být naplněno pouze tehdy, je-li $F(\emptyset) = 0$
- zbývá prokázat monotonii
- jelikož je ale podle věty 1.1.27 každý okruh zároveň polookruhem, jsou naplněny předpoklady věty 2.2.4, která dokazovanou monotonií garantuje

2.2.6 Definice

Nechť je dána míra $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^{\circ}$ na soustavě $\mathcal{A}$. Množiny ze soustavy $\mathcal{A}$ pak alternativně nazýváme F -měřitelnými a množiny, jež do $\mathcal{A}$ nenáleží, nazýváme F -neměřitelnými. Množinu $X \in \mathcal{A}$ nazveme F -nulovou, pokud $F(X) = 0$.

2.2.7 Definice

Nechť je dána míra $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^{\circ}$ na soustavě $\mathcal{A}$. Řekneme, že $F(X)$ je *reálnou mírou* na $\mathcal{A}$, pokud $\text{Ran}(F) \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že $F(X)$ je σ -aditivní mírou na $\mathcal{A}$, pokud je $F(X)$ σ -aditivní množinovou funkcí na $\mathcal{A}$.

2.2.8 Věta

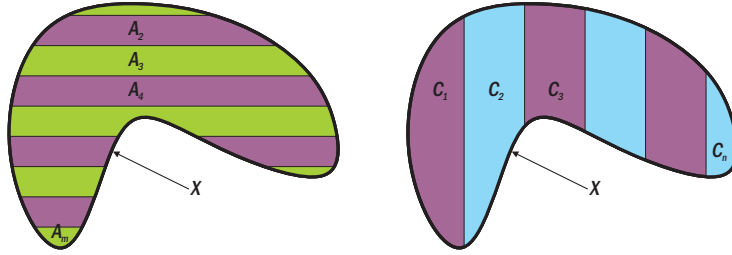
Nechť $\mathcal{B}$ je minimální okruh generovaný polookruhem $\mathcal{A}$. Nechť $F(X)$ je aditivní množinová funkce na $\mathcal{A}$. Nechť $F(A) > -\infty$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje právě jedna aditivní množinová funkce $G(X)$ na okruhu $\mathcal{B}$ taková, že $G(A) = F(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Je-li $F(X)$ reálná, je $G(X)$ také. Je-li $F(X)$ nezáporná, je $G(X)$ nezáporná a monotónní. Je-li $F(X)$ míra, je $G(X)$ také. Je-li $F(X)$ σ -aditivní, je $G(X)$ rovněž.

Důkaz:

- podle věty 1.1.28 existují pro jakoukoliv množinu $X \in \mathcal{B}$ disjunktní množiny $A_i \in \mathcal{A}$ tak, že $X = \uplus_{i=1}^m A_i$
- jediná smysluplná možnost, jak definovat $G(X)$, je následující:

$$G(X) := \sum_{i=1}^m F(A_i) \quad (2.1)$$

- to plyne z faktu, že bude-li působení funkce $G(X)$ zúženo na polookruh $\mathcal{A}$, pak $G(X) = F(X)$, a $F(X)$ má být podle předpokladů aditivní
- je nutné rozřešit otázku, zda se $G(X)$ nezmění, vyjádříme-li množinu X pomocí jiných množin $C_j \in \mathcal{A}$
 - necht' tedy $X = \uplus_{j=1}^n C_j$
 - chceme ukázat, že za daných okolností platí rovnost $\sum_{j=1}^n F(C_j) = \sum_{i=1}^m F(A_i)$



Obrázek 2.1
Ilustrační obrázek k důkazu.
Disjunktní rozklad množiny X na m "vodorovných" množin $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ a n "svislých" množin $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{A}$.

- zjevně platí

$$A_i = \bigcup_{j=1}^n (A_i \cap C_j) \quad \wedge \quad C_j = \bigcup_{i=1}^m (A_i \cap C_j)$$

- jelikož je $\mathcal{A}$ polookruh, platí $A_i \cap C_j \in \mathcal{A}$
- z aditivity $F(X)$ na $\mathcal{A}$ plynou rovnosti

$$F(A_i) = \sum_{j=1}^n F(A_i \cap C_j) \quad \wedge \quad F(C_j) = \sum_{i=1}^m F(A_i \cap C_j)$$

- tedy

$$\sum_{i=1}^m F(A_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F(A_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m F(A_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^n F(C_j)$$

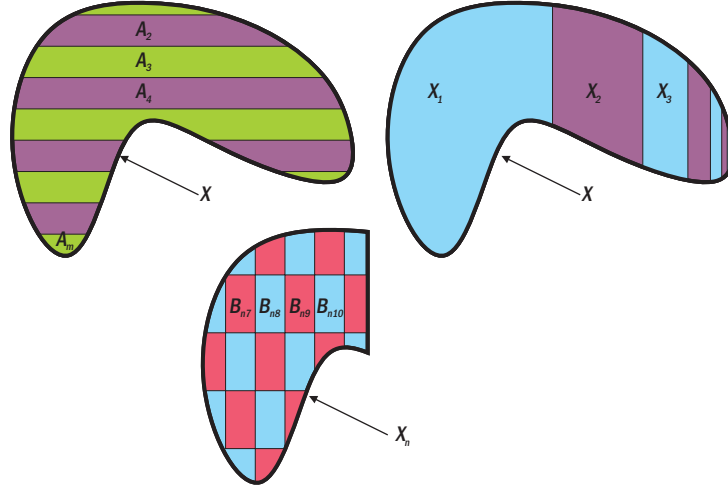
- tím je prokázána korektnost vztahu (2.1)

- nyní budeme dokazovat aditivitu

- necht' $X, Y \in \mathcal{B}$ a $X \cap Y = \emptyset$
- pak vezměme $X = \uplus_{i=1}^n A_i$ a $Y = \uplus_{j=1}^m B_j$ a odtud

$$G(X \uplus Y) = G\left[\uplus_{i=1}^n A_i \uplus \uplus_{j=1}^m B_j\right] = \sum_{i=1}^n F(A_i) + \sum_{j=1}^m F(B_j) = G(X) + G(Y)$$

- součty mají smysl, neboť žádné z čísel není podle předpokladů věty rovno minus nekonečno
- reálnost a nezápornost $G(X)$ plynou z definice (2.1) a z reálnosti a nezápornosti všech $F(A_i)$
- monotonie $G(X)$ je zřejmá z věty 2.2.5
- odsud také ihned plyne skutečnost, že byla-li $F(X)$ mírou, pak je $G(X)$ rovněž mírou
- zbývá dokázat σ -aditivitu
 - necht' $X, X_n \in \mathcal{B}$ a $X = \uplus_{n=1}^{\infty} X_n$
 - dále $X = \uplus_{i=1}^m A_i$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ a $X_n = \uplus_{j=1}^{k_n} B_{nj}$, kde $k_n \in \mathbb{N}$ a $B_{nj} \in \mathcal{A}$ (viz obrázek)

**Obrázek 2.2**

Ilustrační obrázek k důkazu.

Rozdělení množiny X na spočetně mnoho množin $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \in \mathcal{B}$, resp. konečně mnoho množin $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$. Každá z množin X_n je dále členěna na konečně mnoho disjunktních množin $B_{n1}, B_{n2}, \dots, B_{k_n} \in \mathcal{A}$.

- platí tedy

$$X = \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{k_n} B_{nj}$$

- zřejmě též platí vztahy

$$A_i = A_i \cap X = \biguplus_{n=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{k_n} (A_i \cap B_{nj}) \quad (2.2)$$

$$B_{nj} = B_{nj} \cap X = \biguplus_{i=1}^m (A_i \cap B_{nj}) \quad (2.3)$$

- definujeme-li $G(X) := \sum_{i=1}^m F(A_i)$, platí ze σ -aditivity množinové funkce $F(X)$ a vztahu (2.2) rovnost

$$G(X) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} F(A_i \cap B_{nj}) \right]$$

- výše uvedený zápis lze dále upravit do tvaru

$$G(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left[\sum_{i=1}^m F(A_i \cap B_{nj}) \right]$$

- to spolu s rovností (2.3) vede na vztah

$$G(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} F(B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} G(X_n),$$

který završuje důkaz σ -aditivity množinové funkce $G(X)$

2.2.9 Poznámka

Podotýkáme, že předpoklad $F(A) > -\infty$ je v předešlé větě důležitý, jak je patrné z následujícího protipříkladu. Uvažme soustavu $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ a na ní definovanou množinovou funkci $F(X)$ zavedenou vztahy $F(\emptyset) = 0$, $F(\{1\}) = -\infty$ a $F(\{2\}) = \infty$. Okruhem $\mathcal{B}$ generovaným polookruhem $\mathcal{A}$ je množinová soustava $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Ovšem pro množinu $\{1, 2\}$ by hodnota $G(\{1, 2\}) := F(\{1\}) + F(\{2\})$ nebyla definována.

2.2.10 Důsledek – o přenosu míry z polookruhu na minimální okruh

Nechť $\mathcal{B}$ je minimální okruh generovaný polookruhem $\mathcal{A}$. Nechť $F(X)$ je $(\sigma$ -aditivní) míra na $\mathcal{A}$. Pak existuje právě jedna $(\sigma$ -aditivní) míra $G(X)$ zavedená na okruhu $\mathcal{B}$ tak, že $G(X) = F(X)$ pro všechny množiny $X \in \mathcal{A}$.

2.2.11 Poznámka

Předešlý proces tedy představuje cosi jako rozšiřování míry $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^{\circ}$ z polookruhu $\mathcal{A}$ na minimální okruh $\mathcal{B}$ jím generovaný. Tuto novou míru věta označuje symbolem $G(Y) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}^{\circ}$. Vybereme-li tedy $Y \in \mathcal{B}$ libovolně, existuje podle věty 1.1.28 rozklad množiny Y na disjunktní množiny $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathcal{A}$ tak, že $Y = \uplus_{k=1}^m X_k$. Míra množiny Y je pak definována jako $G(Y) = \sum_{k=1}^m F(X_k)$, což mimo jiné garantuje fakt, že je-li $Y \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, pak $G(Y) = F(Y)$. Navíc je ale větou 2.2.10 prokázáno, že je-li $Z_1, Z_2, \dots, Z_\ell \in \mathcal{A}$ jiný disjunktní rozklad množiny Y , pak $\sum_{k=1}^m F(X_k) = \sum_{j=1}^{\ell} F(Z_j)$. Čili na konkrétní volbě disjunktního rozkladu hodnota míry množiny Y nezávisí.

2.2.12 Definice

Nechť je dána míra $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^{\circ}$ na soustavě $\mathcal{A}$. Řekneme, že $F(X)$ je na soustavě $\mathcal{A}$ *úplná*, jestliže pro všechny množiny $X \in \mathcal{A}$ platí implikace

$$F(X) = 0 \wedge Y \subset X \Rightarrow F(Y) = 0.$$

2.2.13 Poznámka

V definici 2.2.12 stojí za zdůraznění fakt, že její znění nepožaduje, aby sama množina Y patřila do soustavy $\mathcal{A}$. Pokud by totiž její předpoklady zněly takto: $X, Y \in \mathcal{A}$, $F(X) = 0$ a $Y \subset X$, pak by rovnost $F(Y) = 0$ byla splněna automaticky na základě platnosti axiomů míry. Jinými slovy: definice 2.2.12 by mohla ekvivalentně znít také takto:

$$X \in \mathcal{A} \wedge F(X) = 0 \wedge Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}.$$

Správná interpretace definice úplné míry je tedy taková, že má-li nějaká množina ze soustavy $\mathcal{A}$ nulovou míru (a je tudíž tzv. F -nulovou množinou), pak všechny její podmnožiny do $\mathcal{A}$ patří také.

2.3 Zavedení míry na soustavě $\mathcal{H}_r$

Nyní ze všech obecných měr vybereme pouze speciální případy měr, a to takové, jež operují na podsoustavách soustavy $2^{\mathbf{E}^r}$. Budeme tedy budovat míry pro číselné množiny. Prvním krokem při budování míry libovolného typu je zavedení míry na intervalech v $\mathbf{E}^r$. To může být provedeno tzv. klasicky, tj. např. předpisem

$$F(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) := (b - a)(d - c),$$

nebo alternativně (při budování abstraktní míry) např. předpisem

$$F(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) := (b^3 - a^3)(d - c).$$

Vybudování míry na intervalech v $\mathbf{E}^r$ bude přitom výchozím krokem při konstrukci jakéhokoli typu míry.

2.3.1 Definice

Nechť $r \in \mathbf{N}$. Symbolem $\mathcal{H}_r$ označíme soustavu

$$\mathcal{H}_r = \{\emptyset, \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \times \dots \times \langle \alpha_r, \beta_r \rangle : -\infty < \alpha_k < \beta_k < +\infty, k \in \hat{r}\}$$

obsahující prázdnou množinu a všechny polouzavřené r -dimenzionální intervaly (viz definice 9.1.13).

2.3.2 Věta

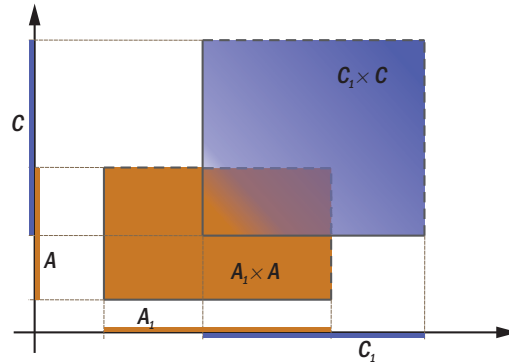
Soustava $\mathcal{H}_r$ je polookruh pro každé $r \in \mathbf{N}$.

Důkaz:

- pro $r = 1$ je důkaz triviální
- předpokládejme, že tvrzení platí pro $r - 1$ a dokazujme, že pak platí i pro dimenzi r
- dva libovolné intervaly z $\mathcal{H}_r$ rozepíšeme na kartézský součin jednorozměrné a $(r - 1)$ -rozměrné množiny

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \times \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_r, \beta_r \rangle = A_1 \times A$$

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle \times \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \gamma_r, \delta_r \rangle = C_1 \times C$$



Obrázek 2.3

Ilustrační obrázek k důkazu.

- nechť tedy $A_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ a $C_1 = \langle \gamma_1, \delta_1 \rangle$

- pro průnik pak platí rovnost

$$(A_1 \times A) \cap (C_1 \times C) = (A_1 \cap C_1) \times (A \cap C),$$

která dokazuje, že průnik libovolných dvou množin z $\mathcal{H}_r$ také patří do $\mathcal{H}_r$

- zdůvodnění je následující: jelikož $(A_1 \cap C_1) \in \mathcal{H}_1$ a $(A \cap C) \in \mathcal{H}_{r-1}$, je jasné, že jejich kartézský součin patří do $\mathcal{H}_r$
- dále platí (viz předešlý obrázek):

$$(A_1 \times A) \setminus (C_1 \times C) = (A_1 \setminus C_1) \times A \bigsqcup (A_1 \cap C_1) \times (A \setminus C)$$

- jelikož $\mathcal{H}_1$ je polookruh, platí, že existují $I_1, I_2 \in \mathcal{H}_1$ tak, že $A_1 \setminus C_1 = I_1 \uplus I_2$
- protože předpokládáme, že $\mathcal{H}_{r-1}$ je také polookruh, musí existovat množiny $D_i \in \mathcal{H}_{r-1}$ tak, že

$$A \setminus C = D_1 \uplus D_2 \uplus \cdots \uplus D_m$$

- tedy

$$\begin{aligned} (A_1 \times A) \setminus (C_1 \times C) &= (I_1 \uplus I_2) \times A \bigsqcup (A_1 \cap C_1) \times (D_1 \uplus D_2 \uplus \cdots \uplus D_m) = \\ &= (I_1 \times A) \bigsqcup (I_2 \times A) \bigsqcup [(A_1 \cap C_1) \times D_1] \bigsqcup [(A_1 \cap C_1) \times D_2] \bigsqcup \cdots \bigsqcup [(A_1 \cap C_1) \times D_m] \end{aligned}$$

- v uvedené rovnosti jsou všechna sjednocení disjunktní, čímž jsme prokázali, že každý rozdíl dvou množin $(A_1 \times A) \setminus (C_1 \times C)$ z $\mathcal{H}_r$ lze zapsat jako konečné disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$

2.3.3 Poznámka

V následující větě ukážeme, jak zavést libovolnou (tedy ne nutně klasickou) míru na soustavě $\mathcal{H}_1$ omezených polouzavřených intervalů $\langle a, b \rangle$. Tento poznatek pak v dalším textu přeneseme do vícerozměrných prostorů, tedy do polookruhu $\mathcal{H}_r$.

2.3.4 Věta

Nechť $\varphi(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ je reálná neklesající funkce, jejímž definičním oborem je $\text{Dom}(\varphi) = \mathbf{R}$. Definujeme-li pro interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbf{R}$ množinovou funkci předpisem

$$F(\langle \alpha, \beta \rangle) := \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

kde navíc pro prázdnou množinu klademe $F(\emptyset) := 0$, pak $F(X)$ je reálná míra na $\mathcal{H}_1$.

Důkaz:

- zřejmě $\emptyset \in \mathcal{H}_1$ a $F(\emptyset) = 0$
- jelikož $\varphi(x)$ je reálná, je $F(X)$ reálnou množinovou funkcí na $\mathcal{H}_1$
- nezápornost $F(X)$ plyne z faktu, že $\varphi(x)$ je neklesající
- monotonie plyne z faktu, že pokud $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle \gamma, \delta \rangle$, pak $\gamma \leq \alpha \leq \beta \leq \delta$, a tedy $\varphi(\gamma) \leq \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta) \leq \varphi(\delta)$
- sečteme-li nerovnosti $\varphi(\beta) \leq \varphi(\delta)$ a $-\varphi(\alpha) \leq -\varphi(\gamma)$, docházíme k tvrzení $F(\langle \alpha, \beta \rangle) \leq F(\langle \gamma, \delta \rangle)$, které završuje důkaz monotonie
- zbývá dokázat aditivitu
- vezměme disjunktní množiny $A = \langle \alpha, \beta \rangle$ a $B = \langle \gamma, \delta \rangle$ z $\mathcal{H}_1$
- z uvedené disjunkce plyne, že buď $\beta = \gamma$ nebo $\delta = \alpha$
- kdyby tomu tak nebylo, pak by $A \uplus B \notin \mathcal{H}_1$
- podotýkáme, že množiny typu $\langle 0, 1 \rangle \uplus \langle 2, 3 \rangle$ do $\mathcal{H}_1$ nepatří
- vyberme např. variantu $\beta = \gamma$
- druhá varianta se dokazuje naprosto totožně
- pak platí $F(A \uplus B) = F(\langle \alpha, \delta \rangle) = \varphi(\delta) - \varphi(\alpha)$
- také ale platí $F(A) + F(B) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varphi(\delta) - \varphi(\beta)$
- odsud již plyne rovnost $F(A \uplus B) = F(A) + F(B)$
- tím je ověřeno, že $F(X)$ je mírou na polookruhu $\mathcal{H}_1$

2.3.5 Definice

Funkci $\varphi(x)$ z předešlé věty 2.3.4, která je tedy definovaná na celém $\mathbf{R}$ a je neklesající, nazýváme *vytvorující funkcí míry* $F(X)$ na polookruhu $\mathcal{H}_1$ nebo také *generátorem míry*.

2.3.6 Příklad

Nechť je $\varphi(x) = 5x^5$ vytvorující funkcí míry $F(X)$ na $\mathcal{H}_1$. Uvažme množiny $A = \langle 0, 2 \rangle$ a $B = \langle 1, 3 \rangle$. Pak platí

$$F(A) = \varphi(2) - \varphi(0) = 160 \quad \wedge \quad F(B) = \varphi(3) - \varphi(1) = 1215 - 5 = 1210.$$

Jak je patrné z výsledku, ačkoliv množina B vznikla pouhým posunutím množiny A , míry obou množin se značně liší. Máme zde tedy příklad míry, která není tzv. *invariantní vůči posunutí*. Snadno nahlédneme, že klasická míra, jejíž vytvorující funkcí je funkce $\psi(x) = x$, zmíněnou invarianci vykazuje, neboť např.

$$F(A) = \psi(2) - \psi(0) = 2 \quad \wedge \quad F(B) = \psi(3) - \psi(1) = 3 - 1 = 2.$$

2.3.7 Věta

Každá reálná míra na soustavě $\mathcal{H}_1$ má vytvořující funkci. Dvě funkce vytvořují tutěž míru právě tehdy, když jejich rozdíl je konstantní funkce.

Důkaz:

- nechť $F(X)$ je reálná míra na $\mathcal{H}_1$
- definujeme

$$\varphi(x) := \begin{cases} F(\langle 0, x \rangle) & \dots & x > 0, \\ -F(\langle x, 0 \rangle) & \dots & x < 0, \\ 0 & \dots & x = 0 \end{cases}$$

- ukážeme, že $\varphi(x)$ neklesá
- k tomu vezměme $x < y$
- vzhledem k výše uvedenému členění definice funkce $\varphi(x)$ je nutno důkaz provést pro tři případy
- pro případ, kdy $x < y \leq 0$, platí, že

$$\varphi(x) = -F(\langle x, 0 \rangle) = -F(\langle x, y \rangle) - F(\langle y, 0 \rangle) = -F(\langle x, y \rangle) + \varphi(y),$$

z čehož díky nezápornosti míry $F(X)$ vyplývá nerovnost $\varphi(x) \leq \varphi(y)$

- analogicky (viz cvičení 8.18) se nerovnost $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ prokáže pro zbylé dva případy, kdy $0 \leq x < y$, resp. $x < 0 < y$
- dále se snadno nahlédne, že ve všech třech případech platí $F(\langle x, y \rangle) = \varphi(y) - \varphi(x)$, neboť např. pro $x < 0 < y$ platí rovnost

$$F(\langle x, y \rangle) = F(\langle x, 0 \rangle) + F(\langle 0, y \rangle) = -\varphi(x) + \varphi(y)$$

- podobně to prokážeme na zbylých intervalech $0 \leq x < y$ a $x < y \leq 0$
- zbývá ověřit tvrzení o konstantním rozdílu dvou vytvořujících funkcí
- dejme tomu, že $\psi(x)$ je také vytvořující funkce pro tutěž míru $F(X)$
- pak např. pro $x \geq 0$ platí

$$F(\langle 0, x \rangle) = \psi(x) - \psi(0) = \varphi(x) - \varphi(0)$$

- tedy pro všechna nezáporná x platí $\psi(x) = \varphi(x) + C$, kde $C = \psi(0) - \varphi(0)$ je konstanta
- totéž platí pro záporná x
- tím je důkaz završen
- pro důkladnost je však nutno dokončit některé (zde pouze nastíněné) části tohoto důkazu

2.3.8 Příklad

Ukážeme, že funkce $\varphi(x) = \text{sgn}(x)$ je vytvořující funkcí míry na $\mathcal{H}_1$, která ale není σ -aditivní. Uvažme proto disjunktní rozklad intervalu

$$\langle -1, 0 \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{-1}{n}, \frac{-1}{n+1} \right\rangle.$$

Jelikož ale $F(\langle -1, 0 \rangle) = \varphi(0) - \varphi(-1) = 1$ a

$$F\left(\left\langle \frac{-1}{n}, \frac{-1}{n+1} \right\rangle\right) = -1 + 1 = 0,$$

zcela jistě není splněna σ -aditivita, neboť by muselo platit

$$1 = F(\langle -1, 0 \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\left\langle -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \right\rangle\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

což ale zjevně neplatí.

2.3.9 Věta

Nechť $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ je reálná míra na $\mathcal{H}_r$. Pak $F(X)$ je σ -aditivní právě tehdy, když platí následující dvě tvrzení:

1. pro každou množinu $H \in \mathcal{H}_r$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $K \in \mathcal{H}_r$ taková, že $H \subset K^\circ$ a navíc $F(K) < F(H) + \varepsilon$,
2. pro každou množinu $H \in \mathcal{H}_r$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $L \in \mathcal{H}_r$ taková, že $\bar{L} \subset H$ a navíc $F(L) > F(H) - \varepsilon$.

Bez důkazu.

2.3.10 Věta

Nechť $F(X) : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathbf{R}$ je míra na $\mathcal{H}_1$ generovaná vytvořující funkcí $\varphi(x)$. Pak $F(X)$ je σ -aditivní právě tehdy, když $\varphi(x)$ je v každém bodě $c \in \mathbf{R}$ spojitá zleva.

Důkaz:

- zvolme $c \in \mathbf{R}$ tak, že $\varphi(x)$ není v tomto bodě spojitá zleva
- proto existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ existuje $z \in \langle c - \delta, c \rangle$ tak, že $|\varphi(z) - \varphi(c)| \geq \varepsilon$
- protože funkce $\varphi(x)$ na $\mathbf{R}$ neklesá, je zřejmé, že $\varphi(z) \leq \varphi(c) - \varepsilon$
- zvolíme-li $x < c - \delta$, pak nutně $\varphi(x) \leq \varphi(c - \delta) \leq \varphi(z) \leq \varphi(c) - \varepsilon$
- toto platí pro jakékoli $\delta > 0$, proto pro jakékoli $x < c$ musí rovněž platit, že $\varphi(x) \leq \varphi(c) - \varepsilon$
- zvolme v intervalu $H = \langle c - 1, c \rangle$ dvě čísla s, t tak, aby $c - 1 \leq s < t < c$
- pak interval $L = \langle s, t \rangle$ leží v $\langle c - 1, c \rangle$ tak, že dokonce $\bar{L} \subset \langle c - 1, c \rangle = H$
- navíc z faktu, že $\varphi(x)$ neklesá, plyne, že $-\varphi(s) \leq -\varphi(c - 1)$
- odtud nicméně plyne, že

$$F(\langle s, t \rangle) = \varphi(t) - \varphi(s) \leq \varphi(c) - \varepsilon - \varphi(c - 1) = F(\langle c - 1, c \rangle) - \varepsilon$$

- tím jsme našli konstelaci $H = \langle c - 1, c \rangle$, $\varepsilon > 0$, $L = \langle s, t \rangle$, která odporuje bodu č. 2 z věty 2.3.9, čímž je prokázáno, že není-li vytvořující funkce spojitá zleva v některém bodě, pak $F(X)$ nemůže být σ -aditivní
- přistupme k důkazu druhé implikace
- nechť je vytvořující funkce $\varphi(x)$ spojitá zleva na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$
- z levé spojitosti v bodě $x = \alpha$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma < \alpha$ tak, že $|\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon$
- odtud a z faktu, že $\varphi(x)$ neklesá, plyne, že $\varphi(\gamma) > \varphi(\alpha) - \varepsilon$
- pak ale

$$F(\langle \gamma, \beta \rangle) = \varphi(\beta) - \varphi(\gamma) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon = F(\langle \alpha, \beta \rangle) + \varepsilon$$

- tím jsme našli konstelaci $K = \langle \gamma, \beta \rangle$, $\varepsilon > 0$, $H = \langle \alpha, \beta \rangle$, která prokazuje naplnění bodu č. 1 z věty 2.3.9, neboť taková konstelace existuje pro všechna $\varepsilon > 0$ a všechna $H \in \mathcal{H}_1$
- z levé spojitosti v bodě $x = \beta$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\lambda < \beta$ tak, že $|\varphi(\lambda) - \varphi(\beta)| < \varepsilon$
- odtud a z faktu, že $\varphi(x)$ neklesá, plyne, že $\varphi(\lambda) > \varphi(\beta) - \varepsilon$
- pak ale

$$F(\langle \alpha, \lambda \rangle) = \varphi(\lambda) - \varphi(\alpha) > \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - \varepsilon = F(\langle \alpha, \beta \rangle) - \varepsilon$$

- tím jsme našli konstelaci $L = \langle \alpha, \lambda \rangle$, $\varepsilon > 0$, $H = \langle \alpha, \beta \rangle$, která prokazuje naplnění bodu č. 2 z věty 2.3.9, neboť taková konstelace existuje pro všechna $\varepsilon > 0$ a všechna $H \in \mathcal{H}_1$
- jelikož jsou splněny oba body z věty 2.3.9, musí být $F(X)$ nutně σ -aditivní

2.3.11 Poznámka

Po zavedení obecné míry v polookruhu $\mathcal{H}_1$ zužitkujeme nyní tento poznatek při zavedení míry na vícerozměrném prostoru. Budeme tedy definovat (zcela jednoduchým a očekávaným způsobem) míru na polookruhu $\mathcal{H}_r$. To provedeme v následující větě.

2.3.12 Věta

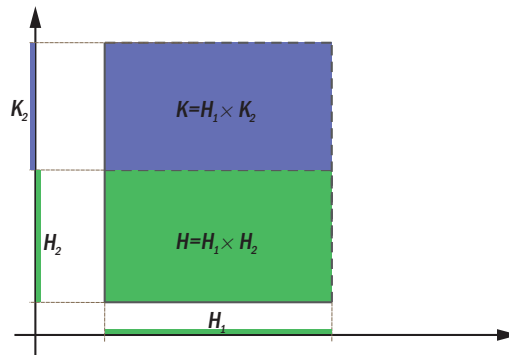
Nechť $F_1(X), F_2(X), \dots, F_r(X)$ jsou reálné míry na $\mathcal{H}_1$. Definujeme-li pro $H := H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r \in \mathcal{H}_r$ množinovou funkci $F(H) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ předpisem

$$F(H) := \prod_{k=1}^r F_k(H_k), \quad (2.4)$$

je $F(X)$ reálná míra na $\mathcal{H}_r$.

Důkaz:

- důkaz demonstrujeme na dvourozměrném případě



Obrázek 2.4

Ilustrační obrázek k důkazu.

- zřejmě pro $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_1$ je $H = H_1 \times H_2$ intervalem z $\mathcal{H}_2$
- definice množinové funkce $F(H) := F_1(H_1) \cdot F_2(H_2)$ na $\mathcal{H}_2$ je jistě smysluplná, neboť představuje součin jednorozměrných měr (délek) stran intervalu (polouzavřeného obdélníka) $H \in \mathcal{H}_2$
- reálnost a nezápornost množinové funkce $F(X)$ plyne okamžitě z faktu, že jak $F_1(X)$, tak $F_2(X)$ jsou reálné i nezáporné
- dokažme monotonii
- nechť $K = K_1 \times K_2$ je podmnožinou $H = H_1 \times H_2$
- pak ale jistě $K_1 \subset H_1$ a zároveň $K_2 \subset H_2$
- z monotonie $F_1(X)$ a $F_2(X)$ ihned plyne monotonie $F(X)$, neboť

$$F_1(K_1) \leq F_1(H_1) \wedge F_2(K_2) \leq F_2(H_2) \Rightarrow F(K) = F_1(K_1) \cdot F_2(K_2) \leq F_1(H_1) \cdot F_2(H_2) = F(H)$$

- zbývá prokázat aditivitu
- na tomto místě je třeba si uvědomit skutečnost, že lze sjednocovat pouze takové množiny z $\mathcal{H}_2$, jejichž sjednocení padne do $\mathcal{H}_2$
- má-li tedy disjunktní sjednocení množin $K, H \in \mathcal{H}_2$ padnout do $\mathcal{H}_2$, musí být $K_1 = H_1$ a polouzavřené intervaly K_2, H_2 na sebe musí navazovat, nebo $K_2 = H_2$ a K_1, H_1 na sebe musí navazovat
- popišme situaci z obrázku 2.4
- víme, že $K \uplus H = H_1 \times (H_2 \uplus K_2) = (H_1 \times H_2) \uplus (H_1 \times K_2)$

- tedy $F(K \uplus H) = F(H_1 \times (H_2 \uplus K_2)) = F_1(H_1) \cdot F_2(H_2 \uplus K_2)$
- nyní využijeme aditivity funkce $F_2(X)$ z předpokladů věty, odkud pak

$$F(K \uplus H) = F_1(H_1) \cdot (F_2(H_2) + F_2(K_2)) = F_1(H_1) \cdot F_2(H_2) + F_1(H_1) \cdot F_2(K_2) = F(H) + F(K)$$

- tím je důkaz dokončen

2.3.13 Věta

Jsou-li všechny $F_1(X), F_2(X), \dots, F_r(X) : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathbf{R}$ z předešlé věty σ -aditivní, je $F(X)$ rovněž σ -aditivní na $\mathcal{H}_r$.

Důkaz:

- k důkazu využijeme větu 2.3.9
- zvolme $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r \in \mathcal{H}_r$
- jelikož jsou všechny $F_k(X)$ σ -aditivní na $\mathcal{H}_1$, existují podle věty 2.3.9 posloupnosti intervalů $({}^n K_k)_{n=1}^\infty$, takových, že $H_k \subset {}^n K_k^\circ$, kde ${}^n K_k \in \mathcal{H}_1$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} F_k({}^n K_k) = F_k(H_k)$
- toto platí pro všechna $k \in \hat{r}$
- odtud a z definičního vztahu (2.4) pak

$$F(H) = \prod_{k=1}^r F_k(H_k) = \prod_{k=1}^r \lim_{n \rightarrow \infty} F_k({}^n K_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} F({}^n K_1 \times {}^n K_2 \times \dots \times {}^n K_r)$$

- nyní je zřejmé, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro indexy $n > n_0$ platí nerovnost

$$F({}^n K_1 \times {}^n K_2 \times \dots \times {}^n K_r) < F(H) + \varepsilon$$

- navíc ale platí

$$H \subset {}^n K_1^\circ \times {}^n K_2^\circ \times \dots \times {}^n K_r^\circ = ({}^n K_1 \times {}^n K_2 \times \dots \times {}^n K_r)^\circ$$

- tím jsme ověřili podmínku č. 1 z věty 2.3.9
- analogicky lze prokázat také naplnění podmínky č. 2
- proto je podle věty 2.3.9 funkce $F(X)$ σ -aditivní na $\mathcal{H}_r$

2.3.14 Příklad

Nechť $\varphi_1(x) = x^3$, resp. $\varphi_2(x) = x^5$ jsou vytvářející funkce pro míry $F_1(X)$, resp. $F_2(X)$ na soustavě $\mathcal{H}_1$. Nechť

$$m(H_1 \times H_2) := F_1(H_1) \cdot F_2(H_2),$$

kde $H_1 \times H_2 \in \mathcal{H}_2$. Vypočteme míru $m(X)$ pro množiny $A = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ a $B = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Snadným výpočtem nalezneme, že

$$m(A) = \left[x^3 \right]_{-1}^1 \left[y^5 \right]_{-1}^1 = 4, \quad (2.5)$$

$$m(B) = \left[x^3 \right]_0^2 \left[y^5 \right]_0^2 = 8 \cdot 32 = 256. \quad (2.6)$$

Opět shledáváme, že míra $m(X)$ z tohoto příkladu není na $\mathcal{H}_2$ invariantní vůči posunutí. Jenom malá poznámka na závěr: integrální formalismus v zápisech (2.5) a (2.6) není bezúčelový, jak se přesvědčíme později.

2.3.15 Definice

Nechť $C_1, C_2, \dots, C_r \in \mathbf{R}$ jsou konstanty a $\varphi_k(x) = x + C_k$ lineární vytvářející funkce. Pak je-li míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ zavedena předpisem

$$F(X) = \begin{cases} \prod_{k=1}^r \left[\varphi_k(x) \right]_{\alpha_k}^{\beta_k} = \prod_{k=1}^r (\beta_k - \alpha_k) & \dots & X = \times_{k=1}^r \langle \alpha_k, \beta_k \rangle, \\ 0 & \dots & X = \emptyset, \end{cases}$$

nazýváme ji *klasickou r -dimenzionální mírou*. V ostatních případech hovoříme o *mírách abstraktních*.

2.3.16 Věta

Klasická míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ zavedená vztahem

$$F(X) = \begin{cases} \prod_{k=1}^r (\beta_k - \alpha_k) & \dots & X = \bigtimes_{k=1}^r \langle \alpha_k, \beta_k \rangle, \\ 0 & \dots & X = \emptyset, \end{cases} \quad (2.7)$$

je na $\mathcal{H}_r$ σ -aditivní.

Důkaz:

- plyne z vět 2.3.10, 2.3.12 a 2.3.13

2.3.17 Věta

Klasická míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ zavedená vztahem (2.7) je na $\mathcal{H}_r$ úplná.

Důkaz:

- jedinou F -nulovou množinou pro klasickou míru $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ je prázdná množina
- a všechny její podmnožiny (de facto je jen jediná) jsou také F -měřitelné

2.3.18 Věta

Abstraktní míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ obecně není na $\mathcal{H}_r$ úplná.

Důkaz:

- uvažme míru $F(X) : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathbf{R}$ zavedenou vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \dots & x \leq 2, \\ 2 & \dots & x > 2 \wedge x \leq 4, \\ x - 2 & \dots & x > 4 \end{cases}$$

- množina $H = \langle 2, 4 \rangle$ je pro takovou míru zjevně F -nulovou množinou
- její podmnožinou je ale množina $J = \{3\}$, která míru nemá, což je rozpor s definicí úplnosti

Kapitola 3

Abstraktní Jordanova míra

V předešlé kapitole jsme představili společný krok výstavby všech typů měr, a sice zavedení míry na soustavě $\mathcal{H}_r$ polouzavřených omezených intervalů. K tomu nám posloužila sada vytvářejících funkcí definovaných všude v $\mathbf{R}$ a neklesajících v $\mathbf{R}$. Avšak míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ představuje pouze nepatrný zlomek z celé ucelené teorie míry. V této kapitole se proto budeme věnovat první z obecně uznávaných měr, a sice míře Jordanově (čteme [žordanova]). Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) byl uznávaný francouzský matematik, který část svého vědeckého života zasvětil právě studiu teorie míry.

3.1 Zavedení míry na $\mathcal{H}_r$

První problémem této kapitoly bude přenos míry z polookruhu $\mathcal{H}_r$ na vhodnou nadsoustavu soustavy $\mathcal{H}_r$ tak, aby množinám z $\mathcal{H}_r$ zůstala původní hodnota míry definovaná v předešlém kroku.

3.1.1 Úmluva

V celé kapitole předpokládáme, že je zadána σ -aditivní míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ na polookruhu $\mathcal{H}_r$. To nechť je provedeno prostřednictvím r vytvářejících funkcí $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ až $\varphi_r(x)$, jež jsou tudíž podle věty 2.3.10 spojitě zleva. Pak tedy, je-li $X = \emptyset$, je $F(X) = 0$ a je-li $X = \times_{k=1}^r \langle \alpha_k, \beta_k \rangle$, pak

$$F(X) = \prod_{k=1}^r (\varphi_k(\beta_k) - \varphi_k(\alpha_k)).$$

3.1.2 Poznámka

Ačkoliv je σ -aditivní míra $F(X)$ nyní korektně zavedena, umí přiřazovat míry pouze množinám typu $\langle \alpha, \beta \rangle$ v prostoru $\mathbf{E}^1$ nebo

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \times \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_r, \beta_r \rangle$$

v prostoru $\mathbf{E}^r$, což je silně nedostačující. Přitom je jisté snadné např. ze znalosti délky intervalů $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 5, 8 \rangle$ určit délku jejich sjednocení $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 5, 8 \rangle$. Toto víceméně triviální rozšíření míry bylo již obecně popsáno ve větě 2.2.10 a bude nyní uplatněno při budování abstraktní Jordanovy míry.

3.1.3 Definice

Symbolem $\mathcal{K}_r$ pro $r \in \mathbf{N}$ označíme minimální okruh generovaný polookruhem $\mathcal{H}_r$. Míru, jež je rozšířením funkce $F(X)$ z $\mathcal{H}_r$ na $\mathcal{K}_r$ podle věty 2.2.10, a je tudíž σ -aditivní, označíme symbolem $m(X)$.

3.1.4 Věta

Každou množinu $A \in \mathcal{K}_r$ lze vyjádřit jako konečné disjunktí sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$.

Důkaz:

- $\mathcal{K}_r$ je minimální okruh generovaný polookruhem $\mathcal{H}_r$

- vztahuje se na něj tedy věta 1.1.28
- a tato věta vlastně představuje stejné tvrzení, které zde dokazujeme

3.1.5 Lemma

Soustava všech konečných sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$ je totožná se soustavou $\mathcal{H}_r$.

3.1.6 Komentář

Předešlou definici 3.1.3 lze demonstrovat na $\mathcal{H}_1$ následovně. V polookruhu $\mathcal{H}_1$ je míra $F(X)$ definována jednoduchým předpisem (viz věta 2.3.16)

$$F(\langle \alpha, \beta \rangle) := \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Každou množinu $B \in \mathcal{H}_1$ lze zapsat jako konečné disjunktí sjednocení množin $(H_i)_{i=1}^n$ ze soustavy $\mathcal{H}_1$. Tedy $B = \uplus_{i=1}^n H_i$. Každá množina H_i má ale míru $F(H_i)$, je tedy přirozené podle důkazu věty 2.2.8 definovat míru množiny B předpisem

$$m(B) := \sum_{i=1}^n F(H_i). \quad (3.1)$$

Jelikož ale pro $H \in \mathcal{H}_r$ vede definiční vztah (3.1) k rovnosti $m(H) = F(H)$, je míra $m(X)$ rozšířením míry $F(X)$ z polookruhu $\mathcal{H}_r$ na okruh $\mathcal{H}_r$, a sice v tom smyslu, že $m(X)$ umí měřit všechny množiny z $\mathcal{H}_r$ a ještě nějaké další. Proto pojem *rozšíření*.

3.1.7 Příklad

Teoretický rozbor z komentáře 3.1.6 budeme demonstrovat na výpočtu dvojrozměrné míry množiny $A = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \uplus \langle 2, 4 \rangle \times \langle 3, 4 \rangle$. Předpokládejme pro ilustraci, že $\varphi_1(x) = x$ a $\varphi_2(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$. Pak tedy (podle věty 2.2.8) platí

$$\begin{aligned} m(A) &= F(\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle) + F(\langle 2, 4 \rangle \times \langle 3, 4 \rangle) = \\ &= (\varphi_1(1) - \varphi_1(0)) \cdot (\varphi_2(2) - \varphi_2(0)) + (\varphi_1(4) - \varphi_1(2)) \cdot (\varphi_2(4) - \varphi_2(3)) = 4 + 14 = 18. \end{aligned}$$

3.1.8 Lemma

Abstraktní míra $m(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ obecně není na $\mathcal{H}_r$ úplná.

3.1.9 Věta

Nechť $A, B \in \mathcal{H}_r$. Pak $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$.

Důkaz:

- pro libovolné množiny A, B platí rovnosti $A = (A \setminus B) \uplus (A \cap B)$, resp. $B = (B \setminus A) \uplus (A \cap B)$
- jsou-li navíc $A, B \in \mathcal{H}_r$, jsou všechny množiny ve výše uvedeném zápise rovněž v $\mathcal{H}_r$
- proto existují čísla $m(A)$, $m(B)$, $m(B \setminus A)$, $m(A \setminus B)$ i $m(A \cap B)$
- z aditivity množinové funkce $m(X)$ pak vychází rovnost $m(A) + m(B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + 2m(A \cap B)$
- odtud $m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$, neboť $A \cup B = (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) \uplus (A \cap B)$
- z nezápornosti míry odtud dostáváme dokazovanou nerovnost $m(A) + m(B) \geq m(A \cup B)$

3.2 Finalizace konstrukce Jordanovy míry

Množinová funkce $m(X)$ je tedy nyní schopna měřit více jednorozměrných množin než sama funkce $F(X)$, ale dosud mají míru $m(X)$ pouze jednorozměrné množiny typu $\uplus_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$. Tedy např. množina $\langle 0, 1 \rangle$ prozatím míru nemá, ačkoliv množina $\langle 0, 1 \rangle$ míru má, a sice $m(\langle 0, 1 \rangle) = 1$. Otázkou nyní je, jak vybudovat další rozšíření $\widetilde{m}(X)$ míry $m(X)$ takové, aby produkovalo to, co logicky očekáváme, tedy např. rovnost $\widetilde{m}(\langle 0, 1 \rangle) = 1$. Odpověď nám přinese následující text.

3.2.1 Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je libovolná soustava množin. Osnovou soustavu $\mathcal{A}$ rozumíme soustavu

$$\text{Sub}(\mathcal{A}) := \{X : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tak, že } X \subset A\}.$$

3.2.2 Poznámka

Osnovou soustavu $\mathcal{A}$ tedy rozumíme soustavu $\text{Sub}(\mathcal{A})$ všech podmnožin všech množin soustavy $\mathcal{A}$. Tedy zřejmě platí, že $\mathcal{A} \subset \text{Sub}(\mathcal{A})$. Podotýkáme, že označení $\text{Sub}(\mathcal{A})$ bylo odvozeno z anglického ekvivalentu *substructure* (základová konstrukce).

3.2.3 Definice

Nechť $m(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ je míra na soustavě $\mathcal{A}$. Nechť $\text{Sub}(\mathcal{A})$ je osnova soustavy $\mathcal{A}$. Položme pro každé $X \in \text{Sub}(\mathcal{A})$

$$m_i(X) := \sup \{m(A) : A \in \mathcal{A} \wedge A \subset X\}, \quad m_e(X) := \inf \{m(A) : A \in \mathcal{A} \wedge X \subset A\}.$$

Pak funkce $m_i(X)$, resp. $m_e(X)$ nazýváme *vnitřní (interní)*, resp. *vnější (externí) mírou* vytvořenou mírou $m(X)$.

3.2.4 Poznámka

Pro úplnost dodáváme, že číselné množiny $U_X := \{m(A) : A \in \mathcal{A} \wedge A \subset X\}$ a $W_X := \{m(A) : A \in \mathcal{A} \wedge X \subset A\}$ z definice 3.2.3 jsou za všech okolností neprázdné. Prvkem množiny U je totiž vždy alespoň nula, neboť prázdná množina (která podle definice míry vždy leží v $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A} \subset \text{Sub}(\mathcal{A})$) je podmnožinou každé množiny $X \in \text{Sub}(\mathcal{A})$. Ani množina W_X není nikdy prázdná, neboť podle definice osnovy soustavy musí ke každé množině $X \in \text{Sub}(\mathcal{A})$ existovat alespoň jedna její nadmnožina $B \in \mathcal{A}$. Tedy ve W_X leží alespoň číslo $m(B)$.

3.2.5 Poznámka

Velmi důležitou skutečností, která musí být na tomto místě explicitně zmíněna, je skutečnost, že ani vnitřní, ani vnější míra v drtivé většině nesplňují axiomy míry, a nejsou tudíž měrami.

3.2.6 Příklad

Uvažme interval $I = \langle 0, 1 \rangle$, který nepatří do $\mathcal{H}_1$, neboť ho nelze zapsat jako konečné disjunktí sjednocení intervalů typu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Hledejme nyní jeho vnitřní míru vytvořenou klasickou mírou $m(\langle \alpha, \beta \rangle) := \beta - \alpha$. Ze všech množin z $\mathcal{H}_1$, které lze vnořit do I , vyberme intervaly tvaru

$$I_n = \left\langle 0, \frac{n}{n+1} \right\rangle \quad (n \in \mathbf{N}),$$

které všechny leží v intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$. Pro jejich klasickou míru platí

$$m(I_n) = F(I_n) = \frac{n}{n+1}.$$

Odtud dle předchozí definice vyplývá rovnost

$$m_i(I) := \sup \{m(I_n) : n \in \mathbf{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Analogicky všechny intervaly

$$H_n = \left\langle -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right\rangle \quad (n \in \mathbf{N}),$$

jsou nadmnožinami intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$. Platí tudíž

$$m(H_n) = F(H_n) = 1 + \frac{2}{n}.$$

Odtud

$$m_e(I) := \inf \{m(H_n) : n \in \mathbf{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1.$$

Jak vidno, vnitřní míra a vnější míra množiny I se rovnají. Odsud již vyvstává myšlenka definovat míru množiny I jako společnou hodnotu obou zmíněných měr. To bude po krátké teoretické přípravě provedeno v definici 3.2.10.

3.2.7 Věta

Nechť E je libovolná množina a $\mathcal{A}$ soustava množin taková, že $\emptyset \in \mathcal{A} \subset 2^E$. Nechť dále $m(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ je reálná míra definovaná na soustavě $\mathcal{A}$. Nechť $X \in \text{Sub}(\mathcal{A})$. Pak $m_i(X) = m_e(X)$ právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A, B \in \mathcal{A}) : \quad A \subset X \subset B \quad \wedge \quad m(B) - m(A) < \varepsilon.$$

Důkaz:

- Dokážeme nejprve implikaci zleva doprava:

- předpokládejme, že $m_i(X) = m_e(X)$, a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně
- díky definici vnitřní míry a definici suprema jistě existuje množina $A \in \mathcal{A}$ tak, že $A \subset X$ a

$$m_i(X) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- podobně díky definici vnější míry a definici infima jistě existuje množina $B \in \mathcal{A}$ tak, že $X \subset B$ a

$$m(B) - m_e(X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- celkem tedy

$$m_i(X) - m(A) + m(B) - m_e(X) < \varepsilon,$$

odkud snadno získáváme dokazovanou nerovnost $m(B) - m(A) < \varepsilon$

- Dokážeme zbývající implikaci, tj. zprava doleva:

- zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a předpokládejme tedy naopak, že existují množiny $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že jednak $A \subset X \subset B$ a jednak $m(B) - m(A) < \varepsilon$
- snadno nahlédneme, že

$$m(A) \leq m_i(X) \leq m_e(X) \leq m(B)$$

- proto

$$m_e(X) - m_i(X) \leq m(B) - m(A) < \varepsilon$$

- má-li být rozdíl $m_e(X) - m_i(X)$ menší než libovolné kladné číslo ε , musí nutně platit $m_i(X) = m_e(X)$

- tím je důkaz dokončen

3.2.8 Věta

Nechť E je množina, $\mathcal{B} \subset 2^E$ je okruh a $m(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$ je reálná míra na okruhu $\mathcal{B}$. Položme

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{X \in \text{Sub}(\mathcal{B}) : m_i(X) = m_e(X)\}$$

a pro $X \in \widetilde{\mathcal{B}}$ položme

$$\widetilde{m}(X) := m_i(X).$$

Pak $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ a $\widetilde{\mathcal{B}}$ je též okruh. Dále $\widetilde{m}(X)$ je reálná míra na $\widetilde{\mathcal{B}}$, přičemž $\widetilde{m}(X) = m(X)$ pro $X \in \mathcal{B}$, t.j. $\widetilde{m}(X)$ je rozšířením míry $m(X)$ z okruhu $\mathcal{B}$ na okruh $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Důkaz:

- Dokážeme, že $\widetilde{\mathcal{B}}$ je okruh. To jest ukážeme nejprve, že $\widetilde{\mathcal{B}}$ je aditivní.

- zvolme $X, Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$ libovolně
- podle věty 3.2.7 jistě existují množiny $A, B, C, D \in \mathcal{B}$ tak, že $A \subset X \subset B$ a $C \subset Y \subset D$ a navíc platí $m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m(D) - m(C) < \frac{\varepsilon}{2}$
- jelikož $\mathcal{B}$ je okruh, platí podle věty 2.1.9, že

$$m(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$$

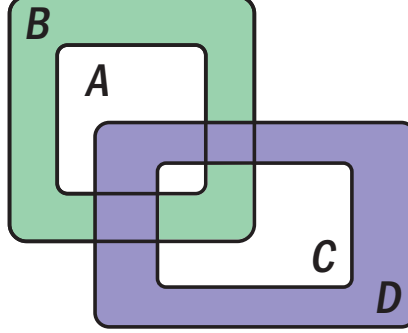
– dále platí, že

$$(A \cup C) \subset (X \cup Y) \subset (B \cup D),$$

což je triviální, a také

$$[(B \cup D) \setminus (A \cup C)] \subset [(B \setminus A) \cup (D \setminus C)],$$

jak lze nahlédnout z ilustračního obrázku



Obrázek 3.5

Ilustrační obrázek k důkazu.

Vybarvené oblasti znázorňují množinové rozdíly $B \setminus A$ a $D \setminus C$.

– pak snadno (s použitím věty 3.1.9)

$$\begin{aligned} m(B \cup D) - m(A \cup C) &= m((B \cup D) \setminus (A \cup C)) \leq m((B \setminus A) \cup (D \setminus C)) \leq \\ &\leq m(B \setminus A) + m(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

– proto podle věty 3.2.7 platí $X \cup Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$

- abychom zkompletovali důkaz, že $\widetilde{\mathcal{B}}$ je okruh, je třeba ještě prokázat, že s každými dvěma množinami $X, Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$ patří do $\widetilde{\mathcal{B}}$ také jejich rozdíl

– jelikož platí inkluze $A \setminus D \subset X \setminus Y \subset B \setminus C$ a $(B \setminus C) \setminus (A \setminus D) \subset (B \setminus A) \cup (D \setminus C)$, dostáváme odtud

$$m(B \setminus C) - m(A \setminus D) \leq m(B \setminus A) + m(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

– proto také $X \setminus Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$

- zkoumejme nyní vlastnosti množinové funkce $\widetilde{m}(X)$

- její nezápornost je zřejmá, neboť pro jakoukoli $X \in \widetilde{\mathcal{B}}$ platí, že $m_i(X) \geq 0$ a $m_e(X) \geq 0$
- dále také reálnost $\widetilde{m}(X)$ je snadno prokazatelná, neboť kdyby $\widetilde{m}(X) = +\infty$, pak by muselo platit $m_e(X) = +\infty$, což nastat nemůže
- snadno také ověříme, že $\emptyset \in \widetilde{\mathcal{B}}$ a $\widetilde{m}(\emptyset) = 0$
- zbývá tudíž prokázat aditivitu, neboť monotonie již plyne z obecné věty 2.2.5
- zvolme tedy $X, Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tak, že $X \cap Y = \emptyset$
- již víme, že existují množiny $A, B, C, D \in \mathcal{B}$ tak, že $A \subset X \subset B$ a $C \subset Y \subset D$ a navíc platí $m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m(D) - m(C) < \frac{\varepsilon}{2}$
- jelikož stále platí nerovnosti

$$m(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2},$$

plyne odsud, že

$$m_e(X \uplus Y) \leq m(B \cup D) \leq m(B) + m(D) \leq \widetilde{m}(X) + \frac{\varepsilon}{2} + \widetilde{m}(Y) + \frac{\varepsilon}{2} = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) + \varepsilon$$

– podobně

$$m_i(X \uplus Y) \geq m(A \uplus C) = m(A) + m(C) \geq \widetilde{m}(X) - \frac{\varepsilon}{2} + \widetilde{m}(Y) - \frac{\varepsilon}{2} = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) - \varepsilon$$

– odtud tedy $m_e(X \uplus Y) - m_i(X \uplus Y) \leq 2\varepsilon$

– proto nutně $m_e(X \uplus Y) = m_i(X \uplus Y)$, což je ekvivaletní tvrzení, že $X \uplus Y \in \widetilde{\mathcal{B}}$

– množinová funkce $\widetilde{m}(X)$ je tudíž reálnou mírou na $\widetilde{\mathcal{B}}$

3.2.9 Poznámka

Uvažme na chvíli, že $\mathcal{B} = \mathcal{K}_r$ a míra $m(X)$ je klasickou mírou vytvořenou podle vztahu (2.7). Nyní by mělo být zřejmé, že všechny obecné omezené intervaly (viz definice 9.1.12) v E^r mají míru $\widetilde{m}(X)$, a tedy patří do $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{K}}_r$. Naproti tomu např. množina $\mathbf{R}^r$ do $\widetilde{\mathcal{B}}$ nepatří, neboť $\mathbf{R}^r \notin \text{Sub}(\mathcal{B})$.

3.2.10 Definice

Položíme-li ve větě 3.2.8 $E = E^r$ a $\mathcal{B} = \mathcal{K}_r$, nazveme okruh $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{K}}_r$, o němž hovoří věta 3.2.8, *Jordanovým okruhem*. Míru $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_r \mapsto \mathbf{R}$ ze stejné věty nazýváme *abstraktní Jordanovou mírou* vytvořenou generujícími funkcemi $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_r(x_r)$. Množiny soustavy $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{K}}_r$ nazýváme *jordanovsky měřitelnými* nebo *$\widetilde{m}$ -měřitelnými*.

3.2.11 Definice

Je-li Jordanova míra generována sadou klasických vytvořujících funkcí podle vztahu (2.7), nazýváme okruh $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{K}}_r$ *Jordanovým-Peanovým okruhem* (čti [žordanův peanův]) a říkáme, že množiny z $\widetilde{\mathcal{K}}_r$ mají *Jordanův-Peanův objem*.

3.2.12 Poznámka

Giuseppe Peano (čti [peano]) (1858–1932) byl italský matematik a filosof. Byl jedním ze zakladatelů matematické logiky a výrazně se podílel také na vzniku teorie množin. Vytvořil dnes již klasickou axiomatizaci struktury přirozených čísel, která po něm nese jméno. Tzv. Peanovy axiomy jsou (pokud se popularity týče) matematickou obdobou Einsteinovy rovnice $E = mc^2$.

3.2.13 Věta

Nechť je dána množina E , okruh $\mathcal{B} \subset 2^E$ a reálná míra $m(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$. Nechť $K \in \mathcal{B}$. Pak pro každou množinu $X \subset K$ platí rovnost

$$m_i(X) = m(K) - m_e(K \setminus X). \quad (3.2)$$

Důkaz:

- zvolíme $\varepsilon > 0$ libovolně
- z definice externí míry jistě existuje množina $B \in \mathcal{B}$ tak, že $K \setminus X \subset B$ a $m(B) < m_e(K \setminus X) + \varepsilon$
- víme, že $K \cap B \in \mathcal{B}$, proto $m(K \cap B) \leq m(B) \leq m_e(K \setminus X) + \varepsilon$
- dále víme, že $K \setminus B \subset X$ a $K \setminus B \in \mathcal{B}$, z čehož lze odvodit, že $m(K \setminus B) + m(K \cap B) = m(K)$
- odtud $m(K \setminus B) = m(K) - m(K \cap B) \geq m(K) - m_e(K \setminus X) - \varepsilon$
- proto $m_i(X) \geq m(K) - m_e(K \setminus X)$
- nyní budeme postupovat opačně
- zvolme $A \in \mathcal{B}$ tak, aby $A \subset X$
- vidíme, že $K \setminus A \in \mathcal{B}$ a $K \setminus A \supset K \setminus X$
- proto $m(A) = m(K) - m(K \setminus A) \leq m(K) - m_e(K \setminus X)$
- pro vnitřní míru množiny X pak nutně $m_i(X) \leq m(K) - m_e(K \setminus X)$
- spolu pak $m_i(X) = m(K) - m_e(K \setminus X)$

3.2.14 Věta – o jordanovské měřitelnosti

Nechť je dána množina E , okruh $\mathcal{B} \subset 2^E$ a reálná míra $m(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$. Pak množina $X \in \text{Sub}(\mathcal{B})$ je m -měřitelná právě tehdy, když pro každou množinu $K \in \mathcal{B}$ takovou, že $X \subset K$, platí

$$m_e(X) + m_e(K \setminus X) = m(K).$$

Důkaz:

- jedná se o důsledek předešlé věty
- m -měřitelnost množiny $X \in \text{Sub}(\mathcal{B})$ je totiž ekvivalentní naplnění rovnosti $m_i(X) = m_e(X)$
- to po dosazení do vztahu (3.2) již vede k dokazované rovnosti

3.2.15 Věta

Jordanův-Peanův objem $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_r \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$ v prostoru E^r je invariantní vůči posunutím, t.j. pro libovolný bod $\vec{a} \in E^r$, množinu $X \subset E^r$ a množinu

$$X_{\vec{a}} := \{\vec{x} + \vec{a} : \vec{x} \in X\}$$

platí rovnost $\widetilde{m}(X) = \widetilde{m}(X_{\vec{a}})$, má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz:

- tvrzení plyne z faktu, že klasický objem intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je stejný jako objem intervalu $\langle \alpha + a, \beta + a \rangle$ pro pevné $a \in \mathbf{R}$

3.2.16 Poznámka

Předešlé tvrzení vlastně říká, že má-li množina $X \subset E^r$ Jordanův-Peanův objem, pak se její objem nemění, posouváme-li množinu libovolně po prostoru E^r , což pro obecnou (tedy abstraktní) Jordanovu míru platit nemusí.

3.2.17 Příklad

Uvažme klasickou Jordanovu míru $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_1 \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$ generovanou vytvářející funkcí $\psi(x) = x$. Zvolme množinu $A = \{1\}$ a pokusme se rozhodnout, zda je $\widetilde{m}$ -měřitelná, tj. je-li $A \in \widetilde{\mathcal{K}}_1$. Zjevně $A \notin \mathcal{K}_1$, tedy $m(A)$ neexistuje. Hledejme vnitřní a vnější míru množiny A . Podle definice 3.2.3 tedy

$$m_i(A) := \sup \{m(K) : K \in \mathcal{K}_1 \wedge K \subset A\}, \quad m_e(A) := \inf \{m(L) : L \in \mathcal{K}_1 \wedge A \subset L\}.$$

Hledáme-li ovšem všechny množiny $K \in \mathcal{K}_1$, pro něž $K \subset A$, zjišťujeme, že existuje pouze jediná, a to prázdná množina $\emptyset$. Proto

$$\{m(K) : K \in \mathcal{K}_1 \wedge K \subset A\} = \{m(\emptyset)\} = \{0\}.$$

Jelikož supremem jednoprvkové množiny je prvek sám, platí odtud, že $m_i(A) = 0$. Hledejme nyní všechny množiny $L \in \mathcal{K}_1$, pro něž $A \subset L$. Těch je nekonečně mnoho. Nás ale budou zajímat hlavně ty, které "obepínají" množinu A "co nejtěsněji." Volíme např.

$$L_n = \left(1, 1 + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{K}_1.$$

Také jednoduše nahlédneme, že

$$m(L_n) = \varphi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \varphi(1) = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Infimem množiny $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ je zjevně nula, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Proto $m_e(A) = 0$. Jelikož se vnitřní a vnější míry množiny A rovnají, platí jednak $A \in \widetilde{\mathcal{K}}_1$ a jednak $\widetilde{m}(A) = 0$. Uzavíráme tedy, že jednoprvková množina je (klasicky) jordanovsky měřitelná.

3.2.18 Příklad

Opět uvažme klasickou Jordanovu míru. Tentokrát budeme zkoumat množinu $B = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$ racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Opět hledáme vnitřní a vnější míru množiny B . Snadno zjistíme, že jedinou množinou $K \in \mathcal{K}_1$, pro níž $K \subset B$, je prázdná množina $\emptyset$. Proto $m_i(B) = 0$. Množin $L \in \mathcal{K}_1$, pro které $B \subset L$, je opět nekonečně mnoho. Znovu nás ale nejvíce zajímají ty, které "obepínají" množinu B "těsně." Volíme např.

$$L_n = \left\langle 0, 1 + \frac{1}{n} \right\rangle \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{K}_1.$$

Snadno vypočítáme, že

$$m(L_n) = \varphi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \varphi(0) = 1 + \frac{1}{n} - 0 = 1 + \frac{1}{n}.$$

Infimem množiny $\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ je zjevně jednička, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$. Proto také $m_e(B) = 1$. Jelikož $m_i(B) \neq m_e(B)$, není množina $B = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$ jordanovsky měřitelná.

3.2.19 Poznámka

Neodstranitelným nedostatkem Jordanovy míry je fakt, že neumí přiřazovat míru jednak neomezeným množinám (speciálně neomezeným intervalům) a jednak některým nesouvislým množinám (viz např. cvičení 8.20 nebo předešlý příklad 3.2.18). Navíc Jordanova míra funguje pouze na okruhu (oním okruhem je $\widetilde{\mathcal{B}}$), který nemůže být rozšířen na algebru, neboť právě množina E' (která je jediným logickým kandidátem na prezidenta) do $\widetilde{\mathcal{B}}$ nikdy patřit nemůže. Okruh $\widetilde{\mathcal{B}}$ navíc není ani σ -okruhem, protože není σ -aditivní. To lze nahlédnout z výsledku příkladů 3.2.17 a 3.2.18. Ačkoliv každá jednoprvková množina $A = \{q\}$, kde $q \in \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$, je podle výsledku příkladů 3.2.17 jordanovsky měřitelná, množina $B = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$, ačkoliv může být chápána jako spočetné disjunktí sjednocení množin typu A , měřitelná není (jak bylo dokázáno v příkladě 3.2.18). Tedy soustava $\widetilde{\mathcal{B}}$ je skutečně pouhým okruhem. Pro odstranění těchto vad bude zapotřebí zavést novou míru, která uvedenými handicapami již netrpí.

3.2.20 Věta

Jordanova míra není obecně σ -aditivní, a to ani tehdy, je-li její vytvořující funkce $\varphi(x)$ spojitá na celém $\mathbf{R}$.

Důkaz:

- uvažme triviální variantu klasické jednodimenzionální míry generované vytvořující funkcí $\varphi(x) = x$
- snadno lze prokázat, že pro každé $z \in \mathbf{R}$ je množina $Z = \{z\}$ jordanovsky měřitelná, neboť $m_i(Z) = m_e(Z)$
- ačkoliv je ale množina $Q = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$ všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pouze spočetným sjednocením množin tvaru $Z = \{z\}$, tak ale (podle výsledku příkladu 3.2.18) měřitelná není, a to zjevně vyvrací σ -aditivitu Jordanovy míry

3.2.21 Příklad

V tomto příkladě budeme zkoumat Jordanovu míru $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_1 \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$ generovanou vytvořující funkcí

$$\psi(x) = \begin{cases} 3x & \dots & x \leq 0, \\ 0 & \dots & x \in (0, 1), \\ 3x - 3 & \dots & x \geq 1. \end{cases}$$

Opět se pokusíme rozhodnout, zda-li množina $B = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$ má či nemá Jordanovu míru. Uvažujme tedy míru $m(X) : \mathcal{K}_1 \mapsto \mathbf{R}$, jež je na $\mathcal{K}_1$ generována funkcí $\psi(x)$. Vypočteme nejprve vnitřní míru množiny B . Zde

$$m_i(B) := \sup \{m(K) : K \in \mathcal{K}_1 \wedge K \subset B\} = \sup \{m(\emptyset)\} = 0.$$

Naproti tomu pro vnější míru platí

$$m_e(B) := \inf \{m(L) : L \in \mathcal{K}_1 \wedge B \subset L\}.$$

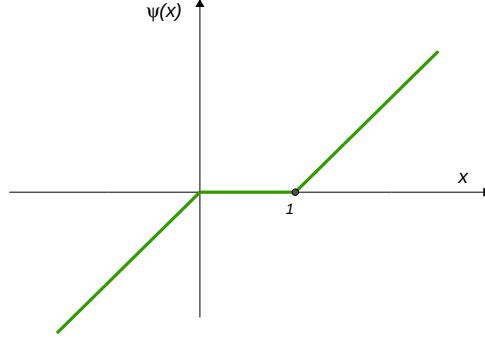
Volíme

$$L_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Snadno zjistíme, že

$$m(L_n) = \psi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \psi(0) = 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 3 - 0 = \frac{3}{n}.$$

Proto $m_e(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. Množina B je tudíž jordanovsky měřitelná, tj. $B \in \widetilde{\mathcal{K}}_1$, a $\widetilde{m}(B) = 0$.



Obrázek 3.6

Vytvořující funkce $\psi(x)$ Jordanovy míry.

3.2.22 Příklad

Nechť je dána abstraktní Jordanova míra $\widetilde{m}(X)$ generovaná vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = 3x$ a $\psi(y) = y^3$. Vypočtěme míru $\widetilde{m}(M)$ množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$. Množina M tedy představuje čtvrtkruh (viz také obrázek níže), jehož abstraktní míra ale jistě nebude očekávaných $\pi/4$, neboť příslušné vytvořující funkce nejsou klasické, tj. $\varphi(x) \neq x$ a $\psi(y) \neq y$. Množina M jistě nepatří ani do $\mathcal{K}_2$ ani $\mathcal{K}_2$. Ovšem $M \in \widetilde{\mathcal{K}}_2$, jak bude zřejmé z dalšího textu. My se pokusme vypočítat míru $\widetilde{m}(M)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ položíme

$$H_i = \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \times \left\langle 0, \sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} \right\rangle \in \mathcal{K}_2.$$

Disjunktí sjednocení množin H_i je jistě podmnožinou množiny M (viz také obrázek), tj. $\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i \subset M$, kde $\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i \in \mathcal{K}_2$. Přitom míru množiny $H_i \in \mathcal{K}_2$ lze snadno vypočítat ze vztahu

$$F(H_i) = \left[\varphi\left(\frac{i}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i-1}{n}\right) \right] \cdot \left[\psi\left(\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}\right) - \psi(0) \right] = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$

Z aditivity míry $m(X) : \mathcal{K}_2 \mapsto \mathbb{R}$ plyne, že

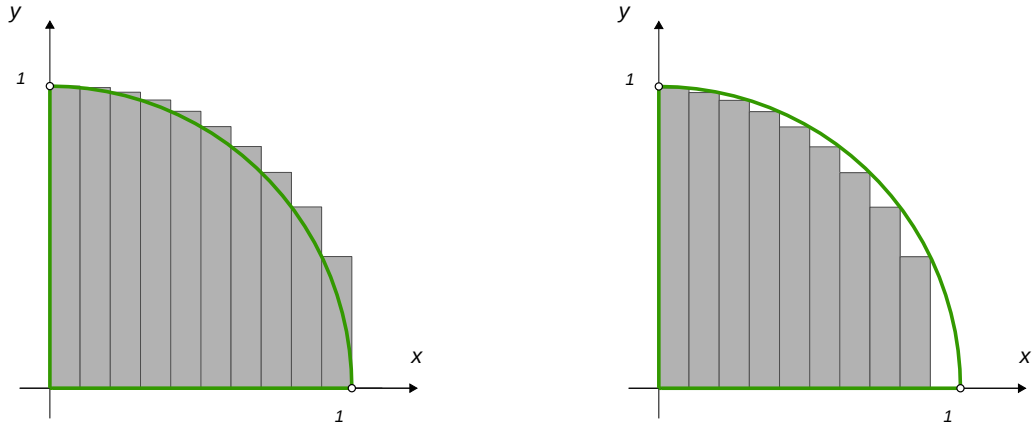
$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} F(H_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$

Vnitřní míra $m_i(M)$ množiny M je zjevně rovna limitě

$$m_i(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$

Tato limita de facto reprezentuje nekonečný součet nekonečně malých veličin $t = \frac{i}{n}$, což není nic jiného než Riemannův integrál

$$\begin{aligned} m_i(M) &= \int_0^1 3(1-t^2)^{3/2} dt = \left| \begin{array}{l} t = \sin(u) \\ dt = \cos(u) du \end{array} \right| = 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4(u) du = \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos(2u) + \cos^2(2u)) du = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos(2u) + \frac{1 + \cos(4u)}{2}\right) du = \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$



Obrázek 3.7

Nadmnožina $\uplus_{i=0}^{n-1} J_i \in \mathcal{K}_2$ a podmnožina $\uplus_{i=1}^{n-1} H_i \in \mathcal{K}_2$ množiny M .

Podobně pro $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ je disjunktní sjednocení množin

$$J_i = \left\langle \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right\rangle \times \left\langle 0, \sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} \right\rangle \in \mathcal{K}_2$$

nadmnožinou množiny M , tj. $M \subset \uplus_{i=0}^{n-1} J_i$. Dále analogicky

$$F(J_i) = \left[\varphi\left(\frac{i+1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i}{n}\right) \right] \cdot \left[\psi\left(\sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}}\right) - \psi(0) \right] = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2}$$

a

$$m(\uplus_{i=0}^{n-1} J_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F(J_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2}.$$

Proto je vnější mírou množiny M číslo

$$m_e(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)^{3/2} = \int_0^1 3(1-t^2)^{3/2} dt = \frac{9\pi}{16}.$$

Jelikož $m_i(M) = m_e(M) = \frac{9\pi}{16}$, dostáváme tím jednak potvrzení faktu, že $M \in \widetilde{\mathcal{K}}_2$, a jednak rovnost $\widetilde{m}(M) = \frac{9\pi}{16}$.

3.2.23 Poznámka

Výsledek předešlého příkladu má ale závažný důsledek. Ukázalo se v něm, že

$$\widetilde{m}(M) = \int_0^1 3(1-t^2)^{3/2} dt.$$

Pokusme se tento vztah analyzovat. Proved' me proto následující sérii jakýchsi inverzních úprav

$$\begin{aligned} \widetilde{m}(M) &= \int_0^1 3(1-t^2)^{3/2} dt = \int_0^1 3[s^3]_0^{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-t^2}} 3 \cdot 3s^2 ds dt = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3 \cdot 3y^2 dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} dy dx. \end{aligned}$$

Tento jistě zajímavý výsledek je do jisté míry univerzální a představuje vlastně jakýsi "prováděcí předpis" pro výpočty jordanovských (a posléze také lebesgueovských) měr. Příslušné tvrzení sumarizujeme ve větě 3.2.25.

3.2.24 Věta

Abstraktní míra $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{H}}_r \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$ je na $\widetilde{\mathcal{H}}_r$ úplná.

Důkaz:

- nechť $M \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$ je $\widetilde{m}$ -nulová množina
- odtud tedy nezbytně plyne, že $m_i(M) = m_e(M) = 0$
- zvolme $X \subset M$ libovolně a dokažme, že $X \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$
- jelikož $m_e(X) := \inf \{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge X \subset K\}$ a $X \subset M$, je zřejmé, že

$$\{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge X \subset K\} \supset \{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge M \subset K\}$$

- je-li ale $\inf \{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge M \subset K\} = 0$, není zbytí a $\inf \{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge X \subset K\}$ se musí také rovnat nule
- proto $m_e(X) = 0$
- jelikož $m_i(M) = 0$, je nutně množina $\{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge K \subset M\}$ jednoprvková, a sice $\{0\}$
- jinými slovy: všechny podmnožiny $K \in \mathcal{H}_r$ množiny M mají nulovou míru
- jelikož ale $X \subset M$, pak také všechny podmnožiny $K \in \mathcal{H}_r$ množiny X mají nulovou míru (a to včetně prázdné množiny)
- proto je $m_i(X) := \sup \{m(K) : K \in \mathcal{H}_r \wedge K \subset X\} = 0$
- protože tedy $m_i(X) = m_e(X) = 0$, je množina X jordanovsky měřitelná, což bylo dokázat

3.2.25 Věta – integrální formule pro Jordanovu míru

Nechť $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_r(x_r)$ jsou vytvářející funkce Jordanovy r -rozměrné míry $\widetilde{m}_r(X) : \widetilde{\mathcal{H}}_r \mapsto \mathbf{R}$ a nechť jsou všechny spojitě diferencovatelné na $\mathbf{R}$. Nechť dále $M \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$. Pak

$$\widetilde{m}_r(M) = (\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (3.3)$$

kde

$$\Upsilon(\vec{x}) := \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k},$$

pokud příslušný integrál existuje.

Důkaz:

- důkaz rozdělíme na tři etapy
- v první z nich dokážeme tvrzení pro neprázdné množiny z $\mathcal{H}_r$
- pro prázdnou množinu plyne dokazovaná rovnost z definice $(\mathcal{R}) \int_{\emptyset} g(\vec{x}) d\vec{x} := 0$
- nechť tedy $H \in \mathcal{H}_r$, tj. $H = \times_{k=1}^r \langle \alpha_k, \beta_k \rangle$
- pak z věty o separabilitě pro Riemannův integrál dostáváme

$$(\mathcal{R}) \int_H \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \prod_{k=1}^r (\mathcal{R}) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\varphi_k}{dx_k} dx_k = \prod_{k=1}^r [\varphi_k(x_k)]_{\alpha_k}^{\beta_k} = F(H) = m(H) = \widetilde{m}(H)$$

- pro druhou etapu důkazu vezměme libovolnou množinu $K \in \mathcal{H}_r$
- pro ni existují množiny $H_1, H_2, \dots, H_m \in \mathcal{H}_r$ tak, že $K = \uplus_{\ell=1}^m H_\ell$

- pak ale (při aplikaci první části důkazu)

$$(\mathcal{R}) \int_K \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = (\mathcal{R}) \int_{\bigcup_{\ell=1}^m H_\ell} \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \sum_{\ell=1}^m (\mathcal{R}) \int_{H_\ell} \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \sum_{\ell=1}^m F(H_\ell) = m(K) = \widetilde{m}(K)$$

- necht' tedy $M \in \widetilde{\mathcal{K}}_r$
- jelikož M je omezená, existuje při libovolné volbě $\varepsilon > 0$ jistě množina $K_\varepsilon \in \mathcal{K}_r$ tak, že $M \subset K_\varepsilon$ a $m(K_\varepsilon) - \widetilde{m}(M) < \varepsilon$
- z předešlé části důkazu ale víme, že pro množiny z $\mathcal{K}_r$ platí rovnost (3.3), a tedy

$$m(K_\varepsilon) - \widetilde{m}(M) = (\mathcal{R}) \int_{K_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} - \widetilde{m}(M) < \varepsilon$$

- analogicky lze pro jakékoli $\varepsilon > 0$ najít množinu $L_\varepsilon \in \mathcal{K}_r$ takovou, pro níž $L_\varepsilon \subset M$ a

$$\widetilde{m}(M) - m(L_\varepsilon) = \widetilde{m}(M) - (\mathcal{R}) \int_{L_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} < \varepsilon$$

- protože funkce $\Upsilon(\vec{x})$ je spojitá na $\mathbf{E}^r$ a navíc nezáporná, jak vyplývá bezprostředně z vlastností jednotlivých vytvořujících funkcí, existuje jistě $(\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x}$
- jelikož zjevně $(\mathcal{R}) \int_{L_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} \leq (\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_{K_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x}$, platí také série nerovností

$$-\varepsilon \leq -\widetilde{m}(M) + (\mathcal{R}) \int_{L_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} \leq (\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} - \widetilde{m}(M) \leq (\mathcal{R}) \int_{K_\varepsilon} \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} - \widetilde{m}(M) < \varepsilon$$

- volbou ε lze tedy absolutní hodnotu $|(\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} - \widetilde{m}(M)|$ učinit libovolně malou, což značí, že dokazovaná rovnost $(\mathcal{R}) \int_M \Upsilon(\vec{x}) d\vec{x} = \widetilde{m}(M)$ platí univerzálně

Kapitola 4

Abstraktní Lebesgueova míra

Lebesgueova (čti [lebegova]) míra, kterou se právě nyní chystáme zavádět, bude na rozdíl od Jordanovy míry mnohem obecnější a dokáže přiřadit hodnotu i neomezeným, nesouvislým či tzv. dirichletovským (viz 9.1.15) množinám. Navíc, jak uvidíme, Lebesgueova míra bude operovat nejen na okruzích, jako tomu bylo u míry Jordanovy, ale na σ -algebrách v $\mathbf{E}^r$, což je extrémně výhodné.

4.1 Zavedení míry na $\mathcal{S}_r$

Konstrukce Lebesgueovy míry probíhá opět osvědčeným rozšiřovacím procesem. V první etapě se budeme pokoušet míru $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}$ přenést do jisté nadsoustavy soustavy $\mathcal{H}_r$ tak, abychom se vyhnuli problémům, které vyvstaly při konstrukci Jordanovy míry.

4.1.1 Poznámka

Henri Léon Lebesgue (čti [lebeg]) (1875–1941) byl francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou, vybudoval moderní teorii míry a abstraktního integrálu. Důležitých výsledků dosáhl rovněž v topologii, teorii potenciálu, variačním počtu, teorii množin či v teorii dimenze.

4.1.2 Úmluva

V celé kapitole budeme předpokládat, že je zadána σ -aditivní míra $F(X) : \mathcal{H}_r \mapsto \mathbf{R}^0$ na polookruhu $\mathcal{H}_r$. To nechť je provedeno prostřednictvím r vytvořujících funkcí $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ až $\varphi_r(x)$, jež jsou tudíž podle věty 2.3.10 spojitě zleva.

4.1.3 Značení

Pro $r \in \mathbf{N}$ označíme symbolem $\mathcal{S}_r$ soustavu všech *spočetných* sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$. Pro každou množinu $X \in \mathcal{S}_r$ tedy existují množiny $H_1, H_2, H_3, \dots \in \mathcal{H}_r$ tak, že $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$.

4.1.4 Věta

Soustava všech spočetných sjednocení z $\mathcal{H}_r$ je také $\mathcal{S}_r$. Každou množinu $T \in \mathcal{S}_r$ lze vyjádřit jako spočetné disjunktí sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$.

Důkaz:

• První část důkazu:

- nechť $A_1, A_2, \dots$ jsou množiny z $\mathcal{H}_r$
- pak pro každé $i \in \mathbf{N}$ existuje konečně mnoho množin $B_{ij} \in \mathcal{H}_r$ tak, že $A_i = \biguplus_{j=1}^{n_i} B_{ij}$
- je-li $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, pak platí

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{n_i} B_{ij}$$

- tento zápis stvrzuje skutečnost, že každé spočetné sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$ je vlastně spočetným sjednocením množin z $\mathcal{H}_r$, čímž je první část tvrzení věty dokázána

- Druhá část důkazu:

- vezměme $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n \in \mathcal{H}_r$
- položíme $B_{11} := A_1$ a zkoumejme rozdíl $A_2 \setminus A_1$
- ten nemusí nutně patřit do $\mathcal{H}_r$, neboť $\mathcal{H}_r$ je jen polookruh
- z definice polookruhu ale jistě existují disjunktní množiny $B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2k} \in \mathcal{H}_r$ tak, že

$$A_2 \setminus A_1 = \bigcup_{j=1}^k B_{2j}$$

- navíc platí

$$A_1 \cup A_2 = B_{11} \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^k B_{2j} \right)$$

- dále postupujeme analogicky
- z definice polookruhu a na základě platnosti de Morganových vzorců 9.1.6 nutně existují disjunktní množiny $B_{31}, B_{32}, \dots, B_{3\ell}$ tak, že

$$A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) = (A_3 \setminus A_1) \cap (A_3 \setminus A_2) = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_{3j}$$

- celkem

$$\bigcup_{i,j} B_{ij} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = T$$

- přitom množin B_{ij} je spočetně mnoho
- tím je posloupnost množin A_n z $\mathcal{H}_r$ převedena na disjunktní posloupnost množin B_{ij} z $\mathcal{H}_r$

4.1.5 Věta

Soustava množin $\mathcal{S}_r$ obsahuje všechny otevřené intervaly v $\mathbf{E}^r$ a je σ -aditivní, ale nejedná se ani o okruh, ani o polookruh. Dále platí, že $\mathbf{E}^r \in \mathcal{S}_r$ a $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{S}_r$.

Důkaz:

- σ -aditivita plyne ihned z definice soustavy $\mathcal{S}_r$
- fakt, že $\mathbf{E}^r \in \mathcal{S}_r$, lze snadno prokázat na jednoduchém příkladě, kdy je množina $\mathbf{R}$ rozepsána jako spočetné disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{H}_1$, konkrétně

$$\mathbf{R} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \langle n, n+1 \rangle \right) \bigcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \langle -n-1, -n \rangle \right) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \langle n, n+1 \rangle$$

- podobně

$$\mathbf{R}^2 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \langle k, k+1 \rangle \times \langle n, n+1 \rangle$$

- $\mathcal{S}_r$ není okruh, neboť kdyby tomu tak bylo, musely by s každými dvěma množinami ze soustavy $\mathcal{S}_r$ do ní patřit i rozdíly, tedy i uzavřené či jednobodové množiny
- ale jednobodovou množinu nelze nikdy zapsat jako interval $\langle \alpha, \beta \rangle$
- ze stejného důvodu se nejedná ani o polookruh, neboť jednoprvkovou množinu nelze zapsat jako spočetné sjednocení množin tvaru $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle$

- to, že $\mathcal{S}_r$ obsahuje všechny otevřené intervaly, ukážeme nejprve pro případ intervalu $(\alpha, \alpha + 1) \in \mathcal{S}_1$
- zde platí

$$(\alpha, \alpha + 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n+1}, \alpha + \frac{1}{n} \right)$$

- dále

$$(\alpha, \beta) = \left(\alpha, \alpha + (\beta - \alpha) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n+1}, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} \right)$$

- podobně

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n+1}, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \times \left(\gamma + \frac{\delta - \gamma}{m+1}, \gamma + \frac{\delta - \gamma}{m} \right)$$

- důkaz inkluze $\mathcal{K}_r \subset \mathcal{S}_r$ je ponechán čtenáři (viz cvičení 8.9)

4.1.6 Věta – lemma o rozsáhlosti soustavy $\mathcal{S}_r$

Soustava množin $\mathcal{S}_r$ obsahuje všechny otevřené množiny z eukleidovského prostoru $\mathbb{E}^r$.

Důkaz:

- pro $G = \emptyset$ je důkaz triviální
- nechť tedy $G \neq \emptyset$ a $G = G^\circ \in \mathbb{E}^r$
- vytvořme soustavu

$$\mathcal{G} = \left\{ H = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \times \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_r, \beta_r \rangle : H \subset G \wedge \alpha_i \in \mathbb{Q} \wedge \beta_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

všech polouzavřených intervalů s racionálními krajními body, jež jsou podmnožinou množiny G

- snadno nahlédneme, že soustava $\mathcal{G}$ je spočetná
- nyní dokážeme, že $\bigcup \mathcal{G} = G$, tedy že sjednocením všech množin ze soustavy $\mathcal{G}$ je právě množina G
- inkluze $\bigcup \mathcal{G} \subset G$ je přitom triviální
- zbývá tudíž prokázat, že $G \subset \bigcup \mathcal{G}$
- vezměme tedy libovolný bod $\vec{a} \in G$ a dokažme, že $\vec{a} \in \bigcup \mathcal{G}$
- jelikož $G = G^\circ$, existuje (z definice vnitřního bodu) číslo $\delta > 0$ takové, že ${}^{(o)}U_\delta(\vec{a}) \subset G$, tj. existuje sigma-okolí bodu $\vec{a}$, jež celé leží v G
- odtud

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \cdots \times (a_r - \delta, a_r + \delta) \subset G$$

- zvolme $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ tak, že

$$a_i - \delta \leq \alpha_i < a_i < \beta_i \leq a_i + \delta$$

- taková $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ vždy existují
- pak

$$\vec{a} \in \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \times \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \times \cdots \times \langle \alpha_r, \beta_r \rangle \in \bigcup \mathcal{G}$$

4.1.7 Poznámka

Vyvstává otázka, jakým způsobem vytvořit nadsoustavu soustavy $\mathcal{S}_r$ tak, aby tato byla σ -algebrou. Konstrukci přinese následující text, v němž nejprve přeneseme míru z polookruhu $\mathcal{H}_r$ do soustavy $\mathcal{S}_r$.

4.1.8 Věta

Nechť $F(X)$ je σ -aditivní míra operující na polookruhu $\mathcal{H}_r$. Pak existuje právě jedna σ -aditivní míra $\mu_\sigma(X)$ na $\mathcal{S}_r$ taková, že

$$\mu_\sigma(H) = F(H)$$

pro všechny množiny $H \in \mathcal{H}_r$.

Důkaz:

- je-li $T \in \mathcal{S}_r$, pak existují (podle věty 4.1.4) množiny $H_k \in \mathcal{H}_r$, takové, že $T = \biguplus_{k=1}^{\infty} H_k$
- definujeme

$$\mu_\sigma(T) = \sum_{k=1}^{\infty} F(H_k) \quad (4.1)$$

- ukážeme, že hledanou množinovou funkcí je právě tato funkce $\mu_\sigma(T)$
- vztah (4.1) je korektní definicí rozšíření míry $F(X)$ z $\mathcal{H}_r$ na $\mathcal{S}_r$, neboť definuje míru množiny $\mu_\sigma(T)$ jednoznačně (viz cvičení 8.8)
- nezápornost míry $\mu_\sigma(X)$ plyne ihned z definice, stejně jako fakt, že $\mu_\sigma(\emptyset) = 0$
- dokažme dále aditivitu
- necht' tedy $S, T \in \mathcal{S}_r$ jsou disjunktní množiny
- jelikož S i T patří do $\mathcal{S}_r$, existují množiny $A_n, B_m \in \mathcal{H}_r$ tak, že

$$S = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \wedge \quad T = \biguplus_{m=1}^{\infty} B_m$$

- navíc, protože S a T jsou disjunktní, platí, že pro libovolné indexy $m, n \in \mathbb{N}$ je $A_n \cap B_m = \emptyset$
- pak ale

$$S \uplus T = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \uplus B_n)$$

- odsud

$$\mu_\sigma(S \uplus T) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(A_n) + F(B_n)] = \mu_\sigma(S) + \mu_\sigma(T)$$

- to prokazuje aditivitu
- dokažme monotonii
- snadno nahlédneme (a potvrdí to také věta 4.2.6), že jestliže $T, T_1, T_2, \dots \in \mathcal{S}_r$ a $T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, pak

$$\mu_\sigma(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\sigma(T_n)$$

- vezměme nyní dvě množiny $A, B \in \mathcal{S}_r$ tak, že $A \subset B$, a položme v předchozí úvaze $T := A$, $T_1 := B$ a $T_2 = T_3 = T_4 = \dots = \emptyset$
- pak $\mu_\sigma(A) \leq \mu_\sigma(T_1) + \mu_\sigma(T_2) + \mu_\sigma(T_3) + \dots = \mu_\sigma(B)$, což skutečně prokazuje vlastnost monotonie
- poslední úkolem tohoto důkazu je prověření σ -aditivity
- pro libovolné množiny $S, S_1, S_2, \dots \in \mathcal{S}_r$, pro které $S = \biguplus_{k=1}^{\infty} S_k$, ale platí:

$$\mu_\sigma(S) = \mu_\sigma\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \mu_\sigma\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} \biguplus_{n=1}^{\infty} H_{k_n}\right) = \mu_\sigma\left(\biguplus_{k,n=1}^{\infty} H_{k_n}\right) = \sum_{k,n=1}^{\infty} F(H_{k_n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(H_{k_n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma(H_k),$$

což garantuje σ -aditivitu

4.1.9 Poznámka

Tedy míra $\mu_\sigma(X)$ z předcházející věty je rozšířením obecné σ -aditivní míry $F(X)$ z polookruhu $\mathcal{H}_r$ na soustavu $\mathcal{S}_r$. Ovšem míra $\mu_\sigma(X)$ má ještě mnoho nedostatků. Jednak $\mathcal{S}_r$ není ani polookruh a jednak $\mu_\sigma(X)$ neumí měřit uzavřené množiny, stejně jako to neumí (v aktuálním stádiu tvorby míry) ani míra Jordanova. Proto bude nutné provést v kapitole 4.2 další rozšíření míry $\mu_\sigma(X)$.

4.1.10 Věta - o vztahu Jordanovy a Lebesgueovy míry (díl první)

Nechť $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ jsou vytvořující funkce σ -aditivní míry $F(X)$ na polookruhu $\mathcal{H}_r$. Nechť $m(X)$ je jordanovské rozšíření míry $F(X)$ z $\mathcal{H}_r$ na okruh $\mathcal{K}_r$. Nechť $\mu_\sigma(X)$ je lebesgueovské rozšíření míry $F(X)$ z $\mathcal{H}_r$ na soustavu $\mathcal{S}_r$. Pak pro každou množinu $X \in \mathcal{K}_r$ platí

$$\mu_\sigma(X) = m(X).$$

Důkaz:

- ve cvičení 8.9 byla ukázána inkluze $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{S}_r$, jež bude výchozím stavebním kamenem tohoto důkazu
- zvolme tedy $X \in \mathcal{K}_r$ libovolně
- z vlastností okruhu $\mathcal{K}_r$ plyne, že existují množiny $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{H}_r$ tak, že $X = \uplus_{k=1}^n H_k$
- dále položíme $H_{n+1} = H_{n+2} = H_{n+3} = \dots = \emptyset$
- podotýkáme, že pro neprázdnou množinu $H \in \mathcal{H}_r$, tj. pro $H = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_r, b_r \rangle$, je míra $F(H)$ zavedena předpisem

$$F(H) = \prod_{j=1}^r (\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j)),$$

přičemž vytvořující funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ nemusejí být nutně různé

- dle definice jordanovského rozšíření tedy dostáváme

$$m(X) = \sum_{k=1}^n F(H_k)$$

- jelikož $X \in \mathcal{K}_r$, platí podle výsledku cvičení 8.9, že $X \in \mathcal{S}_r$
- pak podle definice lebesgueovského rozšíření dostáváme

$$\mu_\sigma(X) = \sum_{k=1}^{\infty} F(H_k)$$

- dále snadno

$$\mu_\sigma(X) = \sum_{k=1}^{\infty} F(H_k) = \sum_{k=1}^n F(H_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} F(H_k) = m(X) + \sum_{k=n+1}^{\infty} F(\emptyset) = m(X)$$

- to zakončuje důkaz

4.2 Finalizace konstrukce Lebesgueovy míry

Nyní zbývá váženého čtenáře přesvědčit, že ačkoli Lebesgueova konstrukce míry aktuálně uvízla v soustavě $\mathcal{S}_r$, která nemá mnoho hezkých vlastností (oproti $\mathcal{K}_r$ například), třetí etapa Lebesgueova postupu dosáhne ve srovnání s jordanovskou strategií podstatně významnějšího výsledku.

4.2.1 Lemma

Osnovou soustavy $\mathcal{S}_r$ je potence množiny E^r , tj. $\text{Sub}(\mathcal{S}_r) = 2^{E^r}$.

4.2.2 Definice

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$. Pro libovolnou množinu $X \subset \mathbf{E}^r$ položme

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) := \inf \left\{ \mu_\sigma(T) : T \in \mathcal{S}_r \text{ pro } T \supset X \right\}.$$

Funkci $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ definovanou na $2^{\mathbf{E}^r}$ nazýváme *vnější mírou vytvořenou mírou $\mu_\sigma(X)$, resp. vnější μ -mírou*.

4.2.3 Příklad

Ukážeme nyní aplikaci právě vyslovené definice. Budeme uvažovat míru $\mu_\sigma(X)$ generovanou klasickou vytvořující funkcí $\varphi(x) = x$. Již víme, že množina $I = \langle 0, 1 \rangle$ nepatří do $\mathcal{S}_1$. Tedy $\mu_\sigma(I)$ neexistuje. Chceme-li vypočít $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(I)$, užijeme faktu, že intervaly

$$H_n = \left\langle -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right\rangle \in \mathcal{H}_1$$

leží nad intervalem I a že navíc

$$\mu_\sigma(H_n) = \varphi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2}{n}.$$

Pak

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(I) = \inf \left\{ \mu_\sigma(H_n) : n \in \mathbf{N} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1.$$

4.2.4 Poznámka

Opět připomínáme, jak již bylo zmíněno v poznámce 3.2.5, že definice vnější míry automaticky negarantuje naplnění všech axiomů míry. Proto je potřeba s vnější mírou $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ zacházet prozatím velmi obezřetně.

4.2.5 Lemma

Množinová funkce $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) : 2^{\mathbf{E}^r} \mapsto \mathbf{R}^*$ z definice 4.2.2 je nezáporná, monotónní a pro všechny $S \in \mathcal{S}_r$ naplňuje rovnost $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S) = \mu_\sigma(S)$.

4.2.6 Věta

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$ a $X, X_1, X_2, X_3, \dots$ libovolné podmnožiny množiny $\mathbf{E}^r$. Nechť $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$. Potom

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k).$$

Důkaz:

- je-li $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k) = +\infty$, je důkaz triviální
- předpokládejme tedy, že $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k) = s \in \mathbf{R}$
- zvolme $\varepsilon > 0$
- pro každou množinu X_k zvolme $T_k \in \mathcal{S}_r$ tak, že $X_k \subset T_k$ a

$$\mu_\sigma(T_k) = \mu_\sigma^{(\text{ex})}(T_k) < \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

což vyplývá z vlastnosti infima, resp. z definice 4.2.2

- zřejmě $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ a $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \in \mathcal{S}_r$
- pak

$$\mu_\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma(T_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k) + \varepsilon$$

- proto $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k)$

4.2.7 Důsledek

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$. Pak soustava všech μ_σ -nulových množin je σ -okruhem a každá podmnožina μ_σ -nulové množiny je rovněž μ_σ -nulová.

4.2.8 Lemma

Nechť $S \in \mathcal{S}_r$ a $H \in \mathcal{H}_r$. Pak $S \cap H \in \mathcal{S}_r$.

4.2.9 Věta

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$, $S \in \mathcal{S}_r$ a $\mu_\sigma(S) < +\infty$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \in \mathcal{H}_r$ tak, že $A \subset S$, $S \setminus A \in \mathcal{S}_r$, $\mu_\sigma(S \setminus A) < \varepsilon$ a $\mu_\sigma(A) > \mu_\sigma(S) - \varepsilon$.

Důkaz:

- nechť $S = \uplus_{k=1}^\infty H_k$, kde $H_k \in \mathcal{H}_r$
- víme, že $\mu_\sigma(S) = \sum_{k=1}^\infty \mu_\sigma(H_k)$
- ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{k=m+1}^\infty \mu_\sigma(H_k) < \varepsilon$
- pro důkaz tvrzení stačí položit $A := \uplus_{k=1}^m H_k$
- pak totiž $A \in \mathcal{H}_r$ a $S \setminus A = \uplus_{k=m+1}^\infty H_k \in \mathcal{S}_r$ a $\mu_\sigma(S \setminus A) < \varepsilon$
- protože $S = A \uplus (S \setminus A)$, máme odtud $\mu_\sigma(S) = \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(S \setminus A) < \mu_\sigma(A) + \varepsilon$
- proto $\mu_\sigma(A) > \mu_\sigma(S) - \varepsilon$

4.2.10 Věta

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$. Nechť $X \subset K \in \mathcal{H}_r$ a $\mu_\sigma(K) < +\infty$. Pak rovnost

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) = \mu_\sigma(K)$$

platí právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $S \in \mathcal{S}_r$ taková, že $X \subset S \subset K$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon$.

Důkaz:

- předpokládejme, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) = \mu_\sigma(K) < +\infty$
- tedy $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) < +\infty$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) < +\infty$
- podle definice vnější míry existuje pro každé $\varepsilon > 0$ množina $S \in \mathcal{S}_r$ tak, že $X \subset S$ a $\mu_\sigma(S) < \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \varepsilon$
- dále existuje $T \in \mathcal{S}_r$ tak, že $K \setminus X \subset T$ a $\mu_\sigma(T) < \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) + \varepsilon$
- v této fázi se budeme snažit omezit externí míru průniku $S \cap T$
- podle lemmatu 4.2.8 můžeme předpokládat, že $S \subset K$ a $T \subset K$
- podle věty 4.2.9 existují vždy $A, B \in \mathcal{H}_r$ tak, že $A \subset S$, $B \subset T$ a navíc $\mu_\sigma(S \setminus A) < \varepsilon$ a $\mu_\sigma(T \setminus B) < \varepsilon$
- platí také na první pohled překvapující rovnost $K = S \cup T = A \cup B \cup (S \setminus A) \cup (T \setminus B)$, kterou lze ale potvrdit podrobnějším rozбором užitého značení
- odtud $\mu_\sigma(K) \leq \mu_\sigma(A \cup B) + \mu_\sigma(S \setminus A) + \mu_\sigma(T \setminus B) < \mu_\sigma(A \cup B) + 2\varepsilon$
- jelikož A i B náležejí okruhu, lze použít větu 2.1.9
- podle ní: $\mu_\sigma(A \cup B) = \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(B) - \mu_\sigma(A \cap B)$

- odtud

$$\begin{aligned}\mu_\sigma(A \cap B) &= \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(B) - \mu_\sigma(A \cup B) \leq \mu_\sigma(S) + \mu_\sigma(T) - \mu_\sigma(A \cup B) \leq \\ &\leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \varepsilon + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) + \varepsilon - \mu_\sigma(A \cup B) = \mu_\sigma(K) + 2\varepsilon - \mu_\sigma(A \cup B) < \\ &< \mu_\sigma(A \cup B) + 2\varepsilon + 2\varepsilon - \mu_\sigma(A \cup B) = 4\varepsilon\end{aligned}$$

- proto $\mu_\sigma(A \cap B) < 4\varepsilon$
- jelikož $S \cap T \subset (A \cap B) \cup (T \setminus B) \cup (S \setminus A)$, dostáváme odtud, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \cap T) < 4\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 6\varepsilon$
- vidíme, že $S \setminus X \subset S \cap (K \setminus X) \subset S \cap T$, a proto $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \cap T) < 6\varepsilon$, což završuje důkaz první ze dvou implikací
- pro důkaz druhé implikace vezměme $\varepsilon > 0$
- existuje tedy jistě množina $S \in \mathcal{S}_r$ taková, že $X \subset S \subset K$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon$
- podle věty 4.2.9 existuje $C \in \mathcal{K}_r$ tak, že $C \subset S$ a $\mu_\sigma(S \setminus C) < \varepsilon$
- jelikož $(X \setminus C) \subset (S \setminus C)$, máme jistotu, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \setminus C) \leq \mu_\sigma(S \setminus C) < \varepsilon$
- pak $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) \leq \mu_\sigma(C) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus C) < \mu_\sigma(C) + \varepsilon$
- položme $D = K \setminus C$, kde $D \in \mathcal{K}_r$ a navíc $(K \setminus X) \setminus D = (K \setminus X) \cap C \subset C \setminus X \subset S \setminus X$
- tedy

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}((K \setminus X) \setminus D) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon$$

- dále

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) \leq \mu_\sigma(D) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}((K \setminus X) \setminus D) \leq \mu_\sigma(D) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) \leq \mu_\sigma(D) + \varepsilon$$

- odtud $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) \leq \mu_\sigma(C) + \mu_\sigma(D) + 2\varepsilon$
- a také $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) \leq \mu_\sigma(K)$, protože $C \uplus D = K$
- jelikož z věty 4.2.6 přímo vyplývá nerovnost $\mu_\sigma(K) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X)$, kombinací obou posledních vztahů (platných pro libovolné $\varepsilon > 0$) získáváme dokazovanou rovnost $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) = \mu_\sigma(K)$

4.2.11 Definice

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ vnější míra vytvořená mírou $\mu_\sigma(X)$. Řekneme, že množina $X \subset \mathbf{E}^r$ je μ -měřitelná, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $S \in \mathcal{S}_r$ tak, že $X \subset S$ a

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon.$$

Soustavu všech μ -měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_\mu$ nebo $\mathcal{M}_{\mu_r}$. Přitom subindex r v symbolice $\mathcal{M}_{\mu_r}$ užíváme pouze tehdy, chceme-li upozornit na fakt, že pracujeme s r -dimenzionální mírou.

4.2.12 Věta

Soustava $\mathcal{S}_r$ je podsoustavou soustavy $\mathcal{M}_\mu$ pro jakoukoli míru $\mu_\sigma(X)$ zavedenou na $\mathcal{S}_r$.

Důkaz:

- vezmeme-li $X \in \mathcal{S}_r$ a kladné ε , postačí za S z definice 4.2.11 zvolit $S = X$
- pak $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) = \mu_\sigma(\emptyset) = 0 < \varepsilon$, což naplňuje definici μ -měřitelnosti

4.2.13 Příklad

Budeme opět uvažovat klasickou míru generovanou klasickou vytvořující funkcí $\varphi(x) = x$. Ukážeme, že množina $X = \langle 0, 1 \rangle$ z příkladu 4.2.3 je μ -měřitelná. Zvolme proto $\varepsilon > 0$ libovolně. Za S z definice 4.2.11 zvolme interval

$$S = \left\langle 0, 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{S}_1.$$

Vidíme, že

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S) = \mu_\sigma(S) = \varphi\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varphi(0) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak jednoduše

$$\begin{aligned} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) &= \mu_\sigma\left(\left\langle 1, 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle\right) = \mu_\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}, 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right\rangle\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}, 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right\rangle\right) = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\ell} F\left(\left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}, 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right\rangle\right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{2(\ell+1)}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jelikož jsme pro námi zvolené $\varepsilon > 0$ našli množinu $S \in \mathcal{S}_1$ takovou, že $S \supset X$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon$, prokázali jsme, že $X = \langle 0, 1 \rangle$ je μ -měřitelnou množinou.

4.2.14 Příklad

Podobně jako v předešlém příkladě rozhodneme, zda je množina $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel μ -měřitelná, je-li $\mu(X)$ generována vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \dots & x \leq 2, \\ x+3 & \dots & x > 2. \end{cases}$$

Má-li množina $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ být μ -měřitelná, je třeba pro každé $\varepsilon > 0$ nalézt $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_1$ tak, aby $S_\varepsilon \supset \mathbf{N}$ a navíc $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus \mathbf{N}) < \varepsilon$. Zvolme

$$S_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\langle k; k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right\rangle.$$

Označíme-li $W_k := \left\langle k; k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right\rangle$, pak $S_\varepsilon \setminus \mathbf{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, kde všechny množiny W_k patří podle lematu 4.1.6 do $\mathcal{S}_1$, neboť jsou otevřené. Proto také $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(W_k) = \mu_\sigma(W_k)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \mu_\sigma(W_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2n+2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right\rangle\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^n F\left(\left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2\ell+2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2\ell} \right\rangle\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varphi\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n+2}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{2n+2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pro množinu W_2 podobně prokážeme sérii rovností

$$\begin{aligned} \mu_\sigma(W_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\left\langle 2 + \frac{\varepsilon}{4n+4}, 2 + \frac{\varepsilon}{4n} \right\rangle\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^n F\left(\left\langle 2 + \frac{\varepsilon}{4\ell+4}, 2 + \frac{\varepsilon}{4\ell} \right\rangle\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi\left(2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \varphi\left(2 + \frac{\varepsilon}{4n+4}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\varepsilon}{4} - 2 - \frac{\varepsilon}{4n+4}\right) = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Dále lze zcela analogickými úvahami dokázat, že $\mu_\sigma(W_k) = \frac{\varepsilon}{2^k}$. Odtud pak

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus \mathbf{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

což finalizuje řešení celé úlohy.

4.2.15 Věta

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$, jež je reálná na $\mathcal{H}_r$. Nechť $X \subset \mathbf{E}^r$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:

- $X \in \mathcal{M}_\mu$,
- pro jakoukoli množinu $K \in \mathcal{H}_r$ platí rovnost $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \cap X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) = \mu_\sigma(K)$,
- pro množinu $H \in \mathcal{H}_r$, která je nadmnožinou množiny X , platí rovnost $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \cap X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \setminus X) = \mu_\sigma(H)$.

Důkaz:

- pokud je $X \subset K$, pak se jedná o přímý důsledek tvrzení věty 4.2.10
- je-li naopak $K \subset X$, pak $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \cap X) = \mu_\sigma(K)$, $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(K \setminus X) = F(\emptyset) = 0$ a dokazovaná rovnost platí triviálně

4.2.16 Věta – základní věta teorie Lebesgueovy míry (díl 1)

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$, jež je reálná na $\mathcal{H}_r$. Pak množinová soustava $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebrou.

Důkaz:

- Dokážeme, že $\mathcal{M}_\mu$ je σ -aditivní:
 - zvolme disjunktní množiny $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{M}_\mu$ libovolně
 - nechť $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$
 - zvolme $\varepsilon > 0$
 - je zřejmé, že pro jakékoli $n \in \mathbf{N}$ je $X_n \in \mathcal{M}_\mu$, a proto existují množiny $T_n \in \mathcal{S}_r$ takové, že $X_n \subset T_n$ a navíc

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(T_n \setminus X_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

- položíme $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathcal{S}_r$
- zřejmě $X \subset T$, a tedy $(T \setminus X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (T_n \setminus X_n)$
- proto

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(T \setminus X) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (T_n \setminus X_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(T_n \setminus X_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$$

- Dokážeme, že s každou množinou $X \in \mathcal{M}_\mu$ patří do $\mathcal{M}_\mu$ také doplněk $\mathbf{E}^r \setminus X$:
 - nechť $H \in \mathcal{H}_r$ je zvolena libovolně
 - podle věty 4.2.15 platí $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \cap X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \setminus X) = \mu_\sigma(H)$
 - jelikož $H \cap X = H \setminus (\mathbf{E}^r \setminus X)$ a $H \setminus X = H \cap (\mathbf{E}^r \setminus X)$, platí podle předchozího

$$\mu(H \cap (\mathbf{E}^r \setminus X)) + \mu(H \setminus (\mathbf{E}^r \setminus X)) = \mu_\sigma(H),$$

což podle věty 4.2.15 dokazuje, že $\mathbf{E}^r \setminus X \in \mathcal{M}_\mu$

- Dokážeme, že s každými dvěma množinami $X, Y \in \mathcal{M}_\mu$ patří do $\mathcal{M}_\mu$ také jejich průnik:
 - podle předchozího platí, že $\mathbf{E}^r \setminus X \in \mathcal{M}_\mu$ a $\mathbf{E}^r \setminus Y \in \mathcal{M}_\mu$
 - snadno nahlédneme (za použití de Morganových vzorců 9.1.6), že $(\mathbf{E}^r \setminus X) \cup (\mathbf{E}^r \setminus Y) = \mathbf{E}^r \setminus (X \cap Y)$
 - protože $\mathbf{E}^r \setminus X, \mathbf{E}^r \setminus Y \in \mathcal{M}_\mu$, platí podle již dokázané σ -aditivity, že také sjednocení $(\mathbf{E}^r \setminus X) \cup (\mathbf{E}^r \setminus Y)$ do $\mathcal{M}_\mu$ patří
 - dále tedy $\mathbf{E}^r \setminus (X \cap Y)$ patří do $\mathcal{M}_\mu$, a proto také $X \cap Y \in \mathcal{M}_\mu$
- Protože jsme v předešlé části prokázali, že $\mathcal{M}_\mu$ je aditivní a uzavřená na průniky, je tím fakticky prokázána i uzavřenost na rozdíly, neboť pro jakékoli dvě množiny $X, Y \in \mathcal{M}_\mu$ platí, že $X \setminus Y = (\mathbf{E}^r \setminus Y) \cap X$.

- Skutečně, protože jak $E^r \setminus Y$ tak X do $\mathcal{M}_\mu$ patří a $\mathcal{M}_\mu$ je uzavřena na průniky, je tím dokázáno, že $X \setminus Y \in \mathcal{M}_\mu$ a soustava $\mathcal{M}_\mu$ je tudíž okruhem i σ -okruhem.
- Zbývá dokázat, že $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebra.
 - jelikož podle věty 4.2.12 je $\mathcal{S}_r$ podsoustavou $\mathcal{M}_\mu$ a $E^r \in \mathcal{S}_r$, platí také, že $E^r \in \mathcal{M}_\mu$
 - protože pro každou množinu $X \in \mathcal{M}_\mu$ platí, že $X \subset E^r$, je E^r prezidentem soustavy $\mathcal{M}_\mu$
 - proto je $\mathcal{M}_\mu$ algebrou, přesněji σ -algebrou

4.2.17 Věta

Soustava $\mathcal{M}_\mu$ obsahuje všechny otevřené a všechny uzavřené podmnožiny množiny E^r a platí $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$. Do soustavy $\mathcal{M}_\mu$ navíc patří všechny intervaly z E^r .

Důkaz:

- inkluze $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$ byla dokázána ve větě 4.2.12
- jelikož bylo ve větě 4.1.6 dokázáno, že soustava $\mathcal{S}_r$ obsahuje všechny otevřené množiny, je zřejmé, že totéž platí i o soustavě $\mathcal{M}_\mu$
- ve větě 4.2.16 bylo prokázáno, že s každou množinou $X \in \mathcal{M}_\mu$ patří do $\mathcal{M}_\mu$ také doplněk $E^r \setminus X$
- nechť tedy $Y \subset E^r$ je libovolná uzavřená množina
- podle věty 6.6.10 ze skript [5] je ale množina $Z := E^r \setminus Y$ otevřená
- proto $Z \in \mathcal{S}_r$, potažmo $Y = E^r \setminus Z \in \mathcal{M}_\mu$
- tím je také dokázáno, že všechny otevřené intervaly (i neomezené) a všechny uzavřené intervaly do $\mathcal{M}_\mu$ náležejí

4.2.18 Věta – o měřitelnosti borelovských množin

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$, jež je reálná na $\mathcal{H}_r$. Pak množinová soustava $\mathcal{M}_\mu$ obsahuje všechny borelovské množiny, tj. každá borelovská množina je μ -měřitelná.

Důkaz:

- borelovský uzávěr $\widetilde{\mathcal{D}}$ soustavy $\mathcal{D} = \{X \subset \mathbf{R}^r : X = X^o\}$ všech otevřených množin v E^r je minimálním σ -okruhem vystavěným nad $\mathcal{D}$
- ale podle lemmatu 4.1.6 je $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$
- jinými slovy $\mathcal{M}_\mu$ je také σ -okruhem vystavěným nad $\mathcal{D}$
- jelikož $\widetilde{\mathcal{D}}$ je σ -okruh minimální, musí nutně platit, že $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_\mu$, a tedy každá borelovská množina je μ -měřitelná

4.2.19 Věta – základní věta teorie Lebesgueovy míry (díl 2)

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ -aditivní míra na $\mathcal{S}_r$, jež je reálná na $\mathcal{H}_r$. Potom množinová funkce $\mu_\sigma^{(ex)}(X)$ z definice 4.2.2 je σ -aditivní mírou na $\mathcal{M}_\mu$.

Důkaz:

- množinová funkce $\mu_\sigma^{(ex)}(X)$ splňuje již podle lemmatu 4.2.5 axiomy nezápornosti a monotonie
- také axiom prázdné množiny a axiom nulovosti jsou splněny triviálně
- zbývá tedy prokázat konečnou aditivitu a σ -aditivitu

- jelikož je soustava $\mathcal{M}_\mu$ aditivní, postačí podle tvrzení věty 2.1.7 konečnou aditivitu prokázat pro libovolné dvě množiny $X, Y \in \mathcal{M}_\mu$, pro které $X \cap Y = \emptyset$
- přitom stačí prokázat, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \uplus Y) \geq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(Y)$, neboť obrácená nerovnost plyne z věty 4.2.6
- můžeme bez obav předpokládat, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X), \mu_\sigma^{(\text{ex})}(Y) < +\infty$, neboť pro případ, kdyby tomu tak nebylo, je důkaz tvrzení banální
- z μ -měřitelnosti množin $X, Y \in \mathcal{M}_\mu$ plyne, že pro jakékoli kladné ε existují množiny $S, T \in \mathcal{S}_r$ takové, že $X \subset S, Y \subset T, \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < \varepsilon$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(T \setminus Y) < \varepsilon$
- zjevně $S \cup T = X \cup Y \cup (S \setminus X) \cup (T \setminus Y)$
- proto podle věty 4.2.6 víme, že

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \cup T) = \mu_\sigma(S \cup T) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cup Y) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(T \setminus Y) < \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cup Y) + 2\varepsilon$$

- tedy

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cup Y) > \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \cup T) - 2\varepsilon \quad (4.2)$$

- dále si uvědomíme, že $\mu_\sigma(S) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) < +\infty$ a také že (z analogie) $\mu_\sigma(T) < +\infty$
- jistě lze také naléznout podmnožiny $A, B \in \mathcal{S}_r$ množin S a T tak, že $A \subset S, B \subset T$ a $\mu_\sigma(S \setminus A) < \varepsilon$ a $\mu_\sigma(T \setminus B) < \varepsilon$
- podle věty 2.1.9 lze ale s jistotou tvrdit, že

$$\mu_\sigma(A \cup B) = \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(B) - \mu_\sigma(A \cap B) \quad (4.3)$$

- protože $A \cap B \subset (A \setminus X) \cup (B \setminus Y) \cup (X \cap Y) = (A \setminus X) \cup (B \setminus Y)$, tak také $A \cap B \subset (S \setminus X) \cup (T \setminus Y)$
- pak zjevně

$$\mu_\sigma(A \cap B) < \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \setminus X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(T \setminus Y) < 2\varepsilon \quad (4.4)$$

- dohromady pak $\mu_\sigma(S) = \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(S \setminus A)$, odkud

$$\mu_\sigma(A) > \mu_\sigma(S) - \varepsilon \quad \wedge \quad \mu_\sigma(B) > \mu_\sigma(T) - \varepsilon \quad (4.5)$$

- odvozování požadované nerovnosti pak finalizujeme následující sadou nerovností

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cup Y) \stackrel{(4.2)}{>} \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S \cup T) - 2\varepsilon \geq \mu_\sigma(A \cup B) - 2\varepsilon \stackrel{(4.3)}{=}$$

$$\stackrel{(4.3)}{=} \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(B) - \mu_\sigma(A \cap B) - 2\varepsilon \stackrel{(4.4)}{>} \mu_\sigma(A) + \mu_\sigma(B) - 4\varepsilon \stackrel{(4.5)}{>}$$

$$\stackrel{(4.5)}{>} \mu_\sigma(S) + \mu_\sigma(T) - 6\varepsilon \geq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(Y) - 6\varepsilon$$

- protože tato nerovnost platí pro všechna $\varepsilon > 0$, nelze jinak, než že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cup Y) \geq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(Y)$, což bylo dokázat
- vnější míra $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ je tedy skutečně aditivní
- tím je prokázáno naplnění všech axiomů míry, a proto $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ je mírou na $\mathcal{M}_\mu$
- zbývá dokázat, že se jedná o míru σ -aditivní
- uvažme tedy diskjunktní posloupnost $(X_k)_{k=1}^\infty$ množin z $\mathcal{M}_\mu$
- z věty 4.2.6 víme, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(\uplus_{k=1}^\infty X_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k)$
- z aditivity zase naopak vyplývá, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(\uplus_{k=1}^\infty X_k) \geq \sum_{k=1}^\infty \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k)$
- tudíž $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(\uplus_{k=1}^\infty X_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X_k)$

4.2.20 Poznámka

Dva díly základní věty teorie Lebesgueovy míry jsou pro úplnost celé teorie velice důležité. Jednak uzavírají tvorbu σ -algebry ze soustavy $\mathcal{S}_r$ a jednak prokazují, že množinová funkce $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ je na této σ -algebře σ -aditivní mírou.

4.2.21 Definice

σ -aditivní míru $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ z definice 4.2.11 nazýváme *Lebesgueovou mírou* a přeznačujeme ji na jednodušší symboliku, a sice $\mu(X) : \mathcal{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^{\oplus}$. Množinu $\mathcal{M}_\mu$ ze stejné definice pak nazýváme *Lebesgueovou σ -algebrou*.

4.2.22 Definice

Řekneme, že množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}^{\oplus}$ je *ideální mírou* na $\mathcal{A}$, pokud $\mathcal{A}$ je σ -algebrou, $F(X)$ je σ -aditivní na $\mathcal{A}$ a $F(X)$ je úplná na $\mathcal{A}$.

4.2.23 Věta – o ideální míře

Lebesgueova míra zavedená v definici 4.2.21 je ideální.

Důkaz:

- to, že $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebra, bylo prokázáno ve větě 4.2.16
- σ -aditivita míry $\mu(X)$ plyne z důkazu věty 4.2.19
- zbývá proto prokázat úplnost Lebesgueovy míry
- nechť tedy $\mu(X) = 0$ pro nějakou $X \in \mathcal{M}_\mu$
- vezměme $Y \subset X$ libovolnou
- víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_r$ tak, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus X) < \varepsilon$
- přitom ale $X, S_\varepsilon \setminus X \in \mathcal{M}_\mu$ a $X \cap (S_\varepsilon \setminus X) = \emptyset$ a $X \uplus (S_\varepsilon \setminus X) = S_\varepsilon$
- proto $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon) = \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus X) = \varepsilon$
- pro rozhodnutí, zda $Y \in \mathcal{M}_\mu$, je účelné diskutovat hodnotu $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus Y)$
- zjevně ale $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus Y) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon) < \varepsilon$, což podle definice lebesgueovské měřitelnosti garantuje, že skutečně platí výrok $Y \in \mathcal{M}_\mu$

4.2.24 Lemma

Nechť $\mu(X)$ je Lebesgueova míra zavedená na σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$. Pak platí implikace

$$\mu(M^\circ) = \mu(\overline{M}) \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad M \in \mathcal{M}_\mu.$$

4.2.25 Věta – o vztahu Jordanovy a Lebesgueovy míry (díl druhý)

Nechť $m(X)$ je reálná σ -aditivní míra na $\mathcal{H}_r$. Vytvořme Jordanovu míru $\widetilde{m}(X)$ na okruhu $\widetilde{\mathcal{H}}_r$ podle 3.2.8 a 3.2.11. Nechť σ -aditivní abstraktní Lebesgueova míra $\mu(X)$ je na Lebesgueově σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$ rozšířením míry $\widetilde{m}(X)$ podle definice 4.2.2. Pak $\widetilde{\mathcal{H}}_r \subset \mathcal{M}_\mu$ a pro každé $X \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$ je

$$\mu(X) = \widetilde{m}(X).$$

Tedy míra $\mu(X)$ je rozšířením míry $\widetilde{m}(X)$ z okruhu $\widetilde{\mathcal{H}}_r$ na σ -algebru $\mathcal{M}_\mu$.

Důkaz:

- věta 4.1.8 dokazuje, že σ -aditivní míru $m(X)$ lze ze soustavy $\mathcal{H}_r$ rozšířit na σ -aditivní míru $\mu_\sigma(X)$ operující na $\mathcal{S}_r$ a potažmo (za pomoci definice 4.2.21) na σ -aditivní míru $\mu(X)$ operující na $\mathcal{M}_\mu$

- přitom také Jordanova míra $\widetilde{m}(X)$ je na okruhu $\widetilde{\mathcal{H}}_r$ rozšířením míry $m(X)$ z polookruhu $\mathcal{H}_r$
- platí rovněž $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$, jelikož každé konečné sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$ je speciálním případem spočetného sjednocení množin z $\mathcal{H}_r$
- zvolme libovolně $X \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$
- díky definici vnějších měr $m_e(X)$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X)$ je zřejmé, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) \leq m_e(X)$, neboť nadmnožiny $T \supset X$ jsou pro výpočet vnější míry $\mu(X)$ vybírány z početnější soustavy množin, a sice $\mathcal{S}_r$
- jelikož $X \in \widetilde{\mathcal{H}}_r$, je X jistě omezená, neboť $X \in \text{Sub}(\mathcal{H}_r)$
- existuje tedy $H \in \mathcal{H}_r$ tak, že $X \subset H$
- podle věty 3.2.14 proto platí $m_e(X) + m_e(H \setminus X) = m(H)$
- dále také platí, že $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \setminus X) \leq m_e(H \setminus X)$
- za těchto okolností platí

$$m(H) = \mu_\sigma(H) \leq \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \setminus X) \leq m_e(X) + m_e(H \setminus X) = m(H)$$

- proto musí všechna nerovníka přejít v rovnítku
- protože $X \cap H = X$, obdrželi jsme tím rovnost $\mu_\sigma(H) = \mu_\sigma^{(\text{ex})}(X \cap H) + \mu_\sigma^{(\text{ex})}(H \setminus X)$
- podle věty 4.2.15 tudíž $X \in \mathcal{M}_\mu$, potažmo $\widetilde{\mathcal{H}}_r \subset \mathcal{M}_\mu$
- jako důsledek navíc $\mu(X) = m_e(X) = \widetilde{m}(X)$

4.2.26 Poznámka

Podle předešlé věty tedy platí následující tvrzení. Mají-li množiny abstraktní Jordanovu míru, mají i abstraktní Lebesgueovu míru (pro tentýž systém vytvořujících funkcí) a obě hodnoty se rovnají.

4.2.27 Definice

Nechť σ -aditivní míra $\mu(X) : 2^E \mapsto \mathbf{R}^{\oplus}$ na σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$ je zavedena vytvořujícími funkcemi $\varphi_k(x_k) = x_k + C_k$, tj. $\mu(X)$ je lebesgueovským rozšířením klasické míry z definice 2.3.15. Pak míru $\mu(X)$ nazýváme *klasickou Lebesgueovou mírou* a značíme symbolem $\lambda_r(X)$ nebo stručně $\lambda(X)$. Lebesgueovu σ -algebru pro tento případ označujeme specifickým symbolem $\mathcal{M}_\lambda$.

4.2.28 Věta

Klasická Lebesgueova míra v E^r je invariantní vůči posunutím, t.j. pro libovolný bod $\vec{a} \in E^r$, množinu $X \in E^r$ a množinu

$$X_{\vec{a}} := \{\vec{x} + \vec{a} : \vec{x} \in X\}$$

platí rovnost $\mu(X) = \mu(X_{\vec{a}})$, má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz:

- tvrzení stejně jako tvrzení věty 3.2.15 plyne z faktu, že také Lebesgueova míra intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je stejná jako objem intervalu $\langle \alpha + a, \beta + a \rangle$ pro pevné $a \in \mathbf{R}$

4.2.29 Příklad

Pokusme se vyšetřit, zda je množina $A := (0, 1) \cap \mathbf{Q}$ všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ λ -měřitelná. Jak bylo zjištěno v příkladě 3.2.18, množina A není jordanovsky měřitelná, neboť vnější míra vytvořená mírou $m(X)$ je pro A rovna jedné a vnitřní míra je rovna nule. Množina A je bez pochyby spočetná a lze ji tedy vyjádřit jako spočetné disjunktní sjednocení jednoprvkových množin. Jelikož víme, že soustava $\mathcal{M}_\lambda$ je σ -algebrou, stačí prokázat, že jednoprvková množina $X := \{a\}$ do $\mathcal{M}_\lambda$ patří, tedy že je λ -měřitelná. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a položme $S := \langle a, a + \varepsilon/2 \rangle \supset X$. Jednak $S \in \mathcal{S}_1$ a také (v analogii s odvozením v příkladě 4.2.13)

$$\lambda(S \setminus X) = \lambda((a, a + \varepsilon/2)) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tedy množina $\{a\}$ je podle definice 4.2.11 λ -měřitelná (a navíc $\lambda(\{a\}) = 0$) a následně totéž platí o množině A , neboť

$$A = \bigcup_{a \in \mathbf{Q} \cap (0,1)} \{a\}.$$

Pak tedy

$$\lambda(A) = \sum_{a \in \mathbf{Q} \cap (0,1)} \lambda(\{a\}) = \sum_{a \in \mathbf{Q} \cap (0,1)} 0 = 0.$$

Na tomto jednoduchém příkladě je zřetelně patrná výhoda Lebesgueovy míry oproti míře Jordanově.

4.2.30 Příklad

Uvědomme si podobně, že zatímco množina $\mathbf{R}$ neměla klasickou Jordanovu míru, bude mít klasickou míru Lebesgueovu. Totiž

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\langle n-1, n \rangle \sqcup \langle -n, -n+1 \rangle),$$

a tedy

$$\lambda(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\langle n-1, n \rangle) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\langle -n, -n+1 \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

4.2.31 Poznámka

Z předešlého textu vyplývá, že platí následující série inkluzí: $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{H}_r \subset \mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$ a $\widetilde{\mathcal{H}}_r \subset \mathcal{M}_\mu$.

4.2.32 Poznámka

Důležitým a jistě zajímavým poznatkem teorie míry je skutečnost, že jak v $\mathbf{R}$, tak v libovolnědimenzionálním prostoru $\mathbf{E}^r$ existují množiny, jež jsou lebesgueovsky neměřitelné. Ukažme si, jak takové množiny vypadají. K tomu definujeme symbolický zápis $x \bowtie y$ definovaný pro libovolná čísla $x, y \in \mathbf{R}$ předpisem

$$x \bowtie y \iff x - y \in \mathbf{Q}.$$

Relace $\bowtie$ je reflexivní, neboť $x \bowtie x$, symetrická, neboť je-li $x \bowtie y$, pak také $y \bowtie x$, a rovněž tranzitivní, neboť platí implikace

$$(x \bowtie y) \wedge (y \bowtie z) \implies (x \bowtie z).$$

Jedná se tudíž o ekvivalenci. Podle teorie obecné algebry taková ekvivalence rozkládá množinu $\mathbf{R}$ na disjunktní třídy $\mathfrak{T}_k$ tak, že x a y patří do stejné třídy $\mathfrak{T}_k$ právě tehdy, když $x \bowtie y$. Jistě existuje množina $M \subset \mathbf{R}$, jež z každé třídy $\mathfrak{T}_k$ obsahuje právě jeden prvek. To značí, že pro jakékoli $x \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno $y \in M$ tak, že $x \bowtie y$. V dnes již slavné knize [4] na stranách 66 a 67 je dokázáno, že právě množina M zkonstruovaná výše není (klasicky) lebesgueovsky měřitelná, tj. $M \notin \mathcal{M}_\lambda$. Podobně také dvojrozměrná množina $L = M \times (0, 1)$ není lebesgueovsky λ_2 -měřitelná.

4.3 Restrikce Lebesgueovy míry

Pro účely dalších kapitol nyní ukážeme jednoduchý způsob, jak Lebesgueovu míru $\mu(X) : \mathcal{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^*$, kde $\mathbf{E}^r$ je prezidentem v σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$, zúžit na vhodnou podsoustavu, která bude rovněž σ -algebrou.

4.3.1 Lemma

Je-li $\mathcal{M}_\mu$ Lebesgueova σ -algebra s prezidentem $\mathbf{E}^r$ a $E \in \mathcal{M}_\mu$ libovolná množina, pak soustava

$$\mathcal{M}_E = \{X \in \mathcal{M}_\mu : X \subset E\}$$

je σ -algebrou s prezidentem E .

4.3.2 Definice

Nechť je dána Lebesgueova míra $\mu(X) : \mathcal{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^\circ$ na σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$ s prezidentem rovným množině E . Nechť $A \in \mathcal{M}_\mu$ je pevně zvolená podmnožina množiny E . Restrikcí míry $\mu(X)$ na soustavu $\mathcal{M}_A = \{X \in \mathcal{M}_\mu : X \subset A\}$ budeme rozumět funkci $\mu_A(X) : \mathcal{M}_A \mapsto \mathbf{R}^\circ$ definovanou na $\text{Dom}(\mu_A) = \mathcal{M}_A$ předpisem $\mu_A(X) := \mu(X)$.

4.3.3 Lemma

Nechť je dána Lebesgueova míra $\mu(X) : \mathcal{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^\circ$ na σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$ s prezidentem rovným $\mathbf{E}^r$. Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$ je pevně zvolená množina. Označíme-li symbolem $\mu_E(X)$ restrikci $\mu(X)$ z $\mathcal{M}_\mu$ na $\mathcal{M}_E = \{X \in \mathcal{M}_\mu : X \subset E\}$, pak $\mu_E(X) : \mathcal{M}_E \mapsto \mathbf{R}^\circ$ je ideální mírou na $\mathcal{M}_E$.

4.3.4 Poznámka

V praxi se častěji než se σ -algebrou $\mathcal{M}_\mu$ pracuje s borelovským uzávěrem $\mathcal{D}'$ soustavy $\mathcal{D} = \{X \subset \mathbf{E}^r : X = X^\circ\}$ všech otevřených množin. O $\mathcal{D}'$ je totiž známo, jak plyne přímo z definice 1.1.23, že $\mathcal{D}' \subset \mathcal{M}_\mu$ neboť jak $\mathcal{D}'$, tak $\mathcal{M}_\mu$ jsou σ -okruhy nad $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ má přitom být okruhem minimálním. Dále z tvrzení věty 1.2.7 a lemmatu 1.2.8 plyne, že do $\mathcal{D}'$ patří všechny otevřené a uzavřené množiny, všechny konečněprvkové i spočetněprvkové množiny a všechny (omezené i neomezené) intervaly v $\mathbf{E}^r$, což pro většinu praktických aplikací bohatě dostačuje.

Kapitola 5

Teorie abstraktního Lebesgueova integrálu

Poté, co byla vybudována teorie pro míru množin a jsme tedy schopni měřit r -rozměrné objemy definičních oborů r -rozměrných funkcí, budeme nyní budovat teorii Lebesgueova integrálu pro obecné funkce. Teorie abstraktního Lebesgueova integrálu představuje podstatně obecnější alternativu k teorii Riemannova integrálu prezentované např. ve skriptech [6].

5.1 Výchozí pojmy

V prvním oddíle této kapitoly zavedeme obecný rámec, nad nímž je abstraktní Lebesgueův integrál vybudován. Jelikož budujeme Lebesgueův integrál z funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$ přes obecnou množinu E (při abstraktní míře $\mu_r(X)$), je třeba si nejprve uvědomit, že elementárním požadavkem celé výstavby je, aby množina E byla μ -měřitelná, tj. aby $E \in \mathcal{M}_\mu$. Proto v následujících úvahách bude integrační množina E zároveň reprezentovat prezidenta v σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$. Využíváme zde totiž s výhodou tvrzení lemmat o restrikci 4.3.1 a 4.3.3.

5.1.1 Definice

Nechť je pevně zvolena množina E . Nechť je dále dána ideální Lebesgueova míra $\mu(X)$ působící na Lebesgueově σ -algebře $\mathcal{M}_\mu \subset 2^E$, která reprezentuje Lebesgueovu σ -algebru všech μ -měřitelných podmnožin množiny E . Nechť $E \in \mathcal{M}_\mu$ je prezidentem soustavy $\mathcal{M}_\mu$. Pak trojici $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ nazýváme *prostorem s úplnou mírou*. Trojici $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ nazýváme *klasickým prostorem s úplnou mírou*, pokud navíc $E \subset \mathbf{E}^r$ a dále $\mu(X) = \lambda_r(X)$ je klasická r -dimenzionální Lebesgueova míra a $\mathcal{M}_\mu = \mathcal{M}_\lambda$ je příslušná Lebesgueova σ -algebra.

5.1.2 Definice

Nechť je dán prostor $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou. Řekneme, že *míra $\mu(X)$ je konečná*, jestliže $\mu(E) < \infty$. Řekneme, že *míra $\mu(X)$ je σ -konečná*, jestliže existují množiny $A_n \in \mathcal{M}_\mu$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbf{N}$ platí nerovnost $\mu(A_n) < +\infty$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

5.1.3 Úmluva

V celé kapitole předpokládáme, že je dán prostor s úplnou mírou $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$. Přitom nejčastější realizací takového prostoru bude varianta, kdy $E \subset \mathbf{E}^r$.

5.1.4 Definice

Nechť $r \in \mathbf{N}$ je zvoleno pevně. *Heavisideovou* [hevisajd] funkcí budeme rozumět funkci $\Theta(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots & x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge \dots \wedge x_r > 0, \\ 0 & \dots & x_1 \leq 0 \vee x_2 \leq 0 \vee \dots \vee x_r \leq 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1.5 Úmluva

V součinu $h(x) = g(x)\Theta(x)$ klademe $h(x) = 0$ i v těch bodech, kde $\Theta(x) = 0$ a $g(x)$ buď není definována nebo nabývá hodnot $-\infty$, resp. $+\infty$.

5.1.6 Definice

Nechť je na prostoru s úplnou mírou $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ definována funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$. Pak definujeme *horní*, resp. *dolní řez funkce* předpisy $f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$, resp. $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$.

5.1.7 Lemma

Nechť je na prostoru s úplnou mírou $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ dána funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$. Pak pro horní, resp. dolní řez funkce platí vztahy

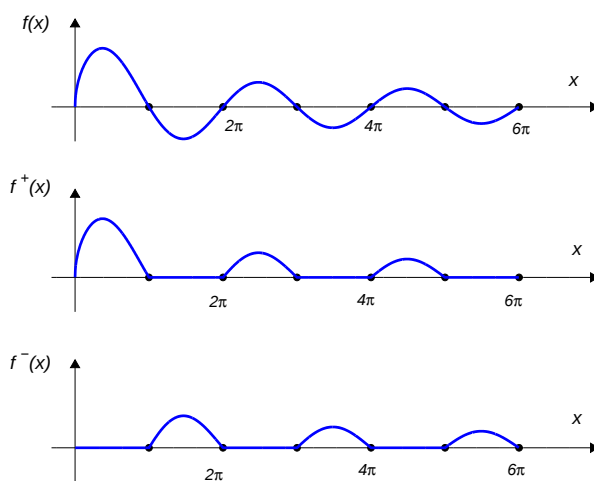
$$f^+(x) = f(x) \cdot \Theta(f(x)), \quad f^-(x) = -f(x) \cdot \Theta(-f(x)).$$

5.1.8 Poznámka

Z definice funkcí $f^+(x)$ a $f^-(x)$ je zřejmé, že pro reálné funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$ jednak $\text{Ran}(f^+) \subset \mathbf{R}_0^+$ a $\text{Ran}(f^-) \subset \mathbf{R}_0^+$ a jednak

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Význam obou funkcí demonstrujeme na funkci $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ na definičním oboru $E = \text{Dom}(f) = \langle 0, 6\pi \rangle$.



Obrázek 5.8
Graf funkcí $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$, $f^+(x)$ a $f^-(x)$.

5.2 Měřitelné funkce

Pravděpodobně nejtěžejnějším pojmem celé výstavby lebesgueovských integrací je pojem měřitelné funkce. Pro konstrukci integrálu je totiž třeba garantovat, aby podmnožiny definičního oboru funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$, v nichž funkce $f(x)$ nabývá dané hodnoty, byly μ -měřitelné. Pokud by ani tato banální vlastnost splněna nebyla, nebylo by principiálně možné integrál z takové funkce sestavit.

5.2.1 Definice

Nechť je dán prostor $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou. Pod pojmem *funkce* budeme rozumět každé zobrazení z prostoru E do množiny $\mathbf{R}^*$, tj. $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$. *Reálnou funkcí* budeme rozumět každé takové zobrazení z E do $\mathbf{R}$.

5.2.2 Definice

Řekneme, že funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ je μ -*měřitelná* (nebo jen *měřitelná*, nemůže-li dojít k záměně), jestliže pro všechna $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\{x \in E : f(x) > c\} \in \mathcal{M}_\mu. \quad (5.2)$$

Soustavu všech μ -měřitelných funkcí označíme symbolem $\Lambda_\mu(E)$ nebo jen Λ_μ , nemůže-li dojít k chybné interpretaci. Zapisujeme $f(x) \in \Lambda_\mu$.

5.2.3 Poznámka

Funkci $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ tedy nazveme měřitelnou, jestliže každá množina $X_c := \{x \in E : f(x) > c\}$ je měřitelná, tj. patří do σ -algebry $\mathcal{M}_\mu$ všech měřitelných množin.

5.2.4 Věta

Následující výroky o funkci $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou ekvivalentní:

1. $f(x)$ je měřitelná,
2. pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí $\{x \in E : f(x) < c\} \in \mathcal{M}_\mu$,
3. pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí $\{x \in E : f(x) \geq c\} \in \mathcal{M}_\mu$,
4. pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí $\{x \in E : f(x) \leq c\} \in \mathcal{M}_\mu$.

Důkaz:

- ukážeme, že z prvního výroku plyne třetí
- platí rovnost

$$\{x \in E : f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E : f(x) > c - \frac{1}{n}\right\}$$

- všechny množiny v posledně zmíněném zápise jsou měřitelné (podle prvního výroku)
- ovšem protože $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebra, tak průnik množin z množinové soustavy $\mathcal{M}_\mu$ do $\mathcal{M}_\mu$ také patří, tedy $\{x \in E : f(x) \geq c\} \in \mathcal{M}_\mu$
- nyní dokážeme implikaci (3) $\Rightarrow$ (2)
- je-li množina $\{x \in E : f(x) \geq c\}$ měřitelná a uvědomíme-li si, že

$$\{x \in E : f(x) < c\} = E \setminus \{x \in E : f(x) \geq c\},$$

je jasné, že i množina $\{x \in E : f(x) < c\}$ je měřitelná, neboť je rozdílem dvou množin z $\mathcal{M}_\mu$ a $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebra

- zbývá dokázat implikaci (2) $\Rightarrow$ (4)
- zde užijeme rovnosti

$$\{x \in E : f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

a stejné argumentace jako v první části důkazu

- poznamenáváme, že důkaz implikace (4) $\Rightarrow$ (1), který kompletuje důkaz, je snadný

5.2.5 Věta

Nechť $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou měřitelné a $k \neq 0$. Pak také funkce $(kf)(x)$, $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ a $|f(x)|$ jsou měřitelné.

Důkaz:

- dokážeme tvrzení pro funkci $(kf)(x)$
- nechť $k > 0$
- vezměme $c \in \mathbf{R}$ a zkoumejme, zda množina $M := \{x \in E : kf(x) > c\}$ je měřitelná
- z předpokladů víme, že pro jakoukoli reálnou konstantu $d \in \mathbf{R}$ je množina $\{x \in E : f(x) > d\}$ měřitelná

- položíme-li $d = \frac{\varepsilon}{k}$, je zřejmé, že množina

$$M := \left\{ x \in E : f(x) > \frac{c}{k} \right\}$$

je zcela jistě měřitelná

- nechť nyní $k < 0$
- v tomto případě platí

$$\{x \in E : kf(x) > c\} = \left\{ x \in E : f(x) < \frac{c}{k} \right\},$$

- tato množina je ale měřitelná podle věty 5.2.4
- pro důkaz druhého tvrzení užijeme rovnosti

$$\{x \in E : \max\{f(x), g(x)\} > c\} = \{x \in E : f(x) > c\} \cup \{x \in E : g(x) > c\}$$

- obě množiny z pravé strany patří podle předpokladů do $\mathcal{M}_\mu$, a tedy i jejich sjednocení do této soustavy patří, neboť $\mathcal{M}_\mu$ je σ -algebra
- zbytek důkazu je náplní cvičení 8.82

5.2.6 Věta – základní věta o měřitelnosti funkce

Nechť $E \subset \mathbf{R}^r$. Pak každá spojitá funkce $g(\vec{x}) : E \rightarrow \mathbf{R}$ je μ -měřitelná v libovolném prostoru $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou, tj. $g(\vec{x}) \in \Lambda_\mu(E)$.

Důkaz:

- zvolme libovolně $c \in \mathbf{R}$
- označme $B = (c, \infty)$ a $A = \{\vec{x} \in E^r : g(\vec{x}) > c\}$
- zjevně platí $A = g^{-1}(B)$
- navíc B je v $\mathbf{R}$ zcela bez pochyby otevřenou množinou
- podle věty 1.1.51 ze skript [6] je vzor každé otevřené množiny při spojitém zobrazení také otevřenou množinou, proto $A = A^\circ$
- podle poznámky 4.1.7 obsahuje soustava $\mathcal{S}_r$ všechny otevřené množiny, tudíž $A \in \mathcal{S}_r$
- dále podle věty 4.2.31 je $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$, proto $A \in \mathcal{M}_\mu$, což bylo dokázat

5.2.7 Definice

Nechť $v(x)$ je výroková formule, jež má smysl pro každé $x \in E$. Nechť $A \subset E$. Řekneme, že $v(x)$ platí μ -skoro všude v množině A , resp. pro skoro všechna x z množiny A , jestliže míra $\mu(X)$ množiny všech $x \in A$, kde formule $v(x)$ neplatí, je nula, tj. pro $X = \{x \in A : v(x) = 0\}$ platí rovnost $\mu(X) = 0$.

5.2.8 Příklad

Platí např. tvrzení: Skoro všechna reálná čísla jsou iracionální. Důvodem je fakt, že doplněk množiny iracionálních čísel v množině $\mathbf{R}$, což je množina $\mathbf{Q}$, má míru $\lambda(\mathbf{Q})$ rovnou nule. Dále např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & \dots & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N} \\ -x & \dots & x \in \mathbf{N} \end{cases} \quad (5.3)$$

je v $\mathbf{R}$ skoro všude rostoucí.

5.2.9 Definice

Nechť $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou funkce a $A \subset E$ libovolná množina. Pak v případě, že $f(x) = g(x)$ skoro všude v A , říkáme, že funkce $f(x), g(x)$ jsou μ -ekvivalentní nebo stručně *ekvivalentní* na množině A a značíme $f(x) \sim g(x)$.

5.2.10 Příklad

Funkce (5.3) z příkladu 5.2.8 je λ -ekvivalentní s funkcí $g(x) = x$, neboť $f(x)$ a $g(x)$ se liší pouze na množině $\mathbf{N}$, která má v klasickém měřitelném prostoru míru nula, tj. $\lambda(\mathbf{N}) = 0$.

5.2.11 Věta

Nechť $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou měřitelnými funkcemi a $d \in \mathbf{R}$. Pak množiny

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}, \{x \in E : f(x) \geq g(x)\}, \{x \in E : f(x) = g(x)\}, \{x \in E : f(x) = d\}$$

jsou měřitelné.

Důkaz:

- ukážeme nejprve, že množina $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ je měřitelná
- jelikož $f(x) > g(x)$, existuje racionální číslo $q \in \mathbf{Q}$ mezi $f(x)$ a $g(x)$
- tedy

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} (\{x \in E : f(x) > q\} \cap \{x \in E : g(x) < q\})$$

- jde o sjednocení spočetně mnoha měřitelných množin, tudíž i zkoumaná množina $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ je měřitelná
- platí-li tedy $\{x \in E : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{M}_\mu$, pak díky rovnosti

$$\{x \in E : f(x) \geq g(x)\} = E \setminus \{x \in E : f(x) < g(x)\}$$

je zřejmé, že i $\{x \in E : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{M}_\mu$

- to plyne z faktu, že jak množina E , tak množina $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ patří do σ -algebry $\mathcal{M}_\mu$, což zaručuje, že i jejich rozdíl do $\mathcal{M}_\mu$ patří
- poslední dvě položky důkazu jsou náplní cvičení 8.83

5.2.12 Věta

Nechť $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ jsou měřitelné. Pak také funkce $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ $(f/g)(x)$ jsou měřitelné na množině, kde jsou definovány.

Důkaz:

- dokážeme tvrzení pro součet
- vyloučíme body, kde součet není definován
- nechť tedy

$$A := E \setminus ([f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)] \cup [f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty)])$$

- zvolme $c \in \mathbf{R}$
- protože platí rovnost $\{x \in A : f(x) + g(x) > c\} = \{x \in A : f(x) > c - g(x)\}$, stačí užít tvrzení z věty 5.2.11
- analogicky se dokazují obě další tvrzení (ovšem procedura důkazu je poněkud delší)

5.2.13 Věta

Nechť $f_n(x)$ pro $n \in \mathbf{N}$ jsou měřitelné funkce a existuje limitní funkce $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, reprezentující bodovou limitu v E . Pak $f(x)$ je měřitelná.

Důkaz:

- zvolme libovolně $c \in \mathbf{R}$
- snadno nahlédneme, že platí série inkluzí

$$\begin{aligned} X_c &:= \{x \in E : f(x) > c\} = \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c\} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c + \frac{1}{k}\right\} \stackrel{\textcircled{2}}{\subset} \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{\subset} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in E : f_n(x) > c + \frac{1}{k}\right\} \stackrel{\textcircled{3}}{\subset} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq c + \frac{1}{k}\right\} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c\} = X_c \end{aligned}$$

- přitom rovnost $\textcircled{1}$ reprezentuje alternativní zápis dvou totožných množin, $\textcircled{2}$ zohledňuje fakt, že jsou-li funkční hodnoty funkce $f_n(x)$ v bodě x od jistého indexu $m \in \mathbf{N}$ větší než nějaké číslo ω , pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \omega$, a tedy množina $\{x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > \omega\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x : f_n(x) > \omega\}$
- inkluze $\textcircled{3}$ je jednoduchým důsledkem faktu, že do množiny $\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \omega\}$ patří jistě všechna $x \in E$, pro která platí implikace $n \geq m \Rightarrow f_n(x) > \omega$
- úprava $\textcircled{4}$ vyplývá z jednoduché rovnosti $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E : g(x) \geq c + \frac{1}{k}\right\} = \{x \in E : g(x) > c\}$
- všechny inkluze ve výše uvedených vztazích tudíž přejdou v rovnosti, odkud pak snadno vyvozujeme, že

$$X_c := \{x \in E : f(x) > c\} = \overbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in E : f_n(x) > c + \frac{1}{k}\right\}}^{\in \mathcal{M}_\mu} \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathcal{M}_\mu}$$

- a odtud již přímočaře získáváme dokazovaný vztah $X_c := \{x \in E : f(x) > c\} \in \mathcal{M}_\mu$

5.2.14 Věta

Nechť jsou dány množina $E \subset \mathbf{E}^r$ a funkce $f(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$ taková, že $f(\vec{x}) \in \Lambda(E)$. Pak pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$ je množina $f^{-1}(G)$ měřitelná, tj. $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}_\mu$.

Důkaz:

- pro $G = \emptyset$ je důkaz snadný
- zvolme proto $G = G^\circ \neq \emptyset$ a $G \subset \mathbf{R}$
- jelikož G je otevřená, pak podle lematu 4.1.6 platí: $G \in \mathcal{S}_1$
- existují proto $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R}$ tak, že $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$
- pak ale

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle \alpha_n, \beta_n \rangle\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\langle \alpha_n, \beta_n \rangle) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{x \in E : f(x) < \beta_n\} \cap \{x \in E : f(x) \geq \alpha_n\}\right) \quad (5.4)$$

- množiny $\{x \in E : f(x) < \beta_n\}$ a $\{x \in E : f(x) \geq \alpha_n\}$ ale do $\mathcal{M}_\mu$ patří podle definice měřitelnosti funkce $f(\vec{x})$
- jelikož se nám podařilo množinu $f^{-1}(G)$ rozepsat jako spočetné sjednocení měřitelných množin, plyne ze σ -aditivity soustavy $\mathcal{M}_\mu$, že $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}_\mu$, což bylo cílem prokázat

5.2.15 Věta

Nechť jsou dány množina $E \subset \mathbf{R}^r$ a funkce $f(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$ taková, že $f(\vec{x}) \in \Lambda(E)$. Pak pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbf{R}$ platí, že $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_\mu$.

Důkaz:

- označme $\mathcal{B} := \{B \subset \mathbf{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_\mu\}$ a dokažme, že $\mathcal{B}$ obsahuje všechny borelovské množiny
- nejprve ale prokážeme, že $\mathcal{B}$ je σ -algebra
- protože $f^{-1}(\mathbf{R}) = E$ a $E \in \mathcal{M}_\mu$, je zcela logicky množina $\mathbf{R}$ prezidentem v soustavě $\mathcal{B}$
- pro důkaz σ -aditivity zvolme $B_n \in \mathcal{B}$ pro $n = 1, 2, \dots$
- protože $f^{-1}[\cup_{n=1}^\infty B_n] = \cup_{n=1}^\infty f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}_\mu$, musí také $\cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{M}_\mu$
- zbývá prokázat, že $\mathcal{B}$ je uzavřená na rozdíl
- jelikož ale $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \in \mathcal{M}_\mu$, je zřejmé, že rozdíl $B_1 \setminus B_2$ leží v $\mathcal{B}$
- soustava $\mathcal{B}$ je tudíž skutečně σ -algebrou
- navíc ale soustava $\mathcal{B}$ obsahuje podle věty 5.2.14 všechny otevřené množiny
- čili $\mathcal{B}$ je σ -okruh vystavěný nad soustavou $\mathcal{D}$ všech otevřených množin
- a poněvadž borelovský uzávěr $\widetilde{\mathcal{D}}$ je podle definice 1.2.1 nejmenším možným σ -okruhem nad $\mathcal{D}$, musí nutně platit inkluze $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{B}$
- jinými slovy každá množina z $\widetilde{\mathcal{D}}$ je v $\mathcal{B}$
- tedy každá borelovská množina $B \in \widetilde{\mathcal{D}}$ má měřitelný vzor $f^{-1}(B)$

5.2.16 Věta – o měřitelnosti ekvivalentních funkcí

Nechť jsou dány množina E a dvě funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$, $g(x) : E \mapsto \mathbf{R}$. Nechť $f(x) \in \Lambda(E)$ a $f(x) \sim g(x)$. Pak také $g(x) \in \Lambda(E)$.

Důkaz:

- označme $M = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$
- zřejmě $\mu(M) = 0$ a $E \setminus M \in \mathcal{M}_\mu$
- zvolme $c \in \mathbf{R}$ libovolně
- pak

$$\begin{aligned} \{x \in E : g(x) > c\} &= \{x \in M : g(x) > c\} \cup \{x \in E \setminus M : g(x) > c\} = \{x \in M : g(x) > c\} \cup \{x \in E \setminus M : f(x) > c\} = \\ &= \{x \in M : g(x) > c\} \cup \left(\{x \in E : f(x) > c\} \cap E \setminus M \right) \end{aligned}$$

- z úplnosti míry plyne, že množina $\{x \in M : g(x) > c\}$ je μ -měřitelná
- to plyne kromě jiného z toho, že $\{x \in M : g(x) > c\} \subset M$
- jelikož také $E \setminus M \in \mathcal{M}_\mu$ a $\{x \in E : f(x) > c\} \in \mathcal{M}_\mu$, je jasné, že $\{x \in E : g(x) > c\} \in \mathcal{M}_\mu$
- a to bylo cílem dokázat

5.2.17 Věta – důsledek věty o měřitelnosti funkce

Nechť jsou dány množina $E \subset \mathbf{E}^r$ a funkce $g(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$. Nechť existuje spojitá funkce $h(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$ tak, že $g(\vec{x}) \sim h(\vec{x})$. Pak $g(\vec{x}) \in \Lambda_\mu(E)$.

Důkaz:

- ve větě 5.2.16 položíme $f(\vec{x}) = h(\vec{x})$ a funkci $g(\vec{x})$ ponechme původní význam
- podle základní věty o měřitelnosti funkce 5.2.6 je funkce $h(\vec{x})$ μ -měřitelná, neboť je spojitá, což naplní předpoklady věty 5.2.16, a $g(\vec{x})$ je tedy také μ -měřitelná

5.3 Abstraktní Lebesgueův integrál

V nadcházející sekci přistoupíme ke konstrukci abstraktního Lebesgueova integrálu. Vybudujeme jej ve třech postupně navazujících krocích opět metodou rozšiřování tak, jak jsme si ji osvojili v kapitolách o tvorbě abstraktních měr. Lebesgueův integrál tedy zavedeme (zhruba řečeno) nejprve pro po částech konstantní funkce, poté pro funkce nezáporné a na závěr pro funkce obecné. Jak už ale bylo předesláno, integrovat bude možno pouze funkce, které jsou μ -měřitelné. To bude zřetelné ihned z úvodních definic.

5.3.1 Poznámka

Před samotnou konstrukcí Lebesgueova integrálu je ovšem nezbytné objasnit si základní motivaci pro takový počín. To jest je třeba stanovit, jakou praktickou interpretaci bude číselná hodnota Lebesgueova integrálu mít. Odpověď na tuto otázku lze snadno nalézt v tzv. *geometrické interpretaci Lebesgueova integrálu*. Tou rozumíme následující úvahu. Nechť je v prostoru $\{E, \mathcal{M}_{\mu_r}, \mu_r(X)\}$ s úplnou mírou zadána nezáporná funkce $g(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$ definovaná na množině $E \subset \mathbf{E}^r$. Množina

$$W = \{(\vec{x}, y) \in \mathbf{R}^{r+1} : \vec{x} \in E \wedge 0 \leq y \leq f(\vec{x})\}$$

je množinou ze σ -algebry $\mathcal{M}_{\mu_{r+1}}$, která vznikla expanzí r -dimenzionální míry $\mu_r(X)$ z $\mathbf{E}^r$ na míru $\mu_{r+1}(Z)$ fungující v $\mathbf{E}^{r+1}$. Přitom za vytvářející funkci expandující míry klademe důsledně identitu $\varphi(y) = y$. Hodnotu abstraktního Lebesgueova integrálu pak budeme vytvářet tak, aby

$$(\mathcal{L}) \int_E g(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \mu_{r+1}(W). \quad (5.5)$$

Rovnice (5.5) reprezentuje právě zmíněnou geometrickou interpretaci Lebesgueova integrálu. Ta může být pro případ klasických měr zjednodušena takto:

$$(\mathcal{L}) \int_E g(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = \lambda_{r+1}(W).$$

Pro snažší pochopení dodáváme, že pro $r = 1$ reprezentuje množina W plochu ohraničenou shora grafem nezáporné funkce, zespoda osou x a zleva a zprava omezením integrační množiny. Míra $\lambda_{r+1}(W)$ pak představuje obsah této plochy.

5.3.2 Definice

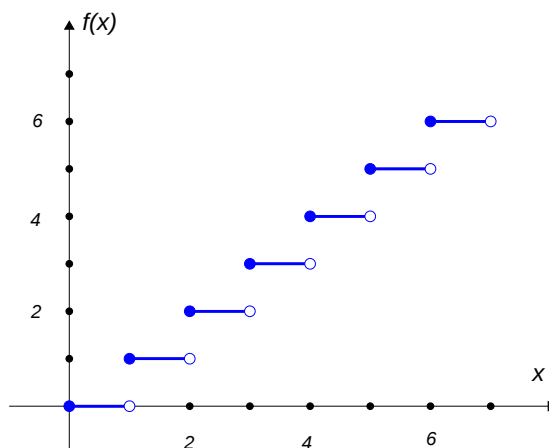
Řekneme, že funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$ je *jednoduchá*, jestliže je μ -měřitelná a $f(E)$ je konečná množina.

5.3.3 Příklad

Příkladem jednoduché funkce je např. funkce celá část (přesněji: dolní celá část) $f(x) := \lfloor x \rfloor$, definovaná např. na definičním oboru $E = \text{Dom}(f) = \langle 0, 7 \rangle$. Ověříme nejprve, že se jedná o měřitelnou funkci (vzhledem k Lebesgueově σ -algebře $\mathcal{M}_\lambda$). Vezměme tedy (podle definice 5.2.2) pevně $c \in \mathbf{R}$, tedy např. $c = 4$. Pro tuto volbu je množinou (5.2) množina

$$\{x \in E : f(x) > 4\} = \langle 5, 7 \rangle,$$

kteřá je lebesgueovsky měřitelná, neboť se dokonce jedná o množinu z nejzákladnější soustavy $\mathcal{H}_1$. Podobně se prokáže, že pro všechna $c \in \mathbf{R}$ je množina (5.2) měřitelná. Můžeme tedy funkci $f(x) := \lfloor x \rfloor$ prohlásit za měřitelnou. Ukázat, že $f(E)$ je konečnou množinou, je zcela triviální, neboť $f(E) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je viditelně množinou s konečným počtem prvků.



Obrázek 5.9
Graf funkce dolní celá část.

5.3.4 Definice

Nechť je dána obecná funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$. Množinu

$$\text{supp}(f) := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

nazýváme *nosičem funkce* $f(x)$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *finitní*, jestliže platí $\mu(\text{supp}(f)) < \infty$.

5.3.5 Příklad

Nechť je Lebesgueova míra na $\mathbf{R}$ zavedená pomocí vytvořující funkce $\varphi(x) = x$. Pokusme se rozhodnout, zda je funkce $f(x) = x^2$ finitní v klasickém měřitelném prostoru $\{\mathbf{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda(X)\}$. Nosičem funkce $f(x) = x^2$ je množina $X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Jelikož podle 4.2.30 je $\mu(0, \infty) = \infty$ a podobně $\mu(-\infty, 0) = \infty$, plyne z aditivity, že $\mu(X) = \infty$. A zkoumaná funkce tedy na $\{\mathbf{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda(X)\}$ finitní není. Je-li ale Lebesgueova $\mu(X)$ míra vytvořena generující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x & \dots & x \in (0, 5), \\ 15 & \dots & x \in \langle 5, \infty), \\ 0 & \dots & x \leq 0, \end{cases}$$

je $\mu(-\infty, 0) = 0$ a $\mu(0, \infty) = \mu(0, 5) + \mu(\langle 5, \infty)) = 15 + 0 = 15$. Tedy $\mu(X) = 15$ a zkoumaná funkce tudíž je na uvažovaném prostoru $\{\mathbf{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ finitní.

5.3.6 Definice

Základním systémem funkcí $\mathcal{Z}_\mu$ rozumíme množinu všech jednoduchých a finitních funkcí $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}_0^+$.

5.3.7 Poznámka

Funkce ze základního systému jsou podle předešlé definice kromě jiného nezáporné, μ -měřitelné a jejich obor hodnot má konečný počet prvků.

5.3.8 Věta

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ a $c > 0$. Pak funkce $(cf)(x)$, $(f + g)(x)$, $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$, $|f(x)|$, $f^+(x)$, $f^-(x)$, a $(fg)(x)$ též náležejí do $\mathcal{Z}_\mu$.

Důkaz:

- zcela bez pochyby se ve všech případech jedná o jednoduché funkce

- rovněž lze vcelku jednoduše nahlédnout, že všechny z citovaných funkcí jsou finitní, neboť např.

$$\text{supp}(f + g) \subset (\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)),$$

$$\text{a tedy } \mu(\text{supp}(f + g)) \leq \mu(\text{supp}(f)) + \mu(\text{supp}(g)) < \infty$$

5.3.9 Poznámka

Stále uvažujeme pevně zvolený prostor $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou. Přistupme k první etapě vybudování obecného Lebesgueova integrálu. Bude jím definice integrálu z funkce ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$.

5.3.10 Definice

Nechť funkce $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu$. Jestliže $f(E) \setminus \{0\} = \emptyset$, což zahrnuje také případ, kdy $E = \emptyset$, pak klademe $\int_E f(x) d\mu(x) := 0$. Nechť naopak $f(E) \setminus \{0\} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, $m \in \mathbf{N}$ a $d_k \in \mathbf{R}^+$ pro $k \in \widehat{m}$ jsou navzájem různá čísla. Položme $A_k = f^{-1}(d_k)$. Pak součet

$$\sum_{k=1}^m d_k \mu(A_k) \quad (5.6)$$

nazveme *integrálem z funkce $f(x)$ přes množinu E podle míry $\mu(X)$* a označíme jej $\int_E f(x) d\mu(x)$.

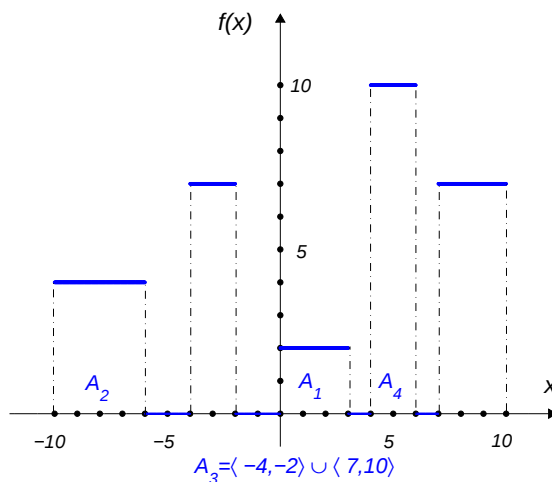
5.3.11 Lemma

Hodnoty $\mu(A_k)$ z definice 5.3.10 existují a jsou nezápornými reálnými čísly. Výrazy $d_k \mu(A_k)$ v rovnici (5.6) nejsou neurčité. Suma (5.6) je vždy konečná a její hodnota je nezáporná.

5.3.12 Příklad

Budeme nyní demonstrovat smysl předchozí definice. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \dots & x \in A_1 = \langle 0, 3 \rangle, \\ 4 & \dots & x \in A_2 = \langle -10, -6 \rangle, \\ 7 & \dots & x \in A_3 = \langle -4, -2 \rangle \cup \langle 7, 10 \rangle, \\ 10 & \dots & x \in A_4 = \langle 4, 6 \rangle, \\ 0 & \dots & x \in \mathbf{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^4 A_i \right). \end{cases}$$



Obrázek 5.10
Graf funkce $f(x)$.

Uvedená funkce je jistě jednoduchá, neboť $f(E) = \{0, 2, 4, 7, 10\}$, což je konečná množina, a měřitelnost plyne triviálně z definice. Připomínáme, že např. pro $c = 5$ platí

$$\{x \in \mathbf{R} : f(x) > c\} = \langle -4, -2 \rangle \cup \langle 4, 6 \rangle \cup \langle 7, 10 \rangle,$$

což je zcela zjevně disjunktní sjednocení měřitelných množin (jak v Jordanově smyslu, tak v Lebesgueově smyslu). Finitnost funkce $f(x)$ plyne z faktu, že míra nosiče $\text{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ je $\lambda(\text{supp}(f)) = 14$. Lze tedy aplikovat definici 5.3.10. Jelikož $f(E) \setminus \{0\} = \{2, 4, 7, 10\}$, označíme v souladu s definicí $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = 7$ a konečně $d_4 = 10$. Při tomto značení je splněna rovnost $A_i = f^{-1}(d_i)$, která v inverzním zápise $f(A_i) = d_i$ reprezentuje skutečnost, že obrazem množiny A_i při zobrazení $f(x)$ je jednoprvková množina $\{d_i\}$, tedy že funkce $f(x)$ zobrazuje všechny prvky množiny A_i na číslo d_i . Podle 5.3.10 se integrál z funkce $f(x)$ přes $\mathbf{R}$ podle míry $\mu(X)$ definuje jako suma

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) d\mu(X) := \sum_{i=1}^4 d_i \mu(A_i),$$

kteřá představuje součet měr jednotlivých obdélníků o základně A_i a výšce d_i . Jelikož je míra množiny A_i v obecném pojetí rovna $\mu(A_i)$, je míra (obsah) zmiňovaného obdélníka rovna součinu délky (míry) základny $\mu(A_i)$ a výšky d_i . Tím je získána míra množiny pod grafem funkce $f(x)$ nad množinou A_i . Pro výpočet míry množiny omezené grafem funkce $f(x)$, tedy pro výpočet integrálu funkce $f(x)$, je třeba sečíst míry jednotlivých obdélníků s různými výškami. To je smyslem předchozí definice.

5.3.13 Poznámka

O definici 5.3.10 někdy hovoříme jako o *prvním Lebesgueově integrálu* nebo o *první etapě konstrukce Lebesgueova integrálu*.

5.3.14 Věta

Necht' $(B_i)_{i=1}^m$ je disjunktní posloupnost množin konečné μ -míry a $(c_i)_{i=1}^m$ je konečná posloupnost kladných reálných čísel. Necht' dále $f(x) := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{B_i}(x)$, kde $\chi_{B_i}(x)$ je charakteristická funkce množiny B_i . Pak

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mu(B_i).$$

Důkaz:

- jednoduchý (jde vlastně o jinou formulaci definice 5.3.10)

5.3.15 Věta – o linearitě prvního Lebesgueova integrálu

Pro libovolné funkce $f(x), g(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ a číslo $k \in \mathbf{R}_0^+$ platí

$$\begin{aligned} \int_E (kf)(x) d\mu(x) &= k \int_E f(x) d\mu(x), \\ \int_E (f+g)(x) d\mu(x) &= \int_E f(x) d\mu(x) + \int_E g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Důkaz:

- nejprve je třeba prokázat, že jsou-li $f(x), g(x) \in \mathcal{Z}_\mu$, pak také $f(x) + g(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ a $kf(x) \in \mathcal{Z}_\mu$
- to bylo ale dokázáno ve větě 5.3.8
- důkaz první rovnosti je náplní cvičení 8.85
- dokážeme tedy tvrzení o součtu $h(x) := f(x) + g(x)$
- označme $A_i = f^{-1}(d_i)$ a $B_j = g^{-1}(e_j)$ a dále $B := \bigcup_{j=1}^m B_j$ a $A := \bigcup_{i=1}^m A_i$
- zavedeme-li nyní pomocné značení $C_i = A_i \setminus B$, $D_j = B_j \setminus A$ a $F_{ij} = A_i \cap B_j$, platí

$$h(C_i) = \{d_i\}, \quad h(D_j) = \{e_j\}, \quad h(F_{ij}) = \{d_i + e_j\}$$

- pak tedy

$$(\mathcal{L}) \int_E h(x) d\mu(x) = (\mathcal{L}) \int_E (f + g)(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i) d_i + \sum_{j=1}^m \mu(D_j) e_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(F_{ij}) (d_i + e_j)$$

- vzhledem k faktu, že

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \mu(A \cap B_j),$$

platí odtud

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B) d_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) d_i,$$

$$\sum_{j=1}^m \mu(A \cap B_j) e_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) e_j$$

- proto

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}) \int_E h(x) d\mu(x) &= \sum_{i=1}^n (\mu(A_i) - \mu(A_i \cap B)) d_i + \sum_{j=1}^m (\mu(B_j) - \mu(B_j \cap A)) e_j + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(F_{ij}) d_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(F_{ij}) e_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) d_i - \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B) d_i + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) e_j - \sum_{j=1}^m \mu(B_j \cap A) e_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(F_{ij}) d_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(F_{ij}) e_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) d_i + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) e_j = (\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x) + (\mathcal{L}) \int_E g(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

5.3.16 Lemma

Nechť funkce $f_n(x), g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $f_n(x) \leq g_n(x)$ na E . Pak

$$\int_E f_n(x) d\mu(x) \leq \int_E g_n(x) d\mu(x).$$

5.3.17 Definice

Nechť $f(x), f_n(x)$ pro $n \in \mathbf{N}$ jsou funkce definované na množině E . Jestliže pro každé $x \in E$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

říkáme, že posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ konverguje (bodově) k funkci $f(x)$ a zapisujeme $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Jestliže navíc pro všechna $x \in E$ je posloupnost čísel $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ neklesající, resp. nerostoucí, řekneme, že posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ konverguje zdola (roste), resp. konverguje shora (klesá) k funkci $f(x)$ a zapíšeme $f_n(x) \nearrow f(x)$, resp. $f_n(x) \searrow f(x)$. Pokud vše platí pro každé $x \in E \setminus M$, kde $\mu(M) = 0$, říkáme, že posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ roste, resp. klesá k funkci $f(x)$ skoro všude v E .

5.3.18 Věta

Nechť všechny funkce $f_n(x)$ pro $n \in \mathbf{N}$ patří do základního systému $\mathcal{Z}_\mu$. Nechť $f_n(x) \searrow 0$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = 0.$$

Bez důkazu.

5.3.19 Věta

Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou funkce ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$. Pak $\int_E f(x) d\mu(x) \geq 0$. Jestliže platí $\int_E f(x) d\mu(x) = 0$, pak $f(x) \sim 0$, a pokud $f(x) \sim g(x)$, pak $\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x)$.

Důkaz:

- nechť $f(E) \setminus \{0\} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, a $A_k = f^{-1}(d_k)$
- pak podle definice 5.3.10 platí, že $\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^m d_k \mu(A_k)$
- první tvrzení je tudíž jasným důsledkem definice 5.3.10
- navíc je-li suma $\sum_{i=1}^m d_i \mu(A_i)$ ze zmiňované definice rovna nule, musí nutně být $\mu(A_i) = 0$ pro každé i
- pak ale $\mu(\text{supp}(f)) = \mu(\cup_{i=1}^m A_i) = 0$, tedy $f(x) \sim 0$
- pro třetí část důkazu definujme funkci $h(x) := f(x) - g(x)$
- pokud $h(x) \in \mathcal{Z}_\mu$, je zjevně $h(x) = 0$ skoro všude v E a podle definice 5.3.10 je ale $\int_E h(x) d\mu(x) = 0$, což je ekvivalentní (díky tvrzení věty 5.3.15) rovnosti $\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x)$
- pokud ale $h(x) \notin \mathcal{Z}_\mu$, což je způsobeno faktem, že funkce $h(x)$ nabývá záporných hodnot, je třeba k důkazu užít až třetí etapu konstrukce Lebesgueova integrálu (viz další text)
- za daných okolností ale $h^+(x) \sim 0$ a $h^-(x) \sim 0$, a proto také v tomto případě platí rovnost $\int_E h(x) d\mu(x) = 0$

5.3.20 Věta

Nechť funkce $f(x)$ a $f_n(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$. Nechť $f_n(x) \nearrow f(x)$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Důkaz:

- z faktu, že $f_n(x) \nearrow f(x)$, vyplývá, že $f(x) - f_n(x) \searrow 0$
- podle věty 5.3.18 ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f(x) - f_n(x)) d\mu(x) = 0$
- jelikož z linearity odvozené ve větě 5.3.15 vychází, že

$$\int_E f_n(x) d\mu(x) + \int_E (f(x) - f_n(x)) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x),$$

dostáváme odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f(x) - f_n(x)) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x),$$

respektive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) + 0 = \int_E f(x) d\mu(x)$$

5.3.21 Poznámka

V následujícím výkladu bychom integrál (prozatím definovaný pouze pro jednoduché funkce) měli rozšířit na širší množinu funkcí. Cílem této části je ze znalosti integrálu pro jednoduché funkce vybudovat pojem integrálu pro nezáporné funkce, které obecně nemusejí být jednoduché. Princip takového zavedení je vcelku prostý a zřejmý. Budeme-li mít nezápornou funkci $f(x)$, jež není jednoduchá, a posloupnost jednoduchých funkcí $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$, které k ní konvergují např. zdola, snahou je definovat integrál $\int_E f(x) d\mu(x)$ jako limitu integrálů $\int_E f_n(x) d\mu(x)$, které jsou již definovány v definici 5.3.10. Aby tento postup fungoval, je třeba zaručit, že pokud zvolíme dvě posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ a $(g_n(x))_{n=1}^\infty$, které obě konvergují k téže funkci $f(x)$, pak obě limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x)$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x)$ budou stejné. To prokáže následující věta.

5.3.22 Věta

Nechť $f_n(x), g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $f_n(x) \nearrow f(x)$ a také $g_n(x) \nearrow f(x)$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) \, d\mu(x).$$

Důkaz:

- obě limity existují, neboť se jedná o limity neklesajících posloupností reálných čísel
- zvolme pevné $m \in \mathbb{N}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme novou funkci

$$h_n(x) := \min(f_n(x), g_m(x)) \quad (5.7)$$

- tyto funkce jsou také ze základního systému (podle věty 5.2.5)
- zafixujeme-li v rovnici (5.7) výraz $g_m(x)$, platí, že $h_n(x) \nearrow \min(f(x), g_m(x))$
- jelikož ale $g_m(x) \nearrow f(x)$, pak nutně $\min(f(x), g_m(x)) = g_m(x)$
- tudíž $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(x) \, d\mu(x) = \int_E g_m(x) \, d\mu(x)$ podle věty 5.3.18, při jejíž aplikaci si uvědomíme, že ze vztahu $g_m(x) \nearrow f(x)$ plyne vztah

$$(f(x) - g_m(x)) \searrow 0$$

- jelikož ale $h_n(x) \leq f_n(x)$, platí podle lemmatu 5.3.16, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(x) \, d\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x)$, tedy $\int_E g_m(x) \, d\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x)$
- po limitním přechodu $m \rightarrow \infty$ dostáváme hledanou nerovnost

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m(x) \, d\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x)$$

- obrátíme-li postup, lze analogicky dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m(x) \, d\mu(x),$$

což kompletuje dokazované tvrzení

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x)$$

5.3.23 Poznámka

Nyní tedy nic nebrání provést *druhý* krok konstrukce Lebesgueova integrálu, a sice definovat integrál z nezáporných μ -měřitelných funkcí. Hovoříme někdy také o *druhém Lebesgueově integrálu* nebo o *druhé etapě konstrukce Lebesgueova integrálu*.

5.3.24 Definice

Označme

$$\mathcal{Z}_\mu^+ := \{f(x) : \text{Ran}(f) \subset \mathbf{R}_0^+ \wedge \exists f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu \text{ tak, že } f_n(x) \nearrow f(x)\}$$

a pro libovolnou funkci $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$ definujme integrál $\int_E f(x) \, d\mu(x)$ následujícím způsobem. Zvolme posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ funkcí ze $\mathcal{Z}_\mu$ takovou, že $f_n(x) \nearrow f(x)$. Pak definujeme

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x). \quad (5.8)$$

5.3.25 Poznámka

Do systému $\mathcal{Z}_\mu^+$ tedy patří všechny nezáporné funkce $f(x)$, pro které lze najít posloupnost jednoduchých finitních funkcí $f_n(x)$ takovou, že $f_n(x) \nearrow f(x)$.

5.3.26 Lemma

Pro funkcionální třídy $\mathcal{Z}_\mu$ a $\mathcal{Z}_\mu^+$ platí inkluze $\mathcal{Z}_\mu \subset \mathcal{Z}_\mu^+$ a pro každou funkci $g(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ jsou hodnoty integrálů vypočtených podle (5.6), resp. (5.8) stejné.

5.3.27 Příklad

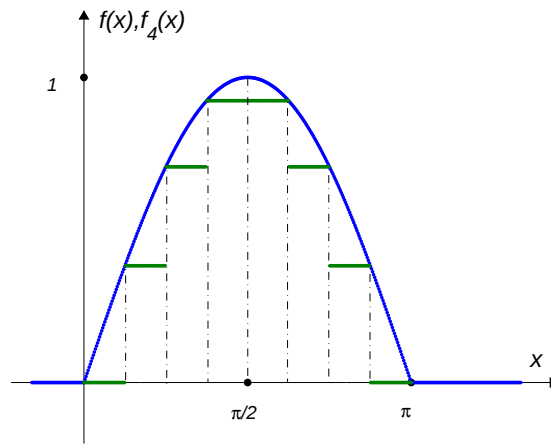
Definici 5.3.24 demonstrujeme na funkci

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \dots \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0 & \dots \quad x \notin \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Definujme nyní po částech konstantní funkci $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\frac{i-1}{2n}\pi) & \dots \quad x \in \langle \frac{i-1}{2n}\pi, \frac{i}{2n}\pi \rangle \quad (i \in \widehat{n}), \\ \sin(\frac{i}{2n}\pi) & \dots \quad x \in \langle \frac{i-1}{2n}\pi, \frac{i}{2n}\pi \rangle \quad (i \in \widehat{2n} \setminus \widehat{n}), \\ 0 & \dots \quad x \notin \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Jedná se o funkci, jejímž nosičem je interval $(0, \pi)$, který je rozdělen na $2n$ ekvidistantních intervalů. Na každém z těchto intervalů nabývá funkce hodnoty jeho levého (pro $0 \leq x < \pi/2$), resp. pravého (pro $\pi/2 \leq x < \pi$) krajního bodu. Viz následující obrázek.



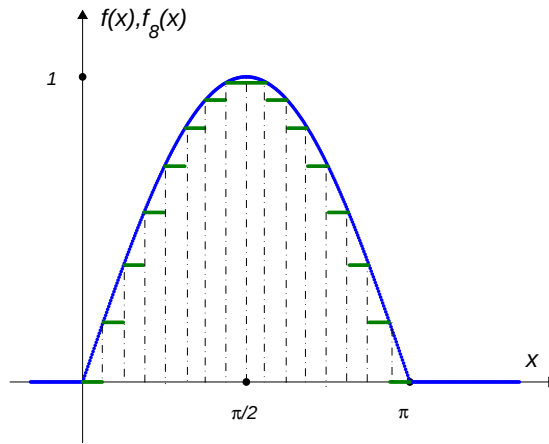
Obrázek 5.11

K ilustraci definice Lebesgueova integrálu z funkce $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$.

Podle definice 5.3.10 snadno vypočteme integrál z funkce $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$, neboť $A_i = \langle \frac{i-1}{2n}\pi, \frac{i}{2n}\pi \rangle$ pro $i \in \widehat{n}$ a $d_i = \sin(\frac{i-1}{2n}\pi)$. Tedy (budeme-li uvažovat klasickou Lebesgueovu míru $\lambda(X)$) platí

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = 2 \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i-1}{2n}\pi\right) \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \left(\cotg\left(\frac{\pi}{4n}\right) - 1 \right). \quad (5.9)$$

Využili jsme jednak symetrie funkce $f_n(x)$ a jednak faktu, že $\lambda(A_i) = \frac{\pi}{2n}$. Tím, jak bude n růst, bude se průběh funkce $f_n(x)$ přibližovat skutečnému průběhu funkce $f(x)$ (viz obrázek 5.12).



Obrázek 5.12

K ilustraci definice Lebesgueova integrálu z funkce $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$.

Aplikujeme-li nyní definici 5.3.24, lze integrál z funkce $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ vypočítat jako

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(\cotg\left(\frac{\pi}{4n}\right) - 1 \right) = 2.$$

Poznámka na závěr: Výpočet sumy (5.9) je značně obtížný.

5.3.28 Věta

Nechť je dán prostor $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou, která je navíc σ -konečná (viz definice 5.1.2). Nechť je dále dána funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^\oplus$, která je μ -měřitelná, tj. $f(x) \in \Lambda_\mu(E)$. Pak existuje posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ funkcí ze $\mathcal{Z}_\mu$ tak, že $f_n(x) \nearrow f(x)$.

Bez důkazu.

5.3.29 Důsledek

Je-li míra σ -konečná, pak každá nezáporná měřitelná funkce patří do soustavy $\mathcal{Z}_\mu^+$.

5.3.30 Úmluva

V celém dalším textu budeme předpokládat, že míra $\mu(X)$ zadaná na prostoru $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou je navíc také σ -konečná.

5.3.31 Poznámka

Zbývá tedy zkompletovat formulaci Lebesgueova integrálu. Třetím a zároveň posledním krokem při jeho konstrukci je formulace integrálu z libovolné měřitelné funkce, tedy i z té, která nabývá záporných hodnot. Způsob konstrukce se přímo nabízí. Rozdělíme-li libovolnou funkci na již definované (viz definice 5.1.6) horní a dolní řezy $f^+(x)$ a $f^-(x)$ a uvědomíme-li si, že oba jsou nezáporné, jistě snadno pochopíme předkládanou definici.

5.3.32 Definice

Jestliže $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$, $f^+(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$, $f^-(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$ a má-li rozdíl

$$\int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x) \quad (5.10)$$

smysl, nazveme jej *abstraktním Lebesgueovým integrálem* z funkce $f(x)$ podle míry $\mu(X)$ a označíme

$$(\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x).$$

Symbol $(\mathcal{L})$ se užívá pouze v případě, kdy by mohlo dojít k záměně s jiným typem integrálu.

5.3.33 Poznámka

Je-li míra σ -konečná, což je většina nejběžnějších variant Lebesgueovy míry, bude pro každou μ -měřitelnou funkci $f(x)$ platit, že $f^+(x), f^-(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$ a o existenci Lebesgueova integrálu rozhodne pouze určitost nebo neurčitost výrazu (5.10).

5.3.34 Definice

Množinu všech funkcí, pro něž existuje abstraktní Lebesgueův integrál přes množinu E , označujeme symbolem $\mathcal{L}^*(E, \mu)$. Jestliže

$$(\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x) \in \mathbf{R},$$

řekneme, že (abstraktní Lebesgueův) integrál *konverguje* nebo že funkce $f(x)$ je *lebesgueovsky integrovatelná* (integrabilní). Množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí označíme $\mathcal{L}(E, \mu)$.

5.3.35 Poznámka

Již z definice je jasné, že $\mathcal{L}(E, \mu) \subset \mathcal{L}^*(E, \mu)$. Navíc je také jasné, že platí množinová rovnost

$$\{f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu) : f(x) \geq 0\} = \mathcal{Z}_\mu^+. \quad (5.11)$$

5.3.36 Příklad

Ukážeme, že po částech konstantní funkce, definovaná pro $x \in \langle n-1, n \rangle$, kde $n \in \mathbf{N}$, předpisem

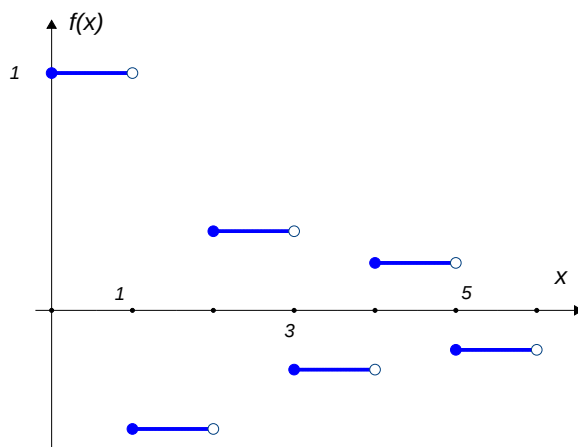
$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

nemá na $E := \mathbf{R}_0^+$ Lebesgueův integrál. Funkcí $f^+(x)$ je funkce

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2m-1} & \dots & x \in \langle 2m-2, 2m-1 \rangle, \\ 0 & \dots & x \in \langle 2m-1, 2m \rangle, \end{cases}$$

kde $m \in \mathbf{N}$. Podobně

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \dots & x \in \langle 2m-2, 2m-1 \rangle, \\ \frac{1}{2m} & \dots & x \in \langle 2m-1, 2m \rangle. \end{cases}$$



Obrázek 5.13
Graf funkce $f(x) = \frac{(-1)^{[x]+1}}{[x]}$.

Pak platí rovnosti

$$\int_E f^+(x) d\lambda(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} = \infty, \quad \int_E f^-(x) d\lambda(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} = \infty.$$

Jelikož ale rozdíl obou integrálů není definován, neexistuje ani integrál $\int_E f(x) d\lambda(x)$ a tedy $f(x) \notin \mathcal{L}^*(E, \lambda(X))$.

5.3.37 Věta – o ekvivalentních funkcích

Nechť $f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a $g(x) \sim f(x)$. Potom $g(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a

$$\int_E g(x) \, d\mu(x) = \int_E f(x) \, d\mu(x).$$

Navíc vztah $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ je ekvivalentní se vztahem $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

Důkaz:

- důkaz provedeme nejprve pro nezáporné funkce $f(x), g(x)$
- jelikož $f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$, existují funkce $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, že $f_n(x) \nearrow f(x)$
- nechť $M \subset E$ je množina taková, že $\mu(M) = 0$ a zároveň $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in E \setminus M$
- označme $g_M(x)$ restrikci funkce $g(x)$ na množinu M
- funkce $g_M(x)$ je měřitelná na M , t.j. $g_M(x) \in \Lambda_\mu(M)$, neboť míra $\mu(X)$ je úplná
- existují tedy funkce $h_n(x)$ jednoduché na M takové, že $h_n(x) \nearrow g_M(x)$
- položme

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \dots \quad x \in E \setminus M, \\ h_n(x) & \dots \quad x \in M \end{cases}$$

- funkce $g_n(x)$ jsou jednoduché
- abychom prokázali, že $g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$, je třeba ukázat, že míra nosiče funkce $g_n(x)$ je konečná
- protože ale $\text{supp}(g_n) \subset [\text{supp}(f_n) \cup M]$, platí také

$$\mu(\text{supp}(g_n)) \leq \mu(\text{supp}(f_n)) + \mu(M) = \mu(\text{supp}(f_n)) < \infty$$

- zřejmě $g_n(x) \nearrow g(x)$ a $g_n(x) \sim f_n(x)$
- pak podle tvrzení věty 5.3.19 platí

$$\int_E g_n(x) \, d\mu(x) = \int_E f_n(x) \, d\mu(x),$$

což v limitě $n \rightarrow \infty$ vede k tvrzení

$$\int_E g(x) \, d\mu(x) = \int_E f(x) \, d\mu(x)$$

- jsou-li $f(x), g(x)$ libovolné, užijeme faktu, že z ekvivalence $g(x) \sim f(x)$ vyplývají ekvivalence $f^+(x) \sim g^+(x)$ a $f^-(x) \sim g^-(x)$
- tvrzení pak vyplývá z první části důkazu, neboť

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) = \int_E f^+(x) \, d\mu(x) - \int_E f^-(x) \, d\mu(x) = \int_E g^+(x) \, d\mu(x) - \int_E g^-(x) \, d\mu(x) = \int_E g(x) \, d\mu(x)$$

5.3.38 Příklad

Nechť funkce $\varphi(x) = x + 3\Theta(x - 3)$ generuje jednodimenzionální Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Rozhodněme, zda jsou funkce $g(x) = e^x$ a

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \dots \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}, \\ -2 & \dots \quad x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

μ -ekvivaletní. Jelikož se funkce $g(x)$ a $h(x)$ liší na množině $\mathbf{N}$, je třeba rozhodnout, zda $\mu(\mathbf{N})$ je či není nulová. Nejprve určíme $\mu(\{1\})$. Tato úloha má dvě části: a) rozhodnout, zda $\{1\} \in \mathcal{M}_\mu$, b) vypočítat $\mu(\{1\})$, pokud je odpověď

v bodě a) pozitivní. Má-li množina $\{1\}$ patřit do $\mathcal{M}_\mu$, musí pro každé $\varepsilon > 0$ existovat $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_1$ tak, že $S_\varepsilon \supset \{1\}$ a $\mu_\sigma^{(\text{ex})}(S_\varepsilon \setminus \{1\}) < \varepsilon$. Zvolme

$$S_\varepsilon = \left\langle 1, 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle.$$

Označme $Z_\varepsilon = S_\varepsilon \setminus \{1\}$. Vidíme, že $Z_\varepsilon = Z_\varepsilon^\circ \in \mathcal{S}_1$, a proto

$$\mu_\sigma^{(\text{ex})}(Z_\varepsilon) = \mu_\sigma(Z_\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\left\langle 1 + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}, 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right\rangle\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

a tvrzení je prokázáno. Analogicky lze také podobnou vlastnost prokázat pro jakoukoli množinu $\{m\}$, kde $m \in \mathbf{N}$, a to dokonce i pro $m = 3$, což je případ, kdy je třeba příslušnost k soustavě $\mathcal{M}_\mu$ dokazovat (vzhledem k nespojitosti vytvořující funkce v bodě $x = 3$) velmi obezřetně.

Dále dle definice Lebesgueovy míry odvozujeme:

$$\mu(\{1\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle 1, 1 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 1, 1 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (1 + \varepsilon - 1) = 0,$$

$$\mu(\{2\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle 2, 2 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 2, 2 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (2 + \varepsilon - 2) = 0,$$

$$\mu(\{3\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle 3, 3 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 3, 3 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (3 + \varepsilon + 3 - 3) = 3,$$

$$\mu(\{4\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle 4, 4 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 4, 4 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (4 + \varepsilon - 4) = 0,$$

$$\mu(\{5\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle 5, 5 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 5, 5 + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (5 + \varepsilon - 5) = 0,$$

$$m > 5 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{m\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_\sigma(\langle m, m + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle m, m + \varepsilon \rangle) = \inf_{\varepsilon > 0} (m + \varepsilon - m) = 0.$$

Odtud pak $\mu(\mathbf{N}) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{m\}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\{m\}) = 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + \dots = 3$. Zkoumané funkce tudíž μ -ekvivalentní nejsou.

5.3.39 Věta

Nechť $f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a $f(x) \geq 0$ skoro všude. Potom $\int_E f(x) d\mu(x) \geq 0$.

Důkaz:

- existuje-li množina $A \subset E$ nenulové míry taková, že $f(A) = \infty$, je tvrzení triviálně splněno
- předpokládejme dále, že žádná taková množina neexistuje, tedy že funkce $f(x)$ nabývá hodnoty ∞ pouze na množině míry nula
- jelikož $f(x) \geq 0$ skoro všude, pak $f^-(x) \sim 0$, tedy $\int_E f^-(x) d\mu(x) = 0$
- z definice 5.3.32 pak přímo vyplývá, že $\int_E f(x) d\mu(x) \geq 0$

5.3.40 Věta – linearita Lebesgueova integrálu (násobek)

Pro libovolné funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ a číslo $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\int_E cf(x) d\mu(x) = c \int_E f(x) d\mu(x),$$

má-li pravá strana význam.

Důkaz:

- pro $c = 0$ je tvrzení triviální
- důkaz provedeme nejprve pro kladná c

- je-li funkce nezáporná a ze soustavy $\mathcal{Z}_\mu^+$, zvolme posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ funkcí ze $\mathcal{Z}_\mu$ takovou, že $f_n(x) \nearrow f(x)$
- pak také $cf_n(x) \nearrow cf(x)$
- odtud

$$\int_E cf(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E cf_n(x) d\mu(x) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = c \int_E f(x) d\mu(x)$$

- to, že $\int_E cf_n(x) d\mu(x) = c \int_E f_n(x) d\mu(x)$ pro funkce ze základního systému, plyne z věty 5.3.15
- pokud $f(x)$ je libovolná, užijeme jednak definice 5.3.32 a jednak toho, že tvrzení je již dokázáno pro nezáporné funkce
- pak tedy

$$\int_E cf(x) d\mu(x) = \int_E (cf)^+(x) d\mu(x) - \int_E (cf)^-(x) d\mu(x) = c \int_E f^+(x) d\mu(x) - c \int_E f^-(x) d\mu(x) = c \int_E f(x) d\mu(x)$$

- přejdeme na důkaz pro záporná c
- v podstatě stačí dokázat tvrzení pro $c = -1$
- pak $(-f)^+ = f^- \wedge (-f)^- = f^+$, odkud snadno

$$\int_E (-f)(x) d\mu(x) = \int_E (-f)^+(x) d\mu(x) - \int_E (-f)^-(x) d\mu(x) = \int_E f^-(x) d\mu(x) - \int_E f^+(x) d\mu(x) = - \int_E f(x) d\mu(x)$$

5.3.41 Věta – linearita Lebesgueova integrálu (součet)

Pro libovolné funkce $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ platí

$$\int_E (f(x) + g(x)) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x) + \int_E g(x) d\mu(x),$$

má-li pravá strana význam.

Důkaz:

- uvažme nejprve nezáporné funkce
- vezměme $f_n(x), g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ takové, že $f_n(x) \nearrow f(x)$ a $g_n(x) \nearrow g(x)$
- pak jistě $f_n(x) + g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$
- dále

$$\int_E (f_n(x) + g_n(x)) d\mu(x) = \int_E f_n(x) d\mu(x) + \int_E g_n(x) d\mu(x)$$

- to plyne z věty 5.3.15
- na poslední rovnost aplikujeme limitu $n \rightarrow \infty$ a dostáváme

$$\int_E (f(x) + g(x)) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n(x) + g_n(x)) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x) + \int_E g(x) d\mu(x)$$

- jsou-li $f(x), g(x)$ obecné funkce, označme $h(x) := f(x) + g(x)$
- platí $h(x) = h^+(x) - h^-(x) = f(x) + g(x) = f^+(x) - f^-(x) + g^+(x) - g^-(x)$
- odtud

$$\int_E h^+(x) d\mu(x) + \int_E f^-(x) d\mu(x) + \int_E g^-(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) + \int_E g^+(x) d\mu(x) + \int_E h^-(x) d\mu(x),$$

přičemž obě strany existují (byť mohou být rovny plus nekonečnu)

- v této rovnici lze provést následující sčítání

$$\int_E h^+(x) d\mu(x) - \int_E h^-(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x) + \int_E g^+(x) d\mu(x) - \int_E g^-(x) d\mu(x),$$

neboť výraz na pravé straně je dobře definován, což je garantováno předpoklady věty

- odtud již plyne tvrzení

5.3.42 Věta – monotonie Lebesgueova integrálu

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a necht' $f(x) \leq g(x)$ skoro všude v E . Pak

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) \leq \int_E g(x) \, d\mu(x).$$

Důkaz:

- označíme-li $h(x) := g(x) - f(x)$, splňuje funkce $h(x)$ předpoklady věty 5.3.39
- z jejího tvrzení vyplývá, že $\int_E h(x) \, d\mu(x) \geq 0$, což společně s linearitou 5.3.41 kompletuje důkaz

5.3.43 Věta

Nechť $f(x) \geq 0$ skoro všude a $\int_E f(x) \, d\mu(x) = 0$. Pak $f(x) \sim 0$.

Důkaz:

- funkce $f(x)$ je definována všude v E a je skoro všude nezáporná v E
- označme $B_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$ pro $n \in \mathbf{N}$
- platí, že $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$
- zřejmě

$$\mu(B_n) = \int_E \chi_{B_n}(x) \, d\mu(x) \leq \int_E n f(x) \, d\mu(x) = 0,$$

neboť ve všech bodech množiny B_n jsou funkční hodnoty charakteristické funkce χ_{B_n} menší než hodnoty funkce $n f(x)$

- proto $\mu(B_n) = 0$ pro všechny $n \in \mathbf{N}$
- dále $\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$
- proto $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0$
- a tedy $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$, což je ekvivalentní faktu, že $f(x) \sim 0$

5.3.44 Věta

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ a $c \in \mathbf{R}$. Pak funkce $(cf)(x), (f+g)(x), \max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}, |f(x)|, f^+(x), f^-(x)$ též náležejí do $\mathcal{L}(E, \mu)$.

Důkaz:

- tvrzení plyne již ze samotné konstrukce integrálu nebo z vět o linearitě Lebesgueova integrálu
- např. pro absolutní hodnotu $|f(x)|$ platí rovnost $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$
- ale obě funkce $f^+(x), f^-(x)$ patří do $\mathcal{L}(E, \mu)$
- tedy také $|f(x)| \in \mathcal{L}(E, \mu)$

5.3.45 Věta – o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu

Nechť $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Pak platí

$$\left| \int_E f(x) \, d\mu(x) \right| \leq \int_E |f(x)| \, d\mu(x).$$

Důkaz:

- vztah $|f(x)| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ platí, jak víme z předešlé věty
- dále platí série nerovností

$$\left| \int_E f(x) \, d\mu(x) \right| = \left| \int_E f^+(x) \, d\mu(x) - \int_E f^-(x) \, d\mu(x) \right| \leq \left| \int_E f^+(x) \, d\mu(x) \right| + \left| \int_E f^-(x) \, d\mu(x) \right| = \int_E |f(x)| \, d\mu(x).$$

5.3.46 Důsledek

$$f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(E, \mu) \wedge f(x) \in \Lambda_\mu(E).$$

5.3.47 Poznámka

Ekvivalence $f \in \mathcal{L}(E, \mu) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ obecně platná není, neboť existují funkce, které nejsou μ -měřitelné, ale jejich absolutní hodnota ano. Příkladem takové funkce je

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \dots & x \in A, \\ -1 & \dots & x \in E \setminus A, \end{cases}$$

kde $A \subset E$ je neměřitelná množina.

5.3.48 Věta – pomocná věta pro srovnávací kritérium

Nechť $f(x), g(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ a $f(x) \in \Lambda_\mu(E)$. Nechť dále $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ a pro všechny $x \in E$ platí nerovnost $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Potom $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ a navíc

$$\int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x).$$

Důkaz:

- jelikož je funkce $g(x)$ zcela zřetelně ze systému $\mathcal{Z}_\mu^+$, jistě existuje posloupnost funkcí $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, že $g_n(x) \nearrow g(x)$
- podle věty 5.3.28 existuje posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ funkcí ze $\mathcal{Z}_\mu$ tak, že $f_n(x) \nearrow f(x)$
- položíme $h_n(x) = \min\{f_n(x), g_n(x)\}$
- zjevně $h_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$
- navíc však $h_n(x) \nearrow \min\{f(x), g(x)\} = f(x)$
- protože $h_n(x) \leq g_n(x)$, vychází z lematu 5.3.16, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(x) d\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x)$$

- a proto $\int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x)$

5.3.49 Věta – srovnávací kritérium

Nechť $f(x) \in \Lambda_\mu(E)$ je měřitelná funkce, $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce a

$$|f(x)| \leq g(x)$$

skoro všude v E . Pak také $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

Důkaz:

- důkaz lze (vzhledem k definici pojmu *skoro všude*) provádět za předpokladu $|f(x)| \leq g(x)$ všude v E
- podle věty 5.2.5 je funkce $|f(x)|$ ze systému $\Lambda_\mu(E)$ měřitelných funkcí
- podle věty 5.3.48 je funkce $|f(x)|$ integrabilní, tj. $|f(x)| \in \mathcal{L}(E, \mu)$
- a podle důsledku 5.3.46 je také sama funkce $f(x)$ integrabilní, tj. $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$

5.3.50 Věta – Leviho

Nechť pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí, že $f_n(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$. Nechť dále

- buď $f_n(x) \nearrow f(x)$ skoro všude a $\int_E f_1(x) d\mu(x) > -\infty$,
- nebo $f_n(x) \searrow f(x)$ skoro všude a $\int_E f_1(x) d\mu(x) < \infty$.

Pak platí $f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Důkaz:

- uvažujme nejprve případ, kdy $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$
- existují tedy jistě posloupnosti funkcí $(g_{nk}(x))_{k=1}^\infty$ ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$ tak, že $g_{nk}(x) \nearrow f_n(x)$
- položíme $h_n(x) = \max\{g_{ij}(x) : 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq n\}$
- všechny tyto funkce jsou opět ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$ a navíc $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$
- dále $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ a $h(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$
- tedy $h_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$
- logicky také platí: $h(x) = f(x)$, a tudíž i $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$
- proto

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E h(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(x) d\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) \leq \int_E f(x) d\mu(x)$$

- všechny nerovnosti tudíž přejdou v rovnosti, a proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$
- dokažme nyní první tvrzení pro případ obecných funkcí $f_n(x)$
- pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí z monotonie integrálu, že $\int_E f_n(x) d\mu(x) \geq \int_E f_1(x) d\mu(x) > -\infty$
- protože $f_n(x) \nearrow f(x)$, platí pro nově zkonstruovanou posloupnost $g_n(x) := f_n(x) + f_1^-(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x) + f_1^-(x) \geq 0$, že $g_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu^+$, a důkaz se tím převádí na první část
- snadno nahlédneme, že $f_n^-(x) \leq f_1^-(x)$ a $g_n(x) \nearrow f(x) + f_1^-(x)$
- odtud $f(x) + f_1^-(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$
- podle první části důkazu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) = \int_E (f(x) + f_1^-(x)) d\mu(x)$, kde $f_1^-(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$
- dále

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) - \int_E f_1^-(x) d\mu(x) = \\ &= \int_E (f(x) + f_1^-(x)) d\mu(x) - \int_E f_1^-(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

- pro důkaz druhého tvrzení postačí přeznačit $h_n(x) := -f_n(x)$ a aplikovat tvrzení č. 1

5.3.51 Věta – Leviho pro řady

Nechť $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ je řada nezáporných měřitelných funkcí, pak

$$\int_E \sum_{n=1}^\infty f_n(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n(x) d\mu(x). \quad (5.12)$$

Důkaz:

- uplatníme větu 5.3.50 na posloupnost částečných součtů zadané řady funkcí, přičemž nezápornost funkcí garantuje jejich příslušnost ke třídě $\mathcal{L}^*(E, \mu)$
- rovnost (5.12) je tedy třeba chápat jako rovnost v $\mathcal{L}^*(E, \mu)$

5.3.52 Věta – Lebesgueova (o integrabilní majorantě)

Nechť $f_n(x) \in \Lambda_\mu$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ skoro všude. Nechť existuje $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ skoro všude v E . Pak platí $f(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ a rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Důkaz:

- důkaz převedeme na dvě limity, na něž budeme aplikovat Leviho větu 5.3.50
- v bodech, kde není splněna nerovnost $|f_n(x)| \leq g(x)$, klademe bez újmy na obecnosti: $f_n(x) = g(x) = 0$
- pro $n \in \mathbf{N}$ zaved'me

$$g_n(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \overbrace{\min\{f_k(x) : n \leq k \leq m\}}^{\in \Lambda_\mu(E)} \quad (5.13)$$

- protože $\min\{f_k(x) : n \leq k \leq m\} \geq \min\{f_k(x) : n \leq k \leq m+1\}$, limita (5.13) skutečně existuje
- navíc: $g_n(x) \nearrow f(x)$, jak se vzápětí přesvědčíme
- pro pevně zvolené $x \in E$ a $\varepsilon > 0$ jistě existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $n > n_0$ platí:

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro $m > n > n_0$ také $\min\{f_k(x) : n \leq k \leq m\} \in (f(x) - \varepsilon/2; f(x) + \varepsilon/2)$
- a tedy $g_n(x) \in \langle f(x) - \varepsilon/2; f(x) + \varepsilon/2 \rangle \subset (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon)$
- proto $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ v E a navíc $g_n(x) \nearrow f(x)$
- analogicky ukážeme, že pro $h_n(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \max\{f_k(x) : n \leq k \leq m\}$ platí, že $h_n(x) \searrow f(x)$
- tedy $g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$ a také $|g_n(x)| \leq g(x)$ a $|h_n(x)| \leq g(x)$, a podle srovnávacího kritéria 5.3.49 proto $g_n(x), f_n(x), h_n(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$
- z lemmatu 5.3.16 pak vyplývá, že $\int_E g_n(x) d\mu(x) \leq \int_E f_n(x) d\mu(x) \leq \int_E h_n(x) d\mu(x)$
- podle věty 5.3.50 pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$
- proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$

5.3.53 Věta – Fatouova

Nechť jsou funkce $f_k(\vec{x})$ měřitelné na $M \subset E$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$ a navíc nechť platí $f_k(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$ skoro všude na M . Nechť dále existuje funkce $g(\vec{x})$ tak, že $f_k(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$ skoro všude v M a

$$\int_M g(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) < \infty.$$

Pak platí inkluze $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(M)$ a rovnost

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) \leq \int_M f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}).$$

Bez důkazu.

5.3.54 Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}$ a funkce $f(x)$ nechť je definována všude v A . Položme $\widetilde{f}(x) := f(x)$ pro všechna $x \in A$ a $\widetilde{f}(x) := 0$ pro všechna $x \in E \setminus A$. Pak platí

$$\int_A f(x) \, d\mu(x) = \int_E \widetilde{f}(x) \, d\mu(x),$$

má-li alespoň jedna strana uvedené rovnosti význam.

Důkaz:

- jelikož je funkce $f(x)$ definována všude v A , je funkce $\widetilde{f}(x)$ je definována všude v E
- tvrzení dokážeme nejprve pro $f(x) \geq 0$ všude
- pak tedy $\widetilde{f}(x) \geq 0$ všude
- předpokládáme-li, že existuje $\int_A f(x) \, d\mu(x)$, existují funkce $f_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, že $f_n(x) \nearrow f(x)$ a navíc

$$\int_A f(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) \, d\mu(x)$$

- k funkci $\widetilde{f}(x)$ jistě existuje posloupnost funkcí $\widetilde{f}_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, že $\widetilde{f}_n(x) \nearrow \widetilde{f}(x)$
- funkce $\widetilde{f}_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ mají konečný počet hodnot, nosič konečné míry a platí pro ně, že $\int_E \widetilde{f}_n(x) \, d\mu(x) = \int_A f_n(x) \, d\mu(x)$
- odtud ale

$$\int_E \widetilde{f}(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \widetilde{f}_n(x) \, d\mu(x) = \int_A f(x) \, d\mu(x)$$

- provedeme druhou část důkazu, kdy budeme předpokládat, že existuje integrál $\int_E \widetilde{f}(x) \, d\mu(x)$
- pak ale existují funkce $\widetilde{g}_n(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ takové, že $\widetilde{g}_n(x) \nearrow \widetilde{f}(x)$ a

$$\int_E \widetilde{f}(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \widetilde{g}_n(x) \, d\mu(x)$$

- funkce $\widetilde{g}_n(x)$ jsou jistě nezáporné a navíc $\widetilde{g}_n(x) = 0$ pro všechna $x \in E \setminus A$
- označme $h_n(x)$ restrikcí funkce $\widetilde{g}_n(x)$ na množinu A
- tedy $h_n(x) = \widetilde{g}_n(x)$ na A
- pak ale

$$\int_E \widetilde{g}_n(x) \, d\mu(x) = \int_A h_n(x) \, d\mu(x)$$

- navíc ještě $h_n(x) \nearrow f(x)$ na A
- tudíž

$$\int_A f(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \widetilde{g}_n(x) \, d\mu(x) = \int_E \widetilde{f}(x) \, d\mu(x)$$

- tím je důkaz zkompletován pro případ funkce $f(x) \geq 0$ všude v A
- je-li $f(x)$ libovolná funkce, provedeme její rozštěpení na řezy $f^+(x)$ a $f^-(x)$
- pak užijeme tvrzení pro obě funkce $f^+(x)$, $f^-(x)$, které jsou nezáporné, a platí tedy rovnost

$$\int_A f^\pm(x) \, d\mu(x) = \int_E \widetilde{f}^\pm(x) \, d\mu(x)$$

5.3.55 Poznámka

Předešlá věta platí i tehdy, je-li $f(x)$ definována pouze skoro všude v A a $\tilde{f}(x)$ je položena za nulovou také v bodech, kde sama $f(x)$ definována nebyla.

5.3.56 Lemma

Nechť $B \in \mathcal{M}_\mu$ a $f(x) \in \mathcal{L}^*(B, \mu)$. Nechť dále $A \in \mathcal{M}_\mu$ a $A \subset B$. Pak $f(x) \in \mathcal{L}^*(A, \mu)$ a platí

$$\begin{aligned} \int_B f(x) \, d\mu(x) < +\infty &\Rightarrow \int_A f(x) \, d\mu(x) < +\infty, \\ \int_B f(x) \, d\mu(x) > -\infty &\Rightarrow \int_A f(x) \, d\mu(x) > -\infty. \end{aligned}$$

5.3.57 Věta – aditivita Lebesgueova integrálu

Nechť $(A_n)_{n=1}^m$ je disjunktní posloupnost měřitelných množin a $B = \biguplus_{n=1}^m A_n$. Pak platí

$$\int_B f(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^m \int_{A_n} f(x) \, d\mu(x), \quad (5.14)$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz:

- položíme $g_n(x) := f(x)$ pro $x \in A_n$ a $g_n(x) := 0$ pro $x \in E \setminus A_n$
- dále položíme $g(x) := f(x)$ pro $x \in B$ a $g(x) := 0$ pro $x \in E \setminus B$
- všechny integrály $\int_{A_n} f(x) \, d\mu(x)$ podle lemmatu 5.3.56 existují a dají se sečíst, neboť všechny A_n jsou podmnožinami množiny B , což věta 5.3.56 vyžaduje
- podle věty 5.3.54 platí: $\int_{A_n} f(x) \, d\mu(x) = \int_B g_n(x) \, d\mu(x)$
- jelikož $g(x) \sim \sum_{n=1}^m g_n(x)$, dostáváme z linearit a věty o ekvivalentních funkcích rovnost

$$\int_B f(x) \, d\mu(x) = \int_E g(x) \, d\mu(x) = \int_E \sum_{n=1}^m g_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^m \int_E g_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^m \int_{A_n} f(x) \, d\mu(x)$$

- přitom této rovnosti může být docíleno jak při garanci existence levé strany, tak při garanci existence strany pravé
- tím je důkaz zkompleťován

5.3.58 Věta – σ -aditivita Lebesgueova integrálu

Nechť $(A_n)_{n=1}^\infty$ je disjunktní posloupnost měřitelných množin a $C = \biguplus_{n=1}^\infty A_n$. Pak platí

$$\int_C f(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f(x) \, d\mu(x), \quad (5.15)$$

má-li levá strana smysl.

Důkaz:

- položíme $g_n(x) := f(x)$ pro $x \in A_n$ a $g_n(x) := 0$ pro $x \in E \setminus A_n$
- dále položíme $h(x) := f(x)$ pro $x \in C$ a $h(x) := 0$ pro $x \in E \setminus C$
- předpokládejme, že $\int_C f(x) \, d\mu(x)$ existuje, a tedy $\int_C f(x) \, d\mu(x) = \int_E h(x) \, d\mu(x)$

- podle lematu 5.3.56 existují integrály $\int_{A_n} f(x) d\mu(x) = \int_E g_n(x) d\mu(x)$
- vidíme, že $h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$
- platí-li $f(x) \geq 0, h(x) \geq 0, g_n(x) \geq 0$, pak podle Leviho věty pro řady 5.3.51 dostáváme, že $\int_E h(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n(x) d\mu(x)$, z čehož obratem $\int_C f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu(x)$
- je-li $f(x)$ libovolnou funkcí, pak zužitkujeme fakt, že rovnost $\int_C f^+(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+(x) d\mu(x)$ a rovněž rovnost $\int_C f^-(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^-(x) d\mu(x)$ byly prokázány první etapou důkazu
- předpokládá-li věta, že výraz $\int_C f^+(x) d\mu(x) - \int_C f^-(x) d\mu(x)$ má smysl, znamená to podle věty o sčítání řad, že

$$\int_C f(x) d\mu(x) = \int_C f^+(x) d\mu(x) - \int_C f^-(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+(x) d\mu(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^-(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu(x)$$

5.3.59 Příklad

Ukažme nyní, proč je ve tvrzení o σ -aditivitě požadováno, aby levá strana existovala. Uvažme stejně jako v příkladě 5.3.36 funkci

$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{pro } x \in A_n = \langle n-1, n \rangle,$$

definovanou na množině $E = \mathbf{R}_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. V příkladě 5.3.36 bylo již ukázáno, že $\int_E f(x) d\mu(x)$ neexistuje. Ale pravá strana rovnosti (5.15) smysl má, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

5.3.60 Důsledek

Nechť $f(x) \in \mathcal{L}^*(E, \mu)$ a $X \in \mathcal{M}$. Pak funkce

$$X \mapsto \int_X f(x) d\mu(x)$$

je σ -aditivní množinová funkce na σ -algebře $\mathcal{M}$.

5.3.61 Definice

Nechť $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost množin. Jestliže pro všechna $k \in \mathbf{N}$ platí inkluze $S_k \subset S_{k+1}$ a označíme-li $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, pak tento fakt značíme symbolicky takto: $S_k \nearrow S$.

5.3.62 Lemma

Nechť $S_k \in \mathcal{M}_\mu$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$. Jestliže $S_k \nearrow S$ a existuje $\int_S f(x) d\mu(x)$, pak

$$\int_S f(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_k} f(x) d\mu(x).$$

5.3.63 Definice

Nechť $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost množin. Jestliže pro všechna $k \in \mathbf{N}$ platí inkluze $S_k \supset S_{k+1}$ a označíme-li $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$, pak tento fakt značíme symbolicky takto: $S_k \searrow S$.

5.3.64 Lemma

Nechť $S_k \in \mathcal{M}_\mu$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$. Jestliže $S_k \searrow S$ a integrál $\int_{S_1} f(x) d\mu(x)$ konverguje, pak

$$\int_S f(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_k} f(x) d\mu(x).$$

5.3.65 Věta – o vztahu integrálu a míry

Nechť $M \in \mathcal{M}_\mu$ je zvolena libovolně. Pak jednotková funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \dots & x \in M, \\ 0 & \dots & x \in E \setminus M, \end{cases}$$

patří do třídy $\mathcal{L}^*(M, \mu)$ a navíc $\mu(M) = \int_E \chi(x) d\mu(x)$, resp. $\mu(M) = \int_M 1 d\mu(x)$.

Důkaz:

- jelikož $M \in \mathcal{M}_\mu$, pak $\mu(M)$ jistě existuje
- protože míra $\mu(M)$ je podle úmluvy 5.3.30 σ -konečná, patří funkce $\chi(x) = 1$ do třídy $\mathcal{Z}_\mu^+$, a je tudíž podle rovnosti (5.11) také funkcí třídy $\mathcal{L}^*(M, \mu)$
- integrál $\int_E \chi(x) d\mu(x)$ tedy za všech okolností, které věta připouští, existuje
- pokud je navíc $\mu(M) \in \mathbf{R}$, je $\chi(E) \setminus \{0\} = \{1\}$ konečnou množinou, $\text{supp}(\chi) = M$, $\mu(M) < +\infty$ a $\chi(x)$ je tudíž jistě μ -měřitelná
- proto je funkce $\chi(x)$ funkcí ze základního systému, a lze na ni proto aplikovat definiční předpis (5.6)
- označme $A_1 = M$ a $d_1 = 1$
- odtud

$$\int_M \chi(x) d\mu(x) = \int_E \chi(x) d\mu(x) = d_1 \mu(A_1) = \mu(M)$$

- nechť nyní $\mu(M) = +\infty$
- jelikož podle úmluvy 5.3.30 pracujeme na prostoru s mírou, která je σ -konečná, existují množiny $A_k \in \mathcal{M}_\mu$ takové, že pro všechna $k \in \mathbf{N}$ platí $\mu(A_k) < +\infty$ a $E = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$
- označíme-li $L_k = A_k \cap M$, pak jistě $M = \bigcup_{k=1}^\infty L_k$ a $\mu(L_k) < +\infty$
- na množiny L_k bude tedy možné uplatnit první část důkazu
- ze σ -aditivity míry a σ -aditivity Lebesgueova integrálu vychází

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty L_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(L_k) = \sum_{k=1}^\infty \int_{L_k} \chi(x) d\mu(x) = \int_{\bigcup_{k=1}^\infty L_k} \chi(x) d\mu(x) = \int_M \chi(x) d\mu(x)$$

- důkaz je tím úplný

5.4 Klasický Lebesgueův integrál

Nyní přistoupíme k definici klasického Lebesgueova integrálu, kdy je míra na $\mathbf{E}^r$ vytvořena pomocí generující funkce $\varphi(x) = x$. Budeme tedy uvažovat klasický měřitelný prostor $\{\mathbf{E}^r, \mathcal{M}_\lambda, \lambda(X)\}$ s úplnou mírou $\lambda(X)$, která je navíc také σ -konečná, což vyžaduje úmluva 5.3.30.

5.4.1 Definice

Nechť $r \in \mathbf{N}$ a $\lambda(X)$ je klasická Lebesgueova míra zavedená na prostoru $\mathbf{E}^r$ vytvořující funkcí $\varphi(x) = x$. Pak pro libovolnou λ -měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{E}^r$ Lebesgueův integrál $(\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) d\lambda(\vec{x})$ nazýváme *klasickým Lebesgueovým integrálem z funkce $f(\vec{x})$ přes množinu A* a označujeme jej zjednodušeně $(\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) d\vec{x}$. Přitom symbol $(\mathcal{L})$ se užívá pouze tehdy, je-li z nějakého důvodu důležité upozornit na fakt, že se jedná o integrál Lebesgueův. Pro $r \geq 2$ užíváme také značení

$$(\mathcal{L}) \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r = (\mathcal{L}) \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) d(x_1, x_2, \dots, x_r) = (\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) d\vec{x}$$

nebo

$$(\mathcal{L}) \int \int \cdots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r = (\mathcal{L}) \int \int \cdots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) d(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Je-li A jednorozměrný interval s krajními body a, b , kde $a < b$, pak místo znaku $(\mathcal{L}) \int_A f(x) d\lambda(x)$ užíváme znak $(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx$. V případě, že $a > b$, definujeme

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx := -(\mathcal{L}) \int_b^a f(x) dx.$$

Dále definujeme označení $\mathcal{L}^*(A) := \mathcal{L}^*(A, \lambda)$ a $\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A, \lambda)$.

5.4.2 Věta – o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu

Nechť I je kompaktní interval v E^r a nechť existuje $(\mathcal{R}) \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}$. Pak existuje také $(\mathcal{L}) \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}$ a oba integrály mají tutéž hodnotu.

Důkaz:

- důkaz demonstrujeme na případě $r = 2$
- nechť $\mathcal{D} := \{S_{ij} : i \in \widehat{n} \wedge j \in \widehat{m}\}$ je dělení intervalu I
- označme

$$v_{ij} := \inf_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x}), \quad V_{ij} := \sup_{\vec{x} \in S_{ij}} f(\vec{x})$$

- zavedeme nyní funkce

$$g_D(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_{ij} \chi_{S_{ij}}(\vec{x}), \quad G_D(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} \chi_{S_{ij}}(\vec{x})$$

- obě jsou ze základního systému $\mathcal{Z}_\lambda$
- podotýkáme, že míru $\lambda(\vec{x})$ postačuje zavést na množině I
- označme

$$L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) := (\mathcal{L}) \int_I g_D(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}), \quad U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) := (\mathcal{L}) \int_I G_D(\vec{x}) d\lambda(\vec{x})$$

- toto tvrzení tedy dává do souvislosti dolní integrální součet funkce $f(\vec{x})$ v Riemannově smyslu a hodnotu Lebesgueova integrálu z funkce $g_D(\vec{x})$
- analogický výrok platí pro horní integrální součet v Riemannově smyslu a Lebesgueův integrál z funkce $G_D(\vec{x})$
- zřejmě $g_D(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \leq G_D(\vec{x})$ všude na I
- protože Riemannův integrál podle předpokladů věty existuje, zvolíme posloupnost dělení $(\mathcal{D}_k)_{k=1}^\infty$ takovou, že jejich norma konverguje k nule a každé dělení $\mathcal{D}_{k+1}$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}_k$
- pak platí

$$g_{D_1}(\vec{x}) \leq g_{D_2}(\vec{x}) \leq \cdots \leq g_{D_k}(\vec{x}) \leq \cdots \leq f(\vec{x}) \leq \cdots \leq G_{D_k}(\vec{x}) \leq G_{D_2}(\vec{x}) \leq G_{D_1}(\vec{x})$$
- pak existují funkce $h(x)$ a $H(x)$ takové, že $g_{D_k}(\vec{x}) \nearrow h(\vec{x})$ a $G_{D_k}(\vec{x}) \searrow H(\vec{x})$
- navíc $h(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \leq H(\vec{x})$ skoro všude v I
- užití Leviho věty 5.3.50
- podle jejího tvrzení platí

$$(\mathcal{L}) \int_I h(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I g_{D_k}(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = \sup_{\mathcal{D}} L(\mathcal{D}, f(\vec{x})) = L(f(\vec{x})),$$

$$(\mathcal{L}) \int_I H(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I G_{D_k}(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = \inf_{\mathcal{D}} U(\mathcal{D}, f(\vec{x})) = U(f(\vec{x}))$$

- díky existenci Riemannova integrálu se horní a dolní Riemannovy integrály rovnají, t.j. $L(f(\vec{x})) = U(f(\vec{x})) = (\mathcal{R}) \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}$
- pak ale $\int_I (H(\vec{x}) - h(\vec{x})) d\lambda(\vec{x}) = 0$, což podle věty 5.3.43 vede k ekvivalenci $H(\vec{x}) - h(\vec{x}) \sim 0$
- tedy $f(\vec{x}) = H(\vec{x}) = h(\vec{x})$ skoro všude v I
- pak ale

$$(\mathcal{L}) \int_I f(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = (\mathcal{L}) \int_I h(\vec{x}) d\lambda(\vec{x}) = (\mathcal{R}) \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}$$

5.4.3 Věta

Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ a existuje Lebesgueův integrál $(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx$. Pak

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b_-} (\mathcal{L}) \int_a^t f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a_+} (\mathcal{L}) \int_s^b f(x) dx.$$

Důkaz:

- podle lemmatu 5.3.56 existují integrály $\int_a^t$ pro jakékoli $t \in (a, b)$
- podle Heineho věty postačí pro libovolnou posloupnost $t_k \in (a, b)$ takovou, že $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = b$, dokázat, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{t_k} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- postačí uvažovat takové posloupnosti $(t_k)_{k=1}^\infty$, které jsou neklesající, protože v opačném případě bychom takovou posloupnost přeuspořádali
- pro neklesající posloupnost $(t_k)_{k=1}^\infty$ platí, že $S_k = (a, t_k) \nearrow (a, b) = S$
- podle lemmatu 5.3.62 pak $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_k} f(x) d\mu(x) = \int_S f(x) d\mu(x)$, což je ekvivalentní tvrzení

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^{t_k} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

- pro $\mu(X) = \lambda(X)$ tak dostáváme první část tvrzení
- druhá část tvrzení se dokazuje analogicky

5.4.4 Věta – o vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, $F(x)$ je funkce primitivní k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) . Nechť existuje $(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx$. Potom existují $\lim_{x \rightarrow a_+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$ (ne nutně vlastní) a platí rovnost

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x).$$

Důkaz:

- zvolíme $c \in (a, b)$
- pro $x \in (c, b)$ víme podle věty 5.4.2, že

$$(\mathcal{L}) \int_c^x f(t) dt = (\mathcal{R}) \int_c^x f(t) dt = (\mathcal{N}) \int_c^x f(t) dt = F(x) - F(c),$$

kde symbol $(\mathcal{N})$ představuje Newtonův integrál ze spojitě funkce

- podle předešlé věty platí

$$(\mathcal{L}) \int_c^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b_-} (\mathcal{L}) \int_c^x f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b_-} [F(x) - F(c)] = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - F(c)$$

- analogicky

$$(\mathcal{L}) \int_a^c f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a_+} (\mathcal{L}) \int_x^c f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a_+} [F(c) - F(x)] = - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x) + F(c)$$

- uzavíráme podle věty o aditivě Lebesgueova integrálu v mezích, že

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{L}) \int_a^c f(x) dx + (\mathcal{L}) \int_c^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x)$$

5.4.5 Důsledek

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$. Pak $f(x)$ je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když je newtonovsky integrovatelná, tj.

$$f(x) \in \mathcal{L}((a, b)) \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{N}((a, b)).$$

5.4.6 Poznámka

V následující části textu probereme možnosti záměny integračních proměnných ve vícerozměrných Lebesgueových integrálech. K tomuto účelu raději připomeneme definici regulárního zobrazení.

5.4.7 Definice

Vektorovou funkci $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ nazveme *regulární* (resp. *regulárním zobrazením*) na množině $M \subset \mathbf{E}^r$, pokud

- množina M je otevřená,
- $\vec{F}(\vec{x})$ má na M spojitou Jacobiho matici
- a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\det \left(\frac{\mathcal{D}(F_1, F_2, \dots, F_r)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)} \right) (\vec{x}) \neq 0$.

5.4.8 Věta – o substituci pro Lebesgueův integrál

Nechť $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ je prosté regulární zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbf{E}^r$ na množinu $Q \subset \mathbf{E}^r$. Pak pro libovolnou měřitelnou množinu $A \subset Q$ a libovolnou měřitelnou funkci $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ platí rovnost

$$\int_A f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{\varphi}^{-1}(A)} (f \circ \vec{\varphi})(\vec{\xi}) \left| \Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi}) \right| d\vec{\xi}, \quad (5.16)$$

kde

$$\Delta_{\vec{\varphi}}(\vec{\xi}) = \det \left(\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)} \right) (\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- viz [15] str. 77

5.4.9 Poznámka

Srovnáme nyní znění této věty s podobnou formulací vyslovenou pro Riemannův integrál. Jak již bylo uvedeno ve skriptech [6], je věta o substituci pro Lebesgueův integrál výrazně obecnější. V podstatě kromě měřitelnosti funkce, což je spíše formální předpoklad, a regularity substituce nepožaduje splnění žádných dalších vlastností. Rovnost (5.16) navíc platí jak ve smyslu hodnoty, tak i ve smyslu existence, tj. integrál napravo existuje právě tehdy, když existuje integrál nalevo, a pokud tyto integrály existují, jejich hodnoty se rovnají. To je významná přednost věty 5.4.8.

5.4.10 Věta

Nechť $I_1 \subset \mathbf{E}^r$ a $I_2 \subset \mathbf{E}^s$ jsou libovolné intervaly. Označme $I = I_1 \times I_2$. Nechť $f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(I)$. Potom platí:

- Pro skoro všechna $\vec{x} \in I_1$ je funkce $g(\vec{y}) := f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(I_2)$.
- Pro skoro všechna $\vec{y} \in I_2$ je funkce $h(\vec{x}) := f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(I_1)$.
- $G(\vec{y}) := \int_{I_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \in \mathcal{L}^*(I_2)$.
- $H(\vec{x}) := \int_{I_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \in \mathcal{L}^*(I_1)$.

Navíc také

$$\int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x} = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y}.$$

Důkaz:

- viz [15] str. 68

5.4.11 Věta – Fubiniova pro Lebesgueův integrál

Nechť $A_1 \subset \mathbf{E}^r$ a $A_2 \subset \mathbf{E}^s$ jsou libovolné λ -měřitelné množiny. Označme $A = A_1 \times A_2$. Nechť $f(\vec{z}) \in \mathcal{L}^*(A)$. Potom platí:

- Pro skoro všechna $\vec{x} \in A_1$ je funkce $g(\vec{y}) := f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(A_2)$.
- $H(\vec{x}) := \int_{A_2} g(\vec{y}) d\vec{y} \in \mathcal{L}^*(A_1)$.

Navíc také

$$\int_A f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x}. \quad (5.17)$$

Důkaz:

- označme

$$f_A(\vec{z}) = \begin{cases} f(\vec{z}) & \dots & \vec{z} \in A, \\ 0 & \dots & \vec{z} \in \mathbf{E}^{r+s} \setminus A, \end{cases}$$

- potom $f(\vec{z})$ je restrikcí funkce $f_A(\vec{z})$ z $\mathbf{E}^{r+s}$ na množinu A
- jelikož $f(\vec{z}) \in \mathcal{L}^*(A)$, tak platí $f_A(\vec{z}) \in \mathcal{L}^*(\mathbf{E}^{r+s})$
- ve větě 5.4.10 položíme $I_1 = \mathbf{E}^r$, $I_2 = \mathbf{E}^s$ a $I = \mathbf{E}^{r+s}$
- podle jejího tvrzení je $g_{A_2}(\vec{y}) := f_{\mathbf{E}^r \times A_2}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(\mathbf{E}^s)$
- jenže $g(\vec{y})$ je restrikcí funkce $g_{A_2}(\vec{y})$ z $\mathbf{E}^s$ na množinu A_2 , a proto podle věty 5.3.54 $g(\vec{y}) \in \mathcal{L}^*(A_2)$
- pro λ_r -skoro všechna $\vec{x}$ je $\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \int_{\mathbf{E}^s} f_A(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \int_{\mathbf{E}^s} f_A(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}$, kde tentokrát symbolem $\vec{y} \mapsto f_{A_2}(\vec{x}, \vec{y})$ míníme funkci

$$f_{A_2}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} f(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \vec{x} \in A_1, \vec{y} \in A_2, \\ 0 & \dots & \vec{x} \in A_1, \vec{y} \in \mathbf{E}^s \setminus A_2 \end{cases}$$

- platí proto podle věty 5.4.10, že $\int_{\mathbf{E}^s} f_A(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \in \mathcal{L}^*(A_1)$, což je ekvivalentní tvrzení, že $H(\vec{x}) := \int_{A_2} g(\vec{y}) d\vec{y} \in \mathcal{L}^*(A_1)$
- dále

$$\int_A f(\vec{z}) d\vec{z} = \int_{\mathbf{E}^{r+s}} f_A(\vec{z}) d\vec{z} = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^s} f_A(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right)_{A_1} d\vec{x} = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x},$$

kde $\left(\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right)_{A_1}$ symbolizuje restrikci funkce $\vec{x} \mapsto \int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}$ na množinu A_1

5.4.12 Poznámka

Analogicky také platí za předpokladů věty 5.4.11 rovnost

$$\int_A f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{A_2} \left(\int_{A_1} f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y}.$$

5.4.13 Poznámka

Fubiniova věta 5.4.11 je v porovnání s odpovídající větou pro Riemannův integrál výrazně silnější. Její síla spočívá především v tom, že vyžaduje pouze jediný faktický předpoklad, a sice to, aby funkce $f(\vec{z})$ měla Lebesgueův integrál (konečný nebo nekonečný). Rovnost (5.17) je totiž splněna, i pokud je jedna ze stran rovna plus nebo minus nekonečnu.

5.4.14 Příklad

Cílem tohoto příkladu je vypočít, čemu se rovná suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ve skriptech [5] v příkladě 2.3.27 (str. 59) bylo dokázáno, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

a ve tvrzení 3.2.28 (str. 79) ve stejných skriptech byla dokázána rovnost

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Pokud nyní vypočteme hodnotu právě zmíněného integrálu, úloha je fakticky vyřešena. Užijme dvojrozměrného integrálu

$$\int_0^{\infty} \int_0^1 \frac{y}{(y^2+1)(y^2x^2+1)} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{\arctg(y)}{1+y^2} dy = \left[\frac{\arctg^2(y)}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (5.18)$$

Pokusíme-li se nyní řešit integrál (5.18) v opačném integračním pořadí, je třeba zlomek

$$\frac{y}{(y^2+1)(y^2x^2+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{y^2x^2+1}$$

rozložit na parciální zlomky. Zatímco konstanty B a D musejí být při dodržení deklarované rovnosti nulové, pro konstanty A a C platí

$$A = \frac{1}{1-x^2}, \quad C = -\frac{x^2}{1-x^2}.$$

Pak tedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{y}{(y^2+1)(y^2x^2+1)} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{1}{2(x^2-1)} \left(\frac{2x^2y}{x^2y^2+1} - \frac{2y}{y^2+1} \right) dy dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2(x^2-1)} \left[\ln \left(\frac{x^2y^2+1}{y^2+1} \right) \right]_0^{\infty} dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx. \end{aligned}$$

Z Fubiniovy věty pro Lebesgueův integrál ale plyne, že

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.4.15 Příklad

Vypočtěme klasický Lebesgueův integrál $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} d(x, y)$ pro $a > 0$. Funkce $g(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$ je nezáporná na celém $\mathbb{R}$, tedy jistě $g(x, y) \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^2)$. Podle věty o substituci lze tedy k výpočtu užít polárních souřadnic $x = \varrho \cos(\varphi)$, $y = \varrho \sin(\varphi)$, které reprezentují na množině $M = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ regulární transformaci. Její jacobíán je roven $\Delta(\varrho, \varphi) = \varrho$. Proto podle 5.4.8 platí

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_M e^{-a\varrho^2} \Delta(\varrho, \varphi) d(\varrho, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varrho e^{-a\varrho^2} d\varphi d\varrho.$$

S výhodou v této fázi výpočtu využijeme věty 5.4.19 o separabilitě. Podle ní:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varrho e^{-a\varrho^2} d\varphi d\varrho = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \cdot \int_0^\infty \varrho e^{-a\varrho^2} d\varrho = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-a\varrho^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

Platí tedy, že

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{a}. \quad (5.19)$$

5.4.16 Poznámka

Z celé konstrukce Lebesgueova integrálu naprosto zřetelně vyčnívá fakt, že třída funkcí $\mathcal{L}(E)$ je podstatně rozsáhlejší než třída $\mathcal{R}(E)$. V drtivé většině příkladů, pokud už tedy neplatí rovnost $(\mathcal{R}) \int_E f(\vec{x}) d\vec{x} = (\mathcal{L}) \int_E f(\vec{x}) d\vec{x}$, totiž existuje Lebesgueův integrál, i když Riemannův neexistuje. Není např. těžké ukázat, že funkce

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \dots & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & \dots & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá Riemannův integrál na $E = \langle 1, 11 \rangle$, ale Lebesgueův integrál existuje triviálně podle věty o ekvivalentních funkcích. Existují ale i řídké případy funkcí ležících v $\mathcal{R}(E) \setminus \mathcal{L}(E)$. O dvou z nich pojednají poznámky 5.4.17 a 5.4.18.

5.4.17 Poznámka

Mezi jednoduché ukázky funkcí, které mají Riemannův integrál a nemají integrál Lebesgueův, patří již diskutovaná funkce

$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{pro} \quad x \in A_n = \langle n-1, n \rangle.$$

Jak již bylo ukázáno v příkladě 5.3.36, Lebesgueův integrál tato funkce nemá. Ukážeme, že Riemannův integrál (zobecněný) existuje. Zřejmě

$$(\mathcal{R}) \int_{n-1}^n f(x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pak z linearit Riemannova integrálu plyne rovnost

$$(\mathcal{R}) \int_0^m f(x) dx = \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

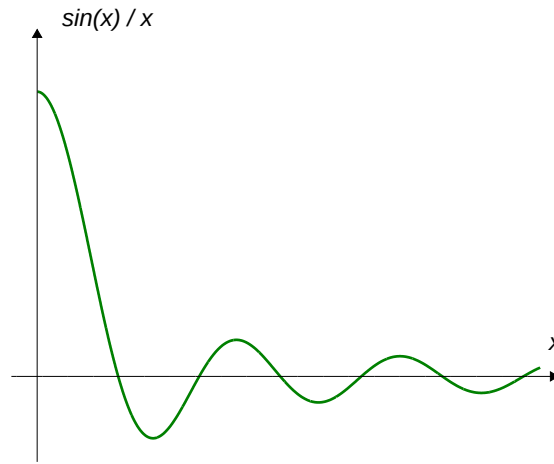
Chceme-li rozšířit definici Riemannova integrálu na neomezenou množinu $\langle 0, \infty \rangle$, užijeme jediný smysluplný způsob, a sice

$$(\mathcal{R}) \int_0^\infty f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{R}) \int_0^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

5.4.18 Poznámka

Podobným příkladem lebesgueovsky neintegrovatelné a riemannovsky integrovatelné funkce je také

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \dots & x > 0 \\ 1 & \dots & x = 0. \end{cases}$$

**Obrázek 5.14**Graf funkce $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Pokusme se o vyčíslení integrálu

$$(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Podle třetího bodu konstrukce Lebesgueova integrálu je nejprve třeba vyčíslit integrály $(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^+(x) dx$ a $(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^-(x) dx$. Snadno se lze přesvědčit, že

$$(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^+(x) dx = (\mathcal{L}) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}) \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Dokážeme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}) \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \infty,$$

a tudíž že $(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^+(x) dx = \infty$. Vcelku jednoduše lze prokázat, že např.

$$(\mathcal{L}) \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx > \mu_2(T),$$

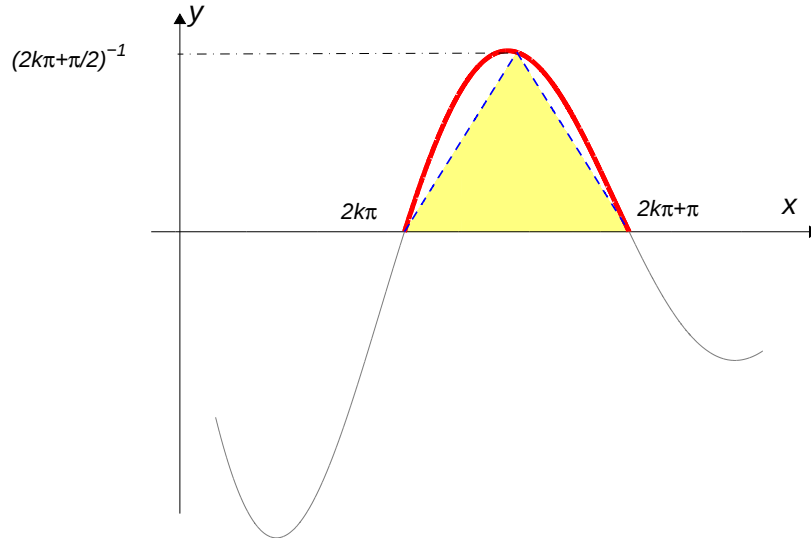
kde T je trojúhelník o vrcholech $(2\pi k, 0)$, $(2\pi k + \pi, 0)$ a $(2\pi k + \pi/2, (2\pi k + \pi/2)^{-1})$ (viz šedá plocha na obrázku níže) a $\mu_2(T)$ jeho plošná míra. Tudíž

$$\mu_2(T) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi k + \pi/2} = \frac{1}{4k+1}.$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k+1} = \infty$, tj. celková plocha zkoumaných trojúhelníků T je nekonečná, je nutně také $(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^+(x) dx = \infty$. Podobně lze dokázat, že $(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^-(x) dx = \infty$. Vzhledem k těmto skutečnostem Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h(x) dx := (\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^+(x) dx - (\mathcal{L}) \int_0^{\infty} h^-(x) dx$$

neexistuje.



Obrázek 5.15

 K výpočtu Lebesgueova integrálu $(\mathcal{L}) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$.

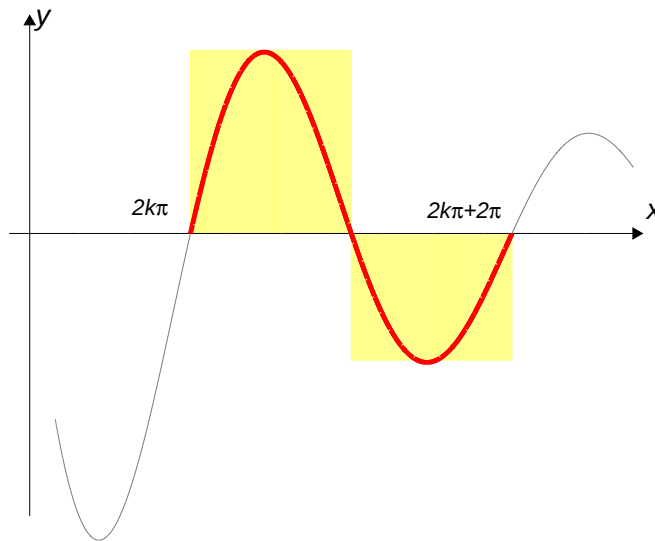
Analogickým přístupem vyčíslíme integrál Riemannův (zobecněný). Tentokrát vyjdeme ze srovnání

$$(\mathcal{R}) \int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx < \mu_2(U) - \mu_2(V), \quad (5.20)$$

U je obdélník o vrcholech $(2k\pi, 0)$, $(2k\pi + \pi, 0)$, $(2k\pi, (2k\pi + \pi/2)^{-1})$, $(2k\pi + \pi, (2k\pi + \pi/2)^{-1})$ a V je obdélník o vrcholech $(2k\pi + \pi, 0)$, $(2k\pi + 2\pi, 0)$, $(2k\pi + \pi, -(2k\pi + 3\pi/2)^{-1})$, $(2k\pi + 2\pi, -(2k\pi + 3\pi/2)^{-1})$. Obě plochy jsou vyobrazeny šedě na obrázku níže. Vzhledem ke tvaru obdélníků U a V snadno vypočteme, že

$$\mu_2(U) - \mu_2(V) = \frac{2}{4k+1} - \frac{2}{4k+3} = \frac{4}{(4k+1)(4k+3)}.$$

Jelikož $\sum_{k=1}^\infty \frac{4}{(4k+1)(4k+3)} \in \mathbf{R}$, neboť citovaná číselná řada konverguje (např. z integrálního kritéria), je celková plocha $\sum_{k=1}^\infty (\mu_2(U) - \mu_2(V))$ konečná. Díky nerovnosti (5.20) tedy platí, že integrál $(\mathcal{R}) \int_0^\infty h(x) dx$ konverguje.



Obrázek 5.16

 K výpočtu Riemannova integrálu $(\mathcal{R}) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$.

5.4.19 Věta – o separabilitě Lebesgueova integrálu

Nechť $I_1, I_2, \dots, I_r$ jsou libovolné jednorozměrné intervaly. Označme $I = \times_{k=1}^r I_k$ kartézský součin těchto intervalů. Nechť $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(I)$ a existují funkce $\ell_k(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tak, že pro skoro všechna $\vec{x} \in I$ platí $f(\vec{x}) = \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r)$. Pak platí rovnost

$$\int_I f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \prod_{k=1}^r \int_{I_k} \ell_k(x_k) \, dx_k.$$

Důkaz:

- jelikož $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(I)$, bude možno při důkazu užít Fubiniovy věty
- podle ní

$$\begin{aligned} \int_I f(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{I_1} \left(\int_{\times_{k=2}^r I_k} \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r) \, d\lambda_{r-1}(x_2, x_3, \dots, x_r) \right) dx_1 = \\ &= \int_{I_1} \ell_1(x_1) \left(\int_{\times_{k=2}^r I_k} \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r) \, d\lambda_{r-1}(x_2, x_3, \dots, x_r) \right) dx_1 = \\ &= \int_{\times_{k=2}^r I_k} \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r) \, d\lambda_{r-1}(x_2, x_3, \dots, x_r) \cdot \int_{I_1} \ell_1(x_1) \, dx_1 = \\ &= \int_{I_2} \left(\int_{\times_{k=3}^r I_k} \ell_2(x_2) \ell_3(x_3) \dots \ell_r(x_r) \, d\lambda_{r-2}(x_3, x_4, \dots, x_r) \right) dx_2 \cdot \int_{I_1} \ell_1(x_1) \, dx_1 = \\ &= \int_{\times_{k=3}^r I_k} \ell_3(x_3) \dots \ell_r(x_r) \, d\lambda_{r-2}(x_3, \dots, x_r) \cdot \int_{I_2} \ell_2(x_2) \, dx_2 \cdot \int_{I_1} \ell_1(x_1) \, dx_1 = \dots \end{aligned}$$

- opakovaným postupem pak docílíme prokázání dokazovaného tvrzení

5.4.20 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ je *separabilní na G* , existují-li funkce $\ell_k(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ($k \in \hat{r}$) tak, že pro skoro všechna $\vec{x} \in G$ platí $f(\vec{x}) = \ell_1(x_1) \cdot \ell_2(x_2) \dots \ell_r(x_r)$.

5.4.21 Věta – integrální formule pro Lebesgueovu míru

Nechť $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_r(x_r)$ jsou vytvářející funkce Lebesgueovy r -rozměrné míry $\mu_r(X) : \mathcal{M}_{\mu_r} \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$ a nechť jsou všechny spojitě diferencovatelné na $\mathbf{R}$. Nechť dále $A \in \mathcal{M}_{\mu_r}$. Pak

$$\mu_r(A) = (\mathcal{L}) \int_A \Upsilon_{\mu}(\vec{x}) \, d\vec{x},$$

kde

$$\Upsilon_{\mu}(\vec{x}) := \prod_{i=1}^r \frac{d\varphi_i}{dx_i}. \quad (5.21)$$

Důkaz:

- důkaz bude kopírovat etapy konstrukce Lebesgueovy míry
- v první z nich dokážeme tvrzení pro neprázdné množiny z $\mathcal{H}_r$
- pro prázdnou množinu plyne dokazovaná rovnost z definice $(\mathcal{L}) \int_0 g(\vec{x}) \, d\vec{x} := 0$
- nechť tedy $H \in \mathcal{H}_r$, tj. $H = \times_{k=1}^r \langle \alpha_k, \beta_k \rangle$
- snadno nahlédneme, že jsou splněny předpoklady věty o separabilitě 5.4.19
- podle ní

$$\int_H \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} \, d\vec{x} = \prod_{k=1}^r \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\varphi_k}{dx_k} \, dx_k = \prod_{k=1}^r [\varphi_k(x_k)]_{\alpha_k}^{\beta_k} = F(H) = \mu_{\sigma}(H) = \mu(H)$$

- pro druhou etapu důkazu vezměme libovolnou množinu $S \in \mathcal{S}_r$
- pro ni existují množiny $H_1, H_2, \dots \in \mathcal{H}_r$ tak, že $S = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} H_\ell$
- pak ale (při aplikaci první části důkazu s využitím σ -aditivity Lebesgueova integrálu)

$$\int_S \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \int_{\bigcup_{\ell=1}^{\infty} H_\ell} \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{H_\ell} \prod_{k=1}^r \frac{d\varphi_k}{dx_k} d\vec{x} = \sum_{\ell=1}^{\infty} F(H_\ell) = \mu_\sigma(S) = \mu(S)$$

- necht' je nakonec množina $A \in \mathcal{M}_{\mu_r}$ zvolena libovolně
- jelikož je míra $\mu(X)$ zavedena jako míra externí k míře $\mu_\sigma(X) : \mathcal{S}_r \mapsto \mathbf{R}^{\otimes}$, ke každému $\varepsilon > 0$ jistě musí existovat množina $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_r$ tak, že $\mu_\sigma(S_\varepsilon) - \mu(A) < \varepsilon$
- položíme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ a uvědomme si, že $\mu_\sigma(S_\varepsilon) = \mu(S_\varepsilon)$
- pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ jistě platí

$$0 \leq \mu_\sigma(S_n) - \mu(A) < \frac{1}{n}$$

- zjevně $S_n \searrow A$ (viz definice 5.3.63), a jsou tudíž naplněny předpoklady lemmatu 5.3.64
- jelikož $S_n \in \mathcal{S}_r$, platí podle druhé části důkazu vztah

$$0 \leq \int_{S_n} \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\vec{x} - \mu(A) < \frac{1}{n}$$

- aplikace limity $\lim_{n \rightarrow \infty}$ pak vede k rovnosti $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n} \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\vec{x} = \int_A \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\vec{x}$, čímž je důkaz uzavřen

5.4.22 Důsledek – věta o vztahu integrálu a míry

Necht' $A \in \mathcal{M}_\lambda \subset 2^{\mathbf{E}^r}$. Pak platí

$$\lambda_r(A) = (\mathcal{L}) \int_A 1 d\lambda_r(\vec{x}).$$

5.4.23 Příklad

Necht' jsou pevně zvoleny parametry $a, b, c > 0$ a zadána množina

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Necht' $\mu(X)$ je míra generovaná vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = x^3$, $\psi(y) = y$ a $\gamma(z) = z^2 \operatorname{sgn}(z)$. Pokusme se s pomocí věty 5.4.21 vypočítat $\mu(A)$. Jelikož je množina A uzavřená, patří podle věty 4.2.17 do $\mathcal{M}_\mu$. Navíc

$$\frac{d\varphi}{dx} = 3x^2, \quad \frac{d\psi}{dy} = 1, \quad \frac{d\gamma}{dz} = 2|z|.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} 6x^2|z| dz dy dx = \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 6c^2 x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} x = a\varrho \cos(\varphi) & \Delta = ab\varrho \\ y = b\varrho \sin(\varphi) & dx dy = ab\varrho d\varrho d\varphi \end{array} \right| = 6a^3bc^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^3 \cos^2(\varphi)(1 - \varrho^2) d\varrho d\varphi = \\ &= 6a^3bc^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \int_0^1 \varrho^3(1 - \varrho^2) d\varrho = \left| \begin{array}{l} u = 1 - \varrho^2 \\ du = -2\varrho d\varrho \end{array} \right| = 3\pi a^3bc^2 \int_0^1 (1 - u)u du = \\ &= 3\pi a^3bc^2 \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi a^3bc^2. \end{aligned}$$

5.4.24 Věta – o převodu abstraktního Lebesgueova integrálu na klasický

Nechť $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_r(x_r)$ jsou vytvořující funkce Lebesgueovy r -rozměrné míry $\mu_r(X) : \mathcal{M}_{\mu_r} \mapsto \mathbf{R}^*$ a nechť jsou všechny spojitě diferencovatelné na $\mathbf{R}$. Nechť je dále dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(A, \mu_r(X))$, kde $A \in \mathcal{M}_{\mu_r}$. Pak platí

$$(\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) d\mu_r(\vec{x}) = (\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x}),$$

kde platí (5.21).

Důkaz:

- uvažujme nejprve případ, kdy $f(\vec{x}) \geq 0$
- jelikož $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(A, \mu_r(X))$, jsou naplněny předpoklady Fubiniovy věty 5.4.11
- označme $B = A \times \langle 0, f(\vec{x}) \rangle$ a v souladu s poznámkou 5.3.1 zvolme za vytvořující funkci $\psi_{r+1}(x_{r+1}) = x_{r+1}$
- z Fubiniovy věty vyplývá, že $\int_A f(\vec{x}) d\mu_r(\vec{x}) = \int_A \int_0^{f(\vec{x})} 1 d\mu_{r+1}(\vec{x}) = \int_B 1 d\mu_{r+1}(\vec{x})$
- z věty 5.4.21 ale vyplývá, že $\int_B 1 d\mu_{r+1}(\vec{x}) = \int_B \Upsilon_\mu(\vec{x}) \frac{d\psi}{dx_{r+1}} d\lambda_{r+1}(\vec{x}) = \int_B \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_{r+1}(\vec{x}) = \int_A \int_0^{f(\vec{x})} \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_{r+1}(y) d\lambda_r(\vec{x})$
- zpětnou aplikací Fubiniovy věty tak dostáváme tvrzení věty
- je-li $f(\vec{x})$ libovolná funkce, pro niž abstraktní Lebesgueův integrál existuje, pak také dolní $f^-(\vec{x})$ a horní $f^+(\vec{x})$ řezy existují a náležejí do $\mathcal{L}^*(A, \mu_r(X))$
- lze na ně tedy aplikovat první část důkazu
- proto

$$\begin{aligned} \int_A f(\vec{x}) d\mu_r(\vec{x}) &= \int_A f^+(\vec{x}) d\mu_r(\vec{x}) - \int_A f^-(\vec{x}) d\mu_r(\vec{x}) = \\ &= \int_A f^+(\vec{x}) \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x}) - \int_A f^-(\vec{x}) \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x}) = \int_A f(\vec{x}) \Upsilon_\mu(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x}) \end{aligned}$$

- to kompletuje proceduru důkazu

5.4.25 Věta – geometrický význam Lebesgueova integrálu

Nechť $A \subset \mathbf{E}^r$ je λ_r -měřitelná a funkce $f(\vec{x}) \geq 0$ je spojitá a měřitelná v množině A . Nechť

$$G := \{(\vec{x}, y) \in \mathbf{E}^{r+1} : \vec{x} \in A \wedge 0 \leq y \leq f(\vec{x})\}.$$

Pak platí rovnost

$$(\mathcal{L}) \int_A f(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x}) = \lambda_{r+1}(G).$$

Důkaz:

- důkaz provedeme pouze pro případ, že A je buď otevřená nebo uzavřená
- potom totiž i $A \times \mathbf{R}$ je buď otevřená nebo uzavřená
- obecně bychom museli poměrně složitě dokazovat, že množina $A \times \mathbf{R}$ je měřitelná
- za daných předpokladů je tedy množina G měřitelná, přesněji λ_{r+1} -měřitelná, neboť bylo dokázáno, že jak uzavřené tak otevřené množiny vždy do $\mathcal{M}_\lambda$ patří
- navíc také funkce $f(\vec{x})$ je při daných předpokladech podle důsledku 5.3.29 ze systému $\mathcal{Z}_\lambda^+(A)$, a má tudíž Lebesgueův integrál, což umožňuje aplikaci Fubiniovy věty 5.4.11
- užijeme nyní vztahu $\lambda_{r+1}(G) = \int_G 1 d\lambda_{r+1}(x)$ ozvozeného v rámci věty o vztahu integrálu a míry 5.4.22
- aplikujeme-li tvrzení Fubiniovy věty, dostáváme, že

$$\lambda_{r+1}(G) = \int_A \int_0^{f(\vec{x})} d\lambda_1(y) d\lambda_r(\vec{x}) = \int_A f(\vec{x}) d\lambda_r(\vec{x})$$

- tím je platnost věty prokázána

Kapitola 6

Lebesgueův integrál s reálným parametrem

V nadcházejícím oddíle těchto skript se budeme zabírat otázkou výpočtu lebesgueovských integrálů z funkcí, které závisí na reálném parametru $\alpha \in \mathbf{R}$. Takové integrály budou obecně tvaru

$$F(\alpha) = (\mathcal{L}) \int_E f(x, \alpha) dx,$$

kde funkce $f(x, \alpha)$ je definována na $E \times P$, tj. $x \in E$ a $\alpha \in P \subset \mathbf{R}$. Teorie integrací s parametrizovanými integrandy je v rámci matematické analýzy i navazujících partií (např. rovnic matematické fyziky ve skriptech [7]) extrémně důležitá. Nejenže má velmi cenné praktické aplikace při řešení konkrétních integrálů, které jsou klasickými prostředky obtížně řešitelné nebo dokonce neřešitelné, ale slouží také jako nutný základ teorie zobecněných funkcí (tzv. distribucí).

6.1 Limita a spojitost integrálu s parametrem

První z vlastností, které budeme v rámci kapitoly zkoumat, je možnost záměny pořadí integrace a limitního přechodu. Tato důležitá vlastnost sehraje zásadní roli při výpočtech různých typů integrálů. Nejedná se přitom zcela jistě o banální problematiku. Ačkoliv např. snadno nahlédneme, že

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{a} = 1, \quad \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow 1} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

a platí tedy, že $\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow 1} e^{-ax} dx$, situace se záměnou ve výrazu $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_S (b+1)x^b dx$, kde $S = (0, 1)$, bude komplikovanější. Na jedné straně

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_S (b+1)x^b dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [x^{b+1}]_0^1 = 1,$$

ale na straně druhé:

$$\int_S \lim_{b \rightarrow \infty} (b+1)x^b dx = \int_S 0 dx = 0.$$

Záměna tedy možná není. Proto má smysl vyslovit a dokázat větu o limitě integrálu s parametrem.

6.1.1 Úmluva

V celé kapitole předpokládáme, že je dán prostor s úplnou mírou $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$, která je navíc σ -konečná.

6.1.2 Věta – limita integrálu s parametrem

Nechť je dána množina $P \subset \mathbf{R}$ a její hromadný bod $\beta \in \text{der}(P)$. Nechť funkce $f(x, \alpha)$ definovaná na $E \times P$ splňuje následující předpoklady.

- Pro skoro všechna $x \in E$ existuje

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in P} f(x, \alpha) =: \varphi(x).$$

- Pro každé $\alpha \in P \setminus \{\beta\}$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná.

- Existuje funkce $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ taková, že pro všechna $\alpha \in P \setminus \{\beta\}$ platí $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ skoro všude v E .

Pak platí rovnost

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in P} \int_E f(x, \alpha) d\mu(x) = \int_E \varphi(x) d\mu(x).$$

Důkaz:

- podle Heineho věty stačí dokázat, že pro libovolnou posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ čísel z P takovou, že všechna splňují nerovnost $\alpha_n \neq \beta$ a zároveň $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \beta$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x, \alpha_n) d\mu(x) = \int_E \varphi(x) d\mu(x)$$

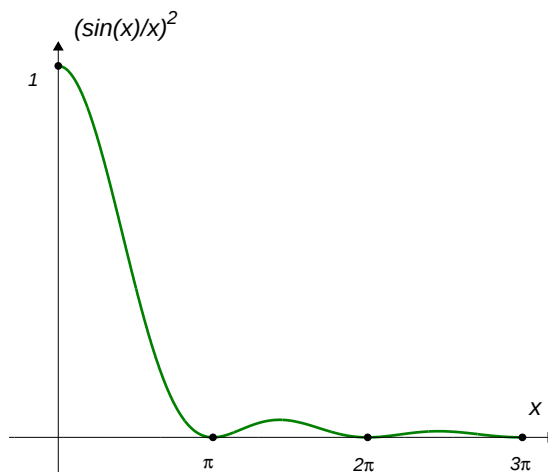
- to ale plyne bezprostředně z Lebesgueovy věty 5.3.52, neboť existence integrabilní majoranty a měřitelnost funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ jsou zaručeny v předpokladech právě dokazované věty

6.1.3 Příklad

Užijeme nyní znění předcházející věty k výpočtu integrálu

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(bx)}{x} \right)^2 dx. \quad (6.1)$$

Snadno ukážeme, že integrand je na intervalu $(0, \infty)$ nezávisle na parametru $b \in \mathbf{R}$ spojitou funkcí (viz obrázek). Podotýkáme, že v nule byla funkce dodefinována jedničkou.



Obrázek 6.17
Graf funkce $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

Uvedený integrál konverguje, neboť konvergence na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je zřejmá a na intervalu $(1, \infty)$ je integrand omezen funkcí $1/x^2$, pro kterou platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Ze srovnávacího kritéria pro určité integrály tedy platí, že integrál (6.1) též konverguje. Jak bude vypočteno v příkladě 6.2.2, platí

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} dx = b \operatorname{arctg} \left(\frac{2b}{a} \right) - \frac{a}{4} \ln \left(1 + 4 \frac{b^2}{a^2} \right).$$

V předešlé větě zvolme $E = (0, \infty)$ a za množinu, jíž probíhá parametr, vezmeme $P = \langle 0, \infty \rangle$. Pak $\beta = 0$ je zřejmě hromadným bodem množiny P . Dále položíme $f(x, \alpha) = e^{-\alpha x} x^{-2} \sin^2(bx)$. Nyní ověřme předpoklady věty. Pro skoro všechna $x \in (0, \infty)$ existuje

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0_+} e^{-\alpha x} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} = \frac{\sin^2(bx)}{x^2}$$

a pro libovolný parametr $\alpha \in (0, \infty)$ je funkce $f(x, \alpha)$ měřitelná. Nyní je podle třetího předpokladu věty nutno nalézt lebesgueovskými integrovatelnou majorantu $g(x)$, jež je nezávislá na parametru α . Jelikož pro skoro všechna $x \in (0, \infty)$ platí nerovnost

$$e^{-\alpha x} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} \leq \frac{\sin^2(bx)}{x^2}$$

a funkce $x^{-2} \sin^2(bx)$ je podle předchozího integrovatelná na $(0, \infty)$, jedná se právě o hledanou majorantní funkci $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Při splnění předpokladů tudíž platí i tvrzení, tedy

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(bx)}{x} \right)^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \left(b \operatorname{arctg} \left(\frac{2b}{\alpha} \right) - \frac{\alpha}{4} \ln \left(1 + 4 \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \right) = \frac{\pi |b|}{2}.$$

6.1.4 Poznámka

Tak jako nebyla v přecházející části textu stoprocentně garantována možnost prohození limity a integrálu, ani spojitost funkce $F(\alpha) = (\mathcal{L}) \int_E f(x, \alpha) dx$ nemusí být automatickou vlastností. A to dokonce ani v případě, že sám integrand $f(x, \alpha)$ je spojitou funkcí. Uvažme např. variantu, kdy $g(a) = e^{-a^2(x^2+y^2)}$. Jedná se jistě o funkci spojitou pro na celém $\mathbf{R}$ pro skoro všechny dvojice (x, y) . Jelikož ale podle vztahu (5.19) platí rovnost

$$F(a) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-a^2(x^2+y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{a^2}, \quad (a \neq 0),$$

není funkce $F(a)$ spojitá na $\mathbf{R}$, neboť v bodě $a = 0$ nabývá nekonečné hodnoty. Proto má smysl se garancí spojitosti funkce $F(a)$ zabírat obecně tak, jak nabídne následující věta.

6.1.5 Věta – spojitost integrálu s parametrem

Nechť je dána množina $P \subset \mathbf{R}$ a funkce $f(x, \alpha)$ definovaná na $E \times P$ splňuje následující předpoklady.

- Pro skoro všechna $x \in E$ je funkce $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá na P .
- Pro každé $\alpha \in P$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná.
- Existuje funkce $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ taková, že pro všechna $\alpha \in P$ je nerovnost $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ splněna skoro všude v E .

Potom je funkce $\alpha \mapsto \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$ spojitá na P .

Důkaz:

- důkaz této věty převedeme na větu 6.1.2 o limitě integrálu s parametrem
- spojitost v bodě $\beta \in P$ totiž značí, že pro funkci $F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$ v bodě β existuje limita $\lim_{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in P} F(\alpha)$ a rovná se funkční hodnotě $F(\beta)$
- existenci limity $\lim_{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in P} F(\alpha)$ i rovnost $\lim_{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in P} F(\alpha) = F(\beta)$ ale garantuje právě věta 6.1.2

6.1.6 Příklad

Ukažme, že funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$$

je spojitá. Ve větě 6.1.5 položíme $P = \mathbf{R}$ a za integrační množinu zvolme $E = \mathbf{R}^+$. Funkce

$$a \mapsto \frac{\cos(ax)}{1+x^2}$$

je spojitá pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a pro všechny hodnoty parametru a je funkce $x \mapsto (1+x^2)^{-1} \cos(ax)$ měřitelná, neboť je spojitá. Dále pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a všechna $x \in \mathbf{R}$ platí

$$\left| \frac{\cos(ax)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^+, \lambda),$$

což kompletuje ověření předpokladů minulé věty. Funkce $F(a)$ je tedy spojitá, což značí, že původní integrál je spojitou funkcí parametru a .

6.1.7 Příklad

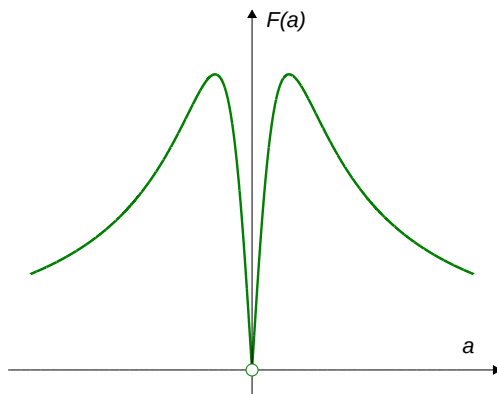
Příkladem nespojitého integrálu s parametrem je např. integrál

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-|a|x} \cos(x) dx = \frac{|a|}{a^2 + 1},$$

jehož hodnota byla pro $a \neq 0$ vypočtena v rámci cvičení 8.65. Ačkoliv sama funkce $F(a)$ má v nule obě jednostranné limity

$$\lim_{a \rightarrow 0_-} F(a) = \lim_{a \rightarrow 0_+} F(a) = 0,$$

samotná hodnota $F(0)$ neexistuje, neboť pro $a = 0$ studovaný integrál podle cvičení 8.120 diverguje. Tedy funkce $F(a)$ je na $\mathbf{R}$ nespojitá (viz obrázek).



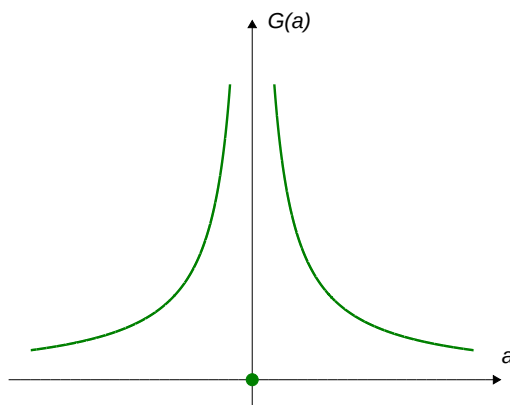
Obrázek 6.18
Graf funkce $F(a)$.

Ve větě 6.1.5 totiž není splněn požadavek existence integrabilní majoranty $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$, jež je nezávislá na parametru a . Kdyby probíhal parametr a pouze množinu např. $\langle 1, \infty \rangle$, pak by onou integrabilní majorantou k integrandu $e^{-ax} \cos(bx)$ byla funkce e^{-x} , která je jednak nezávislá na parametru a a jednak na množině $(0, \infty)$ zjevně konverguje. Tudíž funkce $F(a)$ je na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ spojitá.

Podobným případem je funkce

$$G(a) = \int_0^{\infty} e^{-|a|x} \sin(|a|x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2|a|} & \dots & a \neq 0, \\ 0 & \dots & a = 0, \end{cases}$$

kdy se obě jednostranné limity $\lim_{a \rightarrow 0_-} G(a)$ a $\lim_{a \rightarrow 0_+} G(a)$ rovnají plus nekonečno, přestože funkční hodnota $G(0)$ se rovná nule (viz obrázek níže).



Obrázek 6.19
Graf funkce $G(a)$.

6.2 Derivace integrálu s parametrem

Je-li některá z vlastností funkce $F(\alpha) = (\mathcal{L}) \int_E f(x, \alpha) dx$ pro praktické aplikace nejzásadnější, pak je to její diferencovatelnost. Jsme-li totiž oprávněni užít rovnost

$$\frac{dF}{d\alpha} = (\mathcal{L}) \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx,$$

lze toho využít k výpočtům celé řady komplikovanějších integrálů, popř. k vyčíslení celé spočetné třídy parametrizovatelných integrálů. Jako příklad nám poslouží integrál $\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$, vyčíslený pro $a > 0$. Bude-li možno tuto rovnost derivovat, pak opakovanými derivacemi dospějeme k rovnosti

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{d^n}{da^n} \left(\frac{1}{a} \right),$$

resp.

$$\int_0^\infty \frac{d^n}{da^n} (e^{-ax}) dx = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}},$$

odkud pak přímo plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

6.2.1 Věta – derivace integrálu podle parametru

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a funkce $f(x, \alpha)$ definovaná na $E \times I$ splňuje následující předpoklady.

- Integrál $F(\alpha) := \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$ konverguje alespoň pro jedno $\alpha \in I$.
- Pro každé $\alpha \in I$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná.
- Existuje funkce $g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ taková, že pro skoro všechna $x \in E$ a všechna $\alpha \in I$ platí

$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x).$$

Pak pro všechna $\alpha \in I$ integrál $F(\alpha)$ konverguje a platí

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu(x).$$

Důkaz:

- podle předpokladů existuje μ -nulová množina $M \subset E$ tak, že pro každé $x \in E \setminus M$ a všechna $\alpha \in I$ platí

$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x)$$

- vezměme $a, b \in I$ libovolně, avšak s nutným omezením $a \neq b$
- pak pro každé $x \in E \setminus M$ podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$|f(x, a) - f(x, b)| = |a - b| \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, c) \right| \leq |a - b| g(x)$$

- tudíž funkce

$$x \mapsto \left| \frac{f(x, a) - f(x, b)}{a - b} \right|$$

je podle srovnávacího kritéria 5.3.49 lebesgueovsKY integrovatelná, neboť funkce $g(x)$ je její integrovatelná majorantou nezávislou na parametru

- zamýšlíme-li vyčíslit derivaci $\frac{dF}{d\alpha}$, je třeba uvažovat podíl $\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}$, pro který z linearity Lebesgueova integrálu platí

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_E \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h} d\mu(x)$$

- chceme-li užít limitní přechod $h \rightarrow 0$, bude nutno použít větu 6.1.2 o limitě integrálu s parametrem
- její předpoklady jsou naplněny, neboť $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ a existence parciální derivace $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ je implicitně garantována třetím předpokladem naší věty
- také měřitelnost funkce $x \mapsto \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}$ je snadným důsledkem měřitelnosti funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$
- nakonec také existence integrabilní majoranty k integrandu $\frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}$ byla prokázána výše, neboť zde bylo ověřeno, že

$$\left| \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h} \right| \leq g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$$

- lze tedy užít tvrzení věty 6.1.2, podle níž

$$\frac{dF}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_E \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

- tím je důkaz věty završen

6.2.2 Příklad

Hledejme hodnotu integrálu

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} dx$$

pro nezáporné a a libovolný parametr $b \in \mathbf{R}$. Snahou je derivovat zadaný integrál podle b . Jednou známou hodnotou integrálu $I(b)$ je $I(0) = 0$. Jelikož je integrand zcela jistě měřitelný, zbývá nalézt integrabilní majorantu (nezávislou na parametru, podle něhož se derivuje) k absolutní hodnotě zderivovaného integrandu $|e^{-ax} \sin(2bx)/x|$. Jelikož na množině $E = (0, \infty)$, přes níž je integrováno, platí nerovnost $|\sin(bx)| \leq |bx|$, lze snadno nahlédnout, že

$$|e^{-ax} \sin(2bx)/x| \leq 2|b|e^{-ax}.$$

Funkce $h(x) = 2be^{-ax}$ ovšem stále ještě závisí na parametru b , tudíž není onou hledanou majorantou. Zvolme $b_0 \in \mathbf{R}^+$ libovolně velké. Pak pro všechna $b \in (-b_0, b_0)$ platí, že

$$|e^{-ax} \sin(2bx)/x| \leq 2b_0 e^{-ax} =: g(x).$$

Funkce $g(x) = 2b_0 e^{-ax}$ již splňuje požadavky věty 6.2.1, neboť nezávisí na b a navíc

$$\int_0^\infty g(x) dx = 2 \frac{b_0}{a}.$$

Pak je podle věty 6.2.1 možno původní integrál derivovat podle parametru b , přičemž platí

$$J := \frac{dI}{db} = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(2bx)}{x} dx.$$

Postup opakujeme a na závěr užijeme výsledku cvičení 8.65:

$$\frac{d^2 I}{db^2} = \frac{dJ}{db} = \begin{cases} J(0) = 0 \\ |2e^{-ax} \cos(2bx)| \leq 2e^{-ax} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^+, \lambda) \end{cases} = \int_0^\infty 2e^{-ax} \cos(2bx) dx = \frac{2a}{a^2 + 4b^2}.$$

Nyní invertujeme postup. K získání hodnoty $J(b)$ integrujeme

$$J(b) = \int \frac{2a}{a^2 + 4b^2} db = \arctg\left(\frac{2b}{a}\right) + C.$$

Integrační konstantu C detekujeme jako nulovou, neboť má platit rovnost $J(0) = 0$. Dále

$$I(b) = \int \operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) db = b \operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) - \frac{a}{4} \ln(a^2 + 4b^2) + \widetilde{C},$$

kde $\widetilde{C} = a \ln(a)/2$, neboť $I(0) = 0$. Uzavíráme tedy, že

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2(bx)}{x^2} dx = b \operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) - \frac{a}{4} \ln\left(1 + 4 \frac{b^2}{a^2}\right).$$

6.2.3 Příklad

Další možnost, jak užít tvrzení věty 6.2.1, bude demonstrována na příkladě výpočtu integrálu

$$\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

Užijeme výsledku cvičení 8.65, kde bude dokázáno, že

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Snahou je tento vztah derivovat podle parametru b . Zatímco pravou stranu lze derivovat snadno, před derivací strany levé bude třeba ověřit předpoklady věty 6.2.1. První dva předpoklady jsou splněny triviálně. Dále

$$\left| \frac{d}{db} (e^{-ax} \cos(bx)) \right| = |-x e^{-ax} \sin(bx)| \leq x e^{-ax} \in \mathcal{L}(0, \infty).$$

Funkce $x \mapsto x e^{-ax}$ je skutečně hledanou majorantou nezávislou na parametru b , neboť $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$. Za daných předpokladů tedy platí

$$\frac{dI}{db} = - \int_0^\infty x e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{d}{db} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) = - \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Proto

$$\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

6.2.4 Příklad

Hledejme hodnotu integrálu

$$I(p) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \sin^2(x)) dx$$

s parametrem $p \geq 0$. Pro $p = 0$ je hodnotou integrálu triviálně nula, t.j. $I(0) = 0$, tudíž pro možnost přenést derivaci funkce $I(p)$ do integrandu $f(x, p)$ zbývá nalézt integrabilní lebesgueovskou majorantu k derivaci integrandu podle parametru p , a sice takovou, která je nezávislá na parametru. Jelikož derivaci integrandu podle parametru p je funkce

$$\frac{df}{dp} = \frac{\sin^2(x)}{1 + p \sin^2(x)},$$

je hledanou majorantou funkce $\sin^2(x)$, neboť $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$ konverguje. Pak tedy

$$\frac{dI}{dp} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{1 + p \sin^2(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}(x) \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int_0^\infty \frac{t^2}{1 + t^2 + p t^2} \frac{1}{1 + t^2} dt.$$

Po rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{t^2}{(1 + t^2 + p t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{p} \left(\frac{-1}{1 + (p+1)t^2} + \frac{1}{1 + t^2} \right)$$

dostáváme rovnost

$$\frac{dI}{dp} = \frac{\pi}{2p} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{p+1}} \right)$$

a odtud následně

$$I(p) = \frac{\pi}{2} \ln(p) - \frac{\pi}{2} \ln(p) + \pi \ln(\sqrt{p+1} + 1) + C,$$

kde $C = -\pi \ln(2)$ díky faktu, že $I(0) = 0$. Uzavíráme tedy, že

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \sin^2(x)) dx = \pi \ln\left(\frac{\sqrt{p+1} + 1}{2}\right).$$

Doporučujeme čtenáři, aby rozvážil případnou změnu výsledku úlohy, pokud parametr p bude vybrán z rozšířené množiny $(-1, \infty)$.

6.2.5 Příklad

Ukážeme nyní další aplikaci věty 6.2.1 o derivaci integrálu podle parametru, tentokrát na vícerozměrném případě

$$I(a) = \iiint_A \frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz,$$

kde $A = \mathbf{E}^3 \setminus \{0\}$ a $a > 0$. Při ověření prvního předpokladu věty (pro jednu konkrétní hodnotu parametru a , a sice $a = 1$) užijeme srovnávacího kritéria. Protože podíl $u^{-1} \sin(u)$ je jistě menší nebo roven jedné, lze srovnat

$$\left| \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3).$$

Integrabilita majoranty vyplývá z odvození:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz &= \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y = \varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z = \varrho \sin(\vartheta) \end{array} \right| |\Delta_J| = \varrho^2 \cos(\vartheta) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho \cos(\vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta) d\vartheta \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = 4\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Měřitelnost integrandu je zřejmá, neboť integrand je na A spojitou funkcí. Zajímavější bude hledat lebesgueovský integrovatelnou majorantu k derivaci

$$-\frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

integrandu podle parametru a . Majorantní integrabilní funkcí bohužel nemůže být funkce

$$\frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

neboť příslušný Lebesgueův integrál vede na typ $\int_0^\infty \sin(t) dt$, který diverguje. Je tedy nutno zvolit tzv. *lokální majorantu*, kdy při pevně zvoleném $a_0 > 0$ je pro $a > a_0$ funkce

$$e^{-a_0(x^2+y^2+z^2)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \left| -\frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right|$$

hledanou integrabilní majorantou, jak se lze přesvědčit následujícím výpočtem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-a_0(x^2+y^2+z^2)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y = \varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z = \varrho \sin(\vartheta) \end{array} \right| |\Delta_J| = \varrho^2 \cos(\vartheta) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^3 \cos(\vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta) d\vartheta \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^3 d\varrho = 4\pi \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^3 d\varrho = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \varrho^2 \\ dt = 2\varrho d\varrho \end{array} \right| = 2\pi \int_0^\infty e^{-t} dt = 2\pi [-te^{-t}]_0^\infty + 2\pi \int_0^\infty e^{-t} dt = 2\pi.$$

Po ověření všech předpokladů lze nyní přistoupit k aplikaci věty o derivaci integrálu podle parametru. Podle ní tedy

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= - \int_A \frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz = \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y = \varrho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z = \varrho \sin(\vartheta) \end{array} \quad |\Delta_J| = \varrho^2 \cos(\vartheta) \right| = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{e^{-a\varrho^2} \sin(\varrho^2)}{\varrho} \varrho^2 \cos(\vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \varrho^2 \\ dt = 2\varrho d\varrho \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-at} \sin(t) \cos(\vartheta) dt d\vartheta d\varphi = -\frac{2\pi}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Odtud po zintegrování podle parametru vychází, že

$$I(a) = -2\pi \operatorname{arctg}(a) + C,$$

kde $C = \pi^2$, neboť má platit rovnost $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = 0$. Shrnujeme tedy, že

$$\iiint_A \frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \sin(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz = \pi^2 - 2\pi \operatorname{arctg}(a).$$

Kapitola 7

Zobecněný Lebesgueův integrál a faktorizace prostoru kvadraticky integrabilních funkcí

Jakkoli obecně je Lebesgueův integrál nyní vybudován, ještě stále existují funkce (viz např. poznámka 5.4.18), které Lebesgueův integrál nemají, ačkoliv v riemannovském smyslu tento existuje. Z tohoto důvodu se v této kapitole pokusíme o vybudování dalšího rozšíření Lebesgueova integrálu. Pro praktické účely je existence takového rozšíření nezbytná.

Ve druhé části kapitoly se pak zaměříme na konstrukci funkcionálního Hilbertova prostoru. Protože dosud užívaný pojem funkce nebude k takové konstrukci vhodný, budeme nuceni zkonstruovat tzv. *faktorovou funkční alternativu*. Faktorové funkce pak budou (při vhodných omezeních) schopny vytvořit Hilbertův prostor s metrikou a normou, jež budou generovány jistým funkcionálním skalárním součinem. To je hlavní cíl této kapitoly.

7.1 Zobecněný Lebesgueův integrál

V kapitole č. 5 byl vystavěn Lebesgueův integrál, který je propojen s Riemannovým integrálem pouze tak, že je-li nějaká funkce absolutně riemannovsky integrovatelná, pak je také lebesgueovsky integrovatelná. Neabsolutně riemannovsky integrabilní funkce však obecně Lebesgueův integrál mít nemusejí. Příkladem takové funkce je např. $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, neboť v poznámce 5.4.18 bylo prokázáno, že $g(x) \in \mathcal{R}(0, +\infty)$, ale $g(x) \notin \mathcal{L}(0, +\infty)$. V následujícím textu se pokusíme tento nesoulad řešit.

7.1.1 Poznámka

Zobecněný Lebesgueův integrál můžeme vzhledem k platnosti Fubiniovy věty s výhodou konstruovat pouze pro jednorozměrné funkce.

7.1.2 Úmluva

Dosud užívaný symbol $\mathcal{L}((a, b))$ pro lebesgueovsky integrabilní funkce na otevřeném intervalu (a, b) , kde platí série nerovností $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, zjednodušíme do tvaru $\mathcal{L}(a, b)$.

7.1.3 Definice

Symbolem $\mathcal{L}(a, b-)$ označíme následující třídu funkcí:

$$\mathcal{L}(a, b-) = \bigcap_{c \in (a, b)} \mathcal{L}(a, c).$$

7.1.4 Definice

Nechť $f(x) \in \mathcal{L}(a, b-)$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má *zobecněný Lebesgueův integrál* nebo že je *zobecněně lebesgueovsky integrabilní* na (a, b) , pokud existuje limita $\lim_{c \rightarrow b-} (\mathcal{L}) \int_a^c f(x) dx$ a je vlastní. Pak definujeme

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b-} (\mathcal{L}) \int_a^c f(x) dx.$$

Prostor všech zobecněně lebesgueovsky integrabilních funkcí na intervalu (a, b) značíme symbolem $\mathcal{L}(a, b)$.

7.1.5 Poznámka

Každá riemannovsky integrovatelná funkce je integrovatelná rovněž zobecněně lebesgueovsky. Například integrál

$$\int_0^c \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existuje pro všechna kladná c , neboť funkce $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ je spojitá skoro všude na $(0, c)$, a proto

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} (\mathcal{L}) \int_0^c \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

K vyčíslení hodnoty integrálu ale bude nutné užít jiný přístup. Ten si představíme v příkladě 7.1.11.

7.1.6 Poznámka

V klasickém Lebesgueově integrálu postačí k záměně limity a integrálu podle věty 6.1.2 zejména existence integritní majoranty k integrandu. Analogie takového tvrzení ale pro zobecněný Lebesgueův integrál neplatí. Proto vyslovíme a dokážeme níže uvedenou větu. Nejprve ale zavedeme pomocný pojem.

7.1.7 Definice

Nechť je dána funkce $f(x, \tau) : E \times T \mapsto \mathbf{R}$, interval $(a, b) \subset E$ a množina $M \subset T$. Řekneme, že integrál $\int_a^b f(x, \tau) dx$ *konverguje na množině M stejnoměrně v horní mezi* právě tehdy, když

- pro všechny $\tau \in M$ platí, že $f(x, \tau) \in \mathcal{L}(a, b)$
- a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\tilde{b} < b$ tak, že pro všechny $\tau \in M$ a všechna $c \in (\tilde{b}, b)$ platí nerovnost

$$\left| \int_a^c f(x, \tau) dx - \int_a^b f(x, \tau) dx \right| < \varepsilon.$$

7.1.8 Definice

Nechť je dána funkce $f(x, \tau) : E \times T \mapsto \mathbf{R}$, interval $(a, b) \subset E$ a množina $M \subset T$. Řekneme, že integrál $\int_a^b f(x, \tau) dx$ *konverguje pro $\tau \rightarrow \tau_0$ stejnoměrně v horní mezi* právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{U}_{\tau_0}$ parametru τ_0 takové, že integrál $\int_a^b f(x, \tau) dx$ konverguje na množině $M \cap \mathcal{U}_{\tau_0}$ stejnoměrně v horní mezi.

7.1.9 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci v horní mezi

Nechť je dána funkce $f(x, \tau) : E \times T \mapsto \mathbf{R}$, kde $(a, b) \subset E$ a $M \subset T$. Nechť pro všechny $\tau \in M$ platí, že $f(x, \tau) \in \mathcal{L}(a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f(x, \tau) dx$ konverguje na množině M stejnoměrně v horní mezi právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b_\varepsilon < b$ tak, že pro všechny $\tau \in M$ a všechny $c, d \in (b_\varepsilon, b)$ platí nerovnost

$$\left| \int_d^c f(x, \tau) dx \right| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- zvolme libovolnou posloupnost čísel b_n konvergující k číslu b zleva takovým způsobem, že pro žádné $n \in \mathbf{N}$ neplatí rovnost $b_n = b$

- označme

$$F_n(\tau) = \int_a^{b_n} f(x, \tau) \, dx$$

- tvrzení o stejnoměrné konvergenci v horní mezi je ekvivalentní konvergenci každé funkcionální posloupnosti $F_n(\tau)$ k funkci $F(\tau)$ na množině M
- tvrzení dokazované věty je pak okamžitým důsledkem Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci funkčních posloupností a Heineovy věty

7.1.10 Věta – o limitě zobecněného integrálu s parametrem

Nechť je dána množina $P \subset \mathbf{R}$ a její hromadný bod $\tau_0 \in \text{der}(P)$. Nechť funkce $f(x, \tau)$ definovaná na $(a, b) \times P$ splňuje následující předpoklady.

- Pro skoro všechna $x \in (a, b)$ existuje $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} f(x, \tau) =: \varphi(x)$.
- Pro každé $\tau \in P \setminus \{\tau_0\}$ je funkce $x \mapsto f(x, \tau)$ měřitelná.
- Existuje funkce $g(x) \in \mathcal{L}(a, b)$ a okolí $\mathcal{U}_{\tau_0}$ parametru τ_0 tak, že pro všechna $\tau \in (\mathcal{U}_{\tau_0} \cap P) \setminus \{\tau_0\}$ platí nerovnost $|f(x, \tau)| \leq g(x)$ skoro všude v (a, b) .
- Funkce $F(\tau) = \int_a^b f(x, \tau) \, dx$ konverguje pro $\tau \rightarrow \tau_0$ stejnoměrně v horní mezi.

Potom $\varphi(x) \in \mathcal{L}(a, b)$ a platí rovnost

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} F(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} \int_a^b f(x, \tau) \, dx = \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$

Důkaz:

- zvolme libovolnou posloupnost čísel b_n konvergující k číslu b zleva tak, že pro žádné přirozené $n \in \mathbf{N}$ neplatí rovnost $b_n = b$
- označme $F_n(\tau) = \int_a^{b_n} f(x, \tau) \, dx$
- podle třetího předpokladu existuje pro skoro všechna $x \in (a, b_n)$ integrabilní majoranta $g(x)$ k absolutní hodnotě $|f(x, \tau)|$ integrandu $f(x, \tau)$
- podle Lebesgueovy věty 5.3.52 pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje konečná limita

$$\gamma_n := \lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} F_n(\tau) = \int_a^{b_n} \varphi(x) \, dx$$

- je tedy možno zaměnit pořadí limity $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P}$ a integrálu $\int_a^{b_n} dx$
- podle čtvrtého předpokladu právě dokazované věty konverguje funkcionální posloupnost $F_n(\tau)$ k funkci $F(\tau)$ stejnoměrně na množině $P \cap \mathcal{U}_{\tau_0}$
- z takové stejnoměrné konvergence plyne jednak existence konečné limity $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} \varphi(x) \, dx$, ale také zaměnitelnost limit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ a $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P}$
- proto za prvé

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} \varphi(x) \, dx = \gamma$$

a za druhé

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} F_n(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0, \tau \in P} F(\tau),$$

odkud plyne druhé dokazované tvrzení

- tím je procedura důkazu ukončena

7.1.11 Příklad

Pokusme se tedy vypočítat hodnotu již dříve diskutovaného integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx$. Nejprve ale bude žádoucí vypočítat hodnotu integrálu

$$G(a, b) = \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \int_0^\infty f(x, a, b) dx$$

pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a všechna $b > 0$. K výpočtu užijeme větu 6.2.1 o derivaci integrálu podle parametru. Funkci $G(a, b)$ se pokusíme derivovat podle proměnné a . Jelikož jistě $G(0, b) = 0$, je zřejmé, že zkoumaný integrál alespoň pro jednu hodnotu parametru, podle něhož se chystáme derivovat, konverguje. Integrand $f(x, a, b)$ je zjevně ekvivalentní s jistou spojitou funkcí, a tudíž podle důsledku 5.2.17 věty o měřitelnosti funkce je funkce $x \mapsto f(x, a, b)$ měřitelná. Protože skoro všude na množině $(0, +\infty)$ platí nerovnost

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(x, a, b) \right| = \left| e^{-bx} \cos(ax) \right| \leq e^{-bx} \in \mathcal{L}(0, +\infty),$$

je také poslední předpoklad citované věty naplněn. Existuje totiž integrabilní majoranta k derivaci integrandu nezávislá na parametru, podle něhož se derivuje. Proto lze zaměnit derivaci podle a a integraci. Odtud

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \int_0^\infty e^{-bx} \cos(ax) dx = \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

Dále

$$G(a, b) = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) + C = \arctg\left(\frac{a}{b}\right),$$

neboť integrační konstanta C musí garantovat splnění avizované rovnosti $G(0, b) = 0$. Odtud tedy

$$\int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \arctg\left(\frac{a}{b}\right).$$

Označme nyní ve větě 7.1.10 $P = (0, +\infty)$, $\tau_0 = 0$, $\tau = b$ a $f(x, \tau) = f(x, a, b)$. Protože limita $\lim_{b \rightarrow 0_+} f(x, a, b) = \frac{\sin(ax)}{x}$ existuje pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a funkce $f(x, a, b)$ je měřitelná (viz argumentace výše), zbývá ve větě 7.1.10 prověřit třetí a čtvrtý předpoklad. Pro všechny hodnoty parametru $b \in P$ ale podle poznámky 7.1.5 platí

$$\left| f(x, a, b) \right| = \left| e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} \right| \leq \frac{\sin(ax)}{x} \in \mathcal{L}(0, +\infty),$$

čímž je předpoklad o zobecněné integrabilní majorantě prokázán. Navíc ale funkce $G(a, b) = \int_0^\infty f(x, a, b) dx$ konverguje pro $b \rightarrow 0_+$ stejnoměrně v horní mezi, protože pro každé $\varepsilon > 0$ lze jistě garantovat existenci čísla ξ_ε tak, že pro všechny $b > 0$ a všechny $\alpha, \beta \in (\xi_\varepsilon, +\infty)$ platí nerovnost

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x, \tau) dx \right| \leq \int_\alpha^\beta e^{-bx} \left| \frac{\sin(ax)}{x} \right| dx \leq \int_\alpha^\beta e^{-bx} dx = \left[-\frac{1}{b} e^{-bx} \right]_\alpha^\beta = \frac{1}{b} (e^{-\alpha b} - e^{-\beta b}) < \varepsilon.$$

Není těžké nahlédnout, že rozdíl $e^{-\alpha b} - e^{-\beta b}$ lze učinit volbou čísla ξ_ε libovolně malým. Naplnění předpokladů věty pak umožní finalizovat následující výpočet.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 0_+} \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 0_+} \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a).$$

7.2 Prostor kvadraticky integrabilních funkcí a jeho faktorizace

V posledním oddíle této kapitoly zavedeme s výhodou tzv. *faktorový prostor* lebesgueovsky kvadraticky integrovatelných funkcí na vybrané oblasti (otevřené a souvislé množině) z $\mathbf{E}^r$. Tím vytvoříme krátký spojující článek mezi probranými partiemi matematické analýzy a metodami matematické fyziky, které na tuto problematiku bezprostředně navazují. Pro účely této sekce přejdeme ke komplexním funkcím $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$.

7.2.1 Poznámka

Jsou-li $G \subset \mathbb{E}^r$ oblast a $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbb{E}^r \mapsto \mathbb{C}$ dvě lebesgueovsky integrabilní komplexní funkce, zdá se smysluplnou otázka, zda předpis

$$s(f, g) := (\mathcal{L}) \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) d\vec{x} \quad (7.1)$$

definuje na množině $\mathcal{L}(G)$ skalární součin. Odpověď je bohužel negativní, neboť např. pro $G = (0, 1)$ leží funkce $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ve třídě $\mathcal{L}(G)$, ale integrál (7.1) neexistuje, neboť $f(x)g(x) = \frac{1}{x} \notin \mathcal{L}(G)$. Z tohoto důvodu je třeba zavést sofistikovanější třídu funkcí, než je sama třída $\mathcal{L}(G)$.

7.2.2 Definice

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je oblast. Symbolem $\mathcal{L}_2(G)$ označíme třídu všech funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbb{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^2 \in \mathcal{L}(G)$, tedy

$$(\mathcal{L}) \int_G |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty.$$

Funkce třídy $\mathcal{L}_2(G)$ nazýváme (lebesgueovsky) *kvadraticky integrabilní*.

7.2.3 Věta

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je oblast. Jsou-li funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : G \mapsto \mathbb{C}$ zvoleny tak, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$ a $g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$, pak platí: $f(\vec{x})g^*(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(G)$, kde

$$\mathcal{L}_p(G) := \left\{ f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbb{C} : (\mathcal{L}) \int_G |f(\vec{x})|^p d\vec{x} < +\infty \right\}.$$

Důkaz:

- vyjdeme z nerovnosti $2|ab^*| \leq |a|^2 + |b|^2$, jež je platná pro všechny komplexní čísla $a, b \in \mathbb{C}$ a může být nejsnadněji odvozena úpravou nerovnosti $|a|^4 + |b|^4 \geq 0$, který je zcela jistě nezáporný
- odtud dospíváme ke srovnání $2|f(\vec{x})g^*(x)| \leq |f(\vec{x})|^2 + |g(\vec{x})|^2$
- z faktu, že $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$ ale vyplývá, že funkce $|f(\vec{x})|^2 + |g(\vec{x})|^2$ je lebesgueovsky integrabilní, a reprezentuje tedy integrabilní majorantu vhodnou pro aplikaci srovnávacího kritéria 5.3.49
- podle něj tedy $2|f(\vec{x})g^*(x)| \in \mathcal{L}(G)$, potažmo $f(\vec{x})g^*(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(G)$

7.2.4 Věta

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je oblast a H je libovolnou podmnožinou množiny G takovou, že $\mu(H) < +\infty$. Pak pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$ platí, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(H)$.

Důkaz:

- jak bylo prokázáno v předchozí větě, platí pro libovolné dvě funkce, že $2|f(\vec{x})g^*(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})|^2 + |g(\vec{x})|^2$
- zvolme $g(\vec{x}) = \chi_H(\vec{x})$, kde $\chi_H(\vec{x})$ je charakteristická funkce množiny $H \subset G$
- jistě $g(\vec{x}) \in \mathcal{L}(H)$, neboť $\int_H g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_H 1 d\vec{x} = \int_{\mathbb{E}^r} g(\vec{x}) d\vec{x} = \mu(H) < +\infty$
- na množině H tedy funguje srovnání $2|f(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})|^2 + 1$ a $|f(\vec{x})|^2 + 1 \in \mathcal{L}(H)$ podle předpokladu, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$
- ze srovnávacího kritéria 5.3.49 pak ihned vyplývá, že $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(H)$

7.2.5 Důsledek

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je oblast taková, že $\mu(G) < +\infty$. Pak platí inkluze $\mathcal{L}_2(G) \subset \mathcal{L}_1(G)$.

7.2.6 Poznámka

I když definice 7.2.2 eliminovala problém z poznámky 7.2.1, neboť v $\mathcal{L}_2(G)$ platí implikace

$$f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G) \wedge g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G) \Rightarrow f(\vec{x})g(\vec{x}) \in \mathcal{L}(G),$$

stále ale předpis (7.1) nezadává skalární součin, neboť není splněn axiom o pozitivní definitnosti skalárního součinu. Kromě nulové funkce totiž existují i jiné funkce, pro které je $s(f, f) = 0$. Takovou funkcí je například funkce

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \dots & x \in \mathbf{N}, \\ 0 & \dots & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}. \end{cases}$$

Není jisté obtížné se přesvědčit, že podle věty o ekvivalentních funkcích platí rovnost $\int_G |h(\vec{x})|^2 dx = 0$ pro všechny funkce $h(\vec{x})$, které jsou λ -ekvivalentní s nulovou funkcí. Abychom odstranili také tento nedostatek vztahu (7.1), bude nutné přejít od pojmu klasické funkce k vhodnému zobecnění.

7.2.7 Poznámka

Přejdeme nyní od termínu funkce k tzv. faktorové funkci, resp. k *faktorovému prostoru funkcí*. Termínem *faktorová skupina funkcí* budeme označovat třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou po dvou μ -ekvivalentní, tj. liší se pouze na množině, jež má míru $\mu(X)$ nulovou. Symbolem $F(G)$ označíme třídu všech faktorových funkcí. Symbolem $\Phi_0 \in F(G)$ budeme značit speciální případ faktorové skupiny funkcí, a sice třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s ryze nulovou funkcí $f(\vec{x}) = 0$. Do třídy Φ_0 tedy např. patří také *obecná Dirichletova funkce* definovaná předpisem

$$D(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \dots & \vec{x} \in \mathbf{Q}^r, \\ 0 & \dots & \vec{x} \in \mathbf{R}^r \setminus \mathbf{Q}^r. \end{cases}$$

Tím se poměrně rozsáhlá třída všech měřitelných funkcí rozpadá na separátní třídy navzájem ekvivalentních funkcí. Libovolně vybraného zástupce z jedné faktorové skupiny funkcí nazveme *faktorovou funkcí*. Pro jednoduchost formulací v celém dalším textu budeme ale i nadále užívat termín funkce (namísto správného termínu faktorová funkce) s vědomím, že se jedná o jednoho vybraného reprezentanta celé třídy funkcí. Připomínáme, že všechny funkce z téže faktorové skupiny funkcí mají podle věty 5.3.37 stejnou hodnotu Lebesgueova integrálu.

K vybudování faktorového prostoru funkcí lze přistoupit také přes teorii faktorových rozkladů známou z učiva obecné algebry (viz [12]). Jelikož operace ekvivalence $\sim$ zavedená na třídě všech měřitelných funkcí $\Lambda(\mathbf{E}')$ je

- reflexivní, neboť pro všechny faktorové funkce $f(\vec{x})$ platí

$$f(\vec{x}) \sim f(\vec{x}),$$

- symetrická, neboť pro všechny faktorové funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ platí implikace

$$f(\vec{x}) \sim g(\vec{x}) \Rightarrow g(\vec{x}) \sim f(\vec{x})$$

- a tranzitivní, neboť pro všechny faktorové funkce $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$ a $h(\vec{x})$ platí implikace

$$f(\vec{x}) \sim g(\vec{x}) \wedge g(\vec{x}) \sim h(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x}) \sim h(\vec{x}),$$

rozkládá relace ekvivalence $\sim$ třídu všech měřitelných funkcí $\Lambda(\mathbf{E}')$ na disjunktní třídy navzájem ekvivalentních funkcí. Užitím značení z obecné algebry lze tedy psát

$$F(G) := \Lambda(G)/\Phi_0(G).$$

Od této chvíle budeme tedy např. pod pojmem funkce $f(x) = x$ rozumět nespočetně mnoho funkcí, a to všech takových, které se liší na $\mathbf{R}$ od funkce $f(x) = x$ na množině nulové míry. Ponecháme ovšem původní symboliku $f(x) = x$ s tím, že budeme mít na paměti pozměněné pojetí tohoto symbolu.

7.2.8 Definice

Nechť $G \subset \mathbb{E}^r$ je oblast. Symbolem $\mathbb{L}_2(G)$ označíme třídu všech faktorových funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbb{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^2 \in \mathcal{L}(G)$, tedy

$$(\mathcal{L}) \int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < \infty.$$

Funkce třídy $\mathbb{L}_2(G)$ nazýváme (lebesgueovsky) *kvadraticky integrabilní*.

7.2.9 Příklad

Ukážeme, že množina $\mathbb{L}_2(G)$ z definice 7.2.8 je lineárním vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbb{C}$. Nejprve bychom měli ukázat, že $\{\mathbb{L}_2(G), +\}$ je Abelovskou grupou (viz [12]). Nulovým prvkem ve struktuře $\{\mathbb{L}_2(G), +\}$ je pochopitelně nulová funkce, přesněji řečeno vybraný zástupce všech funkcí třídy Φ_0 (viz poznámka 7.2.7). Inverzním prvkem k funkci $f(\vec{x})$ je bez pochyby funkce $-f(\vec{x})$ a patří-li $f(\vec{x})$ do $\mathbb{L}_2(G)$, pak podle definice 7.2.8 také $-f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Asociativnost a komutativita sčítání jsou rovněž zřejmé. Důležité je ale prokázat uzavřenost jednak vůči sčítání a jednak vůči násobení funkce číslem z $\mathbb{C}$. Pokud ale patří funkce $f(\vec{x})$ do $\mathbb{L}_2(G)$, pak platí $\int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < \infty$, a tudíž pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ také

$$\int_G |\alpha f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) = |\alpha|^2 \int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < \infty.$$

Tedy i funkce $\alpha f(\vec{x})$ náleží do $\mathbb{L}_2(G)$. Podobně

$$\int_G |f(\vec{x}) + g(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) \leq 2 \int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) + 2 \int_G |g(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}),$$

a tedy s každými dvěma funkcemi $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ také součet funkcí $(f + g)(\vec{x})$ do $\mathbb{L}_2(G)$ patří. Podotýkáme, že k důkazu byla užito nerovnosti

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : |a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$$

známé z teorie komplexních čísel. Další axiomy lineárního vektorového prostoru

$$\begin{aligned} 1 \cdot f(\vec{x}) &= f(\vec{x}) \cdot 1 = f(\vec{x}), \\ \alpha(\beta f(\vec{x})) &= (\alpha\beta)f(\vec{x}), \\ (\alpha + \beta)f(\vec{x}) &= \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{x}), \\ \alpha(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) &= \alpha f(\vec{x}) + \alpha g(\vec{x}), \end{aligned}$$

jsou zjevně platné při jakékoli volbě funkcí $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ a komplexních čísel α, β . Struktura $\{\mathbb{L}_2(G), +, \cdot\}$ je tedy lineárním vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

7.2.10 Věta

Zobrazení $\langle f|g \rangle : \mathbb{L}_2(G) \times \mathbb{L}_2(G) \mapsto \mathbb{C}$ zavedené na $\mathbb{L}_2(G)$ předpisem

$$\langle f|g \rangle = \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) d\vec{x} \quad (7.2)$$

reprezentuje skalární součin. Dvojice $\{\mathbb{L}_2(G), \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- axiom levé linearit je splněn triviálně, podobně jako hermiticita
- pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ také platí, že

$$\langle f|f \rangle = \int_G f(\vec{x}) f^*(\vec{x}) d\vec{x} = \int_G |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} \geq 0$$

a navíc rovnost

$$\langle f|f \rangle = \int_G f(\vec{x}) f^*(\vec{x}) d\vec{x} = \int_G |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} = 0$$

nastává pouze pro nulovou faktorovou funkci, čímž je naplněn axiom pozitivní definitnosti

- zbývá dokázat, že pro libovolné dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ je výraz $\langle f|g \rangle = \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) d\vec{x}$ dobře definován
- jelikož je na G splněna nerovnost

$$2|f(\vec{x})g^*(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})|^2 + |g^*(\vec{x})|^2 = |f(\vec{x})|^2 + |g(\vec{x})|^2$$

a oba integrály $\int_G |f(\vec{x})|^2 d\vec{x}$ a $\int_G |g(\vec{x})|^2 d\vec{x}$ existují z definice prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ a z věty o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu, existuje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_G f(\vec{x})g^*(\vec{x}) d\vec{x}$

7.2.11 Příklad

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Přepíšeme-li obecnou Schwarzovu-Cauchyovu-Bunjakovského nerovnost (viz věta 6.2.3 str. 172 ve skriptech [5]) do funkcionálního tvaru, dostáváme nerovnost tvaru

$$\left| \int_G f(\vec{x})g^*(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) \right| \leq \sqrt{\int_G |f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x})} \sqrt{\int_G |g(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x})}. \quad (7.3)$$

7.2.12 Poznámka

Je-li vztah (7.2) skalárním součinem na prostoru $\mathbb{L}_2(G)$, pak je zobrazení

$$\|f(\vec{x})\| = \sqrt{\int_G |f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x})}$$

normou na $\mathbb{L}_2(G)$. Podle obecné věty je navíc zobrazení

$$\varrho(f, g) := \sqrt{\int_G |f(\vec{x}) - g(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x})}$$

metrikou na $\mathbb{L}_2(G)$.

7.2.13 Věta – o úplnosti faktorového prostoru kvadraticky integrabilních funkcí

Faktorový prostor $\mathbb{L}_2(G)$ společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (7.2) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

Důkaz:

Jelikož již bylo prokázáno, že $\mathbb{L}_2(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$ podposloupnost $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$, jež konverguje skoro všude na G . To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je vlastně prokázat, že $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$ je konvergentní v $\mathbb{L}_2(G)$.

První člen podposloupnosti $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$ vyberme tak, aby pro všechna $m > k_1$ platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Přitom symbol $\|\cdot\|$ reprezentuje normu generovanou skalárním součinem (7.2). Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna $m > k_2$ platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme ℓ -tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna $m > k_\ell$ platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^k |f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|, \quad g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^\infty |f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leq \sum_{s=1}^k \|f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\| < \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto pro každé $k \in \mathbf{N}$ splněna nerovnost $\int_M |g_k(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < 1$ a podle Leviho věty 5.3.50 také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) \leq 1$$

a $g(\vec{x})$ je konečná skoro všude na M . Navíc řada $\sum_{s=1}^k |f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|$ má pro skoro všechna $\vec{x} \in M$ konečný součet a tudíž i řada $\sum_{s=1}^k (f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x}))$ je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_{k_m}(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{m-1} (f_{k_{s+1}}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme $f(\vec{x})$ její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí (viz věta 5.2.13).

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{k=1}^\infty$ konverguje právě k této funkci $f(\vec{x})$ v $\mathbb{L}_2(G)$. Předně z cauchyovskosti posloupnosti $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$ plyne cauchyovskost podposloupnosti $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{k=1}^\infty$, a tedy pro $\varepsilon = 1$ existuje $\ell_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $\ell > \ell_0$ a $m > \ell_0$ je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty 5.3.53 je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce $f(\vec{x})$ rozepsaná jako $(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})) + f_{k_\ell}(\vec{x})$ patří do $\mathbb{L}_2(G)$. Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým ε , získáme

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x}) < \varepsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci $f(\vec{x})$ konverguje celá posloupnost $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$. To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\| \leq \|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\| + \|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká k_ℓ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti $(f_k(x))_{k=1}^\infty$.

7.2.14 Důsledek

Nechť $G \subset E'$ je oblast a $w(\vec{x}) \in \mathcal{C}(\overline{G})$ je kladná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_w(G) = \left\{ f(\vec{x}) \in F(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) d\vec{x} < +\infty \right\}$$

společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x}$ je Hilbertovým prostorem.

Kapitola 8

Úlohy k procvičování

V této kapitole nabídneme úlohy k procvičení celé problematiky teorie míry i abstraktního Lebesgueova integrálu. Tyto úlohy by měly posloužit k postupnému hlubšímu pochopení jednotlivých kroků konstrukce abstraktních měr nebo etap konstrukce Lebesgueova integrálu. Kromě podpory pochopení teoretického pozadí problematiky by však některé další úlohy měly demonstrovat praktické aplikace probrané látky a napojení zkoumané problematiky na předcházející kapitoly matematické analýzy, zejména na teorii newtonovských a riemannovských integrací.

8.1 Úlohy na teorii abstraktní míry

Cvičení 8.1

Rozhodněte, zda je soustava množin

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \text{ je konečná}\}$$

aditivní, okruh či algebra. Dále rozhodněte, jedná-li se o soustavu σ -aditivní.

Cvičení 8.2

Rozhodněte, zda je soustava množin

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \text{ je omezená}\}$$

aditivní, okruh či algebra. Dále rozhodněte, jedná-li se o soustavu σ -aditivní.

Cvičení 8.3

Rozhodněte, zda je soustava množin

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \text{ je spočetná}\}$$

aditivní, okruh či algebra. Dále rozhodněte, jedná-li se o soustavu σ -aditivní.

Cvičení 8.4

Rozhodněte, zda je soustava množin

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \text{ je konečná nebo } \mathbf{R} \setminus X \text{ je konečná}\}$$

aditivní, okruh či algebra. Dále rozhodněte, jedná-li se o soustavu σ -aditivní.

Cvičení 8.5

Rozhodněte, zda je soustava množin

$$\mathcal{A} = \{X \subset \mathbf{R} : X \text{ je otevřená}\}$$

aditivní, okruh či algebra. Dále rozhodněte, jedná-li se o soustavu σ -aditivní.

Cvičení 8.6

Nechť $\mathcal{A}$ je okruh. Ukažte, že $\emptyset \in \mathcal{A}$. Dále dokažte, že pro libovolnou m -tici množin $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ platí

$$\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}.$$

Cvičení 8.7

Nechť $\mathcal{A}$ je σ -okruh. Dokažte, že pro libovolnou posloupnost množin $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ platí $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Cvičení 8.8

Nechť $F(X)$ je σ -aditivní míra operující na polookruhu $\mathcal{H}$. Je-li $T \in \mathcal{S}_r$, pak existují (podle věty 4.1.4) množiny $J_k \in \mathcal{H}_r$, takové, že $T = \biguplus_{k=1}^{\infty} J_k$ a míra $\mu_{\sigma}(T)$ množiny T je definována předpisem

$$\mu_{\sigma}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} F(J_k).$$

Ukažte, že je-li množina T alternativně vyjádřena jako disjunkt ní sjednocení $T = \biguplus_{k=1}^{\infty} L_k$, kde $L_k \in \mathcal{H}_r$, pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} F(L_k).$$

Cvičení 8.9

Dokažte inkluzi $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{S}_r$.

Cvičení 8.10

Dokažte, že je-li $\mathcal{A}$ σ -algebrou, pak s každou množinou $A \in \mathcal{A}$ patří do $\mathcal{A}$ také její doplněk do prezidenta této σ -algebry.

Cvičení 8.11

Dokažte, že je-li $\mathcal{A}$ algebrou, pak s každými dvěma množinami $A, B \in \mathcal{A}$ patří do $\mathcal{A}$ také jejich průnik $A \cap B$.

Cvičení 8.12

Dokažte následující tvrzení: Průnik neprázdné soustavy okruhů, resp. σ -okruhů je opět okruh, resp. σ -okruh.

Cvičení 8.13

Dokažte následující tvrzení: Každý okruh je polookruhem.

Cvičení 8.14

Dokažte, že je-li $F(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}^*$ aditivní množinová funkce na okruhu $\mathcal{B}$, pak pro libovolné množiny $X, Y \in \mathcal{B}$ platí $F(X \setminus Y) + F(Y) = F(Y \setminus X) + F(X)$ a $F(X \cup Y) + F(X \cap Y) = F(X) + F(Y)$.

Cvičení 8.15

Dokažte následující tvrzení: Aditivní a nezáporná reálná množinová funkce na neprázdném okruhu je mírou.

Cvičení 8.16

Rozhodněte, zda je množinová funkce $\text{card}(X)$, přiřazující množinám počet jejich prvků, mírou na soustavě $2^{\mathbf{N}} \setminus \{\mathbf{N}\}$.

Cvičení 8.17

Dokažte, že soustavy $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ jsou polookruhy.

Cvičení 8.18

Zkompletujte důkaz věty 2.3.7.

Cvičení 8.19

Ukažte, že množina všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ nemá Jordanovu míru generovanou vytvořující funkcí $\varphi(x) = x^3$ na $\mathcal{H}_1$.

Cvičení 8.20

Ukažte, že množina všech iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ nemá Jordanovu míru vytvořenou klasickou mírou $F(X)$ na $\mathcal{H}_1$.

Cvičení 8.21

Rozhodněte, zda mají množiny $A = (\mathbb{Q} \cap \langle 0, 2 \rangle) \times \langle 0, 2 \rangle$ a $B = (\mathbb{Q} \cap \langle 0, 2 \rangle) \times \{0\}$ klasickou Jordanovu míru.

Cvičení 8.22

Nalezněte klasickou Jordanovu a klasickou Lebesgueovu míru jednoprvkové množiny $A = \{\beta\}$, kde $\beta \in \mathbb{R}$.

Cvičení 8.23

Nalezněte klasickou Jordanovu a klasickou Lebesgueovu míru množiny $A = \{1, 2, 3\}$.

Cvičení 8.24

Dokažte de Morganovy vzorce 9.1.6.

Cvičení 8.25

Dokažte, že libovolný interval (α, β) patří do $\mathcal{S}_1$ a libovolný interval $\times_{k=1}^r (\alpha_k, \beta_k)$ patří do $\mathcal{S}_r$.

Cvičení 8.26

Dokažte větu: Necht' $\mathcal{B}$ je okruh a $A, B \in \mathcal{B}$. Pak existují množiny $C, D \in \mathcal{B}$ tak, že $A \cup B = C \uplus D$.

Cvičení 8.27

Nalezněte alespoň jednu neprázdnou množinu takovou, aby patřila do soustavy množin a) $\mathcal{H}_1$, b) $\mathcal{H}_1 \setminus \mathcal{H}_1$, c) $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{H}_1$, nebo d) $2^{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{S}_1$.

Cvičení 8.28

Necht' je dána abstraktní Jordanova míra $\widetilde{m}(X)$ generovaná vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = 3x$ a $\psi(y) = y^3$. Ukažte, že množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

patří do množinové soustavy $\widetilde{\mathcal{H}}_2$.

Cvičení 8.29

Necht' $I_0 := \emptyset$ a pro $n \in \mathbb{N} : I_n := \langle 2n, 2n+1 \rangle$. Označme $E := \uplus_{n=0}^{\infty} I_n$. Necht' dále $m(X)$ je množinová funkce zadaná na soustavě $\mathcal{A} := \{I_0, I_1, I_2, \dots\}$ rovností $m(I_n) := n$. Vytvořme soustavu $\mathcal{B}$ jako soustavu všech spočetných disjunktních sjednocení množin z $\mathcal{A}$ a míru $m(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{N}^*$ definovanou pro každou množinu $M \in \mathcal{B}$ (tedy $M = \uplus_{i=1}^{\infty} J_i$, kde $(J_i)_{i=1}^{\infty}$ je libovolná disjunktní posloupnost množin z $\mathcal{A}$) předpisem

$$\mu(M) := \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i).$$

Stanovte, jsou-li soustavy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ aditivní, okruhy, polookruhy nebo algebry a vypočtěte a) $\mu_e(I_n)$ b) $\mu_i(I_n)$ c) $\mu_e(\langle 4, 4.5 \rangle)$ d) $\mu_i(\langle 4, 4.5 \rangle)$, když $\mu_e(X)$, resp. $\mu_i(X)$, představují vnější, resp. vnitřní míru vytvořenou mírou $\mu(X)$.

Cvičení 8.30

Necht' $\varphi(x)$ je neznámá lineární funkce, která je na soustavě $\mathcal{H}_1$ vytvořující funkcí míry $m(X)$, pro niž $m(\langle 2, 4 \rangle) = 6$. Necht' $\mu(X)$ je míra vytvořená jako rozšíření výše uvedené míry $m(X)$ z polookruhu $\mathcal{H}_1$ na okruh $\mathcal{H}_1$ jím generovaný. Necht' dále $M = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 3, 7 \rangle$. Vypočtěte a) $m(\langle 1, 4 \rangle)$ b) $m(\langle -2, 1 \rangle)$ c) $\mu(\langle 1, 4 \rangle)$ d) $\mu(M)$.

Cvičení 8.31

Necht' $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{R}}$. Rozhodněte, zda množinové funkce $F(X), G(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{N}$ jsou na $\mathcal{A}$ měrami:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots & X = \emptyset, \\ 1 & \dots & X \neq \emptyset, \end{cases} \quad G(X) = \begin{cases} 0 & \dots & 0 \in X, \\ 1 & \dots & 0 \notin X. \end{cases}$$

Cvičení 8.32

Necht' $\mathcal{A} = 2^{10}$ a $C = \{1, 2, 3\}$. Necht' je množinová funkce $\mu(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{N}$ definována předpisem

$$\mu(X) := \text{card}(X \cap C).$$

Určete, je-li $\mu(X)$ mírou na $\mathcal{A}$.

Cvičení 8.33

Ukažte, že množiny (α, β) , $\langle \alpha, \beta \rangle$, $(\alpha, \beta]$ a $[\alpha, \beta)$ jsou μ -měřitelné při klasické Lebesgueově míře.

Cvičení 8.34

Rozhodněte, zda je množina $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$ μ -měřitelná při klasické Lebesgueově míře.

Cvičení 8.35

Nechť je na soustavě $\mathcal{S}_1$ zadána σ -aditivní míra $\mu_\sigma(X)$ vytvořující funkcí $\varphi(x) = 7x^5$. Rozhodněte, je-li množina $X = \langle 1, 3 \rangle$ μ -měřitelná. Své tvrzení dokažte!

Cvičení 8.36

Nechť je na soustavě $\mathcal{S}_1$ zadána σ -aditivní míra $\mu_\sigma(X)$ vytvořující funkcí $\varphi(x) = 2x^2 \operatorname{sgn}(x)$. Rozhodněte, je-li množina $X = \langle 4, 5 \rangle$ μ -měřitelná. Své tvrzení dokažte!

Cvičení 8.37

Nechť je na soustavě $\mathcal{S}_2$ zadána σ -aditivní míra $\mu_\sigma(X)$ vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = 4x$ a $\psi(y) = y^3$. Rozhodněte, je-li množina $X = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle$ μ -měřitelná. Své tvrzení dokažte!

Cvičení 8.38

Nechť jsou dány vytvořující funkce $\varphi(x) = x$ a $\psi(y) = y$ generující Jordanovu míru $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_2 \mapsto \mathbf{R}$. Pro následující množiny vypočtěte jejich Jordanovy míry.

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \in \mathbf{Q} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \in \mathbf{Q} \wedge y \in \mathbf{Q} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \notin \mathbf{Q} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y = 0\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \notin \mathbf{Q} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge y \in \{0, 1, 2\}\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x \in \langle 0, 4 \rangle \wedge y \in \langle 0, 4 \rangle \wedge x \leq y\}.$$

Cvičení 8.39

Řešte předešlou úlohu pro vytvořující funkce $\varphi(x) = 3x^2 \operatorname{sgn}(x)$ a $\psi(y) = 7y$.

Cvičení 8.40

Nechť $R > 0$. Nechť jsou dány vytvořující funkce $\varphi(x) = x$ a $\psi(y) = y^2 \operatorname{sgn}(y)$ generující abstraktní Jordanovu míru $\widetilde{m}(X) : \widetilde{\mathcal{K}}_2 \mapsto \mathbf{R}$. Pro následující množiny vypočtěte příslušné Jordanovy míry.

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2\}.$$

Cvičení 8.41

Nechť je dána soustava množin

$$\mathcal{A} = \{\emptyset; \{1, 2\}; \{3, 4\}; \{5, 6\}; \{1, 2, 3, 4\}\}$$

a množinová funkce

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots & X = \emptyset, \\ 0 & \dots & X = \{1, 2\}, \\ 2 & \dots & X = \{3, 4\}, \\ 4 & \dots & X = \{5, 6\}, \\ 2 & \dots & X = \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je soustava $\mathcal{A}$ polookruhem, a sestavte minimální okruh $\mathcal{B}$ generovaný soustavou $\mathcal{A}$. Definujte rozšíření $m(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}$ míry $F(X)$ z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Pro všechny množiny $X \in \mathcal{B}$ vypište hodnoty $m(X)$. Pro množiny $A = \{1\}$, $B = \{2; 3\}$, $C = \{1; 5; 6\}$ a $D = \{3; 5; 6\}$ stanovte vnitřní a vnější míry generované mírou $m(X)$ na $\mathcal{B}$. Sestavte soustavu $\tilde{\mathcal{B}}$ všech množin z osnovy $\text{Sub}(\mathcal{B})$, pro které $m_i(X) = m_e(X)$. Definujte pak míru $\tilde{m}(X)$ jako rozšíření míry $m(X)$ z $\mathcal{B}$ do $\tilde{\mathcal{B}}$. Je soustava $\tilde{\mathcal{B}}$ okruhem?

Cvičení 8.42

Nechť $\varphi(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$ a $\psi(x) = 12 \operatorname{arctg}(x)$ jsou vytvářejícími funkcemi pro míry $F_1(X)$, resp. $F_2(X)$ na $\mathcal{H}_1$. Nechť je míra $F(X)$ na $\mathcal{H}_2$ definována pro $J \in \mathcal{H}_2$ ($J = J_1 \times J_2$, $J_1, J_2 \in \mathcal{H}_1$) předpisem

$$F(J) = F_1(J_1) \cdot F_2(J_2).$$

Nechť dále $m(X)$ je míra, která vznikla jako rozšíření míry $F(X)$ z $\mathcal{H}_2$ na $\mathcal{H}_2$. Pro množiny

$$\begin{aligned} A &= \langle 0, 1 \rangle, \\ B &= \langle 1, \sqrt{3} \rangle, \\ C &= \langle 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle \cup \langle 1, \sqrt{3} \rangle, \\ D &= \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle, \\ E &= \langle 1, \sqrt{3} \rangle \times \langle 1, \sqrt{3} \rangle, \\ F &= \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, \sqrt{3} \rangle, \\ G &= (\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle) \cup (\langle 1, \sqrt{3} \rangle \times \langle 1, \sqrt{3} \rangle), \\ H &= (\langle 1, \sqrt{3} \rangle \times \langle 0, 1 \rangle) \cup (\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, \sqrt{3} \rangle) \end{aligned}$$

vypočítejte všechny přípustné míry, které zadání dovoluje.

Cvičení 8.43

Stanovte, zda je množinová soustava

$$\mathcal{A} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2, 3\}; \{4, 5, 6\}\}$$

okruhem, algebrou či polookruhem. Zapište tvar minimálního okruhu $\mathcal{B}$ generovaného soustavou $\mathcal{A}$. Dále rozhodněte, zda je množinová funkce $F(X)$, zavedená definičními vztahy

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots & X = \emptyset, \\ 2 & \dots & X = \{1\}, \\ 3 & \dots & X = \{2\}, \\ 1 & \dots & X = \{3\}, \\ 6 & \dots & X = \{1, 2, 3\}, \\ 1 & \dots & X = \{4, 5, 6\}, \end{cases}$$

mírou na $\mathcal{A}$. Na závěr určete hodnoty množinové funkce (pro všechny množiny z $\mathcal{B}$) $G(X) : \mathcal{B} \mapsto \mathbf{R}^*$, která je rozšířením množinové funkce $F(X)$ z $\mathcal{A}$ na minimální okruh $\mathcal{B}$.

Cvičení 8.44

Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \dots & x < 0, \\ 0 & \dots & x \geq 0 \end{cases}$$

je vytvářející funkce míry $F(X)$ na $\mathcal{H}_1$. Ukažte, že $F(X)$ není na $\mathcal{H}_1$ σ -aditivní.

Cvičení 8.45

Nechť je dána úplná míra $\mu(X)$ a k ní příslušná Lebesgueova σ -algebra $\mathcal{M}_\mu$. Nechť se dvě množiny A, B liší na množině míry nula, tj. množina $U := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ jednak patří do $\mathcal{M}_\mu$ a jednak $\mu(U) = 0$. Nechť dále $A \cap B \in \mathcal{M}_\mu$. Dokažte, že za daných předpokladů obě množiny A, B patří do $\mathcal{M}_\mu$ a navíc $\mu(A) = \mu(B)$.

Cvičení 8.46

Nechť je dána Lebesgueova míra $\mu(X)$ a příslušná Lebesgueova σ -algebra $\mathcal{M}_\mu$. Nechť je dále dána μ -měřitelná funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}$ taková, že $(\forall x \in E) : f(x) \geq 0$. Z daných předpokladů dokažte, že nosič funkce $\text{supp}(f)$ a množina $\{x \in E : f(x) = 0\}$ jsou μ -měřitelnými množinami.

Cvičení 8.47

Nechť je Jordanova míra generována funkcemi

$$\varphi(x) = \begin{cases} 7x & \dots & x < 1, \\ 8+x & \dots & x \geq 1, \end{cases} \quad \psi(y) = \begin{cases} y^3 & \dots & y \leq 2, \\ 10+y & \dots & y > 2. \end{cases}$$

Rozhodněte a podrobně zdůvodněte, zda pro $U = (1, 3) \times \{2\}$ existují $F(U)$, $m(U)$, resp. $\tilde{m}(U)$. Pokud ano, jejich hodnoty vyčíslete.

Cvičení 8.48

Nechť $\{E, \mathcal{M}_\mu, \mu(X)\}$ je prostor s úplnou mírou. Dokažte implikaci: $\mu(M^\circ) = \mu(\overline{M}) \in \mathbf{R} \Rightarrow M \in \mathcal{M}_\mu$.

Cvičení 8.49

Je míra $m(X) : \mathcal{K}_2 \mapsto \mathbf{R}$ generovaná funkcemi $\varphi(x) = x$ a

$$\psi(y) = \begin{cases} y & \dots & y \leq 2, \\ 2 & \dots & y > 2 \wedge y \leq 4, \\ y-2 & \dots & y > 4, \end{cases}$$

úplná na $\mathcal{K}_2$?

Cvičení 8.50

Sestavte minimální okruh generovaný soustavou $\mathcal{A} = \{\{1\}; \{2\}; \{1, 2, 3, 5\}\}$.

Cvičení 8.51

Nechť je dána soustava

$$\mathcal{A} = \{\emptyset; \{1\}; \widehat{4}; \{3, 4\}; \{2\}; \{5\}; \widehat{5}\}$$

a množinová funkce $F(X) : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ definovaná předpisem

$$F(X) = \begin{cases} ? & \dots & \emptyset, \\ 6 & \dots & \{1\}, \\ 17 & \dots & \{1, 2, 3, 4\}, \\ 6 & \dots & \{3, 4\}, \\ ? & \dots & \{2\}, \\ 10 & \dots & \{5\}, \\ ? & \dots & \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{cases}$$

Na místa otazníků doplňte čísla tak, aby množinová funkce $F(X)$ byla mírou na $\mathcal{A}$. Rozhodněte, je-li soustava $\mathcal{A}$ okruhem. Pokud je, položte $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Pokud není, sestavte minimální okruh $\mathcal{B}$ generovaný soustavou $\mathcal{A}$. Definujte míru $m(X)$ na $\mathcal{B}$ tak, aby reprezentovala rozšíření míry $F(X)$ z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Dále nalezněte množinu $W \in \text{Sub}(\mathcal{B})$ takovou, pro niž

$$m_i(W) \neq m_e(W).$$

Cvičení 8.52

Nechť je Lebesgueova míra generována vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = (y-1)^3$ a $\omega(z) = \Theta(z)z$. Vypočtěte míru množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 + 2x + x^2 + 2y + 4xy + 5y^2 + 25z^2 \leq 0\}.$$

Cvičení 8.53

Dokažte následující tvrzení: Necht' $\mu(X)$ je Lebesgueova míra definovaná na Lebesgueově σ -algebře $\mathcal{M}_\mu$, která je navíc úplná. Necht' pro množiny A a B platí rovnost $\mu(A) = \mu(B)$. Pak pro libovolnou množinu C vyhovující dvojici inkluzí $A \subset C \subset B$ platí, že $\mu(C) = \mu(A)$.

Cvičení 8.54

Rozhodněte, je-li množina $X = \{7\}$ jordanovsky měřitelná při míře generované vytvořující funkcí $\varphi(x) = x|x|$.

Cvičení 8.55

Necht' vytvořující funkce

$$\varphi(x) = \Theta(x)(x + \lceil x \rceil)$$

generuje míru $F(X)$ na $\mathcal{H}_1$ a její rozšíření $m(X)$ na $\mathcal{H}_1$. Rozhodněte, zda jsou množiny $G = \langle 0, 1 \rangle$ a $H = \{1\}$ jordanovsky měřitelné.

Cvičení 8.56

Necht' je míra $F(X)$ na $\mathcal{H}_1$ generována vytvořující funkcí $\varphi(x) = x$. Necht' $m(X)$ je její rozšíření z $\mathcal{H}_1$ do $\mathcal{H}_1$. Pro množinu $X = \{1, 2, 3\}$ vypočtěte příslušnou vnitřní a vnější míru.

Cvičení 8.57

Necht' $\varphi(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$ a $\psi(y) = y$ jsou vytvořující funkce Jordanovy míry $\tilde{m}(X)$ na $\widetilde{\mathcal{H}}_2$. Rozhodněte (a co nejpodrobněji vysvětlete), zda pro $A = \langle 3, 5 \rangle \times \{2\}$ existuje $\tilde{m}(A)$. Pokud existuje, určete příslušnou hodnotu. Podobně rozhodněte pro $B = (\langle 3, 5 \rangle \cap \mathbb{Q}) \times \{2\}$.

Cvičení 8.58

Necht' je dána množinová soustava $\mathcal{A} = \{\emptyset; \{\square\}; \{\ominus\}; \{\heartsuit, \Delta\}; \{\square, \heartsuit, \Delta\}\}$. Rozhodněte, zda se jedná o polookruh a zda je míra

$$G(X) = \begin{cases} X = \emptyset & \dots & G(X) = 0, \\ X = \{\square\} & \dots & G(X) = 7, \\ X = \{\ominus\} & \dots & G(X) = 8, \\ X = \{\heartsuit, \Delta\} & \dots & G(X) = ?, \\ X = \{\square, \heartsuit, \Delta\} & \dots & G(X) = 7 \end{cases}$$

na $\mathcal{A}$ úplná. Čemu se musí rovnat $G(\{\heartsuit, \Delta\})$ a proč?

Cvičení 8.59

Necht' $\mu(X)$ je míra na okruhu $\mathcal{A}$. Rozhodněte, zda pro každé $X, Y \in \mathcal{A}$ platí:

$$\mu(X \setminus Y) = \mu(X) - \mu(Y).$$

Pokud ano, tvrzení dokažte. Pokud ne, zformulujte správné tvrzení a toto dokažte!

Cvičení 8.60

Necht' je Jordanova míra zadána sadou vytvořujících funkcí

$$\varphi(x) = \Theta(x)\sqrt{|x|}, \quad \psi(y) = \begin{cases} y & \dots & y > 3, \\ y - 3 & \dots & y \leq 3. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou množiny $A = (0, 25) \times \langle 0, 3 \rangle$ a $B = (0, 25) \times \langle 0, 3 \rangle$ jordanovsky měřitelné. Svě tvrzení podrobně prokažte!

Cvičení 8.61

Necht' $F_2(X)$ je dvojrozměrná míra generovaná na $\mathcal{H}_2$ vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = x$ a $\psi(y) = y^3$. Necht' $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Vypočtěte vnitřní míru množiny Y odvozenou od míry $F_2(X)$ na $\mathcal{H}_2$.

Cvičení 8.62

Vymyslete míru na $\mathcal{H}_2$ tak, aby nebyla úplná.

Cvičení 8.63

Je množina $\{(1, 3); (2, 3)\}$ borelovská?

8.2 Úlohy na teorii lebesgueovských integrací

Cvičení 8.64

Podle definice ukažte, že funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ je λ -měřitelná.

Cvičení 8.65

Vypočtěte pomocné integrály

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{a} \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx,$$

kde $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$.

Cvičení 8.66

Pro $a > 0$ vypočtěte *Gaussův integrál* integrál

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx. \tag{8.1}$$

Užijte pomocného integrálu

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-a(x^2+y^2)} dx dy.$$

Cvičení 8.67

Vypočtěte

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$$

pro $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$.

Cvičení 8.68

Pro $\alpha > 0$ a $\beta \in \mathbf{R}$ vypočtěte integrál

$$(\mathcal{L}) \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx$$

Cvičení 8.69

Nechť $\beta \in \mathbf{R}$ je zvoleno pevně. Vypočtěte zobecněnou hodnotu Lebesgueova integrálu

$$(\mathcal{L}) \int_0^\infty \frac{\sin(\beta x)}{x} dx.$$

Cvičení 8.70

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \ln(x^2 + a^2) dx.$$

Cvičení 8.71

Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-ax} - e^{-bx})^2}{x} dx,$$

jsou-li $a, b > 0$.

Cvičení 8.72

Dvojí aplikací věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx,$$

jsou-li $a, b > 0$. Výsledek upravte do tvaru s jediným logaritmem.

Cvičení 8.73

Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx) dx,$$

kde $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$.

Cvičení 8.74

Na základě faktu, že

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|},$$

nalezněte hodnotu integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{b^2 + x^2} dx$$

pro $a, b \in \mathbf{R}$.

Cvičení 8.75

Použitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx,$$

kde $a \in \mathbf{R}$ a $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Využijte faktu, že $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{c^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2|c|} \ln|c|$ ($c \neq 0$).

Cvičení 8.76

Pomocí věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+x^2)} dx,$$

je-li $\alpha \geq 0$.

Cvičení 8.77

Užitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-a(x^2+y^2)} - e^{-b(x^2+y^2)}}{x^2 + y^2} \cos(x^2 + y^2) dx dy,$$

kde parametry a, b jsou kladnými reálnými čísly.

Cvičení 8.78

Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^8} - e^{-bx^8}}{x^5} dx$$

pro $a, b \in \mathbf{R}_0^+$.

Cvičení 8.79

Užitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtete určitý integrál

$$F = \int_0^\infty \frac{x \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{p} - \operatorname{arctg} \frac{x}{r} \right)}{x^2 + q^2} dx,$$

kde pro parametry p, q, r platí $q \neq 0$ a $p, r \neq q$.

Cvičení 8.80

Nechť $|a| < 1$ je parametr. Užitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtete určitý integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)} \ln \left(\frac{1 + a \cos(x)}{1 - a \cos(x)} \right) dx.$$

Cvičení 8.81

Pro parametry $a, b \in \mathbf{R}_0^+$ vypočtete

$$I(a, b) = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{a^2}{x^2} \right) \ln \left(1 + \frac{b^2}{x^2} \right) dx.$$

Cvičení 8.82

Dokončete důkaz věty 5.2.5.

Cvičení 8.83

Dokončete důkaz věty 5.2.11.

Cvičení 8.84

Dokažte, že je-li funkce $f(x) : E \mapsto \mathbf{R}^*$ měřitelná funkce a $C \in \mathbf{R}$, pak i funkce $g(x) := f(x) - C$ je měřitelná.

Cvičení 8.85

Dokažte první část tvrzení věty 5.3.15.

Cvičení 8.86

Rozhodněte, zda existuje Lebesgueův integrál $(\mathcal{L}) \int_0^\infty \sin(x) dx$.

Cvičení 8.87

Nechť $\varphi(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sgn}(x)$ a $\varphi(y) = y$ jsou generující funkce dvourozměrné Lebesgueovy míry v $\mathbf{R}^2$. Nechť

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle 0, 4 \rangle \wedge y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \wedge y \in \langle 0, 3 \rangle\}$$

a $f(x, y) = x$. Vypočtete $(\mathcal{L}) \int_M f(x) d\mu(x, y)$.

Cvičení 8.88

Pro množinu $A = \mathbf{R} \times \{0\}$ vypočtete dvourozměrnou Jordanovu a Lebesgueovu míru.

Cvičení 8.89

Rozhodněte, zda $\operatorname{sgn}(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}, \lambda)$, resp. $\operatorname{sgn}(x) \in \mathcal{L}^*(\mathbf{R}, \lambda)$,

Cvičení 8.90

Pro množinu $A = \{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ vypočtete klasickou jednorozměrnou Jordanovu a Lebesgueovu míru.

Cvičení 8.91

Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Nechť $A, B \in \mathcal{M}_\mu$, $A \subset B$ a $\mu(A) = \mu(B)$. Pak pro každou množinu C takovou, že $A \subset C \subset B$, platí, že $\mu(C) = \mu(A)$.

Cvičení 8.92

Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Necht' $A, B \in \mathcal{M}_\mu$, $A \subset B$ a $\mu(A) = \mu(B)$. Necht' je dále dána míra $\mu(X) : \mathcal{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^*$, jež je úplná. Pak pro každou množinu C takovou, že $A \subset C \subset B$, platí, že $\mu(C) = \mu(A)$.

Cvičení 8.93

Ukažte, že funkce $f(x) = \chi_M(x)$, kde M je množina z poznámky 4.2.32, není μ -měřitelná.

Cvičení 8.94

Necht' $F(X)$ je míra na $\mathcal{H}_1$ vytvořená funkcí

$$\varphi(x) = \frac{60x}{1+|x|}$$

a $\mu(X)$ je její rozšíření z polookruhu $\mathcal{H}_1$ na okruh $\mathcal{H}_1$. Necht' dále $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je funkce definovaná na $E = \langle -2, 5 \rangle$. Ověřte, zda je splněn základní požadavek kladený na vytvořující funkci $\varphi(x)$, a vypočtěte $\mu(\langle 2, 3 \rangle)$, $\mu(\text{supp}(f))$ a Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x).$$

Cvičení 8.95

Pro parametry $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2(bx)}{x} dx.$$

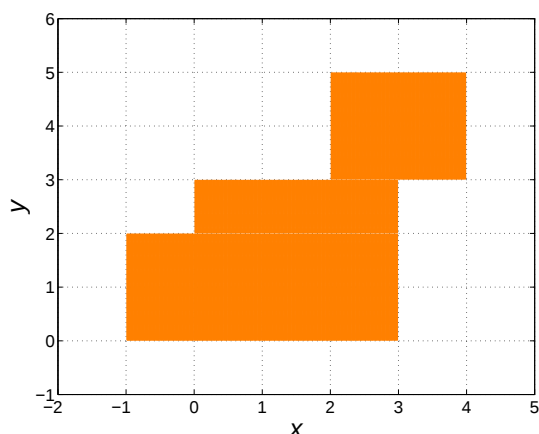
Cvičení 8.96

Necht' $a > 0$. Necht' je dále zadána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \dots (x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \\ 0 & \dots x \leq 0 \vee y \leq 0, \\ xy(x^4 + y^4)e^{-a(x^4 + y^4)^2} & \dots (x, y) \in (\mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}) \times (\mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}). \end{cases}$$

Vypočtěte klasický Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) d\lambda(x, y).$$

Cvičení 8.97

Na obrázku vlevo je zakreslena množina E . Vypočtěte její Lebesgueovu míru, víte-li, že vytvořujícími funkcemi jsou funkce $\varphi(x) = x^2 \text{sgn}(x)$ v ose x a

$$\varphi(y) = \frac{120y}{1+|y|}$$

v ose y . Dále vypočtěte míru množiny $M = \langle 0; 1 \rangle \times \mathbf{R}$ a pro funkci $f(x, y) = \lfloor y \rfloor$ stanovte hodnotu příslušného Lebesgueova integrálu

$$(\mathcal{L}) \int_E f(x, y) d\mu(x, y).$$

Cvičení 8.98

Pro parametry $a, b, c > 0$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + b^2) - \ln(x^2 + c^2)}{x^2 + a^2} dx.$$

Cvičení 8.99

Nechť $p > 0$ a $q \in \mathbf{R}$. Užitím věty o derivaci integrálu podle parametru vypočtete určitý integrál

$$\int_0^1 x^p \frac{\cos(q \cdot \ln(x))}{x} dx.$$

Užijte vztahu

$$\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Cvičení 8.100

Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} 12\pi & \dots & x > 2\pi, \\ 6x & \dots & |x| \leq 2\pi, \\ -12\pi & \dots & x < -2\pi, \end{cases}$$

je vytvořující funkcí abstraktní Lebesgueovy míry $\mu(X)$. Vypočtete příslušný Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} [2 \cdot \sin(x)] d\mu(x).$$

Cvičení 8.101

Na základě rovnosti

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

vypočtete aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem určitý integrál $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(\beta x) dx$.

Cvičení 8.102

Nechť jsou funkce $\varphi(x) = \frac{6x}{2+|x|}$, resp. $\varphi(y) = y^2 \operatorname{sgn}(y)$ vytvořujícími funkcemi Lebesgueových měr v osách x , resp. y . Stanovte hodnotu příslušného Lebesgueova integrálu

$$(\mathcal{L}) \int_E [x] + [y] d\mu(x, y),$$

kde $E = \langle -1, 2 \rangle \times \langle -1, 3 \rangle$.

Cvičení 8.103

Nechť $E = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle \setminus \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Nechť je na množině E definována funkce

$$\omega(x, y) = \begin{cases} [y] & \dots & (x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, \\ [x] & \dots & (x, y) \notin \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Nechť $\mu(X)$ je abstraktní Lebesgueova míra odvozená z vytvořujících funkcí $\varphi(x) = 6x$ v ose x a $\psi(y) = 2^y$ v ose y . Vypočtete Lebesgueovu míru množiny E a příslušný Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_E \omega(x, y) d\mu(x, y).$$

Cvičení 8.104

Pro parametry $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vypočtete určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) - \operatorname{arctg}(\beta x)}{x(1 + \gamma^2 x^2)} dx.$$

Cvičení 8.105

Nechť $F(X)$ je míra na $\mathcal{H}_1$ vytvořená funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \dots & x \in (-5, 5), \\ 5 & \dots & x \geq 5, \\ -5 & \dots & x \leq -5, \end{cases}$$

a $\mu(X)$ je její rozšíření z polookruhu $\mathcal{H}_1$ na soustavu $\mathcal{S}_1$. Nechť dále $f(x) = \operatorname{sgn}(16 - x^2)$ je funkce definovaná na $E = \mathbf{R}$. Interval $(0, 2)$ rozepište na disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{H}_1$. Dále vypočtete $\mu(\langle -2, 7 \rangle)$, $\mu((0, 2))$ a $\mu(\operatorname{supp}(f))$. Na závěr vypočtete Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_E f(x) \, d\mu(x).$$

Cvičení 8.106

Nechť a, b, c jsou pozitivní parametry. Vypočtete třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} \right)^2 = \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}.$$

Cvičení 8.107

Vypočtete určitý integrál

$$\int_0^\infty \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{x} \right) - \frac{2ax}{b^2 + x^2} \right) dx.$$

Cvičení 8.108

Vypočtete třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{5x - y + 3z}{a} \right)^{2/3} + \left(\frac{-x + 2y + z}{b} \right)^{2/3} + \left(\frac{3x - 2y + z}{c} \right)^{2/3} \leq 1 \right\}.$$

Předpokládejte, že a, b, c jsou kladné parametry.

Cvičení 8.109

Vztah

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

užijte k výpočtu integrálu

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} \cos(bx) \, dx.$$

Cvičení 8.110

Nechť vytvořující funkce

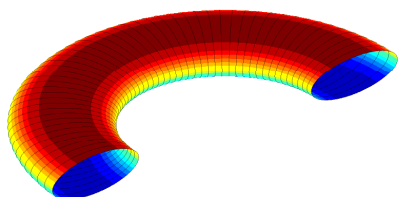
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \dots & x < 0, \\ x^2 & \dots & x \in \langle 0, 4 \rangle, \\ 16 & \dots & x > 4, \end{cases}$$

generuje na množině $\mathbf{R}$ Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Nechť jsou na množině $\mathbf{R}$ zadány funkce $f(x) = 3$, $g(x) = [x]$ a

$$h(x) = \begin{cases} 3 & \dots & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ 0 & \dots & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je funkce $h(x)$ μ -měřitelná. Dále vypočtete

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} f(x) \, d\mu(x), \quad (\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} g(x) \, d\mu(x), \quad (\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} h(x) \, d\mu(x).$$

Cvičení 8.111

Vypočtete objem (klasickou Lebesgueovu třídimenzionální míru) a stanovte polohu těžiště poloviny eliptického anuloidu (viz obrázek) s parametry $a, b, R > 0$. Parametr R udává vzdálenost osy anuloidu od jeho středu a parametry a a b popisují kolmý řez eliptického anuloidu, tj. elipsu o poloosách a a b .

Cvičení 8.112

Vypočtete určitý integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)} dx.$$

Cvičení 8.113

Nechť $a > 0$ a $n \in \mathbf{N}_0$. Užitím Gaussova integrálu (8.1) a věty o derivaci integrálu s parametrem odvoďte vzorec pro

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx.$$

Cvičení 8.114

Nechť $a, b > 0$ jsou parametry. Nechť je dále dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \dots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x & \dots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \neq 1. \end{cases}$$

Vypočtete

$$(\mathcal{L}) \int_M f(x, y) d\mu(x, y),$$

kde $M = \langle 0, 2a \rangle \times \langle -2b, 2b \rangle$.

Cvičení 8.115

Nechť $\alpha > 0$ a $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Užitím věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtete určitý integrál

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\cos(\beta x) - \cos(\gamma x)}{x} dx.$$

Cvičení 8.116

Nechť je dána funkce

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x \neq 0, \\ +\infty & \dots \quad x = 0. \end{cases}$$

Vypočtete

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} \delta(x) dx.$$

Cvičení 8.117

Rozhodněte, zda $|x| \in \mathcal{L}^*(\mathbf{R}, \lambda)$.

Cvičení 8.118

Rozhodněte, zda $|x| \in \mathcal{L}^*(\mathbf{R}, \mu)$, je-li míra $\mu(X)$ generována vytvořující funkcí $\varphi(x) = \Theta(x)x$.

Cvičení 8.119

Nechť $\int_0^\infty \arctg(x) d\mu(x) \in \mathbf{R}$. Je za daných předpokladů funkce $g(x) = \Theta(x)e^x$ finitní?

Cvičení 8.120

Nechť $a \in \mathbf{R}$. Rozhodněte, zda $\cos(ax) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^+)$.

Cvičení 8.121

Nechť je vytvořující funkce jednodimenzionální Lebesgueovy míry $\mu(X)$ zadána vztahem

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \dots \quad x \leq 2, \\ x+3 & \dots \quad x > 2. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou funkce $f(x) = 1$ a

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \dots \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}, \\ 7 & \dots \quad x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

μ -ekvivalentní.

Cvičení 8.122

Nechť je Lebesgueova míra generována vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \dots \quad x < 3, \\ x^2 - 4 & \dots \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Korektně vypočtete $\mu_\sigma(S)$, kde $S = (2, 4) \setminus \{3\}$. Neopomeňte rozhodnout, zda může $\mu_\sigma(S)$ principiálně existovat.

Cvičení 8.123

Nechť $g(\vec{x}) : E^r \mapsto \mathbf{R}$ je μ -měřitelná funkce. Dokažte, že pak nutně $\text{supp}(g) \in \mathcal{M}_\mu$.

Cvičení 8.124

Vypočtete

$$\int_{(1,3) \cup \{5\}} \lfloor x \rfloor d\mu(x),$$

je-li $\mu(X)$ generována vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x|x| & \dots \quad x \leq 5, \\ x+23 & \dots \quad x > 5. \end{cases}$$

Cvičení 8.125

Nechť $f(\vec{x}) : E \mapsto \mathbf{R}$ je μ -měřitelná funkce. Dokažte, že za daných okolností je množina

$$Z_{\alpha\beta} := \{\vec{x} \in E : f(\vec{x}) \in (\alpha, \beta)\}$$

lebesgueovsky měřitelná.

Cvičení 8.126

O funkci $h(x) = |x|$, kde $\text{Dom}(h) = \mathbf{R}$, je známo, že je na prostoru s neznámou mírou $\mu(X)$ skoro všude klesající. Vypočtete integrál $\int_{\mathbf{R}} \Theta(x) \cdot \lfloor x \rfloor d\mu(x)$.

Cvičení 8.127

Nechť je zadána abstraktní Lebesgueova míra daná vytvořující funkcí $\psi(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$. Načrtněte graf funkce $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje současně následující podmínky:

- $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$,
- $f(x) \in \mathcal{Z}_\mu$,
- $\operatorname{supp}(f) = \langle -1, 3 \rangle$,
- $A = \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow f(A) = \{2\}$,
- $f(x)$ není nerostoucí na $\langle -1, 3 \rangle$,
- $f(x)$ je nerostoucí skoro všude na $\langle -1, 3 \rangle$,
- $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = 13$.

Cvičení 8.128

Načrtněte graf spojitě vytvořující funkce $\varphi(x)$ Lebesgueovy míry $\mu(X)$ tak, aby současně platilo:

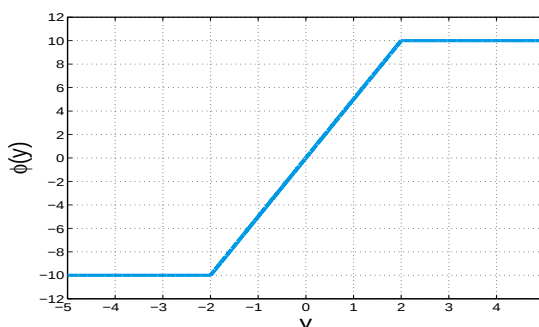
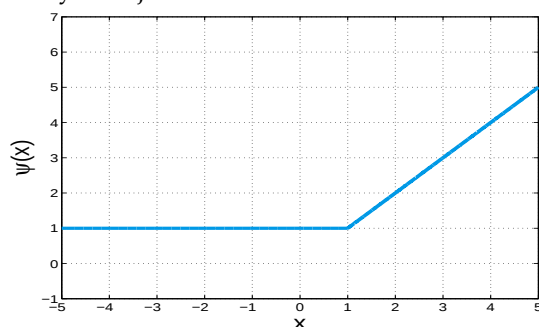
- $\mu((-\infty, 0)) = +\infty$,
- $\mu(\langle 0, 1 \rangle) = 9$,
- $\forall A \subset (-\infty, 1), \forall a < 0 : \mu(A) = \mu(A + a)$,
- $(\mathcal{L}) \int_1^3 e^x d\mu(x) = 0$,
- $\forall n > 3 : \mu(\langle n, n+1 \rangle) = 2n + 1$.

Cvičení 8.129

Nechť vytvořující funkce $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(x)$ generuje Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Vypočtěte $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{arctg}(x)| d\mu(x)$.

Cvičení 8.130

Nechť vytvořující funkce



generují na množině $\mathbb{E}^2$ Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Vypočtěte Lebesgueův integrál $(\mathcal{L}) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x} \lfloor y \rfloor d\mu(x, y)$.

Cvičení 8.131

Nechť funkce

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lfloor x \rfloor!}$$

generuje Lebesgueovu míru $\mu(X)$ na množině $E = \langle 1, \infty \rangle$. Vytvořující funkci načrtněte a vypočtěte Lebesgueův integrál

$$(\mathcal{L}) \int_E \frac{1}{\lfloor x \rfloor!} d\mu(x).$$

Výsledek vyjádřete desetinným číslem.

Cvičení 8.132

Nechť je Lebesgueova míra generována vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \frac{3x^2 \operatorname{sgn}(x)}{2 + 5x^2}.$$

Aplikací definice vypočtete Lebesgueův integrál $(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} h(x) d\mu(x)$, kde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \dots & x < 0, \\ 1 & \dots & x \geq 0 \wedge x < 2, \\ 2 & \dots & x \geq 2. \end{cases}$$

Neopomeňte rozhodnout, zda $h(x) \in \mathcal{Z}_{\mu}$, resp. $h(x) \in \mathcal{Z}_{\mu}^+$.

Cvičení 8.133

Dokažte lemma 5.3.16.

Cvičení 8.134

Nechť generuje funkce $\varphi(x) = x + 5\Theta(x - 2)$ jednodimenzionální Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Nechť je funkce $h(x)$ definována výčtem:

x	$x \leq 0 \vee x \geq 3$	$x > 0 \wedge x < 1$	$x = 1$	$x > 1 \wedge x < 2$	$x = 2$	$x > 2 \wedge x < 3$
$h(x)$	0	8	-3	2	-4	1

V souladu s definicemi Lebesgueova integrálu vypočtete

$$(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{R}} h(x) d\mu(x).$$

Cvičení 8.135

Nechť funkce $\varphi(x) = x + 3\Theta(x - 3)$ generuje jednodimenzionální Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Rozhodněte, zda jsou funkce $g(x) = e^x$ a

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \dots & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}, \\ -2 & \dots & x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

μ -ekvivaletní.

Cvičení 8.136

Nechť generuje funkce $\varphi(x) = \Theta(x)x^2$ jednodimenzionální Lebesgueovu míru $\mu(X)$. Nechť je funkce $h(x)$ definována výčtem:

$x \in$	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 4, 5 \rangle$	$\langle 5, 6 \rangle$	$\langle 6, +\infty \rangle$
$h(x) =$	8	4	1	0	1	0

V souladu s definicí Lebesgueova integrálu (podle prvního konstrukčního kroku) vypočtete

$$(\mathcal{L}_1) \int_{\mathbf{R}} h(x) d\mu(x)$$

a dokažte, že $h(x)$ je finitní.

Cvičení 8.137

Proč není funkce $g(x) = x^{-1}$ lebesgueovsky integrovatelná (při klasické míře)? Platí totéž tvrzení o funkci $h(x) = |x|^{-1}$?

Cvičení 8.138

Proč nemá funkce $g(x) = x^{-1}$ Lebesgueův integrál (při klasické míře)? Platí totéž tvrzení o funkci $h(x) = |x|^{-1}$?

Cvičení 8.139

Dokažte lemma 5.3.26.

Kapitola 9

Dodatek

Pro úplnost uvádíme v tomto dovětku některé základní pojmy užívané v celé teorii a diskutujeme vazbu mezi nimi. Většina z uváděných poznatků je nicméně tak samozřejmá, že jejich zařazení do hlavní části textu nebylo shledáno za nutné. Proto je zařazujeme až na samotný konec skript, kde si je může samostatně dostudovat méně poučený čtenář.

9.1 Základní pojmy teorie množin

9.1.1 Definice

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak definujeme *sjednocení množin* A, B předpisem $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, *průnik množin* A, B předpisem $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ a *rozdl množin* A, B vztahem $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. *Symetrickým doplňkem množin* A, B pak rozumíme množinu $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9.1.2 Definice

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Řekneme, že A a B jsou *disjunktní množiny*, pokud $A \cap B = \emptyset$. Jsou-li množiny A, B disjunktní a jejich sjednocením je množina C , pak nepovinným symbolem $C = A \uplus B$ signalizujeme disjunktnost množin A, B , ze kterých diskutované sjednocení vzniklo.

9.1.3 Definice

Nechť je dána konečná posloupnost množin $(A_k)_{k=1}^m$. Řekneme, že se jedná o *disjunktní posloupnost množin*, pokud pro libovolnou dvojici indexů $k, \ell \in \hat{m}$ platí implikace

$$k \neq \ell \quad \Rightarrow \quad A_k \cap A_\ell = \emptyset.$$

Sjednocení C takové disjunktní posloupnosti množin označíme symbolem $C = \uplus_{k=1}^m A_k$.

9.1.4 Definice

Nechť je dána spočetná posloupnost množin $(B_k)_{k=1}^\infty$. Řekneme, že se jedná o *disjunktní posloupnost množin*, pokud pro libovolnou dvojici indexů $k, \ell \in \mathbf{N}$ platí implikace

$$k \neq \ell \quad \Rightarrow \quad B_k \cap B_\ell = \emptyset.$$

Sjednocení C takové nekonečné disjunktní posloupnosti množin označíme symbolem $C = \uplus_{k=1}^\infty B_k$.

9.1.5 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$, množina $A \subset \mathcal{V}$ a vektor $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Pak *posunutím množiny* A o vektor $\vec{x}$ budeme rozumět množinu

$$A + \vec{x} := \{\vec{y} \in \mathcal{V} : \exists \vec{a} \in A : \vec{y} = \vec{a} + \vec{x}\}.$$

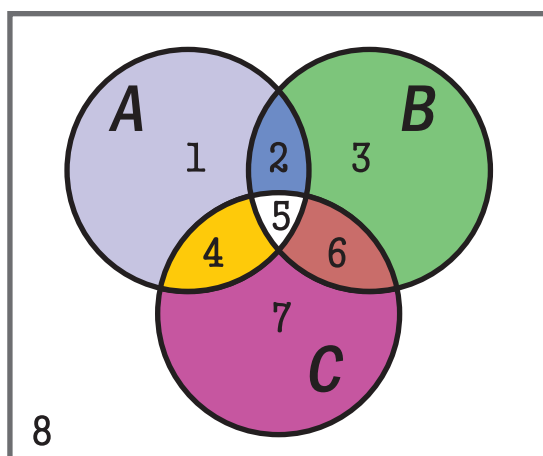
9.1.6 Věta – o de Morganových vzorcích

Nechť A, B, C jsou libovolné množiny. Pak platí množinové rovnosti

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \\ A \setminus (B \setminus C) &= (A \cap C) \cup (A \setminus B), \\ A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus C = B \cap (A \setminus C), \\ (A \setminus B) \setminus C &= A \setminus (B \cup C), \\ (A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \\ A \cup (B \setminus C) &= (A \cup B) \setminus (C \setminus A). \end{aligned}$$

Důkaz:

- typická varianta důkazu tvrzení o rovnostech množin je založena na aplikaci tzv. *Venových diagramů*
- jejich tvar pro tři množiny demonstrujeme na obrázku níže



Obrázek 9.20

Venovy diagramy pro tři množiny.

- dokažme pro ilustraci např. rovnost $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- protože $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 4\}$ a $A \setminus C = \{1, 2\}$, lehce stanovíme, že $A \setminus (B \cup C) = \{1\}$ a zároveň $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1\}$, což dokazuje platnost vztahu

9.1.7 Věta

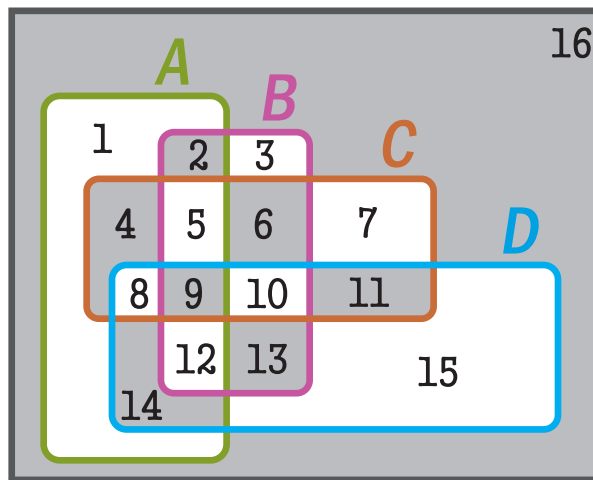
Nechť A, B, C, D jsou libovolné množiny. Pak platí množinové rovnosti

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap (C \setminus D) &= ((A \cap C) \setminus B) \setminus D, \\ (A \setminus B) \cup (C \setminus D) &= ((A \setminus B) \cup C) \setminus (D \setminus (A \setminus B)). \end{aligned}$$

Důkaz:

- nejobecnější uspořádání, které mohou zaujmout čtyři množiny, je nastíněno na obrázku níže
- dokažme první tvrzení
- protože $A \setminus B = \{1, 4, 8, 14\}$ a $C \setminus D = \{4, 5, 6, 7\}$, rovná se levá strana množině $\{4\}$

- $A \cap C = \{4, 5, 8, 9\}$, a tedy $(A \cap C) \setminus B = \{4, 8\}$
- pravá strana tedy vzejde z rovnosti $\{4, 8\} \setminus \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} = \{4\}$
- obě strany se rovnají a první tvrzení je proto platné
- druhé tvrzení se dokazuje analogicky



Obrázek 9.21
Vennovy diagramy pro čtyři množiny.

9.1.8 Definice

Nechť je dána neprázdňá množina X . Existuje-li $m \in \mathbf{N}$ tak, že $X \sim \hat{m}$, tj. existuje-li bijektivní zobrazení mezi množinami X a $\hat{m} = \{1, 2, \dots, m\}$, pak o množině X říkáme, že je *konečná*. Je-li $X \sim \mathbf{N}$, říkáme, že X je *spočetná*. V ostatních případech říkáme, že X je *nespočetnou množinou*.

9.1.9 Definice

Na třídě $\mathcal{D}$ všech množin definujeme zobrazení $\text{card}(X)$ nazývané *kardinálním číslem množiny* nebo *mohutností množiny* následujícím způsobem. Je-li $X = \emptyset$, pak klademe $\text{card}(X) = 0$. Je-li X konečnou množinou, tj. existuje-li $m \in \mathbf{N}$ tak, že $X \sim \hat{m}$, klademe $\text{card}(X) = m$. Je-li X spočetnou množinou, definujeme $\text{card}(X) = \aleph_0$ (čteme [alef nula]). Je-li množina X ekvivalentní množině reálných čísel, tj. platí-li $X \sim \mathbf{R}$, klademe $\text{card}(X) = \aleph_1$ (čteme [alef jedna]).

9.1.10 Příklady

Z předešlé definice není těžké odvodit, že např. $\text{card}(\{\circ, \star, \diamond\}) = 3$, $\text{card}(\mathbf{Z}) = \aleph_0$, $\text{card}(\mathbf{Q}) = \aleph_0$, $\text{card}((1, 7)) = \aleph_1$ nebo $\text{card}(\{67, 68, 69, \dots\}) = \aleph_0$.

9.1.11 Značení

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_m$ jsou libovolné množiny. Kartézský součin $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$ uvedených množin budeme označovat souhrnným symbolem $\times_{\ell=1}^m M_\ell$.

9.1.12 Definice

Nechť jsou dána čísla $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ tak, že $-\infty \leq x_k < y_k \leq +\infty$ pro $k \in \widehat{r}$. Množinu $I = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \times \dots \times (x_r, y_r)$ nazýváme *otevřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$.

9.1.13 Definice

Nechť jsou dána čísla $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ tak, že $-\infty < x_k < y_k < +\infty$ pro $k \in \widehat{r}$. Množinu $J = \langle x_1, y_1 \rangle \times \langle x_2, y_2 \rangle \times \dots \times \langle x_r, y_r \rangle$ nazýváme *uzavřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$. Množinu $H = \langle x_1, y_1 \rangle \times \langle x_2, y_2 \rangle \times \dots \times \langle x_r, y_r \rangle$ nazýváme *polouzavřeným intervalem* v $\mathbf{E}^r$.

9.1.14 Definice

Množinu $M \subset \mathbf{E}^r$ nazveme *zvrhlým intervalem* v $\mathbf{E}^r$, existuje-li uzavřený interval $J \in \mathbf{E}^r$ tak, že $M^\circ = J^\circ$, $\overline{M} = \overline{J}$ a $J^\circ \subsetneq M \subsetneq J$.

9.1.15 Definice

Množinu $M \subset \mathbf{E}^r$ nazveme *dirichletovskou* v $\mathbf{E}^r$, existuje-li libovolný (otevřený, uzavřený, polouzavřený) interval $I \in \mathbf{E}^r$ tak, že $M = I \cap \mathbf{Q}$.

Kapitola 10

Výsledky cvičení

8.1 aditivní a okruh, není σ -aditivní **8.2** aditivní a okruh, není σ -aditivní **8.3** aditivní a okruh, není σ -aditivní **8.4** aditivní, okruh i algebra, není σ -aditivní **8.5** pouze aditivní, není ani okruh ani algebra, je σ -aditivní **8.21** A nemá, B ano **8.22** obě jsou nulové **8.23** obě jsou nulové **8.27** $a) \langle 0, 1 \rangle b) \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle c) \langle 0, 1 \rangle d) \langle 0, 1 \rangle$ **8.28** užitte větu 3.2.7 **8.29** $\mathcal{A}$ není ani aditivní, $\mathcal{B}$ je okruhem i polokruhem i algebrou, $a) n b) n c) 2 d) 0$ **8.30** $a) 9 b) 9 c) 9 d) 15$ **8.31** $F(X)$ není mírou, $G(X)$ není mírou **8.32** $\mu(X)$ je mírou **8.34** je μ -měřitelná **8.35** je μ -měřitelná **8.36** je μ -měřitelná **8.37** je μ -měřitelná **8.38** $\tilde{m}(A) = 0, B \notin \mathcal{K}_2, \tilde{m}(C) = 0, \tilde{m}(D) = 0$ a $\tilde{m}(E) = 8$ **8.39** $\tilde{m}(A) = 0, B \notin \mathcal{K}_2, \tilde{m}(C) = 3, \tilde{m}(D) = 3$ a $\tilde{m}(E) = 896$ **8.40** $\tilde{m}(M_1) = \tilde{m}(M_2) = 8R^3/3$ a $\tilde{m}(M_3) = 2\pi R^3$ **8.41** $\mathcal{A}$ je polookruh, není okruhem, $\tilde{B}$ je okruh a $\tilde{m}(X)$ je míra na $\tilde{B}$ **8.42** např. $F_2(A) = 3\pi, C$ není měřitelná, $m(D) = F(D) = 3\pi, m(E) = F(E) = 2\pi, m(G) = 5\pi, m(H) = 7\pi$ **8.43** $F(X)$ je mírou, $\mathcal{A}$ je pouze polookruhem, např. $\hat{6} \in \mathcal{B}$ a $G(\hat{6}) = 7$ **8.44** $F(-1, 0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} F(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1})$ **8.47** neexistuje $F(U)$, ani $m(U)$ a dokonce ani $\tilde{m}(U)$ **8.49** není úplná **8.50** $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{1, 2; \{2, 3, 5\}; \{1, 3, 5\}; \emptyset; \{3, 5\}\}$ **8.52** $\frac{2\pi}{25}$ **8.54** X je $\tilde{m}$ -měřitelná **8.55** G ani H nejsou jordanovsky měřitelné **8.56** $m_i(X) = m_e(X) = 0$ **8.57** $\tilde{m}(A) = \tilde{m}(B) = 0$ **8.58** $G(\langle \vee, \Delta \rangle) = 0$ z axiomu aditivity. Míra úplná není, neboť existuje podmnožina $Z = \{\vee\}$ G -nulové množiny, která míru nemá. **8.59** Tvzení neplatí. Správná verze: $\mu(X \setminus Y) = \mu(X) - \mu(X \cap Y)$ a $\mathcal{A}$ musí být alespoň okruh. **8.60** A ano, B ne **8.61** $m_i(Y) = \frac{3}{4} \sqrt{3}R^4$ **8.62** generující funkce míry: $\varphi(x) = x$ a $\psi(y) = \Theta(y)y$ **8.63** ano

8.65 $\frac{a}{a^2+b^2}$ a $\frac{b}{a^2+b^2}$ **8.66** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ **8.67** $\ln(\frac{\beta}{\alpha})$ **8.68** $\arctg(\frac{\beta}{\alpha})$ **8.69** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\beta)$ **8.70** $a(\pi - 2\arctg(a)) + \ln(1 + a^2) - 2$ **8.71** $\ln(\frac{(a+b)^2}{4ab})$ **8.72** $2\ln(\frac{(2a)^a(2b)^b}{(a+b)^{a+b}})$ **8.73** $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}$ **8.74** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) e^{-|ab|}$ **8.75** $\frac{\pi}{|b|} \ln(|a| + |b|)$ **8.76** $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha)$ **8.77** $\frac{\pi}{2} \ln(\frac{b^2+1}{a^2+1})$ **8.78** $\frac{\sqrt{\pi}}{4} (\sqrt{b} - \sqrt{a})$ **8.79** $\frac{\pi}{2} \ln|\frac{q+r}{q+p}|$ **8.80** $\pi \arcsin(a)$ **8.81** $2\pi[(a+b)\ln(a+b) - a\ln(a) - b\ln(b)]$ **8.86** neexistuje **8.87** $\mu(B) = 8$ **8.88** $a)$ Jordanova míra neexistuje, neboť $A \notin \operatorname{Sub}(\mathcal{K}_2)$ $b)$ $\lambda(A) = 0$ **8.90** $a)$ Jordanova míra neexistuje, neboť $m_i(A) = 0$ a $m_e(A) = 1$ $b)$ $\lambda(A) = 0$ **8.91** neplatí **8.92** platí **8.94** $\mu(\langle 2, 3 \rangle) = 5, \mu(\operatorname{supp}(f)) = 60 < \infty$ a $(\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x) = -13$ **8.95** $\frac{1}{4} \ln(1 + \frac{4b^2}{a^2})$ **8.96** $\frac{\pi}{32a}$ **8.97** $\mu(M) = 40$ a $(\mathcal{L}) \int_E f(x, y) d\mu(x, y) = 788$ **8.98** $\frac{\pi}{a} \ln(\frac{a+b}{a+c})$ **8.99** $\frac{p}{p^2+q^2}$ **8.100** -12π **8.101** $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ **8.102** 50 **8.103** $\mu(E) = 114$ a $(\mathcal{L}) \int_E \omega(x, y) d\mu(x, y) = 114$ **8.104** $\frac{\pi}{2} \ln(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma})$ **8.105** $(\mathcal{L}) \int_E f(x) d\mu(x) = 6, \mu(0, 2) = 2, \mu(\langle -2, 7 \rangle) = 7$ a $\mu(\operatorname{supp}(f)) = 10$ **8.106** $\frac{1}{15} abc$ **8.107** $2a(1 + \ln(\frac{b}{a}))$, $a > 0$ a $b > 0$ **8.108** $\frac{1}{35} \pi abc$ **8.109** $\frac{\sqrt{\pi}}{8} (\frac{2}{a^{3/2}} - \frac{b^2}{a^{5/2}})$ **8.110** $h(x)$ je μ -měřitelná, $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = 48, (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) = 50, (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) = 48$ **8.111** $\lambda_3(E_a) = \pi^2 abR$, těžiště: $(0, \frac{1}{\pi}(\frac{a^2}{2R} + 2R))$ **8.112** $\frac{\pi}{2} \ln(1 + |a|) \operatorname{sgn}(a)$ **8.113** $\sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} a^{-n-1/2}$ **8.114** $8a^2b$ **8.115** $\frac{1}{2} \ln \frac{a^2+\gamma^2}{a^2+\beta^2}$ **8.116** 0 **8.117** ano **8.118** ano **8.119** ano **8.120** integrál diverguje **8.121** funkce ekvivalentní nejsou **8.122** $\mu_\sigma(S) = 10$ **8.124** 28 **8.126** 0 **8.129** $\frac{\pi^2}{4}$ **8.130** $-\frac{10}{e}$ **8.131** $e - 2 = 0.71828$ **8.132** $h(x) \in \mathcal{Z}_\mu$ a $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) = \frac{36}{55}$ **8.134** $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) = -9$ **8.135** funkce $g(x)$ a $h(x)$ nejsou μ -ekvivalentní **8.136** $(\mathcal{L}_1) \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) = 54$ a $g(x)$ je finitní, neboť $\mu(\operatorname{supp}(g)) = 27 < +\infty$ **8.137** $h(x) = |x|^{-1}$ není lebesgueovsky integrovatelná **8.138** $h(x) = |x|^{-1} \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}, \lambda)$

Literatura

- [1] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova – vydavatelství Karolinum, Praha 1993
- [2] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Praha 2004
- [3] V. Jarník: *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1984
- [4] V. Jarník: *Integrální počet (II)*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1955
- [5] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí rozšířené vydání)*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2011
- [6] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé rozšířené vydání)*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2009
- [7] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2012
- [8] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 1998
- [9] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 1999
- [10] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (II)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 2003
- [11] J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky (III)*, Matfyzpress MFF UK, Praha 2003
- [12] J. Mareš: *Algebra*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2014
- [13] J. Mikyška: *Asymptotické metody*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2008
- [14] K. Rektorys: *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, Praha 1995
- [15] L. Vrána: *Matematická analýza IV*, Ediční středisko ČVUT, Praha 1990

Index

- μ -měřitelná množina 50
- μ -ekvivalentní funkce 63
- μ -skoro všude 62
- σ -aditivita Lebesgueova integrálu 84
- σ -aditivní míra 19
- σ -aditivní množinová funkce 17
- σ -aditivní soustava množin 9
- σ -algebra 9
- σ -konečná míra 59
- σ -okruh 9
- $\tilde{m}$ -měřitelné množiny 36
- F -měřitelná množina 19
- F -neměřitelná množina 19
- F -nulová množina 19
- abstraktní Jordanova míra 36
- abstraktní Lebesgueův integrál 74
- abstraktní míra 28
- aditivita Lebesgueova integrálu 84
- aditivita soustavy množin 7
- aditivní množinová funkce 15
- alef jedna 139
- alef nula 139
- axiom aditivity 18
- axiom monotonie 18
- axiom nezápornosti 18
- axiom nulovosti 18
- axiom prázdné množiny 18
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci v horní mezi 110
- borelovská množina 12
- borelovský uzávěr soustavy 10
- Dirichletova funkce 114
- dirichletovská množina 140
- disjunktní množiny 137
- disjunktní posloupnost množin 137
- disjunktní sjednocení soustavy 8
- disjunktní soustava množin 8
- dolní řez funkce 60
- ekvivalentní funkce 63
- externí míra 33
- faktorová funkce 114
- faktorová skupina funkcí 114
- faktorový prostor funkcí 114
- Fatouova věta 82
- finitní funkce 67
- Fubiniova věta pro Lebesgueův integrál 90
- funkce (obecný pojem teorie Lebesgueova integrálu) 60
- funkce třídy $\mathcal{L}_p(G)$ 113
- Gaussův integrál 126
- generátor míry 24
- geometrická interpretace Lebesgueova integrálu 66
- geometrický význam Lebesgueova integrálu 97
- Heavisideova funkce 59
- horní řez funkce 60
- ideální míra 55
- integrální formule pro Jordanovu míru 41
- integrální formule pro Lebesgueovu míru 95
- interní míra 33
- invariance míry vůči posunutí 24
- jednoduchá funkce 66
- jordanovsky měřitelné množiny 36
- Jordanův okruh 36
- Jordanův-Peanův objem 36
- Jordanův-Peanův okruh 36
- kardinální číslo množiny 139
- klasická Lebesgueova míra 56
- klasická míra 28
- klasický Lebesgueův integrál 86
- klasický prostor s úplnou mírou 59
- konečná míra 59
- konečná množina 139
- konečně aditivní množinová funkce 15
- konečně aditivní soustava množin 7
- konvergence shora 70
- konvergence zdola 70
- kvadraticky integrabilní funkce 113
- kvadraticky integrabilní faktorová funkce 115
- Lebesgueova σ -algebra 55
- Lebesgueova míra 55
- Lebesgueova věta 82
- lemma o rozsáhlosti soustavy $\mathcal{S}_r$ 45
- Leviho věta pro řady 81
- Leviho věta 81
- linearita Lebesgueova integrálu (násobek) 77
- linearita Lebesgueova integrálu (součet) 78
- lokální majoranta 106
- měřitelná funkce 60
- minimální σ -okruh 10
- minimální okruh 9
- míra na soustavě 18
- míra 18
- množinová algebra 8
- množinová funkce 15
- množinový okruh 8
- mohutnost množiny 139
- monotonie Lebesgueova integrálu 79
- monotónní množinové funkce 18
- nespočetná množina 139
- nezápornost množinové funkce 18
- nosič funkce 67
- o konstrukci minimálního okruhu 11
- o měřitelnosti ekvivalentních funkcí 65
- osnova soustavy 33
- otevřený interval 139
- polookruh 10
- polouzavřený interval 139
- posunutí množiny o vektor 137
- potence množiny 8
- prezident soustavy 8
- prostor s úplnou mírou 59
- průnik množin 137
- reálná funkce (obecný pojem teorie Lebesgueova integrálu) 60
- reálná míra 19
- reálná množinová funkce 15
- regulární zobrazení 89
- restrikce míry 58
- rozdíl množin 137
- separabilita množinového rozdílu 10
- separabilní funkce 95
- sjednocení množin 137
- skoro všude 62
- soustava $\mathcal{H}_r$ 22
- soustava $\mathcal{K}_r$ 31
- soustava $\mathcal{S}_r$ 43
- soustava množin 7
- spočetná disjunktní posloupnost množin 137

spočetná množina 139
spočetně aditivní soustava množin 9
srovnávací kritérium 80
stejněměrná konvergence v horní mezi 110
substructure 33
symetrický doplněk množin 137
transfinitní posloupnost 13
úplná míra 22
uzavřenost na průniky 10
uzavřený interval 139
Venovy diagramy 138
věta o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu 79
věta o borelovském uzávěru 10
věta o derivaci integrálu podle parametru 103
věta o ekvivalentních funkcích 76
věta o ideální míře 55
věta o jordanovské měřitelnosti 37
věta o konstrukci borelovského uzávěru 13
věta o limitě integrálu s parametrem 99
věta o limitě zobecněného integrálu s parametrem 111
věta o měřitelnosti borelovských množin 53
věta o minimálním okruhu 10
věta o přenosu míry z polookruhu na minimální okruh 22
věta o separabilitě Lebesgueova integrálu 95
věta o spojitosti integrálu s parametrem 101
věta o úplnosti faktorového prostoru kvadraticky integrabilních funkcí 116
věta o vztahu integrálu a míry 86
věta o vztahu integrálu a míry 96
věta o závislosti axiomů míry na okruhu 19
věta o závislosti axiomů míry na polookruhu 19
vnější míra vytvořená mírou $\mu_\sigma(X)$ 48
vnější míra 33
vnitřní míra 33
vrchol transfinitní posloupnosti 13
vytvorující funkce míry 24
základní systém funkcí 67
základní věta o měřitelnosti funkce 62
zobecněná integrabilita 110
zobecněný Lebesgueův integrál 110
zvrhlý interval 140