

Cvičení 28.03, příklad č. 4: Vypočítejte integrál

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení: Integrál spočítáme standardním postupem, kde uvažujeme integraci po uzavřené polokružnici v horní polorovině se středem v počátku a poloměrem $R > 0$. Odpovídající křivku v $\mathbb{C}$ lze zapsat jako součet $\varphi_R + \psi_R$ křivky φ_R parametrizující úsečku od $-R$ do R a křivky ψ_R parametrizující horní polovinu kružnice o poloměru R , tzn.

$$\varphi_R(t) = t, \quad t \in [-R, R] \quad \text{a} \quad \psi_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi],$$

(nakreslete si obrázek).

V poslední části výpočtu ukáže, že platí

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = 0,$$

a proto je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz}_{=0} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_R + \psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz. \end{aligned}$$

Poslední výraz je integrál po uzavřené křivce, který spočítáme pomocí reziduové věty. Je-li $R > 1$, má integrand

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$$

dva singulární body uvnitř polokruhu $\varphi_R + \psi_R$, a to

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Oba jsou jednoduché póly f , a proto pro odpovídající rezidua máme

$$\operatorname{rez}_{z_1} f = \left. \frac{z^2 + 1}{\frac{d}{dz}(z^4 + 1)} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}}{4i}$$

a podobně

$$\operatorname{rez}_{z_2} f = \left. \frac{z^2 + 1}{\frac{d}{dz}(z^4 + 1)} \right|_{z=z_2} = \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4i}.$$

Celkem tedy pro každé $R > 1$ platí podle reziduové věty

$$\int_{\varphi_R + \psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{rez}_{z_1} f + \operatorname{rez}_{z_2} f) = \sqrt{2}\pi,$$

což je také hledaná hodnota integrálu ze zadání.

Zbývá dokázat, že

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = 0.$$

Pro $R > 1$ můžeme odhadovat

$$\left| \int_{\psi_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{R^2 e^{2it} + 1}{R^4 e^{4it} + 1} i R e^{it} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{R^2 + 1}{R^4 - 1} R dt = \pi R \frac{R^2 + 1}{R^4 - 1},$$

kde jsme použili obecně platné nerovnosti $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$. Majoranta, která nám vyšla, jde k nule, pokud $R \rightarrow \infty$, z čehož plyne také nulovost limity, kterou jsme chtěli dokázat.

Cvičení 28.15, příklad č. 7: Spočítejte integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt,$$

je-li

- a) $a > 1$,
- b) $-1 < a < 1$,
- c) $a = 1$.

Řešení: Nejprve integrál převedeme na komplexní integrál přes jednotkovou kružnici parametrizovanou:

$$z = \varphi(t) := e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Potom je

$$\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

a

$$dz = \dot{\varphi}(t)dt = ie^{it}dt,$$

neboli

$$dt = \frac{dz}{iz}.$$

Odtud dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = -\frac{1}{4i} \int_{\varphi} \frac{(z - z^{-1})^2}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{4i} \int_{\varphi} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(1 - az)(z - a)} dz.$$

Integrand je funkce

$$f(z) := \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(1 - az)(z - a)},$$

která má pól stupně 2 v bodě $z = 0$ a dva jednoduché póly v bodech $z = a$ a $z = 1/a$, pokud $a \notin \{0, 1\}$. Spočítáme rezidua:

$$\operatorname{rez}_0 f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \left. \frac{d}{dz} \right|_{z=0} \frac{(z^2 - 1)^2}{(1 - az)(z - a)} = -1 - \frac{1}{a^2},$$

$$\operatorname{rez}_a f = \lim_{z \rightarrow a} ((z - a)f(z)) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(1 - az)} = -1 + \frac{1}{a^2}$$

a

$$\operatorname{rez}_{1/a} f = \lim_{z \rightarrow 1/a} \left(\left(z - \frac{1}{a} \right) f(z) \right) = -\frac{1}{a} \lim_{z \rightarrow 1/a} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z - a)} = 1 - \frac{1}{a^2}.$$

Nyní rozlišíme jednotlivé situace.

a) Příklad $a > 1$: Singularity f , které leží uvnitř jednotkové kružnice φ , jsou $z = 0$ a $z = 1/a$. Proto je podle reziduové věty

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{rez}_0 f + \operatorname{rez}_{1/a} f) = -\frac{4\pi i}{a^2}$$

a pro původní integrál dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = -\frac{1}{4i} \int_{\varphi} f(z) dz = \frac{\pi}{a^2}.$$

b) Příklad $-1 < a < 1$: Předpokládejme nejdříve, že $a \neq 0$. Potom singularity f , které leží uvnitř jednotkové kružnice φ , jsou $z = 0$ a $z = a$. Podobě jako v předchozím je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = -\frac{1}{4i} \times 2\pi i (\operatorname{rez}_0 f + \operatorname{rez}_a f) = \pi.$$

Speciální případ $a = 0$ je buď možné spočítat přímo prostředky reálné analýzy, neboť pro $a = 0$ je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi,$$

nebo lze argumentovat spojitostí integrálu v bodě $a = 0$.

c) Je-li $a = 1$, potom

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{2 - 2 \cos t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 (t/2) dt$$

protože

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 (t/2) \quad \text{a} \quad \sin t = 2 \sin (t/2) \cos (t/2).$$

Dál už stačí použít obvyklé metody reálné analýzy, abychom ověřili, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 (t/2) dt = \pi.$$