

13 Plošné integrály 1. a 2. druhu

Příklad 13.9. Spočítejte povrch koule o poloměru $a > 0$.

Výsledek:

$$4\pi a^2$$

Příklad 13.10. Spočítejte povrch Vivianiho tělesa V , tj. povrch plochy, která je hranicí množiny

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\},$$

kde $a > 0$.

Výsledek:

$$2\pi a^2 = (2\pi - 4)a^2 [\text{„sférická část“}] + 4a^2 [\text{„válcová část“}]$$

Příklad 13.11. Spočítejte plošný integrál 1. druhu

$$\int_M \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} dS,$$

kde M je elipsoid

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

a $a, b, c > 0$.

Výsledek:

$$\frac{4}{3}\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Příklad 13.12. Spočítejte plošný integrál 2. druhu

$$\int_M (x^2 + y^2) dx dy,$$

kde M je kruh

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge z = 0\}$$

s orientací danou jednotkovým normálovým vektorem $(0, 0, -1)$ a $R > 0$.

Výsledek:

$$-\frac{\pi R^4}{2}$$

Příklad 13.13. Spočítejte plošný integrál 2. druhu

$$\int_M x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

kde M je sféra

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

s orientací určenou vnější normálou a $a > 0$.

Výsledek:

$$4\pi a^3$$

Příklad 13.14. Spočítejte předchozí příklad aplikací Gaussovy věty.

Výsledek:

$$4\pi a^3 \quad (\text{překvapivě:})$$

Příklad 13.15. Spočítejte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\varphi} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

kde φ je šroubovice daná parametrizací

$$\varphi(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t \right), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

a $a, h > 0$, dvojím způsobem: a) přímo, b) aplikací Stokesovy věty.

Výsledek:

$$\frac{h^3}{12}$$

Další příklady k procvičování: Děmidovič, Kapitola VIII, § 14, 15, 16.