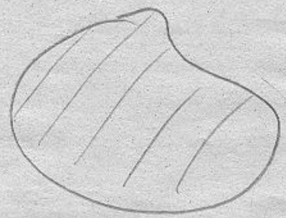
X. VÁZANÉ EXTRÉMY

3. EXTRÉMY NA UZAVŘENÝCH MNOŽINÁCH (KOMPAKT)

POZN. Extrémy spojitých funkcí.



$M = \overline{M}$

Spojitá funkce nabývá na kompaktu svého inf i sup.
(min) (max).

STRATEGIE: uvnitř M^0: klasicky

hranice ∂M: vázané extrémy nebo hranice = varieta (předpoklad)

(v případech p.č. hladké variety → vyšetření po částech)

(10.6) $u(x,y) = x^2+y^2-12x+16y$ na $M \equiv x^2+y^2 \leq 25$

1. volný extrém a $M \equiv x^2+y^2 < 25$ (25)

$$u' = \begin{pmatrix} 2x-12 \\ 2y+16 \end{pmatrix} = \Theta \rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \notin M^0 \quad 36+64 > 25$$

není stacionární bod uvnitř M.

2. vázaný extrém na $\partial M \equiv x^2+y^2 = 25$

$$\Omega = x^2+y^2-12x+16y - \lambda(x^2+y^2-25)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \Omega &= 2x-12 - 2x\lambda &= 0 \\ \partial_y \Omega &= 2y+16 - 2y\lambda &= 0 \\ & x^2+y^2-25 &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad x = \frac{6}{1-\lambda}, \quad y = \frac{-8}{1-\lambda}$$

$$36+64 = 25(1-\lambda)^2$$

$$4 = (1-\lambda)^2 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2$$

$$\lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = 3$$

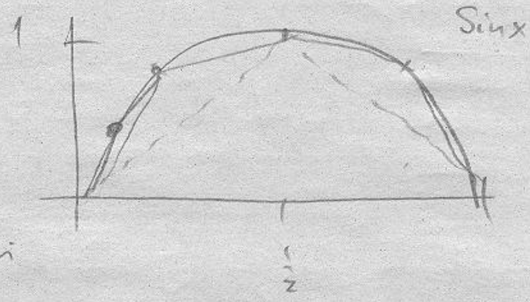
body $\overset{①}{(3,-4)}$, $\overset{②}{(-3,4)}$ $\quad \Omega''(1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ PD minimum

$$\Omega'' = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

$\Omega''(2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ND maximum

POZN. umíme variety alespoň třídy $C^{(2)}$

Weierstrassova funkce

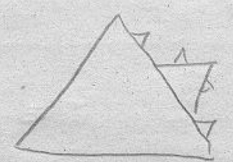


$\to \infty$ p.č. lomených čar

spojitá, nemá nikde derivaci

$\to$ nelze použít techniku Λ

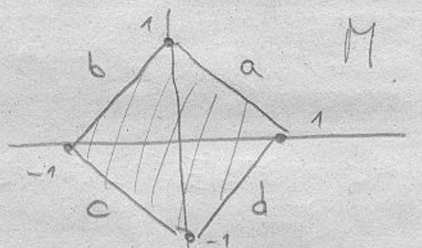
POZN. Fraktální množiny



hranice není hladká varieta

$\to$ má ∞ délku, ale ohraničuje omezenou množinu $\Rightarrow$ kompakt

(10.7) $u(x,y) = x^2 - xy + y^2$ $\quad M \equiv |x| + |y| \leq 1$



I. volný extrém

$$u' = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix} = \Theta \Leftrightarrow x = y = 0 \qquad [0,0] \in M^0$$

$$u'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad PD \Rightarrow$$ v $[0,0]$ máme (lokální) minimum.

II. hranice M: vázaný extrém na 4 otevřených hranách a, b, c, d

+ 4 body

a) segment $a \equiv x + y = 1 \qquad x, y \in (0,1)$

$$\Lambda_a = x^2 + y^2 - xy - \lambda_a (x+y)$$

(1) $\partial_x \Lambda_a = 2x - y - \lambda_a = 0 \qquad \lambda_a = 2x - y$

(2) $\partial_y \Lambda_a = 2y - x - \lambda_a = 0 \qquad 2y - x - 2x + y = 0$

(3) $x + y = 1 \qquad x = 1 - y$

$\Big\}$ $3y + 3y - 3 = 0$

$y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2} \quad \lambda_a = \frac{1}{2}$

40.

$\Lambda''_a = \Lambda'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ vždy PD — lokální minimum v $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

b) segment $b \equiv -x+y=1$ $x \in (-1, 0)$ $y \in (0, 1)$

rovnou dosadíme $x = y-1$

$\tilde{u}(y) = y^2 - 2y + 1 + y^2 - y^2 + y = y^2 - y + 1$

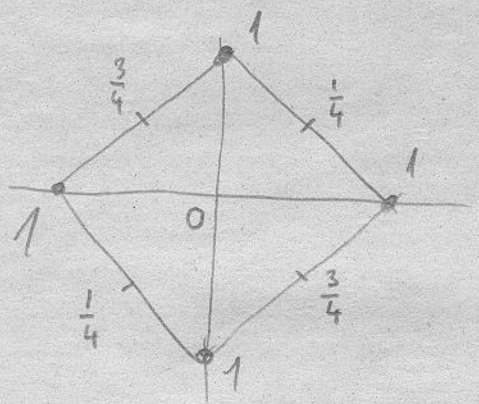
$\tilde{u}'(y) = 2y - 1$ $y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\tilde{u}''(y) = 2 > 0$ lokální minimum v $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $u = \frac{3}{4}$

c) + d) ze symetrie → opět lokální minima

e) 4 body: $(0,1), (0,-1), (-1,0), (1,0)$: $u = 1$

shrnutí:



maximum na M: ve vrcholech (ze [illegible])

minimum na M: v počátku

lokální minima: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

(10.8) $u(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - x - y - z - 2xy + 1$ $M \equiv \overset{3}{\times} [0,1]$

I. volné extrémy:

$u' = \begin{pmatrix} 4x - 1 - 2y \\ 4y - 1 - 2x \\ 2z - 1 \end{pmatrix} = \Theta \Leftrightarrow$ $8y - 2 - 1 - 2y = 0$ $y^* = \frac{1}{2}$

$2x = 4y - 1$ $x^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$z^* = \frac{1}{2}$

$u'' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ PD → minimum $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

II. vázané extrémy: $\partial M \equiv$ 8 vrcholů krychle

6 stěn (3 svislé stěny)

12 hran (3 rovnoběžné)

41.

8 vrcholů: $u(1,0,0) = u(0,1,0) = u(1,1,0) = u(0,1,1) = 2$

$u(0,0,0) = u(1,1,0) = u(0,0,1) = u(1,1,1) = 1$

1. stěny: $y=0$: $\Lambda_1 = 2x^2+2y^2+z^2-x-y-z-2xy+1-\lambda_1 y$

$\partial_x \Lambda_1 = 4x-1-2y = 0$ $\quad x=\frac{1}{4}$ $\quad u\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

$\partial_y \Lambda_1 = 4y-1-2x-\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_1 = -\frac{3}{2}$

$\partial_z \Lambda_1 = 2z-1 = 0$ $\quad z=\frac{1}{2}$

$y=0$

$\Lambda'' = \Lambda_1'' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ PD $\to$ minimum

2. stěny: $z=0$: $\Lambda_2 = 2x^2+2y^2+z^2-x-y-z-2xy+1-\lambda_2 z$

$\partial_x \Lambda_2 = 4x-1-2y=0$ $\quad x=\frac{1}{2}$

$\partial_y \Lambda_2 = 4y-1-2x=0$ $\quad y=\frac{1}{2}$ $\quad u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{2}$

$\partial_z \Lambda_2 = 2z-1-\lambda_2 = 0$ $\quad \lambda_2 = -1$

$z=0$

3. stěny: $x=0$: $\Lambda_3 = 2x^2+2y^2+z^2-x-y-z-2xy+1-\lambda_3 x$

$\partial_x \Lambda_3 = 4x-1-2y-\lambda_3 = 0$ $\quad x=0$

$\partial_y \Lambda_2 = 4y-1-2x = 0$ $\quad y=\frac{1}{4}$ $\quad u\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

$\partial_z \Lambda_2 = 2z-1 = 0$ $\quad z=\frac{1}{2}$

$\lambda_3 = -\frac{3}{2}$

4. stěna: $y=1$: $\Lambda_4 = u - \lambda_4 y$

$\partial_x \Lambda_4 = 4x-1-2y = 0$ $\quad x=\frac{3}{4}$ $\quad u\left(\frac{3}{4},1,\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

$\partial_y \Lambda_4 = 4y-1-2x-\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_1 = \frac{3}{2}$

$\partial_z \Lambda_4 = 2z-1 = 0$ $\quad z=\frac{1}{2}$

5. stěna: $z=1$: $\Lambda_5 = u - \lambda_5 z$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{1}{2}$ $\quad z=1$ $\quad u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) = \frac{1}{2}$

6. stěna: $x=1$: $\Lambda_6 = u - \lambda_6 x$

$x=1$ $\quad y=\frac{3}{4}$ $\quad z=\frac{1}{2}$ $\quad u\left(1,\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

42.

Závěr: minimum je $u\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$

maximum je ve vrcholech $u\left[(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,1,1)\right] = 2$