DISJUNKTNÍ DOPLNĚK K PREZENTACÍM DOKTORA OBERHUBERA

WIKI SKRIPTUM

Obsah

Date: 2. října 2019.

Značení

Značka	Popis
$\mathbb{A}$	matice
Θ	nulová matice
$\mathbb{I}$	matice identity
$\mathbb{R}^{m,n}, \mathbb{C}^{m,n}$	prostor reálných, komplexních matic rozměru $m \times n$
$\mathbb{A}_{ij}$	ij - tý prvek matice
$\vec{x}_i$	i - tý prvek vektoru
$\sigma(\mathbb{A})$	spektrum matice
$\rho(\mathbb{A})$	spektrální poloměr matice
$\nu_g(\lambda)$	geometrická násobnost vlastního čísla λ
$\nu_a(\lambda)$	algebraická násobnost vlastního čísla λ
$\vec{x}$	vektor
$\vec{0}$	nulový vektor
$\vec{x}^T, \mathbb{A}^T$	transpozice vektoru, matice
$\mathbb{A}^{-1}$	inverzní matice
$\vec{x}^*, \mathbb{A}^*$	hermitovsky sdružený vektor, matice
$\langle\vec{x}\|\vec{y}\rangle$	skalární součin vektorů
$\\|\vec{x}\\|$	norma vektoru
$\hat{n}$	$\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
$\hat{n}^0$	$\hat{n} \cup \{0\}$
H_x	Okolí bodu x
H_x^ε	ε-okolí bodu x
$\mathcal{C}(M)$	třída všech funkcí na množině M spojitých
$\mathcal{C}^p(M)$	třída všech funkcí na množině M spojitě diferencovatelných do řádu p
D_f	Definiční obor funkce f
∇	operátor nabla

Todo list

2. Opakování a doplnění znalostí z lineární algebry

2.1. Trojúhelníkové matice.

Věta 2.22. Nechť jsou $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní (resp. horní) trojúhelníkové matice. Pak matice $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ je dolní (resp. horní) trojúhelníková. Dále pak platí:

$$\forall i \in \hat{n}, \mathbb{C}_{ii} = \mathbb{A}_{ii}\mathbb{B}_{ii}$$

Důkaz. Protože jsou matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ dolní trojúhelníkové, platí $\mathbb{A}_{ik} = 0,\ \forall i < k$ a $\mathbb{B}_{kj} = 0,\ \forall k < j$. Tudíž:

$$\mathbb{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} = \sum_{k=j}^{i} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj}$$

což je rovno 0 pro $i < j$ a $\mathbb{A}_{ii}\mathbb{B}_{ii}$ pro $i = j$. Důkaz pro horní trojúhelníkové matice je obdobný. □

Věta 2.23. Nechť je $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární dolní (resp. horní) trojúhelníková matice. Pak matice $\mathbb{A}^{-1}$ je dolní (resp. horní) trojúhelníková. Dále pak platí:

$$\forall i \in \hat{n},\ (\mathbb{A}^{-1})_{ii} = (\mathbb{A}_{ii})^{-1} = \frac{1}{\mathbb{A}_{ii}}$$

Důkaz. Označíme $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$ a vyjdeme ze vztahu $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$. Protože je matice $\mathbb{A}$ dolní trojúhelníková a regulární, platí $\mathbb{A}_{ik} = 0,\ \forall i < k$ a $\mathbb{A}_{ii} \neq 0,\ \forall i \in \hat{n}$. Proto:

$$\mathbb{I}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj}$$

(1) $\mathbb{B}$ dolní trojúhelníková
indukcí podle i při pevném j
- $i = 1,\ 1 < j$

$$\mathbb{I}_{ij} = 0 = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} = \sum_{k=1}^{1} \mathbb{A}_{1k}\mathbb{B}_{kj} = \underbrace{\mathbb{A}_{11}}_{\neq 0}\mathbb{B}_{1j} \Rightarrow \mathbb{B}_{1j} = 0,\ \forall j > 1$$

- $i \to i+1,\ i+1 < j$
Indukční předpoklad: $\mathbb{B}_{kj} = 0,\ \forall k \leq i$

$$\mathbb{I}_{i+1,j} = 0 = \sum_{k=1}^{i+1} \mathbb{A}_{i+1,k}\mathbb{B}_{kj} = \sum_{k=i+1}^{i+1} \mathbb{A}_{i+1,k}\mathbb{B}_{kj} = \underbrace{\mathbb{A}_{i+1,i+1}}_{\neq 0}\mathbb{B}_{i+1,j} \Rightarrow \mathbb{B}_{i+1,j} = 0,\ \forall j > i+1$$

(2) Prvky na diagonále $\mathbb{B}$
Jelikož je matice $\mathbb{B}$ dolní trojúhelníková, plyne přímo z 2.22:

$$\mathbb{I}_{ii} = 1 = \mathbb{A}_{ii}\mathbb{B}_{ii} \Rightarrow \mathbb{B}_{ii} = \frac{1}{\mathbb{A}_{ii}}$$

Důkaz pro horní trojúhelníkové matice je obdobný. □

2.2. Rozklad matice na horní a dolní trojúhelníkovou.

Věta 2.24. Každou silně regulární matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru součinu:

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R}$$

kde:

- $\mathbb{L}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále
- $\mathbb{D}$ je diagonální matice
- $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále

Důkaz. (1) existence
Důkaz indukcí podle n
- $n = 1$
$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{11}) = \mathbb{I}(\mathbb{A}_{11})\mathbb{I}$, tedy $\mathbb{L} = \mathbb{I}$ a $\mathbb{R} = \mathbb{I}$

- $n \to n+1$
  Označíme
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}' & \vec{v} \\ \vec{u}^T & \alpha \end{pmatrix}$$
  kde $\mathbb{A}' \in \mathbb{C}^{n,n}$ a díky indukčnímu předpokladu můžeme rozložit $\mathbb{A}' = \mathbb{L}'\mathbb{D}'\mathbb{R}'$
  Obdobně označíme i matice $\mathbb{L}$, $\mathbb{D}$ a $\mathbb{R}$ a chceme dokázat
$$\begin{pmatrix} \mathbb{L}' & \vec{0} \\ \vec{l}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{D}' & \vec{0} \\ \vec{0}^T & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{R}' & \vec{r} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}'\mathbb{D}' & \vec{0} \\ \vec{l}^T\mathbb{D}' & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{R}' & \vec{r} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbb{L}'\mathbb{D}'\mathbb{R}' & \mathbb{L}'\mathbb{D}'\vec{r} \\ \vec{l}^T\mathbb{D}'\mathbb{R}' & \vec{l}^T\mathbb{D}'\vec{r} + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}' & \vec{v} \\ \vec{u}^T & \alpha \end{pmatrix}$$
  Chceme tedy určit $\vec{l}$, $\vec{r}$ a d. Protože je $\mathbb{A}$ silně regulární, je $\mathbb{A}'$ v každém kroku regulární a tedy i $\mathbb{L}'$, $\mathbb{D}'$ a $\mathbb{R}'$ jsou regulární. Upravíme $\mathbb{L}'\mathbb{D}'\vec{r} = \vec{v}$ a tím určíme $\vec{r} = (\mathbb{L}'\mathbb{D}')^{-1}\vec{v}$. Obdobně
$$\vec{l}^T\mathbb{D}'\mathbb{R}' = \vec{u}^T \Rightarrow \vec{l} = ((\mathbb{D}'\mathbb{R}')^T)^{-1}\vec{u}$$
$$d = \alpha - \vec{l}^T\mathbb{D}'\vec{r}$$

(2) jednoznačnost
Důkaz sporem, předpokládáme, že existují 2 různé rozklady $\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{D}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{D}_2\mathbb{R}_2$. Úpravou dostaneme
$$\mathbb{D}_1\mathbb{R}_1 = (\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2\mathbb{D}_2\mathbb{R}_2$$
$$\mathbb{D}_1\mathbb{R}_1(\mathbb{R}_2)^{-1} = (\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2\mathbb{D}_2$$
kde $\mathbb{D}_1\mathbb{R}_1(\mathbb{R}_2)^{-1}$ je horní trojúhelníková matice a $(\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2\mathbb{D}_2$ je dolní trojúhelníková matice podle 2.22 a 2.23. Z toho plyne, že $(\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2$ je diagonální s jedničkami na diagonále, tedy upravujeme
$$(\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I}$$
$$(\mathbb{L}_1)^{-1}\mathbb{L}_2 = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$$
A obdobně
$$\mathbb{R}_1(\mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$$
$$\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2$$
□

Poznámka. Čísla na diagonále matice $\mathbb{D}$ z 2.24 **nejsou** vlastními čísly matice $\mathbb{A}$ (jsou to pivoty GEM, viz 4.5).

2.3. **Rozklady matic.**

Věta 2.34. Householderova reflekční matice je hermitovská a unitární.

Důkaz. (1) Hermitovskost ($\mathbb{H}^*(\vec{w}) = \mathbb{H}(\vec{w})$)
$$\mathbb{H}^*(\vec{w}) = (\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)^* = \mathbb{I}^* - 2(\vec{w}\vec{w}^*)^* = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^* = \mathbb{H}(\vec{w})$$
(2) Unitarita ($\mathbb{H}^*(\vec{w}) = \mathbb{H}^{-1}(\vec{w})$)
Díky hermitovskosti matice a vztahu $\vec{w}^*\vec{w} = \langle\vec{w}|\vec{w}\rangle = \|\vec{w}\|^2 = 1$ platí:
$$\mathbb{H}(\vec{w})\mathbb{H}^*(\vec{w}) = \mathbb{H}(\vec{w})\mathbb{H}(\vec{w}) = \mathbb{I} - 4\vec{w}\vec{w}^* + 4\vec{w}\vec{w}^*\vec{w}\vec{w}^* = \mathbb{I}$$
□

Věta 2.35 (Unitární matice zachovává normu)**.** Nechť $\mathbb{U}$ je unitární matice. Pak platí:
$$\|\mathbb{U}\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$$
Pro libovolný vektor $\vec{x}$.

Důkaz.
$$\|\mathbb{U}\vec{x}\|_2^2 = \langle\mathbb{U}\vec{x}|\mathbb{U}\vec{x}\rangle = (\mathbb{U}\vec{x})^*\mathbb{U}\vec{x} = \vec{x}^*\mathbb{U}^*\mathbb{U}\vec{x} = \vec{x}^*\mathbb{U}^{-1}\mathbb{U}\vec{x} = \vec{x}^*\vec{x} = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|_2^2$$
□

Věta 2.36. $\mathbb{H}(\vec{w})$ je Householderova reflekční matice a $\vec{v}$ je libovolný vektor z $\mathbb{C}^n$. Pak vektor $\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v}$ je zrcadlový obraz vektoru $\vec{v}$ podle nadroviny

$$L = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{w}^*\vec{x} = \langle \vec{x}|\vec{w}\rangle = 0\}$$

v tom smyslu, že splňuje

- $\|\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
- $\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} + \vec{v} \in L$
- $(\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} - \vec{v}) \perp L$

Důkaz. (1) $\|\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ plyne z faktu, ze $\mathbb{H}(\vec{w})$ je unitární a z 2.35.
(2) $\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} + \vec{v} \in L \Leftrightarrow \langle \mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} + \vec{v}|\vec{w}\rangle = 0$

$$\langle \mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} + \vec{v}|\vec{w}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)\vec{v} + \vec{v}|\vec{w}\rangle = \langle (2\vec{v} - 2\vec{w}\vec{w}^*\vec{v}|\vec{w})\rangle =$$

$$= 2\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle - 2\langle \vec{w}\vec{w}^*\vec{v}|\vec{w}\rangle = 2\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle - 2\underbrace{\vec{w}^*\vec{w}}_{\|\vec{w}\|=1}\vec{w}^*\vec{v} = 2\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle - 2\underbrace{\vec{w}^*\vec{v}}_{2\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle} = 0$$

(3) $(\mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} - \vec{v}) \perp L \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in L, \langle \mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} - \vec{v}|\vec{x}\rangle = 0$

$$\langle \mathbb{H}(\vec{w})\vec{v} - \vec{v}|\vec{x}\rangle = \langle (\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)\vec{v} - \vec{v}|\vec{x}\rangle = -2\langle \vec{w}\vec{w}^*\vec{v}|\vec{x}\rangle = -2\underbrace{\vec{x}^*\vec{w}}_{=0}\vec{w}^*\vec{v} = 0$$

$\square$

Věta 2.37. Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, pak existuje Householderova matice $\mathbb{H}(\vec{w})$ taková, že

$$\mathbb{H}(\vec{w})\mathbb{A}\mathbb{H}(\vec{w})\vec{e}^{(1)} = \lambda\vec{e}^{(1)}$$

kde $\vec{e}^{(1)}$ je prvním bazickým vektorem.

Důkaz. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\vec{x}$ příslušný vlastní vektor. Volíme $\vec{w}$ tak, aby zobrazil vektor $\vec{x}$ do směru vektoru $\vec{e}^{(1)}$. Podle 2.36 musí platit:

$$\mathbb{H}(\vec{w})\vec{e}^{(1)} = \vec{x} \Rightarrow (\vec{x} + \vec{e}^{(1)}) \in L$$

$$\vec{w} = (\vec{x} - \vec{e}^{(1)}) \perp L$$

Zvolíme tedy $\vec{w}$ takto:

$$\vec{w} = \frac{\vec{e}^{(1)} - \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}}{\|\vec{e}^{(1)} - \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}\|_2}$$

a pokud vezmeme $\vec{x}$ jako normovaný:

$$\vec{w} = \frac{\vec{e}^{(1)} - \vec{x}}{\|\vec{e}^{(1)} - \vec{x}\|_2}$$

Protože je HousehoShe ledora matice unitární, musíme vektor $\vec{x}$ normovat, jinak by totiž $\mathbb{H}(\vec{w})\vec{x}$ nemohl být jednotkový vektor. Z volby $\vec{w}$ pak plyne:

$$\mathbb{A}\mathbb{H}(\vec{w})\vec{e}^{(1)} = \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\mathbb{H}(\vec{w})\mathbb{A}\mathbb{H}(\vec{w})\vec{e}^{(1)} = \lambda\mathbb{H}(\vec{w})\vec{x} = \lambda\vec{e}^{(1)},$$

což dokazuje větu. $\square$

Poznámka. Je jedno, jestli bude vektor $\vec{w}$ mířit na jednu, nebo na druhou stranu. zásadní je pouze kolmost na L.

Poznámka. $\mathbb{M}\vec{e}^{(1)} = \lambda\vec{e}^{(1)} \Rightarrow \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ 0 & ? \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$

Poznámka. $\mathbb{M} = \mathbb{H}(\vec{w})\mathbb{A}\mathbb{H}(\vec{w})$ je podobnostní transformace.

Věta 2.38 (Schurova věta)**.** Libovolná matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ se dá zapsat jako

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}$$

kde $\mathbb{U}$ je unitární matice a $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková matice.

Poznámka 2.39. Vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou na diagonále $\mathbb{R}$ díky 2.44.

Důkaz. Podle 2.37 existuje $\vec{w}_1 \in \mathbb{C}^n$ který při splňuje

$$\mathbb{H}(\vec{w}_1)\mathbb{A}\mathbb{H}(\vec{w}_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}' \\ 0 & \end{pmatrix} = \mathbb{H}_1\mathbb{A}\mathbb{H}_1$$

Máme tedy další matici $\mathbb{A}' \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$, ke které opět můžeme podle 2.37 najít vektor $\vec{w}_2' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Definujeme matici

$$\mathbb{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}'(\vec{w}_2') \\ 0 & \end{pmatrix}$$

která splňuje rovnici

$$\mathbb{H}'(\vec{w}_2')\mathbb{A}'\mathbb{H}'(\vec{w}_2') = \mathbb{H}_2\mathbb{H}_1\mathbb{A}\mathbb{H}_1\mathbb{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}'(\vec{w}_2') \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}' \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}'(\vec{w}_2') \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_1 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \mathbb{A}'' \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Naprosto stejným postupem pokračujeme dále, až dojdeme k matici obsahující na diagonále vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a případné další nenulové prvky nad diagonálou (ty tam kvůli jedničkám v maticích $\mathbb{H}_2$ a dalších zůstanou). Tu označíme jako matici $\mathbb{R}$. Dále označíme

$$\mathbb{U} = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{H}_{n-i}$$

Protože jsou všechny matice $\mathbb{H}(\vec{w}_k)$ Householderovy reflekční matice, jsou podle 2.34 unitární. Součin unitárních matic je unitární matice (důkaz na dva řádky je triviální), tedy celá matice $\mathbb{U}$ je unitární. Matice $\mathbb{U}^{-1}$ bude mít tvar $\mathbb{H}_1\mathbb{H}_2...\mathbb{H}_n$. To už je ekvivalentní s tvrzením věty:

$$\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}$$

□

Věta 2.40. Normální trojúhelníková matice je diagonální.

Důkaz. Nechť je matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ normální dolní trojúhelníková. Pak platí $\mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^*$ a $\mathbb{A}_{ik} = 0,\ \forall i < k$ a dále:

$$(\mathbb{A}^*\mathbb{A})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{A}^*)_{ik}\mathbb{A}_{ki} = \sum_{k=i}^{n} (\mathbb{A}^*)_{ik}\mathbb{A}_{ki} = \sum_{k=i}^{n} \overline{\mathbb{A}_{ki}}\mathbb{A}_{ki} = \sum_{k=i}^{n} |\mathbb{A}_{ki}|^2$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{A}^*)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}(\mathbb{A}^*)_{ki} = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{A}_{ik}(\mathbb{A}^*)_{ki} = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{A}_{ik}\overline{\mathbb{A}_{ik}} = \sum_{k=1}^{i} |\mathbb{A}_{ik}|^2$$

$$(\mathbb{A}^*\mathbb{A})_{ii} = (\mathbb{A}^*\mathbb{A})_{ii} \Leftrightarrow \sum_{k=i}^{n} |\mathbb{A}_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^{i} |\mathbb{A}_{ik}|^2, \ \forall i \in \hat{n}$$

Důkaz provedeme indukcí podle i

- $i = 1$

$$|\mathbb{A}_{11}|^2 = \sum_{k=1}^{i} |\mathbb{A}_{ki}|^2 = \sum_{k=i}^{n} |\mathbb{A}_{1k}|^2 = |\mathbb{A}_{11}|^2 + \sum_{k=2}^{n} |\mathbb{A}_{1k}|^2 \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} |\mathbb{A}_{1k}|^2 = 0$$

  Jelikož jsou všechny členy pravé sumy nezáporné, musí být rovny 0, tedy $\mathbb{A}_{1k} = 0, \ \forall k > 1$
- $i \to i+1$
  Indukční předpoklad: $\mathbb{A}_{k,i+1} = 0, \ \forall k < i+1$

$$|\mathbb{A}_{i+1,i+1}|^2 = \sum_{k=i+1}^{i+1} |\mathbb{A}_{k,i+1}|^2 = \sum_{k=1}^{i+1} |\mathbb{A}_{k,i+1}|^2 = \sum_{k=i+1}^{n} |\mathbb{A}_{i+1,k}|^2 = |\mathbb{A}_{i+1,i+1}|^2 + \sum_{k=i+2}^{n} |\mathbb{A}_{i+1,k}|^2$$

  Z čehož plyne díky nezápornosti členů pravé sumy $\mathbb{A}_{i+1,k} = 0, \ \forall k > i+1$

Důkaz pro horní trojúhelníkové matice je obdobný. □

Věta 2.41. Pro libovolnou normální matici $\mathbb{A}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ tak, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}$$

kde $\mathbb{R}$ je diagonální. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská, pak $\mathbb{R}$ má na diagonále reálná čísla.

Důkaz. (1) Ukážeme, že $\mathbb{R}$ je normální, pak podle 2.40 bude také diagonální.

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U} \Rightarrow \mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}\mathbb{U} \Rightarrow \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^* = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^* = (\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^*)^* = (\mathbb{A}\mathbb{U}^*)^*\mathbb{U}^* = \mathbb{U}\mathbb{A}^*\mathbb{U}^*$$

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^* = \mathbb{U}\mathbb{A}\underbrace{\mathbb{U}^*\mathbb{U}}_{\mathbb{I}}\mathbb{A}^*\mathbb{U}^* = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{A}^*\mathbb{U}^* = \mathbb{U}\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}\mathbb{A}^*\mathbb{U}^*\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^* = \mathbb{R}^*\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ je normální $\Rightarrow \mathbb{R}$ je diagonální.

(2) $\mathbb{A}$ je hermitovská $\Rightarrow \mathbb{A}$ je normální.

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U} \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^*$$

kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice.

$$\mathbb{D}^* = (\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^*)^* = \mathbb{U}\mathbb{A}^*\mathbb{U}^* \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{A}=\mathbb{A}^*} \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^* = \mathbb{D}$$

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

protože transpozicí se diagonálních prvků nedotkneme a rovnost hermitovsky sdružených prvků nastává pokud jsou prvky reálná čísla. □

2.4. **Rozklady matic - Jordanova Věta.**

Věta 2.42 (Jordan)**.** Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ jsou všechna její navzájem různá vlastní čísla. Pak je matice $\mathbb{A}$ podobná blokově diagonální (Jordanově) matici $\mathbb{J}$ tvaru:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1 & & \Theta \\ & \mathbb{J}_2 & \\ \Theta & & \ddots & \\ & & & \mathbb{J}_p \end{pmatrix}$$

kde:

$$\mathbb{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \ \forall k \in \hat{p}$$

Počet bloků příslušejících k λ je roven $\nu_g(\lambda)$ a součet řádů těchto bloků je $\nu_a(\lambda)$. Matice $\mathbb{J}$ je až na pořadí bloků dána jednoznačně.

Důkaz. Bez důkazu.

Předělat neceločíselně, nebo vymazat, tuhle větu si Mlha vycucal z prstu, protože při psaní skript zápasil s tím, že jsme tu mocninu vůbec nedefinovali. Na zkoušce mi Oberhuber řekl, že by to definoval Schurovsky, ale on každý přístup má něco.

Věta (Věta navíc)**.** Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Definujeme pro $p \in \mathbb{N}$ mocninu matice $\mathbb{A}^p$ takto:

$$\mathbb{A}^p = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{A}$$

Potom platí:

(1) Pokud rozložíme matici $\mathbb{A}$ podle 2.42 tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T}$, pak platí

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}^p\mathbb{T}$$

(2) Pokud rozložíme matici $\mathbb{A}$ podle 2.38 tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}$, pak platí

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{U}^*\mathbb{R}^p\mathbb{U}$$

Důkaz. (1) Využijeme rozkladu:

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{A}\mathbb{A}\dots\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T}\mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T}\dots\mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}(\mathbb{J}\mathbb{J}\dots\mathbb{J})\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}^p\mathbb{T}$$

(2) Využijeme rozkladu a faktu, že matice $\mathbb{U}$ je unitární, tj. $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$:

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{A}\mathbb{A}\dots\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}\mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U}\dots\mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{R}\mathbb{U}\mathbb{U}^{-1}\mathbb{R}\mathbb{U}\dots\mathbb{U}^{-1}\mathbb{R}\mathbb{U} = \mathbb{U}^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{R}\dots\mathbb{R})\mathbb{U} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{R}^p\mathbb{U}$$

□

Poznámka. V prezentaci je mocnina matice definována pomocí Schurovy věty, kde je navíc přidán požadavek, aby matice $\mathbb{A}$ byla hermitovská a pozitivně definitní, díky čemuž je matice $\mathbb{R}$ diagonální s kladnými členy a tím pádem se Schurova věta stává speciálním případem věty Jordanovy. Tato definice umožní jednoduše definovat i neceločíselné mocniny. Předešlá věta v prezentaci chybí, přestože je občas používána.

2.5. **Vlastní čísla matice.**

Věta 2.44. Podobné matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejná vlastní čísla se stejnou geometrickou násobností.

Důkaz. Díky podobnosti existuje taková matice $\mathbb{T}$, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T}$. Dále rozložíme $\mathbb{B}$ podle 2.42 a označíme $\mathbb{B} = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{K}$, kde $\mathbb{J}$ je Jordanova matice. Pak platí:

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{K}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{K}\mathbb{T} = (\mathbb{K}\mathbb{T})^{-1}\mathbb{J}(\mathbb{K}\mathbb{T})$$

což je podobnostní transformace a z čehož díky podmínce jednoznačnosti v 2.42 plyne, že matice $\mathbb{J}$ je Jordanovou maticí k matici $\mathbb{A}$. Z definice Jordanovy matice pak plyne tvrzení věty. □

2.6. **Pozitivně definitní matice.**

Definice 2.45. Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{T}^{n,n}$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x} \neq \vec{0},\ \vec{x}^*\mathbb{A}\vec{x} \in \mathbb{R}^+$$

značíme $\mathbb{A} > 0$. Platí-li pro $\mathbb{B} \in \mathbb{T}^{n,n}$ vztah $\mathbb{A} - \mathbb{B} > 0$, pak píšeme $\mathbb{A} > \mathbb{B}$.

Věta 2.46. Všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice $\mathbb{A}$ jsou kladná. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská matice s kladnými vlastními čísly, pak $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní.

Důkaz.

- Nechť λ vlastní číslo $\mathbb{A}$ a $\vec{x}$ příslušný vlastní vektor.

$$0 < \langle \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \lambda\vec{x}|\vec{x}\rangle = \lambda\|\vec{x}\|_2^2 \Rightarrow \lambda > 0$$

- Podle 2.41 $\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U}$ kde $\mathbb{D}$ je diagonální, a tedy kladná. Vezmu tedy libovolný vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ a vektor $\vec{y} = \mathbb{U}\vec{x} \Rightarrow \vec{y} \neq \vec{0}$

$$\langle \mathbb{A}\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}|\mathbb{U}\vec{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\vec{y}|\vec{y}\rangle = \vec{y}^*\mathbb{D}\vec{y} > 0$$

□

2.7. **Normy.**

Věta 2.53. Pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ existují kladné konstanty γ_1 a γ_2 takové, že $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí:

$$\gamma_1\|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \gamma_2\|\vec{x}\|_1$$

Důkaz. Bez důkazu, pro zájemce viz Turistický průvodce matematickou analýzou 3, Věta 6.7

Věta 2.54. Nechť $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost vektorů z $\mathbb{C}^n$ a $\|\cdot\|$ libovolná norma. Potom

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \Leftrightarrow \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| \to 0$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Pokud $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$, pak $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \to 0$ a tento vztah pak díky 2.53 platí pro libovolnou normu.
($\Leftarrow$) Díky 2.53 platí $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \to 0$, tedy $\max\limits_{i\in\hat{n}}|\vec{x}_i^{(k)} - \vec{x}_i| \to 0$ a proto $\forall i \in \hat{n},\ |\vec{x}_i^{(k)} - \vec{x}_i| \to 0$, což je jinak zapsáno $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$ □

Věta 2.60. Při značení:

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_1$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_2$$

pro každou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí vztahy:

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in\hat{n}}\sum_{j=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}|$$

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in\hat{n}}\sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}|$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$$

Důkaz. (1) $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max\limits_{\|\vec{x}\|_\infty=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{i\in\hat{n}}\sum_{j=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}|$

Pro každé pevné $i \in \hat{n}$ volíme $\vec{x}_j = \operatorname{sgn}\mathbb{A}_{ij}$ a potom $(\mathbb{A}\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}|$. Platí $\|\vec{x}\|_\infty = 1$ a tvrzení plyne z definice $\|\cdot\|_\infty$.

Poznámka. Hledáme maxima přes řádky, maximové normě pro matice se tedy říká také řádková norma.

(2) $\|\mathbb{A}\|_1 = \max\limits_{\|\vec{x}\|_1=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_1 = \max\limits_{j\in\hat{n}}\sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}|$

Volím k aby $\mathbb{A}_{\cdot k}$ byl maximální ($\forall l \neq k,\ \sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{il}| \leq \sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{ik}|$). Poté volím $\vec{x}$ tak, že $\forall i \neq k,\ \vec{x}_i = 0$ a $\vec{x}_k = 1$. Tento vektor splňuje $\|\vec{x}\|_1 = 1$ a zároveň tím maximalizuji $\|\mathbb{A}\vec{x}\|_1$. Z $\max\limits_{j\in\hat{n}}\sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}|\mathbb{A}_{ik}|$ potom plyne tvrzení věty.

Poznámka. Hledáme maxima přes sloupce, normě se tedy říká sloupcová.

(3) $\|\mathbb{A}\|_2 = \max\limits_{\|\vec{x}\|_2=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$

$$\|\mathbb{A}\|_2^2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1}\|\mathbb{A}\vec{x}\|_2^2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\|\mathbb{A}\vec{x}\|_2^2}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\langle\mathbb{A}\vec{x}|\mathbb{A}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\langle\vec{x}|\mathbb{A}^*\mathbb{A}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2}$$

Dále využijeme toho, že matice $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ je normální (ověření na řádek práce s hvězdičkováním), tedy lze ji napsat ve tvaru $\mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U}$

$$\max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\langle\vec{x}|\mathbb{A}^*\mathbb{A}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\langle\vec{x}|\mathbb{U}^*\mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}}\frac{\langle\mathbb{U}\vec{x}|\mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2}$$

Označíme $\vec{y} = \mathbb{U}\vec{x}$ a díky 2.35 platí $\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|$. Dále označíme $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$ vlastní čísla matice $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$

$$\max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\langle \mathbb{U}\vec{x}|\mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{y}\neq\vec{0}} \frac{\langle \vec{y}|\mathbb{D}\vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|_2^2} = \max_{\vec{y}\neq\vec{0}} \frac{\sum_{i=1}^n |\lambda_i||y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \max_{\|\vec{y}\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_i||y_i|^2$$

Toto maximum nastává pro takový vektor $\vec{y}$, že jehož složka $y_k = 1$ pro takové k, pro které je λ_k největší vlastní číslo matice $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Tedy

$$\max_{\|\vec{y}\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_i||y_i|^2 = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_2^2$$

Poznámka. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská, platí $\mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{A}^2$ a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^2)} = \rho(\mathbb{A})$. (Rovnost plyne z 2.8)
Je-li $\mathbb{A}$ unitární, pak $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$ □

2.8. Konvergence geometrické posloupnosti matic.

Lemma. Nechť $\mathbb{J} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je Jordanovou maticí z rozkladu 2.42. Potom platí

$$(\mathbb{J}^k)_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \binom{k}{i-j}\lambda^{k-(i-j)}, & i \geq j \end{cases}$$

Důkaz. Indukcí podle k

- $k = 1$
  Plyne přímo z 2.42.
- $k \to k+1$

$$(\mathbb{J}^{k+1})_{ij} = (\mathbb{J}\mathbb{J}^k)_{ij} = \sum_{l=1}^n \mathbb{J}_{il}(\mathbb{J}^k)_{lj}$$

  Z definice Jordanovy matice platí, že

$$\mathbb{J}_{il} = \begin{cases} 1, & l = i-1 \\ \lambda, & l = i \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

  a tedy

$$\sum_{l=1}^n \mathbb{J}_{il}(\mathbb{J}^k)_{lj} = (\mathbb{J}^k)_{i-1,j} + \lambda(\mathbb{J}^k)_{i,j}$$

  Použijeme indukční předpoklad

$$(\mathbb{J}^k)_{i-1,j} + \lambda(\mathbb{J}^k)_{i,j} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 0 + \lambda\binom{k}{i-j}\lambda^{k-(i-j)} = \lambda^{k+1}, & i = j \\ \binom{k}{i-j-1}\lambda^{k-(i-1-j)} + \lambda\binom{k}{i-j}\lambda^{k-(i-j)} = \binom{k+1}{i-j}\lambda^{k+1-(i-j)}, & i > j \end{cases}$$

  kde poslední rovnost plyne ze vztahu $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ □

Věta 2.63. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^k = \Theta \Leftrightarrow \rho(\mathbb{A}) < 1$$

Důkaz. Podle 2.42 rozložíme $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T}$ a díky Věta navíc platí $\mathbb{A}^k = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}^k\mathbb{T}$. Díky lemmatu je zřejmé, že $\lim_{k\to\infty} (\mathbb{J}^k)_{ij} = 0$ právě tehdy, pokud pro všechna vlastní čísla λ platí $|\lambda| < 1$. □

Věta 2.64. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\exists \text{ maticová norma } \|\cdot\|, \|\mathbb{A}\| < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^k = \Theta$$

Důkaz. Z $\|\mathbb{A}\| < 1$ plyne:

$$\|\mathbb{A}^k\| \leq \|\mathbb{A}\|^k < 1^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|\mathbb{A}^k\| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^k = \Theta$$

□

Věta 2.65. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\forall \text{ maticové normy } \|\cdot\|, \rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|$$

Důkaz. Označíme $\lambda^{\mathbb{A}} \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\forall \varepsilon > 0$ označíme

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon}\mathbb{A}$$

a potom

$$\|\mathbb{B}\| = \frac{\|\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} < 1 \Rightarrow \mathbb{B}^k \to \Theta$$

díky 2.64. Pro nějaký $\vec{x}$ vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ platí

$$\mathbb{B}\vec{x} = \frac{1}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon}\mathbb{A}\vec{x} = \frac{\lambda^{\mathbb{A}}}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon}\vec{x} = \lambda^{\mathbb{B}}\vec{x}$$

Kde platí $\lambda^{\mathbb{B}} \in \sigma(\mathbb{B})$ a $\lambda^{\mathbb{B}} < 1$ díky 2.63. Pak platí

$$|\lambda^{\mathbb{A}}| = (\|\mathbb{A}\| + \varepsilon)\lambda^{\mathbb{B}} < \|\mathbb{A}\| + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

a tedy $|\lambda^{\mathbb{A}}| \leq \|\mathbb{A}\|$ □

Věta 2.66. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i < \infty \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^k = \Theta$$

a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i < \infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Důsledek nutné podmínky konvergence řady.
($\Leftarrow$) Označíme $\mathbb{S}_k = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{A}^i$ a platí

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{S}_k = \mathbb{I} - \mathbb{A}^{k+1}$$

Díky 2.63 $\rho(\mathbb{A}) < 1$, a tedy $0 \notin \sigma(\mathbb{I} - \mathbb{A})$, tedy $(\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je regulární, díky čemuž můžeme upravit

$$\mathbb{S}_k = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{k+1})$$
$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{S}_k = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$$

□

Věta 2.67. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\|\mathbb{A}\| < 1$. Potom platí

$$\left\|(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - \sum_{i=0}^{k} \mathbb{A}^i\right\| \leq \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Důkaz. Díky 2.64 a 2.66 víme $(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i$ a tedy při využití trojúhelníkové nerovnosti ($\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{B}\|$) platí

$$\left\|(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - \sum_{i=0}^{k} \mathbb{A}^i\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i - \sum_{i=0}^{k} \mathbb{A}^i\right\| = \left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{A}^i\right\| = \left\|\mathbb{A}^{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{A}^i\right\| \leq \|\mathbb{A}^{k+1}\| \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbb{A}\|^i = \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}$$

kde poslední rovnost plyne ze vzorce pro součet geometrické řady. □

3. Úvod do numerické matematiky

3.1. Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou.

Věta 3.2. Libovolné $x \in \mathbb{R}$ lze v libovolné soustavě o základu β s libovolnou přesností aproximovat reálným číslem x_β, jehož zápis v této soustavě má konečný počet cifer.

Zrevidovat, zjednodušit důkaz 3.2 - Mlha si ho celý vycucal z prstu, snad by to šlo přepsat bez toho megavýroku.

Důkaz. BÚNO $x \geq 0$. Označíme přesnost aproximace $\varepsilon = |x - x_\beta|$ a zapíšeme $x_\beta = \sum_{k=-m}^{n} x_k^{(\beta)} \beta^k$ Dokazujeme výrok

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \beta \in \mathbb{N} \setminus \{1\})(\exists m, n \in \mathbb{N})(\forall l \in \mathbb{Z} \cap \langle -m, n \rangle)(\exists x_l^{(\beta)} \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_l^{(\beta)} < \beta)\left(\left| x - \sum_{k=-m}^{n} x_k^{(\beta)} \beta^k \right| \leq \varepsilon\right)$$

Přepíšeme x_β do dvou sum (celá a desetinná část), tedy

$$x_\beta = \sum_{k=-m}^{n} x_k^{(\beta)} \beta^k = \sum_{k=0}^{n} x_k^{(\beta)} \beta^k + \sum_{k=1}^{m} \frac{x_{-k}^{(\beta)}}{\beta^k}$$

a dále využijeme toho, že každé reálné číslo se dá pro nějaké konečné $u \in \mathbb{N}$ zapsat jako

$$x = \sum_{k=0}^{u} x_k \beta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{\beta^k}$$

Položíme $n = u$ a $x_l^{(\beta)} = x_l$, $\forall l \in \mathbb{Z} \cap \langle -m, n \rangle$ a odhadujeme

$$\left| x - \sum_{k=-m}^{n} x_k^{(\beta)} \beta^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{u} x_k \beta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{\beta^k} - \sum_{k=0}^{u} x_k \beta^k - \sum_{k=1}^{m} \frac{x_{-k}}{\beta^k} \right| =$$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{\beta^k} \right| \leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\beta}{\beta^k} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k-1}} \right| \leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \right| = \frac{m+1}{\beta}$$

a protože chceme dosáhnout $\frac{m+1}{\beta} \leq \varepsilon$, stačí volit $m = \lfloor \varepsilon\beta \rfloor - 1$, aby platil dokazovaný výrok. □

3.2. Podmíněnost matic.

Věta 3.29. Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Buď $\vec{x}$ řešením soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b} \neq \vec{0}$ a dále buďte $\delta\vec{x}$, $\delta\vec{b}$ perturbace takové, že platí $\mathbb{A}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{b} + \delta\vec{b}$. Pak platí

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(\mathbb{A}) \frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

a jde-li o indukovanou maticovou normu, pak existují $\vec{b} \neq \vec{0}$ a $\delta\vec{b} \neq \vec{0}$ takové, že nastává rovnost.

Důkaz. (1) Díky regularitě matice $\mathbb{A}$ a požadavku nenulovosti soustavy platí $\vec{b} \neq \vec{0}$ a $\vec{x} \neq \vec{0}$. Úpravou soustavy s perturbacemi dostáváme

$$\mathbb{A}\delta\vec{x} = \vec{b} + \delta\vec{b} - \mathbb{A}\vec{x} = \delta\vec{b}$$

a díky regularitě $\mathbb{A}$ tedy $\delta\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\delta\vec{b}$. Aplikací trojúhelníkové nerovnosti dále získáváme

$$\|\vec{b}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\vec{x}\|$$

$$\|\delta\vec{x}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\delta\vec{b}\|$$

a tedy

$$\|\vec{b}\| \|\delta\vec{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\| \|\vec{x}\| \|\delta\vec{b}\|$$

Vydělíme (nenulovými) vektory a použijeme definici $\kappa(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|$, čímž dostaneme tvrzení věty.

(2) Pokud je maticová norma indukovaná, lze si definici normy přepsat jako

$$\|\mathbb{B}\| = \max_{\vec{y}} \frac{\|\mathbb{B}\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|}$$

a tedy při volbě $\vec{z}$ takového, aby nastalo toto maximum, platí

$$\|\mathbb{B}\|\|\vec{z}\| = \frac{\|\mathbb{B}\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}\|\vec{z}\| = \|\mathbb{B}\vec{z}\|$$

a tedy se trojúhelníková nerovnost stává trojúhelníkovou rovností. Možnost volby takových vektorů máme, z čehož plyne tvrzení o rovnosti v dokazované větě □

3.3. **Předpodmínění.**

Poznámka 3.30. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Definujeme vzdálenost s normou p matice $\mathbb{A}$ od množiny singulárních matic jako

$$dist_p(\mathbb{A}) = \min_{\delta \in \mathbb{C}} \left\{ \frac{\delta\|\mathbb{A}\|_p}{\|\mathbb{A}\|_p} \;\middle|\; (1+\delta)\mathbb{A} \text{ je singulární} \right\}$$

Potom platí

$$dist_p(\mathbb{A}) \leq \frac{1}{\kappa(\mathbb{A})}$$

Důkaz. Bez důkazu.

4. Přímé metody pro lineární soustavy

4.1. **Pravidla o elementárních úpravách.**

Definice 4.1. Elementárními úpravami matice nazveme:

- Násobení všech prvků jednoho řádku konstantou
- Přičtení násobku jednoho řádku k jinému
- Prohození dvou řádků

a obdobné úpravy pro sloupce.

Poznámka 4.2. Násobení k-tého řádku matice $\mathbb{A}$ číslem α je ekvivalentní násobení maticí $\mathbb{M}$, kde

$$\mathbb{M}_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j = k \\ 1, & i = j \neq k \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Poznámka 4.3. Přičtení α-násobku k-tého řádku matice $\mathbb{A}$ k jejímu l-tému řádku je ekvivalentní násobení maticí $\mathbb{M}$ zleva, kde

$$\mathbb{M}_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = l \wedge j = k \\ 1, & i = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Poznámka 4.4. Provedení konečného počtu řádkových, resp. sloupcových elementárních úprav matice je ekvivalentní násobení zleva, resp. zprava takovou maticí, která vznikla z matice $\mathbb{I}$ stejnými elementárními úpravami, provedenými ve stejném pořadí.

4.2. **Gaussova eliminační metoda.** Gaussova eliminační metoda (GEM) je přímou metodou řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde matice $\mathbb{A}$ je regulární. Skládá se ze dvou fází:

(1) **Přímý chod** - Převádíme pomocí elementárních úprav soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ na soustavu $\mathbb{U}\vec{x} = \vec{d}$, kde matice $\mathbb{U}$ je horní trojúhelníková.
(2) **Zpětný chod** - Řešíme soustavu $\mathbb{U}\vec{x} = \vec{d}$ pomocí zpětné substituce.

4.3. **Gaussova eliminační metoda - přímý chod.** Mějme regulární matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Mějme soustavu

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \cdots & \mathbb{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n1} & \mathbb{A}_{n2} & \cdots & \mathbb{A}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

Předpokládáme $\mathbb{A}_{11} \neq 0$. Nazveme tento prvek pivotem v prvním kroku.
Nyní provedeme následující elemetární úpravy:

1) Vydělíme celý první řádek prvkem $\mathbb{A}_{11}$
2) $\forall k \in \hat{n} \setminus \{1\}$ odečteme od k-tého řádku $\mathbb{A}_{k1}$ násobek prvního řádku.

Dostáváme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{U}_{12} & \cdots & \mathbb{U}_{1n} \\ 0 & \mathbb{A}_{22}^{(1)} & \cdots & \mathbb{A}_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbb{A}_{n2}^{(1)} & \cdots & \mathbb{A}_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{b}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{b}_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

při značení

$$\mathbb{U}_{1j} = \frac{\mathbb{A}_{1j}}{\mathbb{A}_{11}}$$

$$\vec{d}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\mathbb{A}_{11}}$$

$$\mathbb{A}_{ij}^{(1)} = \mathbb{A}_{ij} - \mathbb{A}_{i1}\mathbb{U}_{1j}$$
$$\vec{b}_i^{(1)} = \vec{b}_i - \mathbb{A}_{i1}\vec{d}_1$$

Nyní aplikujeme stejný postup na soustavu bez prvního řádku a sloupce. Obecně tedy počítáme při k-tém kroku

$$\mathbb{U}_{kj} = \frac{\mathbb{A}_{kj}^{(k-1)}}{\mathbb{A}_{kk}^{(k-1)}}$$
$$\vec{d}_k = \frac{\vec{b}_k^{(k-1)}}{\mathbb{A}_{kk}^{(k-1)}}$$
$$\mathbb{A}_{ij}^{(k)} = \mathbb{A}_{ij}^{(k-1)} - \mathbb{A}_{ik}^{(k-1)}\mathbb{U}_{kj}$$
$$\vec{b}_i^{(k)} = \vec{b}_i^{(k-1)} - \mathbb{A}_{ik}^{(k-1)}\vec{d}_k$$

4.4. **Gaussova eliminační metoda - zpětný chod.** Řešíme soustavu s horní trojúhelníkovou maticí $\mathbb{U}\vec{x} = \vec{d}$. Obecně napočítáváme $\vec{x}_k$ od n dolů jako

$$\vec{x}_k = \vec{d}_k - \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{U}_{ki}\vec{x}_i$$

4.5. **Gaussova eliminační metoda - složitost.** Gaussovu eliminační metodu provádíme v n krocích. V každém takovémto k-tém kroku:

1) Dělíme řádek pivotem, tj. $n-k$ operací
2) Odečítáme řádek ode všech ostatních, tj. $n-k+1$ operací na $n-k+1$ řádcích, dohromady $(n-k+1)^2$ operací

To je dohromady $\sum_{k=1}^{n} n-k+(n-k+1)^2$ operací, tedy složitost je

$$\mathcal{O}(n^3)$$

což znamená, že Gaussova eliminační metoda je v praxi použitelná pouze pro malé matice.

4.6. **Gaussova eliminační metoda - numerická analýza.**

Definice. Definujeme rozšířenou matici soustavy jako

$$\mathbb{P} = \left(\mathbb{A} \mid \vec{b}\right)$$

Využijeme 4.4 a 4.2, díky kterým je dělení prvního řádku prvkem $\mathbb{A}_{11}$ ekvivalentní násobení zleva maticí

$$\left(\mathbb{M}_1^{(1)}\right)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{A}_{11}}, & i = j = 1 \\ 1, & i = j \neq 1 \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

A díky 4.3 je odečítání $\mathbb{A}_{k1}$ násobku prvního řádku ke k-tému ekvivalentní násobení zleva maticí

$$\left(\mathbb{M}_k^{(1)}\right)_{ij} = \begin{cases} -\mathbb{A}_{k1}, & i = k \wedge j = 1 \\ 1, & i = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Dohromady tedy definujeme matici úprav v prvním kroku jako

$$\mathbb{M}^{(1)} = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{M}_{n-k}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbb{A}_{11}} & & & & \\ -\frac{\mathbb{A}_{21}}{\mathbb{A}_{11}} & 1 & & & \\ -\frac{\mathbb{A}_{31}}{\mathbb{A}_{11}} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\frac{\mathbb{A}_{n1}}{\mathbb{A}_{11}} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Definice. Definujeme matici úprav v k-tém kroku Gaussovy eliminační metody jako

$$\mathbb{M}^{(k)} = \prod_{l=0}^{n-k} \mathbb{M}^{(k)}_{n-l}$$

Poznámka. Matice úprav v k-tém kroku Gaussovy eliminační metody má tvar

$$\mathbb{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\mathbb{A}^{(k-1)}_{kk}} & & \\ & & & -\frac{\mathbb{A}^{(k-1)}_{k+1,k}}{\mathbb{A}^{(k-1)}_{kk}} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\frac{\mathbb{A}^{(k-1)}_{nk}}{\mathbb{A}^{(k-1)}_{kk}} & & & 1 \end{pmatrix}$$

kde sloupec s podíly je k-tý.

Definice. Definujeme matici soustavy na konci k-tého kroku Gaussovy eliminační metody jako

$$\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{M}^{(k)}\mathbb{P}^{(k-1)}$$

kde

$$\mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}$$

Poznámka. Matice soustavy na konci k-tého kroku Gaussovy eliminační metody má tvar

$$\mathbb{P}^{(k)} = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \mathbb{U}_{12} & \cdots & \mathbb{U}_{1,k-1} & \mathbb{U}_{1k} & \cdots & \mathbb{U}_{1n} & & \vec{d}_1 \\ & 1 & \cdots & \mathbb{U}_{2,k-1} & \mathbb{U}_{2k} & \cdots & \mathbb{U}_{2n} & & \vec{d}_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & \mathbb{U}_{k-1,k} & \cdots & \mathbb{U}_{k-1,n} & & \vec{d}_{k-1} \\ & & & & \mathbb{A}^{(k-1)}_{kk} & \cdots & \mathbb{A}^{(k-1)}_{kn} & & \vec{b}^{(k-1)}_k \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \mathbb{A}^{(k-1)}_{nk} & \cdots & \mathbb{A}^{(k-1)}_{nn} & & \vec{b}^{(k-1)}_n \end{array}\right)$$

Definice. Definujeme matici úprav Gaussovy eliminační metody jako

$$\mathbb{M} = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{M}^{(n-k)}$$

Vidíme, že platí

$$\left(\mathbb{U} \;\middle|\; \vec{d}\right) = \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{M}\mathbb{P}$$

a tedy také

$$\mathbb{U} = \mathbb{M}\mathbb{A}$$

Na diagonále matice $\mathbb{M}$ jsou převrácené hodnoty pivotů Gaussovy eliminační metody. Definujeme tedy matici

$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{cases} \mathbb{A}^{(i-1)}_{ii}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

a pro ní platí

$$\mathbb{A} = \left(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{D}\mathbb{U}$$

což je podle 2.24 LDR rozklad.

Věta 4.5. Základní Gaussovu eliminační metodu lze provést právě tehdy, když je matice soustavy silně regulární.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Označíme matici $\mathbb{A}$ po k-té úprávě jako $\mathbb{A}^{(k)}$. Protože lze provést Gaussovu eliminační metodu, má matice $\mathbb{A}$ nenulové pivoty, tj.

$$\mathbb{A}_{ii}^{(i-1)} \neq 0,\ \forall i \in \hat{n}$$

a existuje rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{U}$. Označíme $\mathbb{L} = \mathbb{M}^{-1}$ a víme, že

$$\mathbb{L}_{ii} = \mathbb{A}_{ii}^{(i-1)},\ \forall i \in \hat{n}$$

Dále víme, že na diagonále matice $\mathbb{U}$ jsou jedničky, tedy $\det \mathbb{U} = 1$. Blokově rozepíšeme (velikosti bloků jsou stejné):

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_3 & \mathbb{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_1 & \Theta \\ \mathbb{L}_2 & \mathbb{L}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 & \mathbb{U}_2 \\ \Theta & \mathbb{U}_3 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\det \mathbb{A}_1 = \det \mathbb{L}_1 \det \mathbb{U}_1 = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{A}_{ii}^{(i-1)} \neq 0$$

Protože velikost bloků můžeme volit libovolně, tj. $k \in \hat{n}$, je matice $\mathbb{A}$ silně regulární.

($\Leftarrow$) (sporem) Nechť je i nejnižší index, pro který je jeho pivot roven 0, tj.

$$\mathbb{A}_{ii}^{(i-1)} = 0.$$

Provedeme $i-1$ kroků GEM. Blok $\mathbb{A}_1$ pro i-tý krok bude horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále s výjimkou posledního prvku, který bude nulový. To implikuje, že

$$\det \mathbb{A}_1 = 0$$

a tudíž není matice $\mathbb{A}$ silně regulární.

□

4.7. **Modifikovaná Gaussova eliminační metoda.** Pokud matice $\mathbb{A}$ není silně regulární, může se stát, že některý z pivotů je nulový. V tom případě využijeme 4.1 a prohozením některých řádků a sloupců najdeme nenulový pivot (Což pro regulární matice vždy půjde).
Může se ale také stát, že námi zvolený pivot kvůli zaokrouhlovacím chybám sice nebude nulový, ale bude velmi malý. V takovémto případě sice může použít základní Gaussovu eliminační metodu, ale výsledek nemůže dávat smysl. Podobná situace může nastat, pokud je $\mathbb{A}$ špatně podmíněná, tedy podle 3.30 je blízká množině singulárních matic.

Příklad 4.6. Příklad 4.6

Naopak pokud by některý pivot byl velmi velký, může se stát, že po vydělení tímto pivotem by ostatní řádky už příliš neovlinily následující úpravy matice. To ale tolik nevadí, protože výpočet to moc neovlivní.
Modifikovaná Gaussova eliminační metoda tedy spočívá ve výběru správného pivota v každém kroku. Vybíráme buď největší prvek ze zbývající submatice ($\mathcal{O}(n^2)$), nebo kvůli nižší výpočetní náročnosti pouze z řádku, kde je původní pivot. Těmito úpravami vlastně převádíme matici na silně regulární.

4.8. **GEM a více pravých stran.** Pokud chceme vyřešit stejnou soustavu s více pravými stranami, stačí přímý chod provést pouze jednou se všemi pravými stranami najednou. Naopak zpětný chod musíme provádět pro každou pravou stranu zvlášť, avšak složitost zpětného chodu je pouze $\mathcal{O}(n^2)$.
Abychom mohli provést přímý chod pouze jednou, potřebujeme znát všechny pravé strany na počátku výpočtu, což v praxi často není možné. Tento problém řeší tzv. LU rozklad.

4.9. **GEM a LU rozklad.** Označíme $\mathbb{L} = \mathbb{M}^{-1}$. Poté

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$$

Tímto můžeme převést úlohu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ na tři úlohy

- $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$
- $\mathbb{U}\vec{x} = \vec{d}$
- $\mathbb{L}\vec{d} = \vec{b}$

z nichž pouze poslední závisí na pravé straně původní úlohy. Navíc matice $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ jsou trojúhelníkové, takže řešení druhé a třetí úlohy má složitost $\mathcal{O}(n^2)$.

Poznámka. Díky definici matice úprav Gaussovy eliminační metody můžeme určit tvar matice $\mathbb{L}$ pomocí kroků Gaussovy eliminační metody, tedy

$$\mathbb{L} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{M}^{(n-k)}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathbb{M}^{(k)}\right)^{-1}.$$

Všimněte si změny pořadí násobení! Obdobně díky definici matice úprav v k-tém kroku Gaussovy eliminační metody můžeme určit

$$\left(\mathbb{M}^{(k)}\right)^{-1} = \left(\prod_{l=0}^{n-k} \mathbb{M}_{n-l}^{(k)}\right)^{-1} = \prod_{l=k}^{n} \left(\mathbb{M}_l^{(k)}\right)^{-1},$$

kde už triviálně

$$\left(\mathbb{M}_k^{(k)}\right)_{ij}^{-1} = \begin{cases} \mathbb{A}_{k,k}^{(k-1)}, & i = j = k \\ 1, & i = j \neq k \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

a

$$\left(\mathbb{M}_l^{(k)}\right)_{ij}^{-1} = \begin{cases} \mathbb{A}_{l,k}^{(k-1)}, & i = l \wedge j = k \\ 1, & i = j \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

A tedy

$$\left(\mathbb{M}^{(k)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mathbb{A}_{k,k}^{(k-1)} & & & \\ & & & \mathbb{A}_{k+1,k}^{(k-1)} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}_{n,k}^{(k-1)} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.7. Pro $i < j$ platí, že součin matic typu

$$\left(\mathbb{M}^{(i)}\right)^{-1} \left(\mathbb{M}^{(j)}\right)^{-1}$$

odpovídá jejich "sjednocení", tj. nahrazení i-tého sloupce druhé matice i-tým sloupcem první matice. Vizuálně viz prezentace.

Důkaz. Zřejmé, je vidět z roznásobení. □

Poznámka. Pro platnost lemmatu je zásadní platnost nerovnosti $i < j$, tj. pořadí násobení! (Nerovnosti zajišťuje jedničku na i–tém prvku diagonály druhé matice, a tím pouhé „překopírování“ i–tého řádku první matice.)

Poznámka. Toto lemma platí obecně pro matice této struktury, ne jen matice $\mathbb{M}$.

Díky předchozímu lemmatu již vidíme

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & & & & \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22}^{(1)} & & & \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32}^{(1)} & \mathbb{A}_{33}^{(2)} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbb{A}_{n1} & \mathbb{A}_{n2}^{(1)} & \mathbb{A}_{n3}^{(2)} & \cdots & \mathbb{A}_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Což jsou přesně prvky, které se nulují pod diagonálou v Gaussově eliminační metodě. Proto lze LU rozklad počítat tak, že upravujeme matici jako v přímém chodu Gaussovy eliminační metody a nenulujeme prvky pod diagonálou. K tomu navíc nepotřebujeme žádnou paměť navíc, všechny úpravy se provádí na jediné matici. (Jedničky na diagonále matice $\mathbb{U}$ nemusíme ukládat a matici postupně přepisujeme, protože každý její prvek potřebujeme právě jednou.)

Příklad 4.8. Příklad 4.8

4.10. **Kompaktní schéma pro LU faktorizaci.** V praxi se k vypočítání LU rozkladu nepoužívá Gaussova eliminační metoda, ale 2 metody, známé jako Croutova a Doolittlova faktorizace. Croutova faktorizace generuje jedničky na diagonále matice $\mathbb{U}$, kdežto Doolitlova faktorizace generuje jedničky na diagonále matice $\mathbb{L}$. Nejde tedy o stejný rozklad! Ve skutečnosti jsou rozklady vzájemnou transpozicí, tedy

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_C \mathbb{U}_C = (\mathbb{U}_D)^T (\mathbb{L}_D)^T$$

Provedeme numerickou analýzu Croutovy faktorizace, Doolittlova faktorizace je obdobná. Vyjdeme ze vztahu

$$\mathbb{A}_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} \mathbb{L}_{ik} \mathbb{U}_{kj}$$

Předpokládáme $\mathbb{U}_{ii} = 1$ a tedy ze vztahu pro prvky $\mathbb{A}_{i1}$ a $\mathbb{A}_{1j}$

$$\mathbb{L}_{i1} = \mathbb{A}_{i1}$$
$$\mathbb{U}_{1j} = \frac{\mathbb{A}_{1j}}{\mathbb{L}_{11}}, \forall j > 1$$

Obdobně můžeme upravit vztahy pro prvky $\mathbb{A}_{i2}$ a $\mathbb{A}_{2j}$, tentokrát se ovšem musíme omezit na $i \geq 2$ a $j \geq 2$:

$$\mathbb{L}_{i2} = \mathbb{A}_{i2} - \mathbb{L}_{i1} \mathbb{U}_{12}$$
$$\mathbb{U}_{2j} = \frac{\mathbb{A}_{2j} - \mathbb{L}_{21} \mathbb{U}_{1j}}{\mathbb{L}_{22}}, \forall j > 2$$

A obecně ze vztahu pro $\mathbb{A}_{ij}$ dostaneme pro j pevné iterací přes $i \geq j$

$$\mathbb{L}_{ij} = \mathbb{A}_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{L}_{ik} \mathbb{U}_{kj}$$

a následně pro pevné i iterací přes $j > i$

$$\mathbb{U}_{ij} = \frac{\mathbb{A}_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{L}_{ik} \mathbb{U}_{kj}}{\mathbb{L}_{ii}}.$$

Věta. Croutovu a Doolittlovu faktorizaci lze provést právě tehdy, když je matice $\mathbb{A}$ silně regulární.

Důkaz. Algoritmy lze provést právě tehdy, když nejsou žádné diagonální prvky matice $\mathbb{L}$ nulové. Na diagonále matice $\mathbb{L}$ jsou ale pivoty základní Gaussovy eliminační metody (plyne z jednoznačnosti LU rozkladu). Z 4.5 plyne tvrzení věty. □

Croutova a Doolittlova faktorizace neumožňují volbu pivotů tak, jako modifikovaná Gaussova eliminační metoda. To ale tolik nevadí, protože prvky matic $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ napočítáváme pouze jednou a nepřepisujeme je, čímž se minimalizují chyby výpočtu. Navíc pokud známe $\mathbb{L}_{ij}$ a $\mathbb{U}_{ij}$, nepotřebujeme už dále znát $\mathbb{A}_{ij}$, tedy stejně jako u výpočtu LU rozkladu pomocí Gaussovy eliminační metody můžeme přepisovat prvky matice $\mathbb{A}$ a tím ušetřit paměť.

Věta 4.9. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a její LU rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. Potom funkce $\mathbb{L}_{ij}(\mathbb{A}_{kl})$ a $\mathbb{U}_{ij}(\mathbb{A}_{kl})$ jsou spojité.

Důkaz. Ze vztahů pro Croutovu faktorizaci je vidět, že jsou to racionální funkce, a tedy spojité za předpokladu nenulovosti $\mathbb{L}_{ii}$. □

Poznámka. Z důkazu 4.9 výše je zřejmé, že i tato metoda bude mít problémy s malými pivoty, tj. bude méně stabilní pro špatně podmíněné matice.

Příklad 4.10

Příklad 4.10.

4.11. **LU rozklad pro symetrické matice - Choleského dekompozice.**

Věta 4.11 (Choleského rozklad)**.** Nechť je matice $\mathbb{A}$ hermitovská a regulární. Pak existuje horní trojúhelníková matice $\mathbb{S}$ taková, že platí

$$\mathbb{A} = \mathbb{S}^*\mathbb{S}$$

Tomuto rozkladu se říká Choleského rozklad (dekompozice).

Důkaz. Díky 2.24 platí $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R}$ a $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^*\mathbb{D}^*\mathbb{L}^*$. Protože je matice $\mathbb{A}$ hermitovská, platí díky jednoznačnosti rozkladu 2.24 $\mathbb{L} = \mathbb{R}^*$ a $\mathbb{D} = \mathbb{D}^*$. Označíme $\mathbb{S} = \mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\mathbb{R}$ a pak platí

$$\mathbb{S}^*\mathbb{S} = \mathbb{R}^*\left(\mathbb{D}^*\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\mathbb{R} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R} = \mathbb{A}$$

□

Choleského rozklad je pouze speciálním případem LU rozkladu kde $\mathbb{S} = \mathbb{U} = \mathbb{L}^*$ a tedy můžeme upravit vztahy pro Croutovu faktorizaci do tvaru

$$\mathbb{S}_{ii} = \sqrt{\mathbb{A}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{S}_{ki}\overline{\mathbb{S}}_{ki}}$$

$$\mathbb{S}_{ij} = \frac{\mathbb{A}_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{\mathbb{S}}_{ki}\mathbb{S}_{kj}}{\overline{\mathbb{S}}_{ii}}$$

Zkontrolovat.

Příklad 4.12

Příklad 4.12.

Thomasův

4.12. **Thomasův algoritmus.**

Schurův doplněk

4.13. **Schurův doplněk.**

5. Iterativní metody – úvod a soustavy lineárních rovnic

5.1. **Iterativní metody obecně.**

Věta 5.1. Iterativní metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x} + \vec{c}^{(k)}$$

konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \mathbb{B}^{(k-i)} = \Theta$$

Důkaz.

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} - \vec{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{(k-1)}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c}^{(k-1)} - \mathbb{B}^{(k-1)}\vec{x} - \vec{c}^{(k-1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{(k-1)}(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}) = \cdots = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{B}^{(k-i-1)}(\vec{x}^{(0)} - \vec{x})$$

což je rovno nule pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ právě tehdy, je-li splněna podmínka z věty. □

Poznámka. Vzhledem k tomu, že je výběr $\vec{x}^{(0)}$ libovolný, bude tato metoda konvergovat i přes numerické chyby. Iterativní metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic mají **samo-opravující** vlastnost a jsou tudíž stabilní vzhledem k numerickým chybám.

5.2. **Stacionární iterativní metody.**

Věta 5.2. Stacionární iterativní metoda, tj. metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$$

konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = \Theta$$

Důkaz. $\mathbb{B}^k = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{B}$ a tedy platnost této věty plyne přímo z 5.1. □

Věta 5.3. Stacionární iterativní metoda, tj. metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$$

konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho(\mathbb{B}) < 1$$

Důkaz. Plyne z 2.63 a 5.2. □

Věta 5.4. Postačující podmínkou pro to, aby stacionární iterativní metoda, tj. metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$$

konvergovala pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ je

$$\exists \text{ maticová norma } \|\cdot\|, \|\mathbb{B}\| < 1$$

Důkaz. Plyne z 2.64 a 5.2. □

Věta 5.5 (Aposteriorní odhad chyby pro stacionární iterativní metody)**.** Pro stacionární iterativní metodu, tj. metodu tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$$

kde $\vec{x}$ je řešením soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, platí při použití **souhlasné normy** tyto odhady chyby aproximace řešení:

(1) $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \left\|\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\right\|$

(2) $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \|\mathbb{B}\| \left\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|$

Důkaz. (1) Nahrazujeme vektor $\vec{x}$ pomocí $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| = \left\|\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b})\right\| \leq \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \left\|\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\right\|$$

kde poslední nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti.

(2) Nahrazujeme vektor $\vec{x}$ pomocí $\vec{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c}$, což je inverze podmínky pro řešení.

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| = \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}((\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x}^{(k)} - \vec{c})\right\| \leq \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x}^{(k)} - \vec{c}\right\|$$

kde poslední nerovnost je opět aplikací trojúhleníkové nerovnosti.

$$\left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x}^{(k)} - \vec{c}\right\| = \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \left\|\vec{x}^{(k)} - \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} - \vec{c}\right\| = \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \left\|\mathbb{B}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} - \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} - \vec{c}\right\| =$$

$$= \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \left\|\mathbb{B}(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)})\right\| \leq \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \|\mathbb{B}\| \left\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|$$

kde poslední nerovnost je znovu pouze aplikací trojúhelníkové nerovnosti. □

Definice 5.6 (V prezentaci poznámka)**.** Nechť $\vec{x}^{(k)}$ je k-tá aproximace řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$. Potom definujeme reziduum v k-té iteraci

$$\vec{r}^{(k)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$$

Věta 5.8 (Apriorní odhad chyby pro stacionární iterativní metody)**.** Pro stacionární iterativní metodu, tj. metodu tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

splňující

$$\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$$

a dále splňující pro nějakou maticovou normu

$$\|\mathbb{B}\| < 1$$

platí

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq \|\mathbb{B}\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \frac{\|\vec{c}\|}{1 - \|\mathbb{B}\|}\right)$$

kde používaná vektorová norma je **souhlasná** s normou maticovou.

Důkaz.

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} = \cdots = \mathbb{B}^k\vec{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{B}^i\vec{c}$$

Protože $\|\mathbb{B}\| < 1$, tak díky 2.65 $\rho(\mathbb{B}) < 1$, a tedy $0 \notin \sigma(\mathbb{I} - \mathbb{B})$, tedy $(\mathbb{I} - \mathbb{B})$ je regulární a můžeme upravovat

$$\vec{c} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{B}^i\vec{c}$$

kde poslední rovnost platí, protože $\|\mathbb{B}\| < 1$, a tedy díky 2.64 řada konverguje. S pomocí těchto dvou rozvojů můžeme za použití trojúhelníkové nerovnosti a vzorce pro součet geometrické řady odhadovat

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| = \left\|\mathbb{B}^k \vec{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{B}^i \vec{c} - \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{B}^i \vec{c}\right\| = \left\|\mathbb{B}^k \vec{x}^{(0)} - \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{B}^i \vec{c}\right\| = \left\|\mathbb{B}^k \left(\vec{x}^{(0)} - \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{B}^i \vec{c}\right)\right\| \leq$$
$$\leq \|\mathbb{B}\|^k \left\|\vec{x}^{(0)} - \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{B}^i \vec{c}\right\| \leq \|\mathbb{B}\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbb{B}\|^i \|\vec{c}\|\right) = \|\mathbb{B}\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \frac{\|\vec{c}\|}{1 - \|\mathbb{B}\|}\right)$$

□

5.3. **Metoda postupných aproximací.** Využijeme znalosti rezidua v k-té iteraci a definujeme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{r}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \vec{b} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

Vidíme, že tato metoda obecně splňuje podmínku

$$\vec{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{x} + \vec{b}$$

Věta 5.9. Metoda postupných aproximací pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde matice $\mathbb{A}$ je regulární, tj. metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho(\mathbb{I} - \mathbb{A}) < 1$$

Důkaz. Plyne z 5.3. □

Poznámka. Díky 2.65 je postačující podmínkou konvergence metody postupných aproximací existence nějaké normy, pro kterou

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{A}\| < 1$$

Věta 5.10. Nechť $p(t)$ je polynom, $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom $p(\lambda) \in \sigma(p(\mathbb{A}))$.

Důkaz. Využijeme vztahu $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ je singulární. Rozepíšeme $p(t)$ do tvaru

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i,\ a_n \neq 0$$

Potom můžeme upravit

$$p(\mathbb{A}) - p(\lambda)\mathbb{I} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbb{A}^i - \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^i = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{i-1}$$

Z čehož plyne, že $p(\mathbb{A}) - p(\lambda)\mathbb{I}$ je sigulární a tedy $p(\lambda) \in \sigma(p(\mathbb{A}))$. □

Poznámka. *(Důkaz z přednášky)* Z 2.8 víme, že se při mocnění umocňuje spektrum. S pomocí Jordanovy věty dále zjistíme, že pro násobení platí:

$$a^k \mathbb{A}^k = a^k \mathbb{X}^- 1 \mathbb{J}^k \mathbb{X} = \mathbb{X}^- 1 (a\mathbb{J})^k \mathbb{X}$$

Obdobně pro sčítání. Z toho je vidět, spektrum součtu matice obsahuje součet vlastních čísel. Složením těchto operací definuje polynom. Platí tedy $p(\mathbb{A}) = matice X^- 1 p(\mathbb{J})\mathbb{X}$, což dokazuje větu.

Věta 5.11. Nechť matice $\mathbb{A}$ je hermitovská a pozitivně definitní. Pak metoda postupných aproximací pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\Theta < \mathbb{A} < 2\mathbb{I}$$

Důkaz. Díky 5.9 metoda postupných aproximací konverguje právě tehdy, když $\sigma(\mathbb{I} - \mathbb{A}) \subset (-1, 1)$. Hermitovskost matice $\mathbb{A}$ nám zaručuje reálnost vlastních čísel. Vezmeme polynom $p(t) = 1 - t$, tedy $p(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \mathbb{A}$ a užitím 5.10 dostáváme $\sigma(\mathbb{A}) \subset p((-1, 1)) = (0, 2)$, tedy $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní. Vezmeme polynom $q(t) = 1 + t$, tedy $q(\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 2\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a užitím 5.10 dostáváme $\sigma(2\mathbb{I} - \mathbb{A}) \subset q((-1, 1)) = (0, 2)$, tedy $2\mathbb{I} - \mathbb{A}$ je pozitivně definitní. To je jinak zapsáno $\mathbb{A} < 2\mathbb{I}$. □

Poznámka. Nejspíše platí i pro nehermitovské matice. Všechny věty, které jsou v důkazu použité, platí bez ohledu na to, zda jsou vlastní čísla reálná či komplexní, pokud se nahradí interval kruhem v $\mathbb{C}$ obsahujícím daný interval.

5.4. **Předpodmíněná metoda postupných aproximací.** Abychom zlepšili konvergenci metody postupných aproximací, vynásobíme soustavu regulární maticí $\mathbb{H}$ a dostáváme

$$\mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{H}\vec{b}$$

Použitím metody postupných aproximací pro tuto soustavu dostáváme

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b}$$

Podmínka

$$\vec{x} = (\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\vec{x} + \mathbb{H}\vec{b}$$

je splněna díky tomu, že je obecně splněná pro metodu postupných aproximací.

Věta 5.13. Předpodmíněná metoda postupných aproximací s předpodmíněním $\mathbb{H}$ pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde matice $\mathbb{A}$ je regulární, tj. metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b}$$

konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}) < 1$$

Důkaz. Plyne z 5.3. □

Poznámka. Díky 2.65 je postačující podmínkou konvergence předpodmíněné metody postupných aproximací existence nějaké normy, pro kterou

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\| < 1$$

Věta 5.14. Nechť matice $\mathbb{A}$ je hermitovská a pozitivně definitní. Pak předpodmíněná metoda postupných aproximací pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ když platí **postačující podmínka**

$$\Theta < \mathbb{A} < \mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^*$$

Konvergence je navíc monotónní vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$

Důkaz. Chceme dokázat $\|\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\|_{\mathbb{A}} < 1$ a tím splnit předpoklady 5.13 (Energetická norma existuje, protože je $\mathbb{A}$ hermitovská a pozitivně definitní).

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\|_{\mathbb{A}} = \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\right\|_2 = \left\|\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\right\|_2 = \|\mathbb{B}\|_2$$

když označíme $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$. Dále

$$\|\mathbb{B}\|_2 < 1 \Leftrightarrow \|\mathbb{B}\|_2^2 < 1$$

Využijeme 2.60 a 2.65

$$\|\mathbb{B}\|_2^2 = \rho(\mathbb{B}^*\mathbb{B}) \leq \|\mathbb{B}^*\mathbb{B}\|$$

pro nějakou normu. Budeme tedy odhadovat ze shora matici $\mathbb{B}^*\mathbb{B}$.

$$\mathbb{B}^*\mathbb{B} = (\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})^*(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}) = (\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})$$

kde poslední rovnost plyne z hermitovskosti matice $\mathbb{A}$.

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^* + \mathbb{H})\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} + \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$$

Využijeme snadno ověřitelné rovnosti $\mathbb{H}^*(\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^*)\mathbb{H} = \mathbb{H}^* + \mathbb{H}$ a dostáváme

$$\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^* + \mathbb{H})\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} + \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*(\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^*)\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} + \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*(\underbrace{\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* - \mathbb{A}}_{>\Theta})\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$$

kde jsme k odhadu využili předpokladů věty. Dále víme, že $\mathbb{H}^*\mathbb{H}$ je pozitivně definitní (Ověření: $\langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \mathbb{H}\vec{x}|\mathbb{H}\vec{x}\rangle = \|\mathbb{H}\vec{x}\| > 0$). Protože i $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, můžeme odhadnout

$$\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*(\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* - \mathbb{A})\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} > \Theta$$

A protože i $\mathbb{B}^*\mathbb{B}$ je pozitivně definitní, konečně můžeme odhadnout

$$\mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*(\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* - \mathbb{A})\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} < \mathbb{I}$$

Tím jsme naplnili předpoklady 5.13, a tedy dokázali platnost věty. □

Jak tedy volit matici $\mathbb{H}$? Pokud bychom volili $\mathbb{H} = \mathbb{A}^{-1}$ dostáváme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + \mathbb{A}^{-1}\vec{b} = \vec{x}$$

Tedy předpodmíněná metoda postupných aproximací by konvergovala v první iteraci. Avšak výpočet $\mathbb{A}^{-1}$ provádíme Gaussovou eliminační metodou, čemuž jsme se chtěli vyhnout.
Oblíbenou metodou je tzv. **neúplný LU rozklad**, kde malé prvky zanedbáváme, čímž můžeme zlepšit časovou náročnost.

5.5. **Richardsonovy iterace.** Zavedeme tzv. **relaxační parametr** $\theta \in \mathbb{C}$. Metoda Richardsonových iterací je předpodmíněnou metodou postupných iterací, kde volíme

$$\mathbb{H} = \theta\mathbb{I}$$

a dostáváme

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \theta\mathbb{A}) + \theta\vec{b}$$

Věta 5.16. Nechť matice $\mathbb{A}$ je hermitovská a pozitivně definitní. Nechť $\theta \in \mathbb{R}$. Pak metoda Richardsonových iterací konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\Theta < \mathbb{A} < \frac{2}{\theta}\mathbb{I}$$

Konvergence je navíc monotónní vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$

Důkaz. Pomocí 5.14 dokážeme, že se jedná o **postačující podmínku**:

Důkaz nutnosti podmínky od doc. Humhala

$$\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* = \frac{1}{\theta}\mathbb{I} + \left(\frac{1}{\theta}\mathbb{I}\right)^* = \frac{2}{\theta}\mathbb{I}$$

□

5.6. **Jacobiho metoda.** Vyjdeme ze vzorce pro výpočet složek násobku matice a vektoru, tj.

$$(\mathbb{A}\vec{y})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij}\vec{y}_j$$

Budeme chtít, aby když z vektoru $\vec{x}^{(k)}$ nahradíme i-tou složku i-tou složkou vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$, byla splněna i-tá rovnice soustavy, tj.

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)} + \mathbb{A}_{ii}\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{b}_i$$

Tedy dostáváme

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)}}{\mathbb{A}_{ii}}$$

Z posledního předpisu je vidět, že musíme předpokládat nenulovou diagonálu. Toho však lze u regulární matice dosáhnout přerovnáním.

5.7. **Jacobiho metoda - numerická analýza.** Rozepíšeme matici $\mathbb{A}$ do tvaru

$$\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{R}$$

kde

- $\mathbb{D}$ je diagonální matice s diagonálou matice $\mathbb{A}$
- $\mathbb{L}$ je dolní trojúhelníková matice s prvky pod diagonálou $\mathbb{A}$, vynásobenými (-1)
- $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková matice s prvky nad diagonálou $\mathbb{A}$, vynásobenými (-1)

Můžeme tedy shrnout předpis pro prvky $\vec{x}^{(k+1)}$ do jednoho vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{D}^{-1}\left(\vec{b} + (\mathbb{L}+\mathbb{R})\vec{x}^{(k)}\right) = \mathbb{D}^{-1}\vec{b} + \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + \mathbb{D}^{-1}\vec{b}$$

Zjišťujeme, že Jacobiho metoda je vlastně předpodmíněnou metodou postupných aproximací, kde volíme

$$\mathbb{H} = \mathbb{D}^{-1}$$
$$\vec{c} = \mathbb{D}^{-1}\vec{b}$$

Věta 5.18. Jacobiho metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho\left(\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\right) < 1$$

$I - HA = I - D^{-1}A = I - D^{-1}(D-L-R)$

$= \cancel{I} - \cancel{I} + D^{-1}\underline{(L+R)}$

Důkaz. Díky vztahu $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{R}$ můžeme upravit

$$\rho\left(\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\right) = \rho\left(\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{A})\right) = \rho\left(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right) < 1$$

čímž jsou splněny předpoklady 5.13. □

Poznámka. Díky 2.65 je postačující podmínkou konvergence Jacobiho metody existence nějaké normy, pro kterou

$$\left\|\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\right\| < 1$$

Definice 5.19. Pokud pro matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\mathbb{A}_{ij}| < |\mathbb{A}_{ii}|$$

Nazýváme ji maticí s převládající diagonálou.

Věta 5.20. Nechť má matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu. Pak Jacobiho metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$.

Důkaz. Chceme ukázat $\|\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\|_\infty = \|\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{A})\|_\infty = \|\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\|_\infty < 1$ a využít 5.18. Matice $\mathbb{D}$ je diagonální a na její diagonále jsou prvky diagonály matice $\mathbb{A}$. Proto pro prvky matice $\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}$ platí

$$\left(\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right)_{ij} = \frac{\mathbb{A}_{ij}}{\mathbb{A}_{ii}}$$

A tedy na diagonále $\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}$ jsou jedničky. Proto

$$\left(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \frac{\mathbb{A}_{ij}}{\mathbb{A}_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$$

Díky 2.60 platí

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in\hat{n}} \sum_{j=1}^{n} \left|\left(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right)_{ij}\right| = \max_{i\in\hat{n}} \frac{1}{\mathbb{A}_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\mathbb{A}_{ij}| < 1$$

kde poslední nerovnost je důsledkem toho, že matice $\mathbb{A}$ má převládající diagonálu. □

Věta 5.21. Nechť je matice $\mathbb{A}$ hermitovská a pozivně definitní. Pak Jacobiho metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\Theta < \mathbb{A} < 2\mathbb{D}$$

Konvergence je navíc monotónní vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$

Důkaz. Protože je matice $\mathbb{A}$ hermitovská, jsou diagonální prvky $\mathbb{A}_{ii} \in \mathbb{R}$ (musí platit $\mathbb{A}_{ii} = \overline{\mathbb{A}_{ii}}$), tudíž $\mathbb{D} = \mathbb{D}^*$. Protože je navíc pozitivné definitní, platí $\vec{x}^*\mathbb{A}\vec{x} > 0$. Zvolíme–li $\vec{x} = \vec{e}_{(i)}$, kde $\vec{e}_{(i)}$ jsou vektory ze standardní báze, dostaneme $\mathbb{A}_{ii} = \mathbb{D}_{ii} = \vec{e}^*_{(i)}\mathbb{A}\vec{e}_{(i)} > 0$, tj. $\mathbb{D}$ je pozitivně definitní.

($\Leftarrow$) Upravíme předpis Jacobiho metody do tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})\vec{x}^{(k+1)} + \mathbb{D}^{-1}\vec{b}$$

což je předpis předpodmíněné metody postupných aproximací s předpodmíněním $\mathbb{H} = \mathbb{D}^{-1}$. Dále tedy platí

$$\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* = \mathbb{D} + \mathbb{D}^* = 2\mathbb{D}$$

čímž jsou splněny předpoklady 5.14.

($\Rightarrow$) Díky 5.3 víme, že $\sigma(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}) \subset (-1, 1)$. Užitím 5.10 s $p(t) = 1 + t$ dostáváme $\sigma(2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}) \subset (0, 2)$. Můžeme upravit

$$2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}(2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{A}\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}})\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}$$

Z čehož plyne, že je matice $2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{A}\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}$ pozitivně definitní. Toho využijeme při odhadu

$$\langle(2\mathbb{D} - \mathbb{A})\vec{x}|\vec{x}\rangle = \vec{x}(2\mathbb{D} - \mathbb{A})\vec{x} = \vec{x}\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}(2\mathbb{D} - \mathbb{A})\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\vec{x} = \left(\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right)^* \left(2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{A}\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right) =$$

$$= \langle\left(2\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{A}\mathbb{D}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\vec{x}|\mathbb{D}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\rangle > 0$$

Tedy $2\mathbb{D} - \mathbb{A} > \Theta$, což je jinak zapsáno $2\mathbb{D} > \mathbb{A}$.

□

5.8. **Gaussova-Seidelova metoda.** Vyjdeme ze stejného vztahu jako v případě Jacobiho metody, avšak použijeme již napočítané složky vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$, tedy

$$\sum_{j=1}^{i} \mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)} = \vec{b}_i$$

Tedy dostáváme

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)}}{\mathbb{A}_{ii}}$$

Znovu musíme předpokládat nenulovou diagonálu.

5.9. **Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza.** Použijeme stejného přepisu matice $\mathbb{A}$ jako v případě Jacobiho metody a shrneme předpis pro prvky $\vec{x}^{(k+1)}$ do jednoho vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{D}^{-1}\left(\vec{b} + \mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)}\right)$$

který upravujeme

$$\mathbb{D}\vec{x}^{(k+1)} - \mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)}$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \left(\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b}$$

Zjišťujeme, že Gaussova-Seidelova metoda je vlastně předpodmíněnou metodou postupných aproximací, kde volíme

$$\mathbb{H} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}$$

Věta 5.23. Gaussova-Seidelova metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho\left((\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\right) < 1$$

$I - (D - L)^{-1}A = I - (D^{-1} + L^{-1})A$

$+$

$= I - (D - L)^{-1}(D - L - R) = \cancel{I} - \cancel{(D - L)^{-1}(D - L)} + (D - L)^{-1}R$

Důkaz. Upravíme předpis Gaussovy-Seidelovy metody do tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b}$$

což je předpis předpodmíněné metody postupných aproximací s předpodmíněním $\mathbb{H} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}$. Díky vztahu $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{R}$ můžeme upravit

$$\rho\left((\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\right) = \rho\left((\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{A})\right) = \rho\left(\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{A}\right) < 1$$

čímž jsou splněny předpoklady 5.13. □

Poznámka. Díky 2.65 je postačující podmínkou konvergence Gaussovy-Seidelovy metody existence nějaké normy, pro kterou

$$\left\|(\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\right\| < 1$$

Věta 5.24. Nechť má matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu. Pak Gaussova-Seidelova metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$.

Důkaz. Označíme $\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}$. Chceme ukázat $\|\mathbb{B}\|_\infty < 1$ a využít 5.23. Díky 2.60 platí

$$\|\mathbb{B}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty = 1}\|\mathbb{B}\vec{x}\|_\infty$$

Označíme tento maximální vektor $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\|_\infty = 1$) a dále označíme $\vec{v} = \mathbb{B}\vec{u}$. Potom platí

$$\|\mathbb{B}\|_\infty = \|\mathbb{B}\vec{u}\|_\infty = \|\vec{v}\|_\infty = \max_{k\in\hat{n}}|\vec{v}_k|$$

Označíme takovouto maximální složku indexem i. Upravíme rovnici $\mathbb{B}\vec{u} = \vec{v}$ do tvaru

$$(\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\vec{u} = \vec{v}$$

$$\mathbb{R}\vec{u} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})\vec{v}$$

a budeme upravovat její i-tou (maximální) složku:

$$\sum_{j=i+1}^{n} -\mathbb{A}_{ij}\vec{u}_j = \sum_{j=1}^{i}\mathbb{A}_{ij}\vec{v}_j$$

Upravíme a díky trojúhelníkové nerovnosti odhadujeme

$$|\vec{v}_i| = \left|\frac{1}{\mathbb{A}_{ii}}\left(\sum_{j=i+1}^{n} -\mathbb{A}_{ij}\vec{u}_j - \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{A}_{ij}\vec{v}_j\right)\right| \leq \frac{1}{|\mathbb{A}_{ii}|}\left(\sum_{j=i+1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}||\vec{u}_j| + \sum_{j=1}^{i-1}|\mathbb{A}_{ij}||\vec{v}_j|\right)$$

Využijeme vlastností $|\vec{u}_j| \leq 1$ a $|\vec{v}_j| \leq |\vec{v}_i|$:

$$\frac{1}{|\mathbb{A}_{ii}|}\left(\sum_{j=i+1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}||\vec{u}_j| + \sum_{j=1}^{i-1}|\mathbb{A}_{ij}||\vec{v}_j|\right) \leq \frac{1}{|\mathbb{A}_{ii}|}\left(\sum_{j=i+1}^{n}|\mathbb{A}_{ij}| + |\vec{v}_i|\sum_{j=1}^{i-1}|\mathbb{A}_{ij}|\right) = \sum_{j=i+1}^{n}\frac{|\mathbb{A}_{ij}|}{|\mathbb{A}_{ii}|} + |\vec{v}_i|\sum_{j=1}^{i-1}\frac{|\mathbb{A}_{ij}|}{|\mathbb{A}_{ii}|}$$

Označíme $a = \sum_{j=i+1}^{n}\frac{|\mathbb{A}_{ij}|}{|\mathbb{A}_{ii}|}$ a $b = \sum_{j=1}^{i-1}\frac{|\mathbb{A}_{ij}|}{|\mathbb{A}_{ii}|}$ a máme nerovnost

$$|\vec{v}_i| \leq a + b|\vec{v}_i|$$

Zároveň ale díky tomu, že matice $\mathbb{A}$ má převládající diagonálu, platí $a + b < 1$ a konečně můžeme odhadovat

$$|\vec{v}_i| \leq \frac{a}{1-b} < \frac{a}{a+b-b} = 1$$

□

Věta 5.25. Nechť je matice $\mathbb{A}$ hermitovská a pozivně definitní. Pak Gaussova-Seidelova metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$. Konvergence je navíc monotónní vzhledem k normě $\|\cdot\|_\mathbb{A}$

Důkaz. Upravíme předpis Gaussovy-Seidelovy metody do tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\,\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\,\vec{b}$$

což je předpis předpodmíněné metody postupných aproximací s předpodmíněním $\mathbb{H} = (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}$. Díky hermitovskosti matice $\mathbb{A}$ platí $\mathbb{L}^* = \mathbb{R}$ a $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}$. Potom můžeme využít 5.14 protože platí

$$\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* = \mathbb{D} - \mathbb{L} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^* = \mathbb{D} - \mathbb{L} + \mathbb{D} - \mathbb{R} = \mathbb{D} + \mathbb{A} > \mathbb{A}$$

□

5.10. **Super-relaxační metoda (SOR – Succesive Over Relaxation).** Upravíme předpis pro Gaussovu-Seidelovu metodu do tvaru

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{x}_i^{(k)} + \Delta\vec{x}_i^{(k)}$$

Zavedeme tzv. **relaxační parametr** ω a pozměníme předpis pro Gaussovu-Seidelovu metodu na

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{x}_i^{(k)} + \omega\Delta\vec{x}_i^{(k)}$$

Vidíme, že pro $\omega = 1$ super-relaxační metoda přechází v metodu Gaussovu-Seidelovu.

Poznámka. Obdobnou modifikaci můžeme provést i pro Jacobiho metodu i pro Richardsonovy iterace.

5.11. **Super-relaxační metoda - numerická analýza.** Vyjádříme po složky vektoru $\Delta\vec{x}^{(k)}$ z Gaussovy-Seidelovy metody jako

$$\Delta\vec{x}_i^{(k)} = \vec{x}_i^{(k+1)} - \vec{x}_i^{(k)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)}}{\mathbb{A}_{ii}} - \vec{x}_i^{(k)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)}}{\mathbb{A}_{ii}}$$

Nyní tento vztah použijeme pro super-relaxační metodu

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{x}_i^{(k)} + \frac{\omega}{\mathbb{A}_{ii}}\left(\vec{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n}\mathbb{A}_{ij}\vec{x}_j^{(k)}\right)$$

Použijeme stejného přepisu matice $\mathbb{A}$ jako v případě Jacobiho metody a shrneme předpis pro prvky $\vec{x}^{(k+1)}$ do jednoho vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \omega\mathbb{D}^{-1}\left(\vec{b} + \mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} + (\mathbb{R} - \mathbb{D})\vec{x}^{(k)}\right)$$

který upravujeme

$$\mathbb{D}\vec{x}^{(k+1)} - \omega\mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{D} - \omega(\mathbb{D} - \mathbb{R}))\vec{x}^{(k)} + \omega\vec{b}$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}(\mathbb{D} - \omega(\mathbb{A} + \mathbb{L}))\vec{x}^{(k)} + \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \left(\mathbb{I} - \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\vec{b}$$

Zjišťujeme, že super-relaxační metoda je vlastně předpodmíněnou metodou postupných aproximací, kde volíme

$$\mathbb{H} = \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}$$

Věta 5.28. Super-relaxační metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\rho\left(\mathbb{B}_\omega\right) < 1$$

kde jsem označili

$$B_\omega = \mathbb{I} - \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\mathbb{A}$$

Důkaz. Plyne z 5.3. □

Poznámka. Díky 2.65 je postačující podmínkou konvergence super-relaxační metody existence nějaké normy, pro kterou

$$\|\mathbb{B}_\omega\| < 1$$

Věta 5.29. Pro každé $\omega \in \mathbb{R}$ platí

$$|\omega - 1| \leq \rho\left(\mathbb{B}_\omega\right)$$

a tedy super-relaxační metoda nemůže konvergovat pro $\omega \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2 \rangle$

Důkaz. Pro důkaz využijeme toho, že determinant nezávisí na volbě báze. Podle označení je

$$\mathbb{B}_\omega = (\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\left[(1-\omega)\mathbb{D} + \omega\mathbb{R}\right]$$

Z Jordanovy věty zároveň víme:

$$\mathbb{A} = (\mathbb{T})^{-1}\mathbb{J}\mathbb{T} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{J}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Aplikujeme tuto znalost na naši matici (členy determinantu za $\mathbb{L}$ a $\mathbb{R}$ vypadnou, neboť jsou to singulární matice:

$$\det(\mathbb{B}_\omega) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ii}} \prod_{i=1}^{n} (1-\omega)\mathbb{A}_{ii} = (1-\omega)^n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Kde poslední rovnost plyne z Jordanovy věty a rozpisu nahoře. V absolutních hodnotách tedy máme:

$$|1-\omega|^n = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Pak je splněno buď I) všechna λ_i jsou stejná, tj, $|1-\omega|^n = |\lambda_i|^n$ a tedy nastává rovnost $\rho(\mathbb{B}_\omega) = |\lambda_i|$ anebo II) existuje takové λ_{i_1}, že $|\lambda_{i_1}| < |1-\omega|$, pak ale musí zároveň existovat takové λ_{i_2}, že $|\lambda_{i_2}| > |1-\omega|$ a nastává tudíž $\rho(\mathbb{B}_\omega) \geq |\lambda_{i_2}| > |\lambda_i|$. Z věty 5.28 pak plyne divergence metody pro $\omega \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2 \rangle$. □

Věta 5.30. Nechť má matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu a platí $0 < \omega \leq 1$. Pak super-relaxační metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$.

Důkaz. Oberhuber nezná. □

Věta 5.31 (Ostrowski)**.** Nechť je matice $\mathbb{A}$ hermitovská a pozivně definitní. Pak super-relaxační metoda pro soustavu lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ konverguje pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ k $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$0 < \omega < 2$$

Konvergence je navíc monotónní vzhledem k normě $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$

Důkaz. Upravíme předpis super-relaxační metody do tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \omega\left(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L}\right)^{-1}\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \omega\left(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L}\right)^{-1}\vec{b}$$

což je předpis předpodmíněné metody postupných aproximací s předpodmíněním $\mathbb{H} = \omega\left(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L}\right)^{-1}$. Díky podmínce věty platí

$$\frac{2}{\omega} - 1 > 0$$

Díky hermitovskosti matice $\mathbb{A}$ platí $\mathbb{L}^* = \mathbb{R}$ a $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}$. Potom můžeme s využitím 5.14 dokázat **postačující podmínku**, protože platí

$$\mathbb{H}^{-1} + \left(\mathbb{H}^{-1}\right)^* = \frac{1}{\omega}(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L}) + \frac{1}{\omega}(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^* = \frac{1}{\omega}\mathbb{D} - \mathbb{L} + \frac{1}{\omega}\mathbb{D} - \mathbb{R} = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right)\mathbb{D} + \mathbb{A} > \mathbb{A}$$

□

Věta 5.38. Nechť je matice $\mathbb{A}$ dvoucyklická a shodně uspořádaná. Nechť dále $\omega \neq 0$ a $\lambda \neq 0$ a $\mathbb{B}_\omega \in \mathbb{C}^{n,n}$ je maticí super-relaxační metody a $\mathbb{B}_J \in \mathbb{C}^{n,n}$ je maticí Jacobiho metody. Nechť čísla λ a μ splňují

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2\mu^2\lambda$$

Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{B}_\omega) \Leftrightarrow \mu \in \sigma(\mathbb{B}_J)$. Navíc platí, že pro

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(\mathbb{B}_J)}}$$

nabývá $\rho(\mathbb{B}_\omega)$ svého minima a super-relaxační metoda tedy konverguje nejrychleji.

Důkaz. Bez důkazu.

5.12. **Shrnutí podmínek konvergence.**

Podmínka na matici $\mathbb{A}$	Převládající diagonála	Hermitovská a pozitivně definitní
Jacobiho metoda	vždy	$\mathbb{A} < 2\mathbb{D}$
Gaussova-Seidelova metoda	vždy	vždy
Super-relaxační metoda	$0 < \omega \leq 1$	$0 < \omega < 2$

6. Vlastní čísla a vektory matic

6.1. Lokalizace vlastních čísel.

Věta (Gershgorin)**.** Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom

$$\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$$

kde definujeme

$$\mathcal{R}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \mathbb{A}_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |\mathbb{A}_{ij}| \right\}$$

Důkaz 6.1 vzala Hanele z feláckých vut skript (ale zdá se, že funguje), podle zápisků z přednášky není vyžadován

Důkaz. Mějme λ vlastní číslo $\mathbb{A}$, $\vec{x}$ příslušný vlastní vektor. Z rovnosti $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ rozepsáním podle definice násobení matice a vektoru dostaneme:

$$(\lambda - \mathbb{A}_{ii}) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |\mathbb{A}_{ij} x_j|$$

Vezměme x_k největší prvek $\vec{x}$ v absolutní hodnotě, platí tedy $\frac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$ pro $jneqk$. Z toho plyne

$$|\lambda - \mathbb{A}_{kk}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\mathbb{A}_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |\mathbb{A}_{kj}|$$

Tedy λ leží v kruhu o poloměru $\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |\mathbb{A}_{kj}|$. Všechny vlastní čísla tedy leží ve sjednocení kruhů o poloměrech odpovídajících indexu i. ☐

6.2. Aposteriorní odhad chyby.

Věta 6.1. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská. Nechť $\hat{\lambda}$ a $\hat{\vec{x}} \neq \vec{0}$ jsou napočítané aproximace vlastního čísla λ a vlastního vektoru $\vec{x}$. Pro reziduum

$$\vec{r} = \mathbb{A}\hat{\vec{x}} - \hat{\lambda}\hat{\vec{x}}$$

potom platí

$$\min_{\lambda_i \in \sigma(\mathbb{A})} \left| \hat{\lambda} - \lambda_i \right| \leq \frac{\|\vec{r}\|_2}{\left\| \hat{\vec{x}} \right\|_2}$$

Důkaz. $\mathbb{A}$ je hermitovská a tudíž existuje ON báze z vlastních vektorů $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Vektor $\hat{\vec{x}}$ lze napsat jako

$$\hat{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

kde $\alpha_i = \vec{u}_i^* \hat{\vec{x}}$ jsou Furierovy koeficienty z LAA. Rozepíšeme reziduum:

$$\vec{r} = \mathbb{A} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \vec{u}_i - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \hat{\lambda}) \alpha_i \vec{u}_i$$

U druhého rovnítka jsme vtáhli matici $\mathbb{A}$ do sumy a aplikovali na vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Z toho plyne:

$$\|\vec{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i - \hat{\lambda} \right|^2 |\alpha_i|^2$$

$$\|\hat{\vec{x}}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

$$\frac{\|\vec{r}\|_2^2}{\|\hat{\vec{x}}\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i - \hat{\lambda} \right|^2 |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2} =$$

Zavedeme $\beta_i = \frac{|\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$, tudíž $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$.

$$= \sum_{i=1}^n \beta_i \left|\lambda_i - \hat{\lambda}\right|^2 \geq \min_{\lambda_i \in \sigma(\mathbb{A})} \left|\lambda_i - \hat{\lambda}\right|^2 \sum_{i=1}^n \beta_i = \min_{\lambda_i \in \sigma(\mathbb{A})} \left|\lambda_i - \hat{\lambda}\right|^2$$

□

6.3. **Mocninná metoda.** Zvolíme libovolný vektor $\vec{x}^{(0)}$ a napočítáváme

$$\rho_{k+1} = \left\|\mathbb{A}\vec{x}^{(k)}\right\|_2$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbb{A}\vec{x}^{(k)}}{\rho_{k+1}}$$

Poznámka. V roce 2016/17 se Oberhuber vrátil k Humhalovu "normování"pomocí $\rho_{k+1} = \vec{e}_1^T \vec{y}^{(k+1)}$. To má za následek pozměnění předpokladů následujících vět.

Mám ty věty přepsat?

Věta 6.2. Vektor $\vec{x}^{(k)}$ z mocninné metody lze vyjádřit jako

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{\mathbb{A}^k \vec{x}^{(0)}}{\prod_{i=1}^k \rho_i}$$

Důkaz. Z definice posloupností v mocninné metodě plyne:

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{\mathbb{A}\vec{x}^{(k-1)}}{\rho_k} = \frac{\mathbb{A}^2\vec{x}^{(k-2)}}{\rho_k \rho_{k-1}} = \cdots = \frac{\mathbb{A}^k \vec{x}^{(0)}}{\prod_{i=1}^k \rho_i}$$

□

Věta 6.3. Nechť matice $\mathbb{A}$ má vlastní číslo λ s algebraickou i geometrickou násobností r, které má největší absolutní hodnotu. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \ldots, \vec{y}^{(r)}$ jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1. Nechť $\mathbb{T}$ převádí $\mathbb{A}$ do Jordanova tvaru, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}_{\mathbb{A}}\mathbb{T}$. Nechť je alespoň jedna z prvních r složek vektoru $\mathbb{T}\vec{x}^{(0)}$ nenulových. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k = |\lambda_1|$$
$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(s)}$$

kde je vektor $\vec{y}^{(s)}$ vlastním vektorem k λ_1 (může to být libovolná lineární kombinace vektorů $\vec{y}^{(1)}, \ldots, \vec{y}^{(r)}$).

Důkaz. Z Jordanovy věty platí:

$$\mathbb{J}_{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & \mathbb{J}_{r+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Z věty 6.2 plyne

$$\vec{x}^{(k+1)} = \frac{1}{\vec{e}_1^T \mathbb{A}\vec{x}^{(k)}} \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} \tag{1}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici zleva vektorem $\vec{e}_1^T$, dostaneme

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\vec{e}_1^T \vec{x}^{(k)} = 1)$$

Odtud můžeme rozepsat ρ_k jako:

$$\rho_k = \vec{e}_1^T \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} = \frac{\vec{e}_1^T \mathbb{A}\vec{x}^{(k)}}{\vec{e}_1^T \vec{x}^{(k)}} = \frac{\rho_{k-1}\cdots\rho_0}{\rho_{k-1}\cdots\rho_0} \cdot \frac{\vec{e}_1^T \mathbb{A}^{k+1}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{A}^k \vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1^{k+1} \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & \mathbb{J}_{r+1}^{k+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1^{k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1^{k} \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & \mathbb{J}_{r+1}^{k} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}} = \lambda_1 \frac{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}\mathbb{J}_{r+1})^{k+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}\mathbb{J}_{r+1})^{k} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}.$$

Podle věty 2.63 konvergují diagonální bloky k nulové matici (dostaneme tam členy $\frac{\lambda_m}{\lambda_1}, m \in \hat{n}$, které jsou menší než jedna, tudíž konvergují k 0), a tak

$$\rho_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1 \frac{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r\text{-krát}} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}} = \lambda_1$$

za předpokladu, že $\vec{e}_1^T \mathbb{T}\vec{x}^{(0)} \neq 0$. Jednak je ale nalezení takového vektoru $\vec{x}^{(0)}$, že $\vec{e}_1^T \mathbb{T}\vec{x}^{(0)} = 0$, dosti obtížné, jednak vše spraví chyby vzniklé zaokrouhlováním. Dále podle (1) a 6.2 platí

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{\mathbb{A}\vec{x}^{(k-1)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{A}\vec{x}^{(k-1)}} = \frac{\rho_{k-2}\cdots\rho_0}{\rho_{k-2}\cdots\rho_0} \cdot \frac{\mathbb{A}^k\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{A}^k\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{\mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \mathbb{J}_2^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \mathbb{J}_2^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}} = \frac{\mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}\mathbb{J}_2)^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^T \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}\mathbb{J}_2)^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}.$$

Analogicky jako výše dostaneme

$$\vec{x}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\mathbb{T}^{-1}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r\text{-krát}} & \\ & \begin{matrix}0 & \\ & \ddots\end{matrix}\end{pmatrix}\mathbb{T}\vec{x}^{(0)}}{\vec{e}_1^{\,T}\mathbb{T}^{-1}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r\text{-krát}} & \\ & \begin{matrix}0 & \\ & \ddots\end{matrix}\end{pmatrix}\mathbb{T}\vec{x}^{(0)}} \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{y}^{(s)}.$$

Zjistili jsme tedy, že posloupnost $(\vec{x}^{(k)})$ konverguje. Snadno se přesvědčíme, že její limitní vektor $\vec{y}^{(s)}$ je vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ příslušejícím k vlastnímu číslu λ_1: Z definice ρ_{k+1} a $\vec{x}^{(k+1)}$ totiž vyplývá vztah $\rho_k\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)}$ a přechodem k limitě dostáváme $\lambda_1\vec{y}^{(s)} = \mathbb{A}\vec{y}^{(s)}$.

□

Věta 6.7. Nechť matice $\mathbb{A}$ má vlastní čísla λ, $-\lambda$, která jsou v absolutní hodnotě největší a jejichž algebraická i geometrická násobnost je 1. Nechť $\vec{y}^{(1)}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ a $\vec{y}^{(2)}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-\lambda$. Nechť $\mathbb{T}$ převádí $\mathbb{A}$ do Jordanova tvaru, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{J}_{\mathbb{A}}\mathbb{T}$. Nechť je $x^{(0)}$ takový, že alespoň jedna z prvních dvou složek vektoru$\mathbb{T}x^{(0)}$ nenulová. Potom

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{\rho_{2k}\rho_{2k+1}} = |\lambda|$$
$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{A}\vec{x}^{(2k)} + \lambda\vec{x}^{(2k)} = \vec{y}^{(1)}$$
$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{A}\vec{x}^{(2k)} - \lambda\vec{x}^{(2k)} = \vec{y}^{(2)}$$

Důkaz. Viz skripta doc. Humhala, resp. wikiskripta NM. □ Důkaz 6.7

6.4. **Redukční metoda.** Konstruujeme dvě posloupnosti:

- Slouží k napočítání několika v absolutní hodnotě největších vlastních čísel
- K napočítání celého spektra se nehodí, rychle ztrácí přesnost.

Za pomoci znalosti absolutní hodnotě největšího $\lambda_1 \in \sigma(A)$ a jemu odpovídajícího vlastního vektoru $\vec{x}$ převedeme matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ na matici $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$ takovou, že má stejné spektrum jako $\mathbb{A}$ až na o jedno sníženou násobnost λ_1. Převedeme $\mathbb{A}$ do báze $(\vec{x}, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$: $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \vec{q}^{\,T} \\ \vec{\theta} & \mathbb{B}\end{pmatrix}$kde $\mathbb{P}$ je matice přechodu mezi bázemi.

Dokončit Redukční metodu. Nevím, jestli to sem mám psát.

6.5. **Výpočet kompletního spektra matice.**

Věta 6.13. Nechť $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ je polynom stupně n. Potom jeho kořeny jsou vlastními čísly Frobeniovy matice $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{n,n}$, definované jako:

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & \cdots & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz. Bez důkazu.

6.6. **Trojúhelníková metoda.** Konstruujeme dvě posloupnosti:

- $\left\{\mathbb{L}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
- $\left\{\mathbb{R}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ horní trojúhelníkové

Můžeme volit libovolnou $\mathbb{L}_0$ (dokonce ani nemusí být dolní trojúhelníková) a pomocí Doolittlovy faktorizace napočítáváme

$$\mathbb{L}_{k+1}\mathbb{R}_{k+1} = \mathbb{A}\mathbb{L}_k$$

Poznámka 6.15. Pokud existují $\mathbb{L} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{R} \in \mathbb{C}^{n,n}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{L}^{(k)} = \mathbb{L}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{R}^{(k)} = \mathbb{R}$$

Potom platí

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{L}^{-1}$$

a na diagonále matice $\mathbb{R}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

Důkaz. (1) Je důsledkem vztahu $\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{A}\mathbb{L}$.
(2) Platí díky

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\left(\mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{L}^{-1} - \lambda\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1}\right) = \det\left(\mathbb{L}(\mathbb{R} - \lambda\mathbb{I})\mathbb{L}^{-1}\right) = \det(\mathbb{R} - \lambda\mathbb{I})$$

□

Poznámka 6.16. Nechť λ je díky 6.15 vlastním číslem matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{R}$. Nechť $\vec{y}$ je vlastním vektorem matice $\mathbb{R}$ příslušný vlastnímu číslu λ. Potom pro vektor $\vec{x}$, který je vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ platí

$$\vec{x} = \mathbb{L}\vec{y}$$

Důkaz. Z důkazu 6.15 (2) plyne, že $\mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ vyjádřená v bázi dané sloupci matice $\mathbb{L}$. Vektor $\vec{x}$ tedy dostaneme převedením vektoru $\vec{y}$ do původní báze pomocí vynásobení maticí $\mathbb{L}$, tj.

$$\vec{x} = \mathbb{L}\vec{y}$$

□

Trojúhelníková metoda je **samoopravná**, pokud je napočítaná $\mathbb{L}^{(k)}$ chybná, lze ji brát jako novou $\mathbb{L}^{(0)}$.

6.7. **Existence LU rozkladu.**

Věta 6.18. Nechť matice $\mathbb{A}$ je silně regulární, tj. existuje její LU rozklad. Nechť dále matice $\mathbb{E}$ je taková, že $\|\mathbb{E}\|$ je dostatečně malé. Pak existuje i LU rozklad matice $\mathbb{A} + \mathbb{E}$.

To je co?

Důkaz. Pokud za $\mathbb{L}^{(0)}$ zvolíme $\mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{A}$. V tomto případě stačí silná regularita. Ze spojitosti LU rozkladu (věta 4.9) pak plyne zbytek věty. □

Poznámka. Přesnější důkaz ani vysvětlení, co je „dostatečně malé“, Oberhuber neříkal (a nejspíš ani nevyžaduje).

To je co?

Věta 6.19. Nechť matice $\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{E}$, kde $\|\mathbb{E}\|$ je dostatečně malé. Pak existuje i rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}$, kde $\mathbb{L}$ je dolní trojůhelníková s jedničkami na diagonále a $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková. Pokud $\|\mathbb{E}\| \to 0$, pak $\mathbb{L} \to \mathbb{I}$ a $\mathbb{R} \to \mathbb{I}$.

Důkaz. Důsledek 6.18. □

6.8. **Konvergence trojúhelníkové metody.**

Věta 6.20. Nechť existuje trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k\mathbb{L}_0 = \mathcal{L}_k\mathcal{R}_k$. Potom

$$\mathcal{L}_k = \mathbb{L}_k$$
$$\mathcal{R}_k = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}_{k-i}$$

Důkaz. Budeme postupně aplikovat trojúhelníkovou metodu, tj. $\mathbb{L}_{k+1}\mathbb{R}_{k+1} = \mathbb{A}\mathbb{L}_k$:

$$\mathbb{A}^k\mathbb{L}_0 = \mathbb{A}^{k-1}\mathbb{L}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{A}^{k-2}\mathbb{L}_2\mathbb{R}_2\mathbb{R}_1 = \cdots = \mathbb{A}\mathbb{L}_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{R}_{k-i} = \mathbb{L}_k\prod_{i=0}^{k-1}\mathbb{R}_{k-i}$$

Matice $\mathbb{L}_k$ je dolní trojúhelníková a matice $\prod_{i=0}^{k-1}\mathbb{R}_{k-i}$ je díky 2.22 horní trojúhelníková. □

Věta 6.22. Nechť je matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární a diagonalizovatelná, tj. $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$. Nechť jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ navzájem různá a $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Nechť existují rozklady matic $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}_0$. (Pomocí matice $\mathbb{X}$ a její inverze diagonalizujeme matici $\mathbb{A}$, $\mathbb{L}_0$ libovolná.) Nechť dále pro dostatečně velké k existují LU rozklady matic $\mathbb{A}\mathbb{L}_k$ (doufáme, že můžeme dostatečně dlouho iterovat). Pak posloupnosti $(\mathbb{L}_k)_{k=0}^{\infty}$ a $(\mathbb{R}_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergují a na diagonále matice $\mathbb{R}$ je spektrum matice $\mathbb{A}$ seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Důkaz. (1) (*konvergence*)

$$\mathbb{A}^k\mathbb{L}_0 = \mathbb{X}\mathbb{D}^k\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y\mathbb{R}_Y = \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1}\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y =$$

V prvním rovnítku jsme použili Jordanovu větu, v druhém LU rozklady $\mathbb{X} = \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{Y} = \mathbb{L}_Y\mathbb{R}_Y$. V posledním jsme vložili identitu, protože potřebujeme dostat matici $\mathbb{D}^k$ za $\mathbb{L}_Y$.

Nyní dokážeme, že $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} \to \mathbb{I}$:

$$\left[\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1}\right]_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ \lambda_i^k\mathbb{L}_{ii}\lambda_i^{-k} = 1 & i = j \\ \lambda_i^k\mathbb{L}_{ij}\lambda_j^{-k} = \mathbb{L}_{ij}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k & i > j \end{cases}$$

Z uspořádání vlastních čísel plyne, že $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} \to \mathbb{I}$ rychlostí danou $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k$. (Používáme Doolittlovu faktorizaci, platí tedy $\mathbb{L}_{ii} = 1$)

Označíme si $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} = \mathbb{I} + \mathbb{F}_k$, kde $\mathbb{F}_k \to \Theta$. Vraťme se k započaté úpravě:

$$= \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X(\mathbb{I} + \mathbb{F}_k)\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y = \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X(\mathbb{I} + \mathbb{F}_k)\mathbb{R}_X^{-1}\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y =$$

V druhém rovnítku jsme znovu vložili identitu. Roznásobíme:

$$= \mathbb{L}_X\left(\mathbb{R}_X(\mathbb{R}_X)^{-1} + \mathbb{R}_X\mathbb{F}_k(\mathbb{R}_X)^{-1}\right)\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y = \mathbb{L}_X\left(\mathbb{I} + \mathbb{G}_k\right)\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y$$

kde jsme si označili $\mathbb{G}_k = \mathbb{R}_X\mathbb{F}_k(\mathbb{R}_X)^{-1}$ a díky regularitě $\mathbb{R}_X$ jde $\mathbb{G}_k \to \Theta$. Jako $\mathcal{R}_k$ si označíme $\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y$, jako $\mathcal{L}_k = \mathbb{L}_X(\mathbb{I} + \mathbb{G}_k)$ Dokázali jsme, že

$$\mathcal{L}_k \to \mathbb{L}_X \Rightarrow \mathbb{L}_k \to \mathbb{L}_X$$

Díky $\mathbb{A}\mathbb{L}_{k-1} = \mathbb{L}_k\mathbb{R}_k$ implikuje konvergence $\mathbb{L}_k \to \mathbb{L}_X$ konvergenci $\mathbb{R}_k \to \mathbb{R}$, čímž je dokázána konvergence metody.

(2) (*na diagonále $\mathbb{R}$ jsou vlastní čísla $\mathbb{A}$*) Limitováním $\mathbb{A}\mathbb{L}_{k-1} = \mathbb{L}_k\mathbb{R}_k$ dostaneme

$$\mathbb{A}\mathbb{L}_X = \mathbb{L}_X\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{L}_X^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L}_X = \mathbb{L}_X^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}_X = \mathbb{R}_X\mathbb{D}\mathbb{R}_X^{-1}$$

Poslední rovnítko platí, protože

$$\mathbb{X} = \mathbb{L}_X\mathbb{R}_X \Rightarrow \mathbb{L}_X^{-1}\mathbb{X} = \mathbb{R}_X \Rightarrow \mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}_X = \mathbb{R}_X^{-1}$$

Protože $\mathbb{R}_X\mathbb{D}\mathbb{R}_X^{-1}$ je součin horních trojúhelníkových matic, platí

$$\operatorname{diag}\mathbb{R} = \operatorname{diag}\mathbb{D},$$

z čehož plyne dokazované tvrzení. $\square$

6.9. **LR algoritmus.** Konstruujeme tři posloupnosti:

- $\left\{\mathbb{A}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$
- $\left\{\mathbb{L}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
- $\left\{\mathbb{R}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ horní trojúhelníkové

Volíme $\mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{A}$ a pomocí Doolittlovy faktorizace napočítáme

$$\mathbb{L}^{(k)}\mathbb{R}^{(k)} = \mathbb{A}^{(k)}$$

$$\mathbb{A}^{(k+1)} = \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{L}^{(k)}$$

Poznámka 6.23. Pokud existuje horní trojúhelníková matice $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^{(k)} = \mathbb{B}$$

potom na diagonále $\mathbb{B}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

Důkaz.

$$\mathbb{A}^{(k+1)} = \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{L}^{(k)} = \left((\mathbb{L}^{(k)})^{-1}\mathbb{L}^{(k)}\right)\mathbb{R}^{(k)}\mathbb{L}^{(k)} = (\mathbb{L}^{(k)})^{-1}\mathbb{A}^{(k)}\mathbb{L}^{(k)} =$$

Pokračujeme ve stejných úpravách a nakonec dostaneme:

$$= (\mathbb{L}^{(k)})^{-1}\dots(\mathbb{L}^{(1)})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L}^{(1)}\dots\mathbb{L}^{(k)}$$

Matice $\mathbb{B} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{A}^{(k+1)}$ je tedy podobná matici $\mathbb{A}$. $\square$

V LR rozkladu potřebujeme méně paměti než pro trojúhelníkovou metodu, neukládáme totiž matici $\mathbb{A}$. To ovšem také znamená, že jakékoliv chyby se neopraví, tedy algoritmus není tolik samoopravný. K tomu také přispívá to, že počáteční matici nemůže volit libovolně.

6.10. **Konvergence LR algoritmu.**

Věta 6.24. Nechť existuje trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{L}_k\mathcal{R}_k$. Potom platí

$$\mathcal{L}_k = \prod_{i=1}^{k} \hat{\mathbb{L}}_i$$

$$\mathcal{R}_k = \prod_{i=0}^{k-1} \hat{\mathbb{R}}_{k-i}$$

Důkaz. Využijeme vlastnosti $\hat{\mathbb{R}}_{l-1}\hat{\mathbb{L}}_{l-1} = \mathbb{A}_l = \hat{\mathbb{L}}_l\hat{\mathbb{R}}_l$ a postupně upravujeme

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_1\dots\mathbb{A}_1 = \hat{\mathbb{L}}_1\hat{\mathbb{R}}_1\hat{\mathbb{L}}_1\hat{\mathbb{R}}_1\dots\hat{\mathbb{L}}_1\hat{\mathbb{R}}_1 = \hat{\mathbb{L}}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_2\hat{\mathbb{R}}_1 = \dots = \prod_{i=1}^{k-1}\hat{\mathbb{L}}_i\mathbb{A}_k\prod_{i=1}^{k-1}\hat{\mathbb{R}}_{k-i} = \prod_{i=1}^{k}\hat{\mathbb{L}}_i\prod_{i=0}^{k-1}\hat{\mathbb{R}}_{k-i}$$

Díky 2.22 je $\prod_{i=1}^{k}\hat{\mathbb{L}}_i$ dolní trojúhelníková matice a $\prod_{i=0}^{k-1}\hat{\mathbb{R}}_{k-i}$ horní trojúhelníková matice. $\square$

Věta 6.27. Nechť je matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ regulární a diagonalizovatelná, tj. $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$. Nechť dále konverguje trojúhelníková metoda při volbě $\mathbb{L}_0 = \mathbb{I}$. Pak LR algoritmus také konverguje a posloupnost $(\mathbb{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici, na jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ seřazená sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Důkaz. Protože musí být oba rozklady stejné, platí $\mathbb{R}_k = \hat{\mathbb{R}}_k$ a $\mathbb{L}_k = \prod_{i=1}^{k}\hat{\mathbb{L}}_i$. Z toho plyne

$$\mathbb{A}_k = \hat{\mathbb{L}}_k\hat{\mathbb{R}}_k = (\mathbb{L}_{k-1})^{-1}\mathbb{L}_k\mathbb{R}_k \to \mathbb{L}^{-1}\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Z toho plyne, že $\mathbb{A}_k$ z LR algoritmu konverguje k horní trojúhelníkové matici. Výskyt vlastních čísel plyne z podobnosti (viz 6.23). $\square$

6.11. **QR algoritmus.**

Věta 6.29. Nechť je $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom existuje rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$, kde matice $\mathbb{Q}$ je unitární a $\mathbb{R}$ horní trojúhelníková. Pokud budeme požadovat, aby diagonální prvky matice $\mathbb{R}$ byly kladné a matice $\mathbb{A}$ je regulární, tak je tento rozklad jednoznačný.

Důkaz. (1) (*existence*) Zajišťuje ji např. Gramm–Schmidtův ON proces (viz 6.30).
(2) (*jednoznačnost*)
Důkaz indukcí podle n

- $n = 1$

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{11}) = \underbrace{\mathbb{I}}_{\mathbb{Q}} \underbrace{(\mathbb{A}_{11})}_{\mathbb{R}}$$

- $n \to n+1$

Předpokládáme existenci 2 různych rozkladů $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R} = \mathbb{Q}'\mathbb{R}'$. Matice blokově zapíšeme jako

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{A}} & \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2^T & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{Q}} & \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2^T & \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{R}} & \vec{r} \\ \vec{0}^T & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Q}' = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{Q}}' & \vec{q}_1' \\ \vec{q}_2'^T & \beta' \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}' = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{R}}' & \vec{r}' \\ \vec{0}^T & \gamma' \end{pmatrix}$$

a tedy musí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{Q}}\widetilde{\mathbb{R}} & \widetilde{\mathbb{Q}}\vec{r} + \gamma\vec{q}_1 \\ \vec{q}_2^T\widetilde{\mathbb{R}} & \vec{q}_2^T\vec{r} + \beta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{Q}}'\widetilde{\mathbb{R}}' & \widetilde{\mathbb{Q}}'\vec{r}' + \gamma'\vec{q}_1' \\ \vec{q}_2'^T\widetilde{\mathbb{R}}' & \vec{q}_2'^T\vec{r}' + \beta'\gamma' \end{pmatrix}$$

Díky indukčnímu předpokladu, tj. jednoznačnosti rozkladu $\widetilde{\mathbb{A}} = \widetilde{\mathbb{Q}}\widetilde{\mathbb{R}}$ můžeme určit $\widetilde{\mathbb{Q}} = \widetilde{\mathbb{Q}}'$ a $\widetilde{\mathbb{R}} = \widetilde{\mathbb{R}}'$. Tím pádem díky rovnosti $\vec{q}_2^T\widetilde{\mathbb{R}} = \vec{q}_2'^T\widetilde{\mathbb{R}}'$ a regularitě $\widetilde{\mathbb{R}}'$ platí $\vec{q}_2 = \vec{q}_2'$. Máme tedy rovnost prvních n sloupců. Protože chceme OG matice $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}'$, musí být sloupce rámci obou matic ON. Tím je však určen směr posledních sloupců matic $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}'$ (musí být rovnoběžné) a platí

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \vec{q}_1' \\ \beta' \end{pmatrix}$$

S pomocí tohoto tvrzení upravíme rovnice pro zbylý sloupec matice na

$$\mathbb{Q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') + (\gamma\vec{q}_1 \pm \gamma'\vec{q}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{q}_2^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') + (\gamma\beta \pm \gamma'\beta) = 0$$

Nyní označme část před plusem jako vektor $\vec{u}$ a část za plusem jako vektor $\vec{v}$, tj.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \\ \vec{q}_2^T(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \gamma\vec{q}_1 \pm \gamma'\vec{q}_1 \\ \gamma\beta \pm \gamma'\beta \end{pmatrix}$$

Protože jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vůči sobě OG (z ortogonality matic $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}'$) a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, musí být $\vec{u} = \vec{0}$ a $\vec{v} = \vec{0}$ (jinak by nebyly OG). Z $\vec{u} = \vec{0}$ plyne rovnost $\vec{r}_1 = \vec{r}_1'$. Z $\vec{v} = \vec{0}$ plyne

$$\gamma \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \beta \end{pmatrix} = \gamma' \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

To spolu s kladností γ a γ' (plyne z požadavku na kladnost diagonálních prvků $\mathbb{R}$) implikuje $\gamma = \gamma'$. Z toho již snadno plyne $\vec{q}_1 = \vec{q}_1'$. □

Poznámka. Pokud je matice $\mathbb{A}$ reálná, je matice $\mathbb{Q}$ orthogonální a matice $\mathbb{R}$ reálná.

Existují tři způsoby, jak najít QR rozklad:

- Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces
- Householderovy transformace
- Givensovy rotace

6.12. **Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces.** Budeme hledat matici $\mathbb{Q}$ po sloupcích jako soubor vektorů. Označíme

$$\vec{a}^{(k)} = \mathbb{A}_{\bullet k}$$

Nejprve provedeme ortogonalizaci:

$$\vec{p}^{(1)} = \vec{a}^{(1)}$$

$$\vec{p}^{(k)} = \vec{a}^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{a}^{(k)} | \vec{p}^{(i)} \rangle \, \vec{p}^{(i)}$$

a následně normalizujeme

$$\vec{q}^{(k)} = \frac{\vec{p}^{(k)}}{\left\| \vec{p}^{(k)} \right\|_2}$$

Pro lepší numerickou stabilitu se však používá takzvaný **modifikovaný Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces**, který se liší tak, že v ortogonalizaci používáme pro počítání průmětů už napočítané vektory, tj.

$$\vec{p}_1^{(k)} = \vec{a}^{(k)}$$

$$\vec{p}_m^{(k)} = \vec{a}^{(k)} - \frac{\langle \vec{p}_{m-1}^{(k)} | \vec{q}^{(m)} \rangle}{\left\| \vec{p}_{m-1}^{(k)} \right\|_2} \vec{p}_{m-1}^{(k)}, m = 1, \ldots, k-1$$

$$\vec{p}^{(k)} = \vec{p}_{k-1}^{(k)}$$

Věta 6.30. Nechť je matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární. Potom pro QR rozklad matice $\mathbb{A}$ platí

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \vec{q}^{(1)} & \vec{q}^{(2)} & \cdots & \vec{q}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Důkaz.

$$\vec{a}^{(k)} = \left\| \vec{p}^{(k)} \right\|_2 \vec{q}^{(n)} + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{a}^{(k)} | \vec{q}^{(i)} \rangle \, \vec{q}^{(i)}$$

Definujeme matici $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}_{ij} = \begin{cases} \langle \vec{a}^{(j)} | \vec{q}^{(i)} \rangle & i < j \\ \left\| \vec{p}^{(k)} \right\|_2 & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

Z toho plyne, že vznikne QR rozklad matice $\mathbb{A}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{a}^{(1)} & \vec{a}^{(2)} & \cdots & \vec{a}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q}^{(1)} & \vec{q}^{(2)} & \cdots & \vec{q}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

□

6.13. **Householderovy transformace.**

Věta 6.32. Viz 2.36 Kvůli numerické stabilitě není dobré, pokud je rozdíl $\vec{e}^{(1)} - \vec{x}$ malý (dělení malým číslem), volíme tedy

$$\vec{x} = -\operatorname{sgn}(x_1) \left\| \vec{x}^{(k)} \right\|_2 \vec{e}^{(1)}$$

6.14. **QR algoritmus.** Je stejný jako LR algoritmus, pouze místo LU rozkladu počítáme QR rozklad.

6.15. **Konvergence QR algoritmu.**

Lemma 6.36. Nechť existuje QR rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{Q}_k\mathcal{R}_k$. Potom platí

$$\mathcal{Q}_k = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Q}^{(i)}$$

$$\mathcal{R}_k = \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}^{(k-i)}$$

Důkaz. Využijeme vlastnosti $\mathbb{R}^{(l-1)}\mathbb{Q}^{(l-1)} = \mathbb{T}^{(l)} = \mathbb{Q}^{(l)}\mathbb{R}^{(l)}$ a postupně upravujeme

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{T}^{(1)}\mathbb{T}^{(1)}\dots\mathbb{T}^{(1)} = \mathbb{Q}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}\mathbb{Q}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}\dots\mathbb{Q}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} = \mathbb{Q}^{(1)}\mathbb{T}^{(2)}\mathbb{T}^{(2)}\dots\mathbb{T}^{(2)}\mathbb{R}^{(1)} = \dots =$$
$$= \prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{Q}^{(i)}\mathbb{T}^{(k)}\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{R}^{(k-i)} = \prod_{i=1}^{k}\mathbb{Q}^{(i)}\prod_{i=0}^{k-1}\mathbb{R}^{(k-i)}$$

Díky 2.22 je $\prod_{i=0}^{k-1}\mathbb{R}^{(k-i)}$ horní trojúhelníková matice. Ověření, že součin unitárních matic je unitární matice, je triviální. □

Věta 6.37. Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je taková, že všechna její vlastní čísla λ_i jsou jednonásobná a splňují

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

Potom $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{T}^{(k)} = \mathbb{T}$. Matice $\mathbb{T}$ je horní trojúhelníková a $\mathbb{T}_{ii} = \lambda_i$. Pokud je matice $\mathbb{A}$ symetrická, tak je matice $\mathbb{T}$ diagonální.

Důkaz.

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{X}\mathbb{D}^k\mathbb{X}^{-1} = \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y\mathbb{R}_Y = \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1}\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y =$$

V prvním rovnítku jsme použili Jordanovu větu, v druhém QR rozklad $\mathbb{X} = \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X$ a **LU rozklad** $\mathbb{X}^{-1} = \mathbb{Y} = \mathbb{L}_Y\mathbb{R}_Y$. V posledním jsme vložili identitu, protože potřebujeme dostat matici $\mathbb{D}^k$ za $\mathbb{L}_Y$.

Nyní dokážeme (stejně jako u trojúhelníkové metody), že $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} \to \mathbb{I}$:

$$\left[\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1}\right]_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ \lambda_i^k\mathbb{L}_{ii}\lambda_i^{-k} = 1 & i = j \\ \lambda_i^k\mathbb{L}_{ij}\lambda_j^{-k} = \mathbb{L}_{ij}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k & i > j \end{cases}$$

Z uspořádání vlastních čísel plyne, že $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} \to \mathbb{I}$ rychlostí danou $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k$. (Používáme Doolittlovu faktorizaci, platí tedy $\mathbb{L}_{ii} = 1$)

Označíme si $\mathbb{D}^k\mathbb{L}_Y(\mathbb{D}^k)^{-1} = \mathbb{I} + \mathbb{F}_k$, kde $\mathbb{F}_k \to \Theta$. Vraťme se k započaté úpravě:

$$= \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X(\mathbb{I} + \mathbb{F}_k)\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y = \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X(\mathbb{I} + \mathbb{F}_k)(\mathbb{R}_x)^{-1}\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y =$$

V druhém rovnítku jsme znovu vložili identitu. Roznásobíme:

$$= \mathbb{Q}_X\left(\mathbb{R}_X(\mathbb{R}_X)^{-1} + \mathbb{R}_X\mathbb{F}_k(\mathbb{R}_X)^{-1}\right)\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y = \mathbb{Q}_X\left(\mathbb{I} + \mathbb{G}_k\right)\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y = \mathbb{Q}_X\mathbb{Q}_G^{(k)}\mathbb{R}_G^{(k)}\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y$$

kde jsme si v prvním rovnítku označili $\mathbb{G}_k = \mathbb{R}_X\mathbb{F}_k(\mathbb{R}_X)^{-1}$ a díky regularitě $\mathbb{R}_X$ jde $\mathbb{G}_k \to \Theta$. V druhém rovnítku jsme použili QR rozklad: $(\mathbb{I}+\mathbb{G}_k) = \mathbb{Q}_G^{(k)}\mathbb{R}_G^{(k)}$. Označíme–li si $\mathbb{R}_G^{(k)}\mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y$ jako $\mathcal{R}_k$ a $\mathcal{Q}_k = \mathbb{Q}_X\mathbb{Q}_G^{(k)}$, dokázali jsme, že $\mathbb{A}^k = \mathcal{Q}_k\mathcal{R}_k$. Dále jsme dokázali, že $\mathcal{Q}_k \to \mathbb{Q}_X$ a $\mathcal{R}_k \to \mathbb{R}_X\mathbb{D}^k\mathbb{R}_Y$, protože jde $\mathbb{G}_k \to \Theta$, jdou $\mathbb{Q}_G^{(k)} \to \mathbb{I}$ a $\mathbb{R}_G^{(k)} \to \mathbb{I}$. Dále platí:

$$\mathbb{T}_k = (\mathbb{Q}_X\mathbb{Q}_G^{(k)})^T\mathbb{A}\mathbb{Q}_X\mathbb{Q}_G^{(k)} = (\mathbb{Q}_G^{(k)})^T\mathbb{Q}_x^T\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{Q}_X\mathbb{Q}_G^{(k)} \to \mathbb{R}_X\mathbb{D}\mathbb{R}_X^{-1},$$

Využili jsme, že platí

Opsáno ze sePlatnost

$$(\mathbb{X} = \mathbb{Q}_X\mathbb{R}_X) \implies (\mathbb{Q}_X^{-1}\mathbb{X} = \mathbb{R}_X).$$

Z věty 2.22 plyne, že $\mathbb{R}_X \mathbb{D} \mathbb{R}_X^{-1}$ je horní trojúhelníková a diag $\mathbb{R} =$ diag $\mathbb{D}$. Pro diagonální matici $\mathbb{A}$ plyne diagonalita matice $\mathbb{T}_k$, resp. $\mathbb{T}$ ze Schurovy věty 2.38. □

6.16. **Hessenbergovy QR iterace.**

Lemma 6.38. Matice $\mathbb{H}^{(k)}$ v Hessenbergových QR iteracích je v Hessenberegově tvaru.

Důkaz.

$$\mathbb{H}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{Q}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \left(\mathbb{G}_{1,2}^{(k)}\right)^T \dots \left(\mathbb{G}_{n-1,n}^{(k)}\right)^T$$

kde matice $\left(\mathbb{G}_{n-1,n}^{(k)}\right)^T$ je Givensova matice, která rotuje $(n-1)$–ní a n–tý řádek. Díky tomu nemohou při násobení horní trojúhelníkové matice $\mathbb{R}$ vzniknout nenulové prvky jinde, než těsně pod diagonálou, což je Hessenbergův tvar matice. □

7. Nelineární rovnice

7.1. Separace kořenů.

Věta 7.1 (Bolzanova Věta)**.** Nechť je $f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$. Nechť dále $f(a)f(b) < 0$. Potom funkce f má na (a, b) alespoň jeden kořen. Pokud f' na (a, b) nemění znaménko, pak je tento kořen jedinný.

Důkaz. BÚNO $f(a) < 0$

(1) Důkaz sporem
Položíme $c = \sup \{x \in \langle a, b \rangle \,|\, f(x) < 0\}$. Předpokládáme $f(c) \neq 0$, tedy podle definice $f(c) < 0$. Volíme $d \in (f(c), 0)$ a díky definici c neexistuje $y \in \langle a, b \rangle$ takové, aby $f(y) = d$, což je spor se spojitostí funkce f. □

7.2. **Výpočet kořene - metoda bisekcí.** Nechť je $f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$. Nechť dále $f(a)f(b) < 0$. Interval půlíme a vždy pomocí 7.1 určíme, v které polovině se nachází kořen. Postup opakujeme s novým intervalem. Označíme-li kořen α a bod, který půlí interval x_k, můžeme odhadovat

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b - a}{2^k}$$

7.3. Iterativní metody pro hledání kořenů.

Lemma. Nechť $\varphi(\alpha) = \alpha$ pro nějaké α. Nechť je dále φ diferencovatelná na nějakém H_α^r a pro všechna $x \in H_\alpha^r$ a $K < 1$ platí $|\varphi'(x)| \leq K$. Nechť je posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ definována rekurentním vztahem

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), x_0 \in H_\alpha^r$$

Potom

$$x_k \in H_\alpha^r, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Důkaz. indukcí podle k

- $k = 0$ Je předpokladem věty.
- $k \Rightarrow k + 1$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\varphi(x_k) - \varphi(\alpha)|$$

Použijeme Lagrangeovu věty o přírůstku (předpoklady splněny indukčním předpokladem):

$$|\varphi(x_k) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi)| \, |x_k - \alpha| \leq K \, |x_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$$

□

Věta 7.4. Nechť $\varphi(\alpha) = \alpha$ pro nějaké α. Nechť je dále φ diferencovatelná na nějakém H_α^r a $|\varphi'(x)| \leq K$ pro nějaké $K < 1$. Nechť je posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ definována rekurentním vztahem

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Potom

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha, \ \forall x_0 \in H_\alpha^r$$

Důkaz.

$$|x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)|$$

Díky lemmatu můžeme opakovaně použít Lagrangeovu větu o přírůstku

$$|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| = |\varphi(\xi_{k-1})| \, |x_{k-1} - \alpha| = \cdots = |x_0 - \alpha| \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi(\xi_i)| \leq K^k \, |x_0 - \alpha|$$

A tedy

$$\lim_{k \to \infty} (x_k - \alpha) = \lim_{k \to \infty} K^k \, |x_0 - \alpha| = 0$$

□

Poznámka. Předpoklad $|\varphi'(x)| \leq K < 1$ splníme např. tak, že $|\varphi'(\alpha)| < 1$ (je–li $varphi'(x)$ spojité). Budeme tedy hledat okolí H_α^r tak, aby to bylo splněné.

7.4. **Metoda regula falsi.**

Věta 7.10. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom metoda regula falsi konverguje.

Důkaz. Využijeme vztahu

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')} f(x)$$

Tedy

$$\varphi'(x) = 1 - \left(\frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')}\right)' f(x) - \frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')} f'(x)$$

$$\varphi'(\alpha) = 1 + \frac{\alpha - x_k'}{f(x_k')} f'(\alpha) = \frac{f(x_k') + (\alpha - x_k')f'(\alpha)}{f(x_k')}$$

Nyní pomocí Taylorových rozvojů odhadneme nejprve rozvojem do druhého řádu

$$f(x_k') = f(\alpha) + f'(\alpha)\,(x_k' - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}\,(x_k' - \alpha)^2$$

Tedy

$$f(x_k') + (\alpha - x_k')\,f'(\alpha) = \frac{f''(\xi)}{2}\,(x_k' - \alpha)^2$$

A následně rozvojem do prvního řádu

$$f(x_k') = f'(\eta)\,(x_k' - \alpha)$$

Tedy ve výsledku

$$\frac{f(x_k') + (\alpha - x_k')f'(\alpha)}{f(x_k')} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}\,(x_k' - \alpha) = K\,(x_k' - \alpha)$$

kde K je definováno poslední rovností. Správnou volbou x_k' můžeme tedy libovolně zmenšit $|\varphi'(\alpha)|$. Tím jsou splněny předpoklady 7.4. □

Poznámka. Pro platnost věty je zásadní, že se jedná o H_α^r, tj. určitá podmnožina, kde je $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha)$. Rozhodně to neplatí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pokud je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Poznámka. Věta lze dokázat i přímo, dokonce se slabším předpokladem $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$:

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{x_k - x_k'}{f(x_k) - f(x_k')} f(x_k) = x_k - \alpha - \frac{x_k - x_k'}{f'(\xi)(x_k - x_k')} f(x_k) = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(\xi)} =$$

V třetím rovnítku jsme použili Lagrangeovu větu.

$$= x_k - \alpha - \frac{f(x_k) + f(\alpha)}{f'(\xi)} = x_k - \alpha - \frac{(x_k - \alpha)f'(\eta)}{f'(\xi)} = \left(\frac{f'(\xi) - f'(\eta)}{f'(\xi)}\right)(x_k - \alpha)$$

Dodali jsme $f(\alpha)$, které je nulové, a znovu použili Lagrangeovu větu. Z ní plyne, že $\xi \in [x_k, x_k']$ a $\eta \in [x_k, \alpha]$. Při dostatečně malém okolí je první závorka posledního výrazu menší než jedna a $f'(\xi) \neq 0$. Dokázali jsme tedy, že posloupnost postupných aproximací konverguje.

7.5. **Newtonova metoda.**

Věta 7.13. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom Newtonova metoda konverguje.

Důkaz. Využijeme vztahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

k úpravě

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)}$$

Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f'(\xi)(x_k - \alpha)}{f'(x_k)} = \frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - \alpha)$$

Znovu použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$\frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - \alpha) = \frac{f''(\xi')}{f'(x_k)} (x_k - \xi) (x_k - \alpha) = K (x_k - \xi) (x_k - \alpha)$$

kde K je definováno poslední rovností a díky spojitosti f' platí $K < 1$. Tím jsou splněny předpoklady 7.4. □

Poznámka. Obdobně jako u metody regula falsi lze dokázat přímo i se slabším předpokladem $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$. Pak je ale metodou prvního řádu (viz 7.15).

Věta 7.15. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom Newtonova metoda je metodou druhého řádu přesnosti. Pokud je $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$, potom Newtonova metoda je metodou prvního řádu přesnosti.

Důkaz. (1) (*druhý řád*) Viz důkaz 7.13.
(2) (*první řád*) Zde můžeme použít Lagrangeovu větu pouze jednou. Pokud je však ξ dostatečně blízko x_k (což zajišťujeme volbou okolí), pak je $K = \frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)} < 1$, Newtonova metoda konverguje podle 7.4 a je metodou prvního řádu.

Poznámka. Pokud neexistuje druhá derivace funkce f, konverguje (dle Oberhubera) Newtonova metoda pomaleji.

□

Poznámka. Newtonova metoda obvykle konverguje rychleji než regula falsi, potřebuje ale většinou přesnější odhad, tj. menší okolí H_α^r.

Poznámka. Pro zlepšení konvergence se používá modifikace Newtonovy metody (metody regula falsi) nazývaná **line search algoritmus**: Pokud se iterací zvětší hodnota $|f(x_{k+1})|$, tj. zhorší se odhad, provedli příliš velký skok. V takovém případě zmenšíme skok na polovinu a opakujeme. Toto zlepšení konvergence však vede ke zpomalení metody.

7.6. **Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic.**

Věta 7.24 (Lagrangeova věta o přírůstku funkce více proměnných)**.** Nechť G je konvexní oblast. Nechť funkce $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Potom pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in G$ existuje $\vec{\xi} \in (\vec{u}, \vec{v})$ (úsečka mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$) takový, že

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v})$$

Důkaz. Definujeme funkci

$$\varphi(t) = f(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})),\ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Potom

$$\varphi'(t) = \nabla f(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}))(\vec{v} - \vec{u})$$

Protože φ je funkce jedné proměnné, můžeme použít klasickou Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\eta)$$

Označíme $\vec{\xi} = \vec{u} + \eta(\vec{v} - \vec{u})$ a budeme tedy upravovat

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = -(\varphi(1) - \varphi(0)) = -\varphi'(\eta) = -\nabla f(\vec{u} + \eta(\vec{v} - \vec{u}))(\vec{v} - \vec{u}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v})$$

□

Věta 7.25. Nechť platí:

- Existuje konvexní oblast G, obsahující řešení $\vec{a}$ systému rovnic $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$ je regulární
- složky $\vec{f}$ jsou funkce spojité na G, jejich první parciální derivace také (tj. $f \in \mathcal{C}^1(G)$)

Potom existuje $H_{\vec{a}}^{\delta}$ takové, že pro každé $\vec{x}^{(0)} \in H_{\vec{a}}^{\delta}$ posloupnost generovaná Newtonovou metodou konverguje k $\vec{a}$.

Důkaz. Nejprve díky 7.24 ukážeme pomocné tvrzení

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^{(k)}) - f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{(k)}) - f_n(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\xi}_1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\vec{\xi}_n) \end{pmatrix} \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right) = \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)$$

kde $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ je definovaná poslední rovností. Dále využijeme vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

Potom můžeme odhadovat

$$\begin{aligned} \left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\right\| &= \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{f}(\vec{x}^{(k)})\right\| = \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)}) \left(\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a})\right)\right\| = \\ &= \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)\right\| = \left\|\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right\| \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right\| = K \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right\| \end{aligned}$$

kde K je definováno poslední rovností. Budeme chtít ukázat $K < 1$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) &= \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) + \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) = \\ &= \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) \left(\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right) + \left(\mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\right) \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) < 1 \end{aligned}$$

Kde poslední rovnost plyne z faktu, že $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ můžeme udělat libovolně malou a $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ je omezená. □

Věta 7.26. Nechť platí:

- Existuje konvexní oblast G, obsahující řešení $\vec{a}$ systému rovnic $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$ je regulární
- složky $\vec{f}$ jsou funkce spojité na G, jejich první a druhé parciální derivace také (tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$)

Potom existuje $H_{\vec{a}}^{\delta}$ takové, že pro každé $\vec{x}^{(0)} \in H_{\vec{a}}^{\delta}$ posloupnost generovaná Newtonovou metodou konverguje k $\vec{a}$ kvadraticky, tj. s přesností druhého řádu.

Důkaz. Není vyžadován. Spočívá v aplikaci věty o přírůstku funkce na rozdíly Jacobiho matic z konce 7.25 tak, aby se z nich dostalo $(\vec{x}^{(k)} - \vec{a})$. □

Důkaz 7.26

8. Interpolace

8.1. Lagrangeův polynom.

Věta 8.3. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a body $x_0, x_1, \ldots, x_n \in D_f$. Pak existuje právě jeden Lagrangeův interpolační polynom L_n příslušící funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Důkaz. (1) existence

Plyne přímo z definice Lagrangeova polynomu.

(2) jedinečnost - důkaz sporem

Předpokládáme existenci dvou různých Lagrangeových polynomů L_n^1 a L_n^2. Využijeme vlastnosti Lagrangeova polynomu

$$L_n^1(x_i) = L_n^2(x_i) = f(x_i),\ \forall i \in \hat{n}^0$$

Polynom $(L_n^1 - L_n^2)$ je polynomem stupně nejvýše n a platí

$$(L_n^1 - L_n^2)(x_i) = 0,\ \forall i \in \hat{n}^0$$

Tedy $(L_n^1 - L_n^2)$ je roven nule v $n+1$ bodech, což vzhledem k jeho stupni (nejvýše n) znamená, že $(L_n^1 - L_n^2)$ je nulovým polynomem a tedy $L_n^1 = L_n^2$. □

8.2. Lagrangeův polynom - Newtonova formule.

Věta 8.8. Pro poměrné diference k-tého řádu platí

$$f\left[x_i, \ldots, x_{i+k}\right] = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j - x_m)}$$

Důkaz. indukcí podle k

- $k = 1$

$$f\left[x_i, x_{i+1}\right] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

- $k \to k+1$

$$f\left[x_i, \ldots, x_{i+k+1}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}\right] - f\left[x_i, \ldots, x_{i+k}\right]}{x_{i+k+1} - x_i}$$

Použijeme indukční předpoklad na poměrné diference menšího řádu

$$\frac{f\left[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}\right] - f\left[x_i, \ldots, x_{i+k}\right]}{x_{i+k+1} - x_i} = \frac{1}{x_{i+k+1} - x_i}\left(\sum_{j=i+1}^{i+k+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k+1}(x_j - x_m)} - \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j - x_m)}\right) =$$

Vyndáme přebývající členy a sloučíme sumy.

$$= \frac{1}{x_{i+k+1} - x_i}\left(\frac{f(x_{i+k+1})}{\prod_{m=i+1}^{i+k}(x_{i+k+1} - x_m)} - \frac{f(x_i)}{\prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i - x_m)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j)\left(\frac{1}{\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k+1}(x_j - x_m)} - \frac{1}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j - x_m)}\right)\right) =$$

Roznásobíme závorku, ze samostatných členů dostaneme první a poslední člen sumy z tvrzení věty (mínus využito na otočení závorky), v sumě vytkneme společné členy produktu.

$$= \frac{f(x_{i+k+1})}{\prod_{m=i}^{i+k}(x_{i+k+1} - x_m)} + \frac{f(x_i)}{\prod_{m=i+1}^{i+k+1}(x_i - x_m)} + \sum_{j=i+1}^{i+k} \frac{f(x_j)}{(x_{i+k+1} - x_i)\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k}(x_j - x_m)}\left(\frac{1}{\underbrace{x_j - x_{i+k+1}}_{\text{pokud } j\neq i+k+1}} - \frac{1}{\underbrace{x_j - x_i}_{\text{pokud } j\neq i}}\right) =$$

Převedeme na společný jmenovatel a následně zkrátíme.

$$= \frac{f(x_{i+k+1})}{\prod_{m=i}^{i+k}(x_{i+k+1}-x_m)} + \frac{f(x_i)}{\prod_{m=i+1}^{i+k+1}(x_i-x_m)} + \sum_{j=i+1}^{i+k} \frac{f(x_j)}{(x_{i+k+1}-x_i)\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)} \left(\frac{x_{i+k+1}-x_i}{\underbrace{(x_j-x_{i+k+1})}_{\text{pokud } j\neq i+k+1}\underbrace{(x_j-x_i)}_{\text{pokud } j\neq i}} \right) =$$

$$= \frac{f(x_{i+k+1})}{\prod_{m=i}^{i+k}(x_{i+k+1}-x_m)} + \frac{f(x_i)}{\prod_{m=i+1}^{i+k+1}(x_i-x_m)} + \sum_{j=i+1}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k+1}(x_j-x_m)} = \sum_{j=i}^{i+k+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k+1}(x_j-x_m)}$$

□

8.3. **Lagrangeův polynom - chyba aproximace.**

Věta 8.10. Nechť $I_x \subset D_f$ nejmenší interval takový, že $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in I_x$ a $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$. Buď L_n Lagrangeův interpolační polynom příslušící funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Potom existuje $\xi \in I_x$ takové, že

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

kde definujeme

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Důkaz. Pokud $x = x_i$ pro nějaké i, tak je $R_n(x) = 0$ z definice Lagrangeova polynomu a $\omega_n(x) = 0$ přímo z definice a věta platí triviálně. V ostatních případech volíme pevné $x \in I_x$. Definujeme

$$Q_n(t) = \omega_n(x)R_n(t) - \omega_n(t)R_n(x)$$

Triviálně $Q_n(x) = 0$. Přímo z definice $\omega_n(x_i) = 0,\ \forall i \in \hat{n} \cup \{0\}$. Z definice Lagrangeova polynomu plyne $R_n(x_i) = 0,\ \forall i \in \hat{n} \cup \{0\}$. Tedy dohromady platí i $Q_n(x_i) = 0,\ \forall i \in \hat{n} \cup \{0\}$, tudíž $Q_n(t)$ má na I_x nejméně $n+2$ kořenů (jeden v x a $n+1$ v x_i). V těchto bodech je hodnota $Q_n'(t)$ nenulová se střídajícím se znaménkem. Můžeme tedy na těchto $n+1$ intervalech aplikovat Rolleovu větu a $Q_n'(t)$ má na I_x nejméně $n+1$ kořenů (v každém pod-intervalu jeden). Tento proces opakujeme, existence příslušné derivace $Q_n(t)$ je zajištěna podmínkou diferencovatelnosti funkce f. $Q_n^{(n+1)}$ má na I_x nejméně jeden kořen, libovolný z nich označíme ξ. Platí

$$Q_n^{(n+1)}(t) = \omega_n(x)R_n^{(n+1)}(t) - \omega_n^{(n+1)}(t)R_n(x)$$

Protože $L_n(x)$ je polynom stupně n, můžeme zjednodušit

$$R_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{L_n^{(n+1)}(x)}_{=0} = f^{(n+1)}(t)$$

Polynom $\omega_n(t)$ můžeme rozdělit na $\omega_n(t) = t^{n+1} + p_n(t)$, kde $p_n(t)$ je nějaký polynom stupně n, a tedy

$$\omega_n^{(n+1)}(x) = (x^{n+1})^{(n+1)} + \underbrace{p_n^{(n+1)}(t)}_{=0} = (n+1)!$$

a tedy dohromady

$$Q_n^{(n+1)}(t) = \omega_n(x)f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,R_n(x)$$

po dosazení kořenu ξ dostáváme

$$Q_n^{(n+1)}(\xi) = 0 = \omega_n(x)f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,R_n(x)$$

z čehož jednoduchou algebraickou úpravou dostaneme tvrzení věty. □

Věta 8.11. Nechť $f \in \mathcal{C}^k(D_f)$. Potom pro libovolné i existuje ξ ležící mezi uzly $x_i, \ldots, x_{i+k}$ takové, že

$$f\,[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Důkaz. Použijeme 8.8 a oddělíme ze sumy první člen:

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)} = \frac{f(x_i)}{\prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i-x_m)} + \sum_{j=i+1}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)}$$

Celou rovnici přenásobíme prvním jmenovatelem:

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] \prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i-x_m) = f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j)\frac{\prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i-x_m)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)}$$

Vytkneme z produktů tak, aby měly stejné meze:

$$f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j)\frac{\prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i-x_m)}{\prod_{m=i,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)} = f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j)\frac{(x_i-x_j)\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k}(x_i-x_m)}{(x_j-x_i)\prod_{m=i+1,m\neq j}^{i+k}(x_j-x_m)} =$$

$$= f(x_i) - \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j) \prod_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+k} \frac{(x_i-x_m)}{(x_j-x_m)}$$

Nyní použijeme definici báze Lagrangeova polynomu a definici Lagrangeova polynomu (máme posunuté číslování, ale to nevadí, protože to je jen jiné značení, odpovídající tvaru věty):

$$f(x_i) - \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j) \prod_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+k} \frac{(x_i-x_m)}{(x_j-x_m)} = f(x_i) - \sum_{j=i+1}^{i+k} f(x_j)l_j(x_i) = f(x_i) - L_{k-1}(x_i) = R_{k-1}(x_i)$$

Použijeme 8.10:

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] \prod_{m=i+1}^{i+k}(x_i-x_m) = R_{k-1}(x_i) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\prod_{m=i}^{i+k}(x_i-x_m)$$

Vydělíme rovnici produktem a dostaneme tvrzení věty:

Poslední produkt je 0, něco je špatně.(nejspíš by mělo být m od i+1, to však neodpovídá definici R_n)

$$f[x_i,\dots,x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

□

Důkaz. (z Wikipedie: Mean value theorem (divided differences)) Postupujeme podobně, jako v důkazu 8.10: Vezmeme si zbytek po Lagrangeovu polynomu R_k a k–krát zderivujeme. S využitím Newtonovy formule dostaneme:

$$R_k^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - L_k^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f[x_0,\dots,x_k]\,k!$$

Opakovaným aplikováním Rolleovy věty dostaneme existenci ξ, které je kořenem $R_k^{(k)}$. Z toho plyne:

$$0 = R_k^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - f[x_0,\dots,x_k]\,k!$$

Z čehož úpravou dostaneme tvrzení věty pro nejvyšší stupeň. Pro nižší derivace bychom použili polynom nižšího stupně. □

Poznámka. Pro $k=1$ předchozí věta přechází v Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$f[x_i,x_{i+1}] = \frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i-x_{i-1}} = f'(\xi)$$

Poznámka. Tato věta se v ZS 2016/17 neobjevila.

8.4. **Hermitova-Birkhoffova interpolace.**

Věta 8.21 (V prezentaci definice)**.** Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interval $I \subset D_f$ takový, že $f \in \mathcal{C}^M(I)$. Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ různé uzly, ve kterých známe

$$f^{(k)}(x_i),\ \forall i \in \hat{n}^0,\ \forall k \in \hat{m}_i^0, \text{kde } m_i \in \hat{M}$$

Definujeme číslo

$$N = \sum_{i=1}^{n}(m_i + 1)$$

Potom existuje právě jeden polynom $H_{N-1}(t)$ stupně $N-1$, který splňuje

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i),\ \forall i \in \hat{n}^0,\ \forall k \in \hat{m}_i^0$$

Tento polynom se nazývá Hermitovský interpolační polynom.

Důkaz. Bez důkazu.

Věta 8.23. Nechť a $I_x \subset D_f$ nejmenší interval takový, že $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in I_x$ a $f \in \mathcal{C}^N(I_x)$. Buď H_{N-1} Hermitovský interpolační polynom příslušící funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Potom existuje $\xi \in I_x$ takové, že

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega_N(x)$$

kde definujeme

$$\Omega_N(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^{m_i+1}$$

Důkaz. Bez důkazu.

8.5. **Interpolace v $\mathbb{R}^n$.**

Poznámka 8.25 (Oprava chyby v prezentaci)**.** Mějme různé body (x_i, y_j), $\forall i \in \hat{n}_1^0$, $\forall j \in \hat{n}_2^0$ a funkci $f(x_i, y_j)$. Potom můžeme definovat bazické polynomy

$$l_i^x(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n_1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$l_j^y(y) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n_2} \frac{y - y_k}{y_j - y_k}$$

Lagrangeův interpolační polynom má potom tvar

$$L_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} f(x_i, y_j) l_i^x(x) l_j^y(y)$$

9. Derivace a integrace

Poznámka. (ZS 2015/16) Přednášeno bez prezentace, ta prý zatím není použitelná. (ZS 2016/17) Prezentace již je k dispozici. Zatím ponecháno v původním stavu.

Spáchala Hanele ze svých výpisků. Chtělo by to přepsat podle prezentace, ale už se mi to ve zkouškovém dělat nechce.

9.1. **Numerická derivace.** Chceme-li derivovat funkci, známe-li pouze její funkční hodnoty, dostáváme se do problémů. Můžeme funkci zkusit aproximovat jejím Lagrangeovým polynomem a získat představu:

$$f'(x) \simeq L_n'(x)$$

tedy

$$f'(x) - L_n'(x) = R_n'(x)$$

Z 8.10 víme, že $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$. Aplikací Leibnizova pravidla pro derivování součinu dostaneme:

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{f^{(n+1+k-i)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n^{(i)}(x)$$

Pro napočítání k-té derivace tedy potřebujeme, aby byla f alespoň $n+k+1$–krát diferencovatelná, navíc neznáme závislost ξ na x. Ukazuje se navíc, že chyba derivace v uzlech není nulová. Tudy tedy cesta nepovede. Naším cílem tedy je udělat $R_n'(x_i)$ libovolně malé $\forall i$. Mějme funkci $f \in \mathcal{C}^2(x)$. Vyjádříme její Lagrangeův polynom stupně 1 na intervalu $\langle x_0; x_1\rangle$

$$L_1(x) = f(x_0) + f[\,x_0; x_1]\,(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$L_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

kde poslední rovnost plyne z Lagrangeovy věty o přírůstku funkce ($\exists \xi \in \langle x_0; x_1\rangle$ $f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0)$). Mějme tedy $h = x_1 - x_0$. Bude nás zajímat chyba aproximace v závislosti na zmenšujícím se h. K tomu budeme potřebovat konečné diference. Předpokládejme nyní ekvidistantní rozdělení uzlů tak, že bude platit: $x_i = x_0 + ih$, $\forall i \in \mathbb{N}$ Rozvineme podle Taylora:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} + \frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x_1 - x_0)^2}_{h^2} + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}\underbrace{(x_1 - x_0)^3}_{h^3}$$

$$f(x_{-1}) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_{-1} - x_0)}_{-h} + \frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x_{-1} - x_0)^2}_{h^2} + \frac{f'''(\xi_{-1})}{3!}\underbrace{(x_{-1} - x_0)^3}_{-h^3} =$$

$$= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_{-1})}{3!}h^3$$

Vytvoříme dopředné, resp. zpětné diference prvního řádu:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^2 = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h} = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

Za předpokladu spojité diferencovatelnosti druhého řádu jsme tedy schopni aproximovat první derivaci s přesností prvního řádu.

$$f(x_1) - f(x_{-1}) = 2hf'(x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}\left(f'''(\xi_1)h^3 + f'''(\xi_{-1})h^3\right)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_{-1})}{3!}h^2 = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

za předpokladu spojité diferencovatelnosti do třetího řádu. Tvaru $\frac{f(x_1)-f(x_{-1})}{2h}$ se říká centrální diference. Protože $\xi_1, \xi_{-1} \in \langle x_{-1}; x_1\rangle$ a f je na $\langle x_{-1}; x_1\rangle$ spojitě diferencovatelná do třetího řádu, je

$$|\frac{1}{3!}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_{-1})| \leq C$$

na $\langle x_{-1}; x_1\rangle$ tedy je omezená. Přesuneme se k druhé derivaci. Rozepsání $f(x_1)$ a $f(x_{-1})$ tentokrát sečteme a dostaneme:

$$f(x_1) + f(x_{-1}) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{f'''(\xi_1) - f'''(\xi_{-1})}{3!}h^3$$

$$\frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})}{h^2} = f''(x_0) + \frac{f'''(\xi_1) - f'''(\xi_{-1})}{3!}h$$

Za předpokladu spojité diferencovatelnosti 3. řádu získáme odhad s přesností h. Máme-li však spojitou diferencovatelnost čtvrtého řádu, je odhad s přesností h^2 (opět dokážeme přes Lagrange, vyskočí tam čtvrtá derivace).

9.2. **Numerická integrace.** Vzorce pro $I(f)$ se nazývají vzorce pro numerickou integraci, resp. kvadraturní vzorce. Mějme reálnou funkci reálné proměnné. Interval, na kterém chceme integrovat, stejně jako u derivace, rozdělíme ekvidistantně na menší intervaly: $x_i = x_0 + ih$, $\forall i \in \hat{n}$ a posčítáme příspěvky od jednotlivých částí. Použijeme interpolaci $f(x)$ takovou, aby se dobře integrovalo. Pro x blízké x_0 bude přibližně platit:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(x_0) = f(x_0)h$$

Zajímá nás chyba, které se při této aproximaci dopustíme.

$$E_0(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x_0)dx = \int_a^b \underbrace{(f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{L_0(x)})dx}_{R_0(x)}$$

Rozvineme $f(x)$ Taylorem:

$$\int_a^b \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 - f(x_0)\right)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(\xi)t^2 dt \leq$$

Za předpokladu $f \in \mathcal{C}^{(2)}$ lze použít větu o střední hodnotě integrálu a odhadnout tak $|f''(\xi)| \leq c$ (ξ totiž závisí na x):

$$\leq f'(x_0)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{2}c\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}c\frac{h^3}{12} = \mathcal{O}(h^3)$$

Tedy odhad máme s přesností h^3. Zkusíme se nyní přesunout k Lagrangeově polynomu vyššího řádu, vezměme $n = 1$.

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$\int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{2}h(f(a) + f(b))$$

$$E_1(f) = \int_a^b f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)dx$$

$$E_1(f) = \int_a^b R_1(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)dx = \frac{c}{2}\int_0^h t(t-h)dt = \frac{c}{2}\left[\frac{t^3}{3} - h\frac{t^2}{2}\right]_0^h = \frac{c}{2}(\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}) = \mathcal{O}(h^3)$$

Znovu jsme použili větu o střední hodnotě integrálu a odhad $|f''(\xi)| \leq c$. Přednášku z ne úplně zjevného důvodu zakončila Cavalieri-Simpsonova formule:

$$I_2(f) = \frac{a-b}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$