Lebesgueův integrál

Nejprve stručně shrneme konstrukci Leb. integrálu. Tento teoretický úvod není zcela nezbytné znát pro výpočet příkladů. Situace je podobná jako u výpočtu limit, Riemannova integrálu, atd. - málokdy počítáme přímo z definice.

Výklad předbíhá „přednášku". Nenechte se odradit, pokud nebude konstrukce hned jasná - vstřebat ji si vyžádá čas.

A) Teoretická vsuvka - shrnutí (Danielovy) konstrukce Leb. integrálu

1) Krok 1 - stupňovité fce:

V celém výkladu bude $X = \mathbb{R}^n$ a I (resp. I_j, apod.) uzav. n-interval v $\mathbb{R}^n$, t.j.

$$I = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \; .$$

Def (třída stup. fcí $H(X)$):

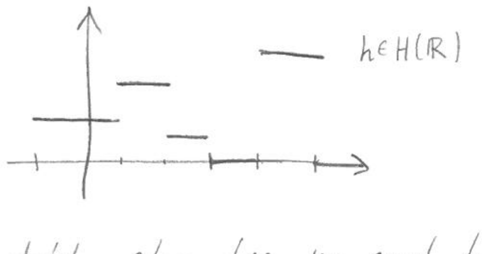
$$f \in H(X) \overset{def}{\iff} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R})(\exists I_1, \dots, I_m \text{ n-intervaly})\left(f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{I_j}\right)$$

Zde a dále χ_A je char. fce množ. $A \subset \mathbb{R}$, tj.

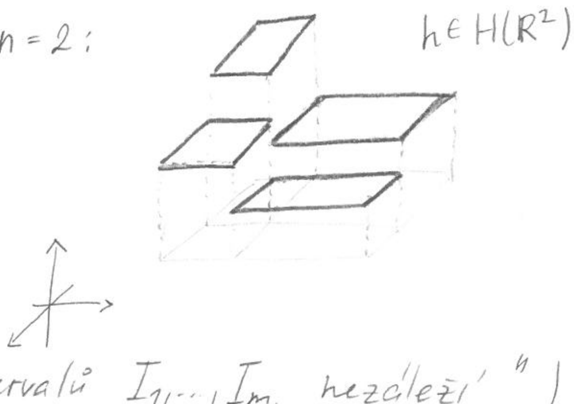
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Stup. fce:

n = 1:



n = 2:



(„Na hodnotách stup. fce na spol. hranicích intervalů $I_1, \dots, I_m$ nezáleží.")

Pozn.: Vybrané vlastnosti třídy $H(X)$ lze axiomatizovat a zavést abstraktní třídu $H(X)$ na abstr. množině $X \neq \emptyset$ (viz Def. 23.1, Wikiskripta)

Def. (Základní integrál): Nť $f \in H(X)$ tvaru $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{I_j}$. Def. fcionál $I : H(X) \to \mathbb{R}$:

$$If := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j V(I_j) ,$$

kde $V(I)$ je objem intervalu $I = \times_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, t.j.

$$V(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) .$$

Pozn.: Hodnota If nezávisí na volbě repre $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{I_j}$ (zjemňování intervalů, ...)

Def. (Množina Leb. míry 0): $Z \subset \mathbb{R}^n$ má Leb. míru 0 $\overset{def}{\iff}$ $\boxed{\text{značí } \mu(Z) = 0}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ nejvýše spočet. pokrytí Z n-intervaly $\{I_j\}$ tak, že $\sum_j V(I_j) < \varepsilon$.

Názvosloví (s.v.): Výrok $V(x)$ platí skoro všude (s.v.) na X $\overset{def}{\iff}$

$$(\exists Z \subset X, \mu(Z) = 0)(V(x) \text{ platí pro } \forall x \in X \setminus Z).$$

Příklady užití a značení:

i) $f \sim g \iff f = g$ s.v. $\iff (\exists Z \subset X, \mu(Z) = 0)(\forall x \in X \setminus Z)(f(x) = g(x))$.

ii) $h_n \nearrow f \iff \{h_n\}$ monot. aproximují zespodu f s.v.

$\iff (\exists Z \subset X, \mu(Z) = 0)(\forall x \in X \setminus Z)\left((\forall n \in \mathbb{N})(h_n(x) \leq h_{n+1}(x)) \ \& \ \lim_{n \to \infty} h_n(x) = f(x)\right)$

⋮

aj. (viz Def. 23.8, Wikiskripta)

<u>Věta</u>: Spočet. sjednocení množin Leb. míry 0 je množ. Leb. míry 0.

2) Krok 2 – třídy Λ^+ a L^+: Uvažujeme fce $f: X \equiv \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

<u>Def. (Třídy $\Lambda^+(X)$ a $L^+(X)$):</u>

$$f \in \Lambda^+(X) \overset{def}{\iff} (\exists \{h_n\}_{n \geq 1} \subset H(X))(h_n \nearrow f),$$

$$f \in L^+(X) \overset{def}{\iff} - \quad \| \quad - \quad \& \quad (\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(Ih_n \leq c).$$

<u>Pozn.:</u> $H(X) \subset L^+(X) \subset \Lambda^+(X)$.

<u>Def. (Rozšíření I na $\Lambda^+(X)$):</u> $f \in \Lambda^+(X)$, def.

$$If := \lim_{n \to \infty} Ih_n,$$

kde $\{h_n\} \subset H(X)$, $h_n \nearrow f$ (z def. $\Lambda^+(X)$).

<u>Pozn.:</u> Limita existuje (může být $+\infty$) a její hodnota nezávisí na volbě $\{h_n\}$.

<u>Pozn.:</u> $f \in L^+(X) \Rightarrow If \in \mathbb{R}$

$f \in \Lambda^+(X) \Rightarrow If \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3) Krok 3 – třídy Λ a L:

<u>Def. (třídy $\Lambda(X)$ a $L(X)$):</u>

$\varphi \in \Lambda(X) \overset{def}{\iff} \exists f, g \in \Lambda^+(X)$ a $f \in L^+(X)$ nebo $g \in L^+(X)$ tak, že $\varphi \sim f - g$,

(neurčitý výraz „$\infty - \infty$" jen na množ. míry 0)

$\varphi \in L(X) \overset{def}{\iff} \exists f, g \in L^+(X)$ tak, že $\varphi \sim f - g$.

Def. (Rozšíření I na Λ, Leb. integrál) : $\varphi \in \Lambda(X)$, $\varphi \sim f - g$, f, g z def. ↑

Def.
$$I\varphi := If - Ig.$$

I naz. Lebesgueův integrál a znač. $\boxed{I\varphi \equiv \int \varphi \equiv \int_X \varphi(x)\,dx}$.

Pozn.: Def. nezávisí na repre φ pomocí f, g.

Pozn.: $\varphi \in \Lambda(X) \Rightarrow I\varphi \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,
$\varphi \in L(X) \Rightarrow I\varphi \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti I : 1) Linearita : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \Lambda(X)$, pak
$$I(\alpha\varphi + \psi) = \alpha I\varphi + I\psi,$$
má-li PS smysl (tj. není typu „$\infty - \infty$“).

2) Monotonie: $\varphi, \psi \in \Lambda(X)$, $\varphi \leq \psi$ s.v. $\Rightarrow I\varphi \leq I\psi$.
Spec. $\varphi \sim \psi \Rightarrow I\varphi = I\psi$.

3) $\varphi \in \Lambda(X)$, $\varphi \geq 0$ s.v. $\Rightarrow I\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \sim 0$.

4) Krok 4 - měřitelné fce a množiny :

Def. (Měřit. fce $\mathcal{M}(X)$) : $\varphi : X \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná, zn. $\varphi \in \mathcal{M}(X) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$$\exists \{h_n\} \subset H(X),\ h_n \to \varphi \text{ s.v.}$$

Pozn.: $\Lambda(X) \subset \mathcal{M}(X)$

Věta : $\Lambda(X) \cap \{\varphi \geq 0 \text{ s.v.}\} = \mathcal{M}(X) \cap \{\varphi \geq 0 \text{ s.v.}\}$.

Def. (Měřit. množ.) : $A \subset X$ měřitelná $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \chi_A \in \mathcal{M}(X)$.

Def. (Míra množiny) : $A \subset X$ měřit., $\mu(A) := I\chi_A$ (víme $\chi_A \in \Lambda(X)$).

<u>Pozn.:</u> $\mu(A)$ = „zobecněný" objem množ. A"

Je-li $A = I$ n-interval, je $\mu(I) = V(I)$, tj. to, co bych chtěl nazývat objem I.

<u>Pozn.:</u> $\exists$ neměřitelná množ. (i funkce) $\Leftarrow$ axiom výběru.

5) Krok 5 – Leb. integrál na množ. $A \subset X$:

Je-li $A \subset X$ a $f : A \to \mathbb{R}^*$, dodef. f nulou na $X \setminus A$:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

<u>Def. (třídy $\mathcal{M}(A), \Lambda(A), L(A)$):</u> $f : A \to \mathbb{R}^*$, $A \subset X$

- $f \in \mathcal{M}(A) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f_A \in \mathcal{M}(X)$ ... <u>f je měřitelná na A</u>,
- $f \in \Lambda(A) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f_A \in \Lambda(X)$ .... <u>f má integrál na A</u>, (může být $\pm\infty$)
- $f \in L(A) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f_A \in L(X)$ .... <u>f je integrabilní na A</u>. (konečn. integ.)

<u>Def. (Leb. integrál na $A \subset X$):</u> $f \in \Lambda(A)$, def.

$$\int_A f \equiv \int_A f(x)\,dx := I f_A .$$

B) Tvrzení zásadní pro praktické počítání integrálů:

Stručně řečeno zásadní nástroje pro výpočet integrálu jsou následující 3:

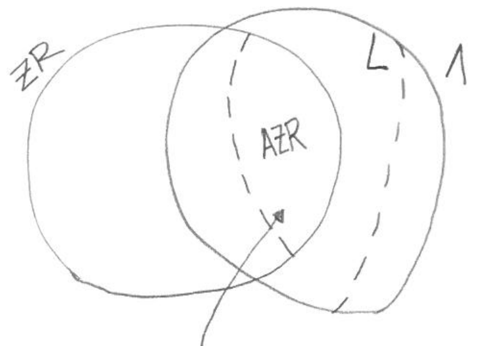
1) Techniky pro výpočet Riemannova integrálu fce 1 proměnné (MAA2).
2) Fubiniho věta – vícerozměrný integrál (v $\mathbb{R}^n$) převede na výpočet několika jednorozměrných integr. (v $\mathbb{R}$)
3) Věta o substituci

Ad 1) Vztah Riemannova & Lebesgueova int. (na $\mathbb{R}$):

Věta: f má na (a,b) AK Riem. int. $\Rightarrow$ $f \in L(a,b)$ a oba integrály mají stejnou hodnotu:

$$\mathcal{R}\text{-}\int_a^b f = \mathcal{L}\text{-}\int_a^b f .$$

Obecně:
(na (a,b))



(„My budeme téměř vždy zde.")

(„Výhody Leb. integr. mají zejména teoretický význam (ale zásadní!).")

Př. (Dirichletova fce):

- $\chi_{\mathbb{Q}}$ není na $(0,1)$ Riem. integrabilní (MAA2)
- $\chi_{\mathbb{Q}}$ je na $(0,1)$ Leb. integrabilní a $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} = 0$.

  $\mathbb{Q}$ = spočet. sjednocení jednobodových množin ≡ množ. Leb. míry 0

  $\Rightarrow \mu(\mathbb{Q}) = 0$ a $\chi_{\mathbb{Q}} \sim 0 \Rightarrow \int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} = \int_0^1 0 = 0$.

Př. (jen ilustrace bez detailů):

- $$\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{zobec. Riem.}} \equiv \lim_{K\to\infty} \underbrace{\int_0^K \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{Riem.}} \underbrace{=}_{\text{není jednoduché}} \frac{\pi}{2}$$

  $\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \in ZR(\mathbb{R}_+)$.

- $\frac{\sin x}{x} \notin \Lambda(\mathbb{R}_+)$.

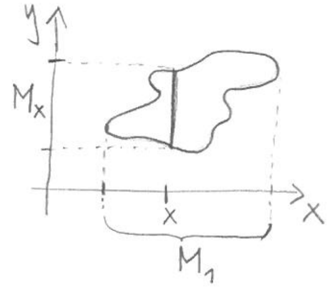
ad 2) Fubiniho věta:

Věta (Fubini): $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ měřit., $f \in L(M)$, potom („stručně")

$$\int_M f = \int_{M_1} \left(\int_{M_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{M_2} \left(\int_{M_y} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

kde $M_x = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in M \}$

$M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \exists y \in \mathbb{R}^n, (x,y) \in M \}$



a

$M_y = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in M \}$

$M_2 = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m, (x,y) \in M \}$

Pozn.: K ověření předp. $f \in L(M)$ stačí ukázat

$$\int_{M_1} \left(\int_{M_x} |f(x,y)|\, dy \right) dx < \infty \quad \text{nebo} \quad \int_{M_2} \left(\int_{M_y} |f(x,y)|\, dx \right) dy < \infty$$

(„Většinou se to lépe ukazuje než přímo $f \in L(M)$.“)

jednoduchý
Př.: $M = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_M \sin(x+y)\, dx\, dy \overset{F}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(x+y)\, dy \right) dx$$

$$\text{nebo} \overset{F}{=} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin(x+y)\, dx \right) dy = *$$

$$* = \int_0^{\pi} \left[-\cos(x+y) \right]_{x=0}^{2\pi} dy = \int_0^{\pi} \Big(-\underset{\cos y}{\underset{\shortparallel}{\cos(2\pi+y)}} + \cos y \Big) dy$$

$$= \int_0^{\pi} 0\, dy = \underline{\underline{0}}$$

⋮

Dál si propočítejte př. 12.1–4 z poznámek R.F.

⋮

Ad 3) Věta o substituci: „Lze zformulovat i jinak."

Věta: $H \subset \mathbb{R}^n$ otev., $\varphi: H \to \mathbb{R}^n$ regulární a prosté a $f \in L(\varphi(H))$. Potom $f \circ \varphi \cdot |J_\varphi| \in L(H)$ a platí

$$\boxed{\int_{\varphi(H)} f(x)\,dx = \int_H f(\varphi(t))\,|J_\varphi(t)|\,dt.} \qquad (*)$$

Pozn.: i) $|J_\varphi|$ je absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice φ

ii) Substituční vztah $(*)$ lze také napsat s množinou H nahrazenou něj. množinou $M \subset H$, která nemusí být otevřená! Je ale třeba zaručit $\mu(H \setminus M) = 0$. To se objevuje (často mlčky) v příkladech.

(12.5) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$

V integrálu $\int_M f(x,y)\,dx\,dy$ „provedte polární transformaci".

Detailně postup (později už si detaily odpustíme):

i) $\int_M f = \int_{M^\circ} f$, protože $\mu(M \setminus M^\circ) = 0$
↑ Leb. míra v $\mathbb{R}^2$

ii) φ: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$x^2 + y^2 < a^2 \iff \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) < a^2$

$\rho < a$

[měl jsem prohodit $\rho \leftrightarrow \varphi$]

~~$\Phi = \varphi$~~
~~zobr. do věty o substituci~~

$$\psi : (0,a) \times (-\pi,\pi) \longrightarrow M^0 \setminus P_\pi$$ reg. a prosté

$\uparrow$ vyjmutí kvůli regularitě

iii) $\int_{M^0} f = \int_{M^0 \setminus P_\pi} f$, protože opět $\mu(P_\pi) = 0$.

iv) $$J_\psi(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \dots = \rho > 0$$

v) Aplikace věty o substituci:

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy \overset{i),iii)}{=} \int_{M^0 \setminus P_\pi} f(x,y)\,dx\,dy \overset{ii)}{=} \int_{\psi((0,a)\times(-\pi,\pi))} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\overset{v}{=} \int_{(0,a)\times(-\pi,\pi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{příp. Fubini}}}{=} \int_0^a \left(\rho \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,d\varphi\right) d\rho$$

Podobně si propočítejte př. 12.6 – 9 z poznámek R.F.

⋮