

## 14 Komplexní analýza - 2. část

---

**Příklad 14.10.** Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{2z - 5}$$

do Laurentovy řady se středem v bodě  $z_0 = 0$  a určete mezikruží konvergence.

**Výsledek:**

$$f(z) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n z^n, \quad |z| < \frac{5}{2}$$

**Příklad 14.11.** Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

do Laurentovy řady se středem v bodě  $z_0$  a určete mezikruží konvergence, je-li

a)  $z_0 = 0$ ,

b)  $z_0 = 1$ ,

c)  $z_0 = \infty$ .

V případě (c) rozvíjejte funkci  $g(w) := f(1/w)$  do Laurentovy řady se středem v  $w_0 = 0$ .

**Výsledek:**

a)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1,$$

b)

$$f(z) = - \sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1,$$

c)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(2^{-n-1} - 1\right) z^n, \quad |z| > 2$$

**Příklad 14.12.** Rozviňte funkci

$$f(z) = e^{z+1/z}$$

do Laurentovy řady se středem v bodě  $z_0 = 0$  a určete mezikruží konvergence.

**Výsledek:**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=\max(0, -n)}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \right) z^n, \quad |z| > 0$$

**Příklad 14.13.** Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

do Laurentovy řady se středem v bodě  $z_0 = 1$  a určete mezikruží konvergence.

**Výsledek:**

$$f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n (2n^2 + 6n + 8 - 2^{-n}) (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1$$

**Příklad 14.14.** Spočítejte rezidua v singulárních bodech funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

a aplikujte reziduovou větu na integrál

$$\int_{\varphi} f(z) dz,$$

kde  $\varphi$  je záporně orientovaná kružnice daná rovnicí  $|z-1|=1$ .

**Výsledek:**

$$\operatorname{Rez}_f e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Rez}_f e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Rez}_f e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{1+i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Rez}_f e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}},$$

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \frac{i\pi}{\sqrt{2}}$$

**Příklad 14.15.** Spočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{z}{e^{iz^2}-1} dz,$$

kde  $\varphi$  je záporně orientovaná kružnice daná rovnicí  $|z|=3$ .

**Výsledek:**

$$-6\pi$$

**Příklad 14.16.** Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t},$$

kde  $a > 1$ .

**Výsledek:**

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

**Příklad 14.17.** Přejdem ke komplexní integraci spočítejte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+5}.$$

**Výsledek:**

$$\frac{2\pi}{\sqrt{19}}$$

**Příklad 14.18.** Spočítejte Dirichletův integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Výsledek:**

$$\frac{\pi}{2}$$

**Příklad 14.19.** Spočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

**Výsledek:**

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$