

14 Komplexní analýza - 1. část

Příklad 14.1. *Spočítejte*

$$\ln(\sqrt{3} + i).$$

Výsledek:

$$\ln 2 + \frac{\pi}{6}i$$

Příklad 14.2. *Spočítejte*

$$\ln_6(\sqrt{3} + i).$$

Výsledek:

$$\ln 2 + \frac{13}{6}\pi i$$

Příklad 14.3. *Najděte všechna řešení rovnice $\cos z = 2$ v $\mathbb{C}$.*

Výsledek:

$$z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 14.4. *Rozhodněte o diferencovatelnosti funkce*

$$f(z) = ix + y,$$

kde $z = x + iy$.

Výsledek:

Není diferencovatelná v žádném bodě.

Příklad 14.5. *Rozhodněte o diferencovatelnosti funkce*

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

kde $z = x + iy$.

Výsledek:

Je diferencovatelná v každém bodě, $f'(z) = 2z$.

Příklad 14.6. *Spočítejte integrál*

$$\int_{\varphi} \bar{z} dz,$$

kde $\varphi(t) = t + 2it$, $t \in [0, 1]$.

Výsledek:

$$\frac{5}{2}$$

Příklad 14.7. *Spočítejte integrál*

$$\int_{\varphi} (1 - iz) dz,$$

kde φ je hladká křivka s počátečním bodem 1 a koncovým bodem $-i$.

Výsledek:

-1 , nezávisle na křivce

Příklad 14.8. Spočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z-a} dz,$$

je-li

- a) $a \notin \overline{\text{int } \varphi}$ a φ je Jordanova křivka třídy C^1 libovolné orientace.
- b) $a \in \text{int } \varphi$ a φ je kladně orientovaná Jordanova křivka třídy C^1 .
- c) Rozmyslete si variantu (b) pro případ, kdy φ je uzavřená ale ne nutně jednoduchá křivka. Načrtněte si nějakou jednu takovou křivku a s pomocí (b) nalezněte hodnotu integrálu.

Výsledek:

- a) 0, b) $2\pi i$, c) výsledek je z množiny $2\pi i\mathbb{Z}$ v závislosti na křivce

Příklad 14.9. Pouze s použitím výsledku předchozího příkladu spočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)} dz,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice daná rovnicí $|z|=2$.

Výsledek:

$$4\pi i$$