Speciální teorie relativity

text k přednášce pro MFF UK

Oldřich Semerák

Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Praha, aktuálně 2012

Obsah

PŘEDMLUVA: c

"Ó Slunce! Ty vidíš všechno, ty tvoříš záři a pohybuješ se velmi rychle. Celé nebe osvětluješ." Čtvrtý verš zpěvu 1:50 jednoho z nejstarších spisů *Rigveda* není nijak výjimečný — induská kosmologie se od nepaměti "točila" kolem Slunce. Učenec a politik Sāyaṇa, žijící v letech 1315-1387 na královském dvoře Vijayanagarské říše v jižní Indii, si při studiu a vykládání Véd k tomuto verši připsal: "Budiž připomenuto: Slunce urazí 2202 yojany za půl nimesy." Sāyaṇa nebyl astronomem, v poznámce se odvolává na tradici a má patrně na mysli kosmologické představy zachycené ve starých náboženských textech zvaných Purány. *Yojana* je stará indická délková míra, jejíž hodnota je udávána v oblasti 13–16 km, a *nimesa* je stará indická časová jednotka, jejíž hodnotu historikové přepočítávají na $16/75\,\mathrm{s}$. Za vteřinu by tedy "Slunce" mělo urazit kolem $300000\,\mathrm{km}$. . .

Sāyaṇa se trefil docela přesně, ačkoliv o pohybu *světla* asi moc nevěděl. Ani nemohl — rychlost světla není lehké určit a bez dalekohledu ji nejde ani odhadnout. V poměrech vesmíru je zoufale malá, ale pro pozemské míry moc veliká. 22. srpna 1634 píše René Descartes svému příteli Isaacu Beeckmanovi, že rychlost světla je jistě nekonečná, a dodává: "Je to tak jisté, že pokud by se ukázalo, že to není pravda, jsem připraven uznat, že z filosofie nevím vůbec nic." Descartes chtěl přítele ušetřit zbytečné námahy — ten totiž trávil dost času tím, že vytahoval na pole dělo, o míli dál stavěl zrcadlo a snažil se zaznamenat, s jakým zpožděním v něm bude vidět záblesk výstřelu.

Nekonečná rychlost světla byla součástí aristotelské tradice, ale ani ve starověku se k ní všichni neklonili. Již předtím vyvinul EMPEDOKLÉS z Akragásu (492-432 BC) vlivnou hypotézu o vidění (pomocí světla vysílaného okem) a tvrdil naopak, že rychlost světla je konečná. Stejného názoru byli i o něco mladší "atomisté" patřící k DŽINISTICKÉ FILOSOFII v Indii (světlo bylo podle nich způsobeno pohybem malých částic). První soustavnější výzkum však provedl až "první vědec" Abū 'Alī al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham z Basry (působil ovšem v Káhiře), známý pod latinským jménem ALHACEN (965-1039). Jeho sedmisvazková Kniha optiky přináší kromě mnoha dalších zjištění i experimentální důkaz, že světlo se šíří přímočaře a ze zdroje do oka (nikoli naopak) — a také přesvědčení, že se tak děje konečnou rychlostí. To bylo však prokázáno až v 17. století.

22. srpna 1676 oznámil na jednání francouzské Královské akademie věd Giovanni Domenico Cassini, tou dobou ředitel Pařížské observatoře, že s kolegy Jeanem Picardem a Ole Rømerem provedli řadu měření zákrytů Jupiterova měsíce Io a zjistili, že začátky a konce zákrytů během roku postupně kolísají kolem hodnot odpovídajících vypočítané dráze měsíce. Cassini dokonce oznámil, že například 16. listopadu toho roku vyjde měsíc z Jupiterova stínu o 10 minut později než podle výpočtů. Jako pravděpodobnou příčinu nesouladu uvedl to, že Země je během roku od Jupiteru různě daleko a že "světlu trvá 10 nebo 11 minut, než urazí vzdálenost rovnou poloměru zemské dráhy". Ostatní (tehdy tři) Jupiterovy měsíce byly pozorovány s menší přesností a podobný efekt u nich nebyl rozeznán, Cassini proto záhy od "důmyslného vysvětlení Mons. Rømera" pomocí konečné rychlosti světla upustil. RØMER byl naopak přesvědčen o jeho správnosti a 7. prosince ho (již samostatně) důkladně popsal v Journal des Sçavans. V r. 1728 se konečnost rychlosti světla potvrdila, když s její pomocí James BRADLEY vysvětlil aberaci světla stálic (rovněž) jako důsledek oběhu Země kolem Slunce.

Roku 1864 James C. MAXWELL definitivně shrnul elektrické, magnetické a optické jevy do jednotné "Dynamické teorie elektromagnetického pole". Záhy se ukázalo, že teorie není invariantní vůči Galileiho transformaci, a do centra pozornosti se dostala otázka, jak nejlépe zjistit "absolutní" pohyb Země — pohyb vůči nosiči světelných rozruchů, éteru. Roku 1887, po letech práce na novém typu interferometru, Albert A. MICHELSON konečně připravil s pomocí Edwarda W. MORLEYE dostatečně citlivý experiment, jímž mělo být možno přesně změřit anizotropii rychlosti světla a z ní odvodit okamžitou rychlost Země vůči éteru. Měření již probíhala, když Heinrich R. HERTZ experimentálně potvrdil existenci elektromagnetických vln.[1] Michelson s Morleyem ovšem nezjistili v rychlosti světla *žádnou* anizotropii, žádnou závislost na denní či roční době a na orientaci přístroje. Michelson ani Morley (stejně jako Maxwell či Hertz) o éterové teorii světla nepochybovali a svůj experiment ještě několikrát zopakovali. Po nich pak mnozí další až do dnešních dnů. V r. 2009 byla pomocí "Michelsonova" uspořádání dutinových rezonátorů a záznějové kontroly vyladění jejich frekvencí omezena případná anizotropie rychlosti světla na $\frac{\Delta c}{c} \lesssim 10^{-17}$.

Když kolem roku 1630 Galileo GALILEI vyplouval na moře (možná jen v duchu), aby zjistil, zda jeho asistenti proti směru pohybu lodi nedoskočí dál než ve směru opačném, těžko tušil, že Příroda dbá na rovnoprávnost inerciálních systémů tak extrémně důsledně. Když 7. ledna 1610 nad kupole baziliky sv. Antonína (v Padově) vyšel Jupiter a on u něj svým neustále vylepšovaným, tehdy asi třicetkrát zvětšujícím dalekohledem spatřil tři (později čtyři) satelity, také asi netušil, že ještě v témže století povede stejné pozorování k dobrému odhadu rychlosti světla. A co když o dalších 20 let dříve v Pise odměřoval pád předmětů v gravitačním poli? Einstein na "principu ekvivalence" založil svou teorii gravitace; na počátku 20. století byl princip ověřen s relativní přesností 10^{-9}, dnes je to 10^{-14}. Ale o tom až v *obecné* relativitě. . .

Rychlost šíření elektromagnetického záření ve vakuu se zdá být jednou z centrálních vlastností našeho vesmíru. Hodnota nezávisí na čase, místě ani směru, je stejná vůči všem inerciálním (a lokálně i vůči všem urychleným) vztažným soustavám. Je to největší rychlost, jakou se může šířit informace, takže světelné paprsky určují kauzální strukturu prostoročasu. Jako o další z "důležitých vlastností našeho vesmíru" budeme v těchto poznámkách hovořit o Albertu Einsteinovi. Především jako o tvůrci teorie relativity, i když Einstein přispěl i k řadě dalších oblastí. Tradičně je připomínána jeho nedůvěra ke kvantové mechanice, ale stejnou pozornost zaslouží i to, jak od svého článku *O heuristickém hledisku týkajícím se produkce a přeměny světla*, který vyšel v r. 1905 v Annalen der Physik jen o 4 čísla před prací obsahující "speciální relativitu", až do samotného roku 1925 Einstein po vytvoření kvantové teorie (konkrétně kvantové teorie světla) naopak volal — a jak v tom byl po celou tu dobu osamocen.

Kvantová elektrodynamika dnes patří k universitnímu fyzikálnímu vzdělání, ale větší problémy jsou s kvantovou teorií gravitační interakce — "kvantovou obecnou relativitou". Kvantování gravitačního pole znamená po překladu do geometrického jazyka kvantování prostoročasu, takže samotný prostor a čas by po "rozkvantování" měly být na velmi malé (Planckově) škále diskrétní. Fyzikální procesy probíhající na velmi malých rozměrech by tuto "zrnitost" měly cítit. Na prostoročasových nehomogenitách by se například mělo rozptylovat a zpomalovat světlo velmi krátkých vlnových délek. Kvantové teorie gravitace tak "efektivně" předpovídají mírné narušení lorentzovské invariance, spočívající v tom, že rychlost světla by měla záviset na jeho frekvenci. Efekt je velmi slabý, ale měl by být patrný u velmi vzdálených zdrojů, které vysílají co nejširší oblast elektromagnetického spektra včetně co nejtvrdší složky, a jejichž světelná křivka obsahuje co nejvýraznější a časově dobře lokalizovatelná "vzplanutí". Přesně takovými zdroji jsou krátké záblesky gamma, pravděpodobně provázející gravitační kolaps binárního systému neutronových hvězd. V květnu 2009 se podařilo zachytit záření širokého rozsahu energií (od rentgenové po tvrdou gamma oblast) z krátkého záblesku GRB 090510. Záblesk vykázal posun vlnové délky $z \doteq 0.9$, takže jeho fotony k nám cestovaly více než miliardu let. Všechny dorazily v rozsahu necelé vteřiny. . .

[1] Když se ho ptali, jaký má jeho výsledek význam, odpověděl: "Myslím, že vůbec žádný, . . . jen se prokázalo, že Maestro Maxwell měl pravdu."

Poděkování

Nejdříve omluva. Tento text k úvodnímu kursu speciální relativity není zdaleka důkladný, tak jako nemůže být moc důkladný ani samotný kurs. Moderní pohled na teorii relativity je pohledem geometrickým, ale v takovémto úvodu se po něm můžeme spíše poohlížet než jej pořádně pěstovat. Některé partie úplně chybějí; možná je někdy doplníme, ale teď se mi zdálo důležité, aby posluchači konečně měli text, který odpovídá přednášené látce. Psaní skript je ovšem dvousečná (v Minkowského prostoročasu čtyřsečná) aktivita. Autor se přiučí předmětu, ale na přednášce pak má pocit, že by neměl jen reprodukovat, co už je napsáno. Studenti se mají do čeho podívat, ale na druhé straně cítí menší potřebu chodit do školy (a vnímat). Navíc se předmět už poněkud dlouho učí stejným způsobem a možná by bylo na místě to nějak změnit. V tom případě snad budou poznámky k současnému výkladu na místě. Mohou pomoci, a přitom na "nové" přednášce půjde říct: ale my to uděláme líp.

Sám jsem měl zřídkakdy potřebu (a vůbec ne naději) něco dělat líp, protože jsem na MFF UK chodil na skvělé přednášky. Na relativitu hlavně k profesoru Jiřímu Bičákovi a docentu Jiřímu Langerovi, mám sešit i z legendárního "kladívkového" kursu docenta Kurta Fišera. Přirozeně jsem "během těch let" čerpal také z knih. Kanonickou českou učebnicí jsou stále Základy speciální teorie relativity prof. Václava Votruby [7]. Mají 440 stran a některými z nich se neprokousává úplně snadno. Rovněž důraz na jednotlivé partie, styl výkladu, matematické konvence i značení jsou dnes trochu jiné. Po faktické stránce však kniha zatím nemá náhradu a pro hlubší studium ji lze rozhodně doporučit. Obsahuje i důkladný rozbor řady experimentů, které prokázaly nezávislost rychlosti světla na inerciálním systému. Experimenty jsou detailně probrány také v kvalitních skriptech doc. Leoše Dvořáka [1]. Některé části látky je možno konzultovat i v knihách [3, 4, 6], i když v trochu jiných formalismech. Vedle toho existuje řada anglicky psaných učebnic, které jsou však hůře dostupné a někdy se i ony od "pražského" podání (a mezi sebou) ve formálních detailech liší.

Kromě učitelů jsem vděčný také studentům, přednáška se utvářela i díky jejich reakcím — a vždy v příjemné společnosti. Největší dík ovšem patří kolegům z ústavu a z Relativistického semináře, za průběžné odborné a pedagogické podněty, ale především za kulturní a kamarádské prostředí. Dr. Otakar Svítek text pročetl a vylepšil, několik nedostatků odhalil také Mgr. T. Franc. Budu rád, když uděláte totéž. . .

OS, 12. prosince 2010

Základní konvence a značení

Pokud není řečeno jinak, užíváme standardního složkového jazyka, Einsteinova sumačního pravidla a notace obvyklé v teorii relativity. Veličiny uvádíme v normálních, fyzikálních (nikoli geometrizovaných) jednotkách, konkrétně v soustavě SI. Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ má signaturu $(-+++)$, řecké indexy nabývají hodnot 0–3, latinské indexy hodnot 1–3. Zápis X^α reprezentuje všechny, resp. kteroukoliv složku veličiny X, tj. $X^\alpha \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3)$ (analogicky pro veličiny libovolného tenzorového typu a řádu); konkrétní hodnoty indexů budou specifikovány čísly 0–3 nebo přímo písmeny značícími příslušné souřadnice (takže např. $X^2 \equiv X^y$). V obecnosti je dobré indexy chápat jako *abstraktní*, tedy *nikoli* jako označení složek a jako signalizaci toho, že je *nutno* pracovat ve složkách, ale prostě jako výhodný způsob, jak zapsat veličiny (tak, že je i bez kontextu možno na první pohled odhadnout jejich typ) a tenzorové operace s nimi. To jest: je dobré představovat si pod X^i spíš $\vec{X}$ než (X^1, X^2, X^3). Speciální relativitu je však velmi výhodné probírat v inerciálních systémech, a ty jsou kartézské, proto v konkrétních případech již budou indexy skutečně často reprezentovat složky; např. Minkowského tenzor $\eta_{\mu\nu}$ dokonce značí jen speciální tvar, kterého nabývá metrický tenzor plochého prostoročasu v nějakém inerciálním systému. Parciální derivace je značena ∂ nebo čárkou v indexové pozici, $\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \equiv X^\mu{}_{,\alpha}$ (v literatuře se vyskytuje také značení $\partial_\alpha X^\mu$, případně $\nabla_\alpha X^\mu$ — my si ale ∇ schováme až pro kovariantní derivaci, se kterou se setkáme v obecné relativitě).

KAPITOLA 1

Úvod

Nedávno jsme na Wikipedii našli strojový překlad, že *Special relativity* je “lékařská prohlídka publikovaná v r. 1905 Albertem Einsteinem v jeho článku ‘K elektrodynamice dojemných těl’. . . ” Je to menší *move* (posun), než jakého se této teorii dostává od lidí. Einstein musel půl života trpět, že je spojován s průpovídkou “všechno je relativní” a jeho teorie překrucována v argument pokleslých postojů relativismu. Od počátku zdůrazňoval, že nepřichází s teorií, ale s “heuristickým principem” (který by měly splňovat všechny “teorie”). A když už, tak navrhoval hovořit o “teorii invariantů”. Max Planck však jeho práci nazval “relativní teorií”, a to přestože v ní — spolu s autorem — především spatřoval cestu k “tomu, co je absolutní, obecné a neměnné”. Během r. 1907 byla “relativní teorie” v kuloárech upravena na “teorii relativity”. Tou dobou již pracoval na její eleganci hlavně Hermann Minkowski. Uvedl ji do čtyřrozměrného, geometrického hávu, v němž její “absolutní” prvky vystupují zvláště zřetelně. Při představení nového pohledu na prostor a čas také místo “principu relativity” říkal “postulát absolutního světa”. . .

Indický matematik a astronom ARYABHATA (476-550) ve svém spisu Aryabhatiya shrnul induské i pozdější (hlavně džinistické) výsledky; mnohé z nich byly získány (či alespoň “tipovány”) dávno před Evropou. Píše také: “Stejně jako vidí člověk na jedoucí lodi, že se stromy na břehu pohybují v opačném směru, vidí pozorovatel na rovníku stálice pohybovat se přesně na západ.” O tisíciletí později se vydával na moře G. GALILEI[1] (1564-1642), ale místo aby tam odtud vzhlížel ke stromům a hvězdám, zavřel se v kabině a sledoval tam uvnitř poletování motýlů, rybky v akváriu, pád vodních kapek, pohyb kouře a sportovní výkony svých asistentů. Jeho závěr — že vše probíhá stejně jako “v klidu” na souši — je citován jako **Galileiho princip relativity**, ale ve spisu Dialog (1632) zjistíte, že on sám na něm nezdůrazňoval “relativitu pohledu na svět” (totiž závislost měřených hodnot veličin na pozorovateli), ale naopak *stejnost*, nerozlišitelnost (neurychlených, inerciálních) systémů. Podobně pro Einsteina bylo sice pochopení *relativity* času tím nejdůležitějším klíčem k nové fyzice, ale pro samotnou “relativitu” pohledu na svět, obecně zřejmou odnepaměti, to bylo jen malé upřesnění. Kde však fyzika po Einsteinovi nachází skutečné bohatství, je při hledání *invariance* veličin a teorií vůči určitým transformacím. *Symetrie* se zdají být jednou z nejhlubších vlastností vesmíru.

Navzdory svému jménu je tedy teorie relativity především “o” invarianci zákonů vůči určitým — prostoročasovým — transformacím: Lorentzovým v případě speciální relativity a obecným diffeomorfismům v případě obecné relativity. Populární zkracování tyčí a prodlužování časových intervalů, “paradoxy” s garáží a dvojčaty jistě probereme, ale měli bychom mít stále na

[1] . . . ve skutečnosti možná jen prostřednictvím svého literárního hrdiny Salviatiho. . .

paměti, že se jedná jen o nevyhnutelné důsledky principu, podle něhož jsou všechny inerciální systémy z hlediska fyzikálních zákonů ekvivalentní. To *tento princip* by nás měl průběžně udivovat. Nejen že není vůbec samozřejmý, dokonce by bylo přirozené předpokládat, že když *věci* kolem nás zjevně *preferují* určité — své klidové — systémy, budou to činit i *přírodní zákony*, tedy fyzikální "pravidla hry". Privilegovaným je jistě klidový systém Vašeho notebooku, systém spojený se Zemí, se Sluncem, s Galaxií. . . Izotropie reliktního záření dnes opravňuje hovořit dokonce o "klidovém systému našeho vesmíru" a potvrzují to i studie mapující rozložení hmoty. Těžko najít privilegovanější systém, ale přesto v něm fyzika chodí podle *stejných pravidel*, jako v jakémkoli jiném.

1.1 Místo speciální teorie relativity ve fyzice

Speciální relativita je tedy spíše principem (někdy se označuje jako "principiální teorie" či "meta-teorie") než obvyklou (tzv. "konstruktivní") fyzikální teorií: požaduje, aby fyzikální teorie nerozlišovaly mezi inerciálními systémy, aby byly invariantní vůči transformaci mezi nimi. My se v této úvodní přednášce budeme věnovat pouze mechanice a elektrodynamice ve vakuu. Zatímco elektrodynamika bude, jak uvidíme, "automaticky správně" (speciální relativita díky ní vlastně vznikla), mechaniku budeme muset odvodit novou. Odchylky relativistických předpovědí od "klasických" (newtonovských) v ní rostou s tím, jak se rychlost zkoumaného tělesa zvyšuje a blíží rychlosti světla. Speciální relativita bude tedy nepostradatelná tam, kde se věci pohybují velmi rychle — především v částicové fyzice (kosmické záření, urychlovače) a v astrofyzice. Kromě nových předpovědí v konkrétních situacích však speciální relativita přináší i *zásadní* novou zprávu: že časová souřadnice není "absolutní" a že je provázána s prostorovými souřadnicemi; vysoká symetrie tohoto provázání navíc ukazuje, že navzdory našemu rozlišování mezi polohou a časem je výhodné a přirozené na fyzikální svět pohlížet jako na čtyřrozměrný *prostoročas*.

Co budeme k přednášce potřebovat? Zhruba 1905 gramů tenzorové algebry (abychom zajistili matematické naplnění principu relativity) a podobné množství čtyřrozměrného formalismu (abychom mohli v prostoročasu prakticky počítat). Uvidíme, že když tyto dvě ingredience dobře promícháme, zařídí vlastně všechno za nás. Ještě jsem zapomněl, že ze začátku budeme muset také občas přemýšlet — to když budeme skutečnost nahlížet ještě z "3+1" ("prostor + čas") pohledu, než si zvykneme v prostoročasu.

1.2 Připomínka historie: zápletka s éterem a rychlostí světla

Newtonova fyzika umožnila určit na základě znalosti silového působení pohyb daného tělesa. Určit pohyb znamená říci, kde se těleso v kterém okamžiku nachází — pohyb je určen v řeči polohy a času. Vůči čemu ovšem polohu a čas vztahovat? Isaac Newton (Principia, 1687) postuloval, že jevištěm fyzikálního dění je nepohyblivý "absolutní prostor", který je geometricky třírozměrným eukleidovským prostorem. Dále postuloval existenci "absolutnímu času", který "plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně". Oba tyto pojmy jsou "absolutní" tím, že jsou nezávislé na hmotě, tedy na fyzikálním dění. První Newtonův zákon tvrdí, že existuje alespoň jeden inerciální systém, a z jeho definice je ihned jasné, že takových systémů existuje nekonečně mnoho; navzájem se pohybují rovnoměrně přímočaře, tedy jsou svázány Galileiho transformací. Newtonův druhý zákon a následně celá jeho teorie platí ve stejném tvaru ve všech inerciálních systémech — je invariantní vůči Galileiho transformaci. (Při této transformaci zůstává čas stejný, tedy je "absolutní" i v tom smyslu, že nezávisí na tom, zda a jak se pozorovatel pohybuje vůči absolutnímu prostoru.) Díky galileiovské invarianci nelze mezi inerciálními systémy mechanicky rozlišit, tedy speciálně mezi nimi nelze najít systém, který je v klidu vůči absolutnímu prostoru.

S úvahami o světle se však na scéně objevil **éter** (æther). Ve starořecké mytologii znamenal $\alpha\iota\theta\acute{\eta}\rho$ prvotní substanci, která vyplňovala nebeský svět bohů. Od té doby se pojem objevoval v alchymii a přírodní filosofii jako "zprostředkující médium", dnes bychom řekli "pole". Pro nás je zde důležitá konkrétně představa éteru jako nosiče světelných signálů. Do fyziky přichází s vlnovou teorií Christiana Huygense (Pojednání o světle, 1678).[2] V letech 1817-21 pak vytvořil Augustin-Jean Fresnel detailní teorii světla jako příčného vlnění éteru. Postupně ji dále rozpracovali např. Ampère, Faraday, Maxwell, Lorentz a Poincaré. Potýkali se s řadou problémů. Především musel mít éter velmi zvláštní vlastnosti: představa světelného vlnění byla mechanistická (éterem se šířily vlny "elastického napětí"), avšak na druhé straně musel éter vším prostupovat bez mechanické interakce (nesměl např. klást odpor pohybu nebeských těles) a byl předpokládán nehmotný. Klidová soustava éteru by každopádně měla být privilegovaná; bylo přirozené předpokládat, že je inerciální a že je dokonce v klidu vůči Newtonovu absolutnímu prostoru.

V r. 1864 J. C. Maxwell završil a propojil výzkumy světla, elektřiny a magnetismu do jednotné teorie. Tato teorie mj. definitivně předpověděla existenci elektromagnetického vlnění, které se — v souladu s již dříve učiněnými optickými měřeními — šíří konečnou rychlostí (c). Existenci elektromagnetických vln pak v r. 1887 potvrdil H. Hertz. Maxwellova teorie *není* invariantní vůči Galileiově transformaci, dává *různé* výsledky v různých inerciálních soustavách. To posílilo snahy o identifikaci klidové soustavy éteru. Země se pravděpodobně vůči éteru pohybuje, navíc v různých ročních dobách různě (kromě toho daná laboratoř i v různých denních dobách různě), takže by mělo stačit změřit rychlost světla v různých směrech: šíří-li se světlo vůči éteru rychlostí c, pak jeho rychlost vůči laboratoři bude dána složením s rychlostí laboratoře. Klidovou soustavou éteru bude zřejmě ta, vůči níž se světlo šíří všemi směry *stejně* rychle. Ke zjištění pohybu Země vůči éteru bylo navrženo a provedeno množství experimentů, řada již "za života" teorie relativity, ale probírat je dnes je kapánek nadbytečné[3] a k teorii relativity by nás to nijak zvlášť nepřiblížilo. Z důvodu historického významu a tehdy překvapivého výsledku však zařadíme alespoň ten, který "definitivně rozhodl".

1.2.1 Michelsonův-Morleyův experiment

Měřit v laboratoři přímočaře rychlost světla je kapánek nepohodlné, navíc zde nejde o *hodnotu* té rychlosti, ale o to, zda je izotropní nebo ne. Proto se využívá interference: monochromatický paprsek ze zdroje se rozdělí ve dva, ty se nechají v různých (nejlépe kolmých) směrech trochu cestovat a pak se zase svedou a nechají interferovat. Obrazec, který vznikne, je dán rozdílem mezi dobami, za které paprsky urazily své dráhy. Nyní se "ramena interferometru", podél nichž paprsky cestovaly, pootočí (avšak celé uspořádání se nijak nedeformuje — ramena zůstávají stejně dlouhá a navzájem kolmá). V důsledku skládání rychlosti světla s rychlostí laboratoře (obě rychlosti vztahujeme k éteru) se tím obecně změní doby, za které paprsky projdou své dráhy,

[2] Newton předložil naopak korpuskulární teorii světla. I on poukazoval na "éter", avšak nikoli jako na prostředí, jehož "excitacemi" jsou světelné korpuskule, nýbrž jako na prostředí, které korpuskule rozptyluje — totiž aby vysvětlil jevy ohybu a lomu. V r. 1672 publikoval Newton článek, v němž uvažoval, že částice světla rotují a v důsledku toho při pohybu éterem zatáčejí; přišel na to údajně při pozorování tenistů na své Trinity College v Cambridge (takže vlastně popsal tzv. Magnusův efekt 180 let před H. Magnusem).

[3] Všimněte si, že příslovce "kapánek" zde znamená podobně vysokou míru jako ve výroku "Jason byl ze sídliště a mluvil kapánek sprostě" ve filmu Terkel má problém.

tedy změní se také interferenční obrazec. Ústředním prvkem experimentů tak bylo polopropustné zrcátko:

obrázek...???

Předpokládejme pro jednoduchost uspořádání podle obrázku **??**: laboratoř se vůči éteru pohybuje rychlostí $\vec{v}$ v kladném směru ramena 1. Pro výsledek interference je podstatný rozdíl mezi dobami t_1 a t_2, po které rozdělené paprsky cestují odděleně, tedy za které projdou v laboratoři vzdálenosti l_1 a l_2. První z časů spočítáme v soustavě spojené s laboratoří. Tam se světlo pohybuje "doprava" rychlostí $c - v$ a zpátky rychlostí $c + v$, takže celkově mu to trvá

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2cl_1}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ .$$

Čas letu "kolmého" paprsku se lépe počítá *v soustavě éteru*: z náčrtu jeho cesty (obr. **??** vpravo) a Pythagorovy věty máme

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = (l_2)^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ .$$

Rozdíl dob příchodů je tedy

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \ . \tag{1.1}$$

Nyní laboratoř otočíme o $90°$. Paprsky si jednoduše vymění role, takže vzoreček prvního tvaru se teď bude týkat druhého paprsku a naopak. Rozdíl příchodů je tedy tentokrát

$$\widetilde{\Delta t} \equiv \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \ . \tag{1.2}$$

O změně interferenčního obrazce *během otočení* rozhoduje to, o kolik se změnil rozdíl příchodů paprsků, tedy "rozdíl těch rozdílů",

$$\widetilde{\Delta t} - \Delta t = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \doteq \frac{l_1 + l_2}{c} \frac{v^2}{c^2} \ . \tag{1.3}$$

Při úpravě jsme využili toho, že očekávaná rychlost pohybu Země vůči éteru bude řádově zhruba rovna rychlosti jejího oběhu kolem Slunce, a ta je $30\,\mathrm{km/s} = 10^{-4}c$, takže $v^2/c^2 \doteq 10^{-8}$; když členy ve velké závorce rozvedeme v této malé veličině do lineárního řádu, dostaneme

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \doteq 1 + \frac{v^2}{c^2} \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq \frac{1}{1 - \frac{v^2}{2c^2}} \doteq 1 + \frac{v^2}{2c^2} \ ,$$

a odsud ihned uvedený výsledek.

Měli bychom ještě odhadnout, zda by posun daný výsledkem (1.3) vůbec byl prakticky pozorovatelný. Spočítejme, za jakých parametrů by se interferenční vzor při otočení experimentu posunul právě o jeden proužek. Posun o jeden proužek znamená vzájemný posun skládajících se vlnění o jednu vlnovou délku, tedy změnu časového rozdílu příchodu paprsků o

$$\widetilde{\Delta t} - \Delta t = \frac{\lambda}{c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^2} = \lambda \ .$$

Dosazením $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$ a $\lambda = 500\,\mathrm{nm} = 50 \cdot 10^{-8}\mathrm{m}$ (zelené světlo) vychází podmínka na délku ramen: $l_1 + l_2 = 50\,\mathrm{m}$. To ovšem není žádný problém, ramena *mohou* být zhruba takto dlouhá, navíc pomocí vícenásobných odrazů je lze učinit efektivně i delšími. A to posun o celý proužek je skutečným luxusem — pozorovatelné je i posunutí o malou část vlnové délky.

Michelson měřil v roce 1881 sám (dost nepřesně) a v r. 1887 pak s Morleyem, v obou případech s interferometrem, jehož ramena byla stejně dlouhá ($l_1 = l_2$). Později byl experiment různými skupinami několikrát opakován. Experiment s různě dlouhými rameny však provedli až v r. 1932 Kennedy a Thorndike. Nikdo nenaměřil NIC!

1.2.2 Bradley, Fizeau, Hoek, Airy — a další...

Éter měl dost podivuhodných vlastností na to, aby vznikly také úvahy o jeho možném strhávání prostředím (nějakým neznámým mechanismem): pokud by např. byl éter strháván Zemí nebo její atmosférou (vzduchem), stacionární laboratoř by se vůči němu nikdy nepohybovala, a tedy snahy o zjištění rychlosti takového pohybu by *samozřejmě* byly marné. V době, kdy byl poprvé proveden Michelsonův-Morleyův pokus, se už ale vědělo, že éter patrně strháván není, nebo že aspoň není strháván tak, jak by k vysvětlení bylo třeba. Vyplynulo to hlavně z pozorování Bradleyho a Airyho a ze dvou experimentů, které provedli Fizeau a Hoek. Bradley objevil v r. 1727 jev aberace stálic (pozorovaná poloha hvězd se během roku nepatrně mění); Fizeau měřil rychlost světla v proudící vodě (1851), Hoek rychlost světla ve stojící tekutině a její závislost na směru (1868); a Airy pak v r. 1871 zjistil, že pozorovaná hodnota aberace se vůbec nezmění, pokud se dalekohled naplní vodou. Experimentů však byla řada a jejich domnělá vysvětlení se nezřídka navzájem vylučovala.[4] Nebudeme je zde probírat (viz např. učebnici [7] nebo skripta [1]), jen řekneme, že navzdory jejich většinou "negativním" výsledkům byl teprve nulový výsledek Michelsona & Morleyho skutečným překvapením. Všechny experimenty byly posléze vysvětleny na základě relativistického skládání rychlostí, doplněného o znalost šíření světla v optickém prostředí. Ale nakonec i jedno "éterové" vysvětlení bylo přece jen úspěšné a univerzální; vlastně již předznamenávalo speciální relativitu, ačkoli pouze matematicky.

1.2.3 Lorentzova & Fitzgeraldova kontrakce

H. A. Lorentz vytvořil před koncem 19. století tzv. **elektronovou teorii**. Bylo to vlastně rozpracování Maxwellovy teorie na základě určité představy éteru. Elektronová teorie se "samozřejmě" chová jinak v klidovém systému éteru a jinak v systémech, které se vůči éteru pohybují (transformuje se Galileiho transformací!), ale je třeba zařídit, aby to nebylo možno naměřit. Podařilo se to pomocí dvou hypotéz, v nichž vystupuje "Lorentzův faktor" $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:

- předměty, které se vůči éteru pohybují, jsou v podélném směru γ-krát zkráceny;
- hodiny, které se vůči éteru pohybují, jdou γ-krát pomaleji.

---

[4] Například W. Wien zahajoval v září 1898 na zasedání Společnosti německých přírodovědců a lékařů zvláštní jednání věnované éteru také slovy: "Otázka, zda se světelný éter účastní pohybu těles či nikoli a zda je mu vůbec možno nějaký pohyb připsat, zaměstnává fyziky už dlouho a nesčetné jsou názory a domněnky, které pokládají stanovení vlastností nositele elektromagnetických jevů za nutné." Wien pak vypočítává 13 experimentů, usilujících o zjištění pohybu Země vůči éteru, a také řadu rozporů panujících mezi rozdílnými koncepcemi éteru. A. Fölsing ve svém krásném životopisu Einsteina přirovnává situaci ke středověkému problému s neúnosně složitou soustavou epicyklů, která byla navršena k záchraně "klidné" Země.

Dodejme, že představa éteru jako nosiče interakce se z optiky a elektromagnetismu rozšířila i na úvahy o jeho roli při přenosu gravitace a že i ty byly přirozeně spojeny s konečnou rychlostí šíření.

Byly to hypotézy vcelku přirozené. Má-li být elektronová teorie konzistentní s Maxwellovými rovnicemi, musí být totiž tvar ekvipotenciálních ploch bodového náboje závislý na pohybu náboje vůči éteru: pro náboj v klidu jsou to sféry, zatímco pokud se náboj pohybuje, jsou to rotační elipsoidy zploštělé ve směru pohybu faktorem γ. Jsou-li síly rozhodující o tvaru těles ve své podstatě elektromagnetické povahy, je přirozené předpokládat, že se tělesa budou ve směru pohybu zkracovat stejným faktorem. Nějaký efekt je možno očekávat i u chodu hodin. Pokud si představíme hodiny založené na kmitání světelného paprsku mezi dvěma zrcadly a uvědomíme si, že vůči éteru se světlo pohybuje rychlostí c a vůči jinému systému (dle Galileiho transformace) jinak, zjistíme, že v pohybujících se hodinách musí světlo urazit delší dráhu, a tedy takové hodiny musejí jít pomaleji než hodiny stojící. Podívejme se nyní zpět na vztah (1.1), rozhodující pro výsledek Michelsonova-Morleyova experimentu. Můžeme dosadit

$$l_2 = l_2^{\mathrm{klid}}, \qquad l_1 = l_1^{\mathrm{klid}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ ,$$

poněvadž rameno délky l_2 je kolmé na směr pohybu laboratoře vůči éteru, kdežto rameno l_1 míří ve směru tohoto pohybu. Po dosazení vztah nabývá podoby

$$\Delta t = \frac{2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(l_2^{\mathrm{klid}} - l_1^{\mathrm{klid}} \right) .$$

Je třeba zdůraznit, že *měřenými* délkami ramen jsou l_1^{klid} a l_2^{klid} (protože tělesa se v důsledku pohybu vůči éteru zkracují stejně jako měřidla, tedy zkracování *není měřitelné*), takže je skutečně vhodné vztah psát pomocí nich. Za druhé, čas měříme na hodinách, které se vůči éteru pohybují, a tedy jdou pomaleji než hodiny stojící (na kterých uběhne Δt). Pokud půjdou pomaleji právě γ-krát, změříme na nich časový rozdíl

$$\Delta t_{\mathrm{měřený}} = \Delta t \ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2}{c} \left(l_2^{\mathrm{klid}} - l_1^{\mathrm{klid}} \right) .$$

Tento výraz již *vůbec nezávisí na rychlosti* v, takže tato rychlost (Země vůči éteru) ani nemůže být experimentem zjištěna.

Lorentzova elektronová teorie se tím dostává do situace, kdy se klidová soustava éteru nedá identifikovat ani mechanickými, ani elektromagnetickými pokusy. Fyzikální pojem, ke kterému se nelze experimentálně vyjádřit, je ovšem nadbytečný.

1.2.4 Stav na jaře roku 1905

Na počátku 20. století nebyla fyzika rozhodně “v základním stavu”. Lorentz a Poincaré se snažili *dynamicky* vysvětlit, proč se éter tak dobře maskuje — proč se systémy, které se vůči němu pohybují, zkracují a jejich vnitřní procesy zpomalují, a to navíc přesně tak, že se klidový systém éteru zdánlivě ničím nevyznačuje. Při svých úvahách měli “speciální relativitu” vysloveně v rukou, ale představy pevně fixované na médium éteru jim nedovolily ji rozeznat. Zvláště Poincaré se dostal již na přelomu století natolik daleko, že se dnes už možná ani nedá pochopit, proč klíč k novému pohledu na prostoro-čas nenašel on. V r. 1898 přemýšlel o synchronizaci sady vzájemně klidných hodin telegrafními signály a jako postulát přijímal konstantní a izotropní rychlost světla. O dva roky později počítal, jaký vliv na synchronizaci má translační pohyb sady hodin vůči éteru, přičemž rozlišoval “pravý” a “zdánlivý” čas. V květnu 1904 pak Lorentz našel přesnou podobu transformace, vůči níž je Maxwellova teorie invariantní.[5] Poincaré ukázal, že Lorentzův "místní čas" je totožný s jeho "zdánlivým časem", a dovodil, že "vznikne zcela nová mechanika, která bude charakterizována skutečností, že žádná rychlost nepřekročí rychlost světla a žádná teplota nebude nižší než absolutní teplota nuly." (Wilhelm Wien i jiní v rámci Lorentzovy elektronové teorie a představy o elektromagnetické povaze hmoty potvrzovali, že by bylo třeba nekonečné práce k tomu, aby elektron překročil rychlost světla.) V knize *Věda a hypotéza* z r. 1902 (zřejmě jediné věci, kterou od něj Einstein před r. 1905 četl) předpovídá, že éter je pro vysvětlení řady jevů pohodlný, ale jednou bude jako neužitečný pojem opuštěn. Podobně skepticky se vyjadřuje i o "absolutním čase" a konceptu současnosti na různých místech. V r. 1905 pak Poincaré publikoval další dva články, jeden měsíc před a druhý měsíc po Einsteinově přelomové práci. V nich spojil prostorové souřadnice a čas do polohového "čtyřvektoru", ukázal, že Lorentzova transformace odpovídá otáčení tohoto čtyřvektoru ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru a že veličina $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$ se při ní nemění, odvodil odpovídající transformaci rychlostí, dokázal, že Lorentzovy transformace tvoří grupu ($\rightarrow$ Poincarého grupa) a diskutoval její elektromagnetické invarianty; dokonce požadoval, aby "princip relativity" platil i pro gravitaci, a uvažoval o "gravitačních vlnách"...

I mimo oblasti zasažené debatami o vlastnostech éteru se na přelomu století děly převratné věci. V kinetické teorii a statistické mechanice hlavně díky L. Boltzmannovi a J. W. Gibbsovi, ale také A. Einsteinovi. A Max Planck našel 8. září 1900 nad ránem vzorec pro záření černého tělesa. Když se ho v následujících týdnech snažil "pořádně odvodit", musel použít představu, že záření vysílají jednotlivé atomy (oscilátory, které se chovají podle Boltzmannovy statistiky), a to nikoli spojitě, ale po určitých kvantech. Později svůj postup nazval pouhým "aktem zoufalství" a na účinkové kvantum h vzpomínal jen jako na "čistě formální předpoklad, při němž neměl nic zvláštního na mysli" a který se pak v dalších letech snažil "nějak přizpůsobit rámci klasické teorie" — to znamená Maxwellově teorii a vlnové povaze světla, o níž podobně jako ostatní nepochyboval. Ale byl zde ještě "laik" na patentovém úřadu v Bernu...

1.3 Albert Einstein a zrod nové fyziky

Koncem května 1905 píše Einstein dopis svému kamarádovi Conradu Habichtovi: "Milý Habichte, zavládlo mezi námi tak velebné mlčení, že se cítím skoro jako bych se dopouštěl svatokrádeže, když ho teď přerušuji bezvýznamným plkáním. Ale není to vždy osudem vznešených tohoto světa? Tak co děláte, Vy mražená velrybo, Vy uzený, sušený, konzervovaný kousku duše či co bych Vám ještě rád hodil na hlavu, jsa ze 70% naplněn zlobou a ze 30% lítostí! Jen těm 30% můžete děkovat, že Vám neposílám plechovku plnou krájené cibule a česneku poté, co jste se tak zbaběle neukázal o Velikonocích. Ale proč jste mi stále ještě neposlal svou disertaci? Cožpak nevíte, že bych byl jedním z 1 a 1/2 maníků, kteří by si ji přečetli se zájmem a potěšením, Vy bídníku? Slibuji Vám na oplátku čtyři články, první bych mohl poslat brzy, protože záhy dostanu reprinty. Článek se zabývá zářením a energetickými vlastnostmi světla a je velmi revoluční, jak uvidíte, pokud mi nejdříve pošlete svou práci. Druhý článek je určením skutečných velikostí atomů z difuse a viskosity zředěných roztoků neutrálních látek. Třetí dokazuje, z předpokladu molekulární teorie tepla, že tělesa velká řádově $1/1000\,\mathrm{mm}$, rozptýlená v kapalinách, už musí konat pozorovatelný nahodilý pohyb, jenž je vyvolán tepelným pohybem; fyziologové skutečně pozorovali (nevysvětlené) pohyby rozptýlených malých, neživých tělísek,

[5] S "předběžnou" podobou transformace přišel již v r. 1887 Woldemar Voigt, ale Lorentz se o tom dověděl až poté, co ji mezitím (r. 1905) odvodil i Einstein jako součást svého nového pohledu. Z Lorentzovy transformace bychom Voigtovu dostali vydělením pravých stran faktorem γ: $t' = t - vx/c^2$, $x' = x - vt$, $y' = y/\gamma$, $z' = z/\gamma$.

kteréžto označují jako ‘brownovský molekulární pohyb’. Čtvrtý článek je zatím jen hrubým náčrtem a je o elektrodynamice pohybujících se těles, která užívá modifikace teorie prostoru a času; čistě kinematická část tohoto článku Vás bude určitě zajímat. Solo dává soukromé hodiny jako dřív, nedokáže se přimět k tomu, aby udělal zkoušku; je mi ho velice líto, neboť vede smutnou existenci. Vypadá také docela vyčerpaně. Nemyslím ale, že je možné ho nasměrovat ke snesitelnějším životním podmínkám - víte, jaký je! Pozdravy od Vašeho A.E. / Pozdravuje Vás žena a ptáček zpěváček, jemuž je teď rok. Pošlete svou práci brzy!”

Habicht bude později strašně rád, že si dopis uschoval. V prvním, “revolučním” článku svého přítele mohl posléze číst: “Podle předpokladu, který zde bude uvažován, není při šíření světelného paprsku z bodu energie spojitě roznášena do stále se zvětšujících prostor, ale skládá se z konečného množství energetických kvant, která jsou lokalizována v prostorových bodech, pohybují se, aniž by se dělila, a mohou být absorbována a emitována pouze celá.” Einstein zde jako první vzal vážně Planckovu kvantovou hypotézu ze září 1900 a navázal na svá studia specifického tepla a fotoelektrického jevu. Max Planck, jak víme, sám viděl svůj “čistě formální předpoklad” úplně jinak — a je pikantní, že mezi spoustou chvály, kterou v r. 1913 (!) zanesl do návrhu na přijetí Einsteina do Pruské akademie věd, nalezneme i větu: “Nezazlívejme mu příliš, že ve svých spekulacích někdy přestřelil, jako např. s hypotézou světelných kvant; neboť ani v nejexaktnější z přírodních věd není pokrok možný bez rizika.” Po 9 letech dostane Einstein za přestřelení Nobelovu cenu. Po uspokojivé kvantové teorii však bude osaměle volat až do r. 1925 (— a pak ještě dalších 30 let. . .).

Druhou práci, kterou Einstein Habichtovi v dopisu slibuje, posléze podal jako doktorskou disertaci. Jmenovala se *Nové určení rozměrů molekul*, měla 17 stran, byla věnována bývalému spolužákovi, matematikovi Marcelu Grossmannovi a přinášela ‘atomistické’ argumenty - z makroskopického chování roztoků určovala velikost částic rozpuštěné látky. Navazovala na ni práce třetí, *O pohybu částic rozptýlených v klidných kapalinách*, který si žádá molekulárně-kinetická teorie tepla, v níž Einstein zúročil své znalosti Boltzmannovy kinetické teorie. Ihned vyvolala ohlas předních laboratoří i některých odborníků z biologických a lékařských kruhů. Einstein po půl roce přidal ještě článek *K teorii Brownova pohybu* a téma ho nepřestalo těšit ani v dalších letech; pochvaloval si, že v Brownově pohybu “lze bezprostředně nahlížet neuspořádané elementární procesy”. Za příspěvky k molekulárně-kinetické teorii byl na Nobelovu cenu navržen několikrát, poprvé už v r. 1910, ale nikdy ji nedostal.

Einstein psal o prvním článku (*O heuristickém hledisku týkajícím se produkce a přeměny světla*) jako o “velmi revolučním” a i z pozdějšího pohledu to bylo zcela na místě. Navíc, dnes lze jen stěží docenit, jakou odvahu musel v r. 1905 mít k “heuristickému hledisku”! Jak ale pak označit poslední v dopisu zmíněný text, ‘draft’ teorie, která bude po letech známa jako speciální relativita? Einstein zde *ne*přichází s novým tématem, skloubení Maxwellovy elektrodynamiky s Newtonovou mechanikou bylo na pořadu již desetiletí a Lorentzova transformace byla známa. Zatímco však o Maxwellových rovnicích se nepochybovalo 40 let, na koncept času jakožto inherentní strukturu vesmíru se úvahy ‘samozřejmě’ spoléhaly po tisíciletí. Ještě před všemi rovnicemi svého článku *K elektrodynamice pohybujících se těles* Einstein navrhuje nahradit posvátný parametr času polohou ručičky na svých hodinách. . .

1.3.1 Einstein a éter

Einsteina trápily představy spojené s Maxwellovou elektrodynamikou již od universitních let. Co by se stalo, kdyby se vydal za elektromagnetickou vlnou rychlostí světla? Podle Galileiho transformace a běžné intuice by viděl stojící, nepohyblivé vlny. Měření ale dávala rychlost světla stejnou vůči všem systémům. Jsou všechny ty experimenty špatně? Nebo byla vůbec špatně změřena rychlost světla? Všichni se chytají kontrakční (a dilatační) hypotézy a snaží se vymyslet, co za síly to působí na vše, co se vůči éteru pohybuje, že se to chová tak podivně. Podivné chování velmi podivného prostředí... Pokud je hypotéza správně, nejde nijak najít klidovou soustavu éteru. David Hume a Ernst Mach by řekli, že pojem, o kterém nelze nic zjistit, nemá ve fyzikální teorii místo. Je třeba mluvit o tom, co je aspoň v zásadě možno změřit. A co když je kontrakční hypotéza špatně? Pak Newtonova fyzika *není slučitelná* s elektrodynamikou!

Rozporný obraz ostatně skýtala řada předpovědí elektrodynamiky. Například Faradayova elektromagnetická indukce, k níž dochází při vzájemném pohybu vodivé smyčky a magnetu: když se jev popisuje z hlediska smyčky, vytvoří se v ní proud díky elektrickému poli, které je generováno časově proměnným magnetickým polem pohybujícího se magnetu; z hlediska magnetu žádné elektrické pole nevzniká, proud ve smyčce vyvolá Lorentzova elektromotorická síla, která působí na volné náboje ve smyčce, protože se pohybují v magnetickém poli magnetu. Jsou oba pohledy stejně oprávněné? Pokud ano, pak existence elektrického pole závisí na pozorovateli — je relativní. Podobné je to zřejmě s polem magnetickým. Jen určité *společné* jednotě elektrického a magnetického pole lze přiznat objektivní, na vztažném systému nezávislou existenci. Einstein později vzpomínal, že to byl právě jev “magnet-elektrické” indukce, co ho přivedlo k vyslovení principu speciální relativity.

Již koncem studií byl přesvědčen, že pojem éteru je zbytečný, že proudy a elektromagnetické pole (vlny) jsou svébytné — nepotřebují materiální nosič. Své spolužačce a budoucí ženě Milevě Marićové začátkem srpna 1899 píše: “Jsem stále více přesvědčen, že elektrodynamika pohybujících se těles, tak jak se dnes předkládá, není správná a že by ji mělo být možno podat jednodušeji. Zavedení termínu ether do teorií o elektřině vedlo k představě prostředí, o jehož pohybu se dá mluvit, aniž by však, myslím, šlo s takovým výrokem spojit nějaký fyzikální smysl. Domnívám se, že elektrické síly mohou být přímo definovány jen pro prázdný prostor, což zdůrazňuje i Hertz. Dále, elektrické proudy bude třeba pojímat nikoli jako ‘vymizení elektrické polarisace v čase’, ale jako pohyb skutečných elektrických hmot, jejichž fyzikální realita se zdá být potvrzena elektrochemickými ekvivalenty.” Einstein se stále více klonil k názoru, že nejenže neexistuje éter, ale také že Mach má pravdu, když tvrdí, že neexistuje vůbec žádný absolutní klid (ani absolutní pohyb) a že má smysl mluvit jen o relativním pohybu tělesa vůči jiným tělesům.

Pak je na místě vrátit se k principu relativity, tedy k rovnocennosti inerciálních systémů. Jak se ale může světlo vůči všem z nich šířit stejnou rychlostí? Jak může být rychlost světla *nezávislá* na pohybu systému, vůči němuž je měřena?! Není tento zcela proti-intuitivní výrok ještě nepřijatelnější než éter se všemi jeho zvláštnostmi? Einstein možná neznal poslední výsledky Lorentze a Poincarého, ale dovedl si představit, že matematicky jistě lze získat transformaci, vůči níž je Maxwellova teorie invariantní. I kdyby Lorentzovu transformaci explicitně znal, stejně by mu ale nestačilo, kdyby prostě její derivací obdržel pro skládání rychlostí formuli, která ponechává c invariantním. Vždyť bez zásadní revize pojmů zůstávala nová transformace jen šikovnou matematickou hrou. Na začátku května 1905 byl Einstein ponořen do úvah o měření délek, času a rychlosti světla v různých inerciálních soustavách. Se svým přítelem z patentového úřadu Michelem Bessoem se v debatách postupně zaměřili na otázku synchronizace inerciálních hodin světelným signálem a na Lorentzovy a Poincarého pojmy “absolutního” či “pravého” času a na druhé straně času “místního” či “zdánlivého”. O 17 let později Einstein vzpomínal, jak po jednom krásném dni opět zašel za Bessoem: “Diskutovali jsme o problému ze všech stran. A najednou jsem věděl, v čem to vězí.” V duchu principu relativity bylo třeba všechny ty přívlastky vynechat a hovořit jen o “čase” — pro každý inerciální systém sice specifickém, ale všude plnohodnotném pojmu času. Druhého rána přiběhl Einstein do práce a hned volal: “Micheli, díky tobě jsem problém beze zbytku vyřešil! Klíčem je analýza pojmu času. Čas nelze definovat absolutně a mezi časem a rychlostí signálu existuje neodvolatelný vztah.”

1.3.2 Relativita současnosti a další efekty

Specifičnost inerciálních časů je vidět na pojmu současnosti. Použijme jako Poincaré k synchronizaci souboru stejných hodin, které jsou v klidu vůči nějaké inerciální soustavě, světelného signálu. Světlo se k takovému účelu hodí nejlépe, protože jeho rychlost je ve všech systémech stejná a izotropní, takže všichni inerciální pozorovatelé se na ní shodnou a synchronizační *metodu* si nebudou navzájem zpochybňovat. Neshodnou se ovšem na jejím *výsledku*. Mezi každou dvojicí navzájem klidných hodin vyměřme bod v polovině jejich vzdálenosti, tam “blikněme” a poté, co paprsek hodin dosáhne, na nich na obou nastavme předem smluvený čas. Nyní porovnejme takto zavedenou současnost mezi různými dvěma soustavami; Einstein pracoval v Bernu u nádraží, tak si představoval klidový systém nádraží a systém spojený s projíždějícím vlakem. Blikne-li průvodčí v polovině vlaku, pak podle souboru hodin spojených s perónem dosáhne světlo zadní konec vlaku dříve než přední, protože rychlost c je konečná a vlak během letu paprsků kousek popojede. Soubor hodin spojený s vlakem je ale právě takto světlem synchronizován, takže z hlediska vlaku dosáhne paprsek obou jeho konců “definitoricky současně”. Současnost je tak nutně relativním pojmem: soubor hodin, který je synchronizován vzhledem k vlaku, *není* synchronizován vzhledem k nádraží, konkrétně čím jsou hodiny ve vlaku více vzadu/vpředu, tím ukazují — bráno podle souboru hodin synchronizovaných vůči nádraží — víc/míň. Důležité je, že k úplně stejnému (lépe řečeno opačnému, “symetrickému”) závěru bychom došli, kdybychom naopak posoudili soustavu nádražních hodin z vlaku, jak je zřejmé z toho, že pojmy “vlak” a “nádraží” nejsou díky relativitě jejich vzájemného pohybu podstatné. Uvedený myšlenkový experiment ukazuje i obecnější závěr — že mezi danými dvěma událostmi (např. vysláním světelného signálu ze středu vlaku a jeho příjmem hodinami na některém z konců) uplyne v různých inerciálních soustavách *různá* doba.

Představa s vlakem a nádražím se i snadno kvantifikuje[6] a dají se na ní odvodit relativistické efekty jen z invariance rychlosti světla a z toho, co znamená synchronizovat hodiny a měřit délku. Označme inerciální soustavu nádraží jako nečárkovanou; její osu x natočíme ve směru pohybu vlaku a její čas t bude udávat soustava hodin, které jsou vůči nádraží (takže i vůči sobě navzájem) v klidu a jsou navzájem světelně synchronizovány. Délku vlaku vůči této soustavě označíme l a rychlost $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = (v, 0, 0)$. Inerciální soustavu vlaku označíme jako čárkovanou, její osu x' nastavíme podél vlaku (a orientujeme směrem dopředu), tj. podél x; rychlost nádraží vůči ní je samozřejmě $\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t'} = (v', 0, 0) = (-v, 0, 0) = -\vec{v}$ a délka vlaku $\Delta x'_{\mathrm{AB}} \equiv l'$. Jak jsme už řekli, v soustavě vlaku dorazí světlo vypuštěné z prostředka vlaku k oběma jeho koncům současně (tyto události značíme A, B), za dobu $\Delta t'_{\mathrm{A}} = \Delta t'_{\mathrm{B}} = \frac{\Delta x'_{\mathrm{AB}}}{2c} \equiv \frac{l'}{2c}$, zatímco v soustavě nádraží to bude za $\Delta t_{\mathrm{A}} < \Delta t_{\mathrm{B}}$, přičemž pro rozdíl konkrétně dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} c\Delta t_{\mathrm{A}} = \frac{l}{2} - v\Delta t_{\mathrm{A}} \quad\Rightarrow\quad \Delta t_{\mathrm{A}} = \frac{l}{2(c+v)} \\ c\Delta t_{\mathrm{B}} = \frac{l}{2} + v\Delta t_{\mathrm{B}} \quad\Rightarrow\quad \Delta t_{\mathrm{B}} = \frac{l}{2(c-v)} \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \Delta t_{\mathrm{B}} - \Delta t_{\mathrm{A}} = \frac{\gamma^2 vl}{c^2} \ . \tag{1.4}$$

Dvě události, které se v čárkované soustavě staly současně ve vzdálenosti l' od sebe, tedy v nečárkované soustavě dělí nenulový časový interval $\frac{\gamma^2 vl}{c^2}$. Je dobré zdůraznit, že l *není* nečárkovaná vzdálenost mezi těmito událostmi (tedy polohami konců vlaku v daném čase t'). Jistě,

[6] Ve skutečnosti je toto rozmýšlení “na prstech” (kdo co přesně naměří mezi kterými dvěma událostmi) na speciální relativitě tím nejobtížnějším. “Geometrické” výpočty ve čtyřrozměrném prostoročasu jsou proti tomu — po zvládnutí několika málo jednoduchých pravidel — rutinním cvičením s indexy…

l je přece vzdálenost mezi konci vlaku *v daném okamžiku času* t, ale z hlediska tohoto času *nedorazily* fotony ke koncům současně — místa, kde ke koncům doletěly, jsou v nečárkované soustavě nádraží vzdálena l plus v krát doba $(\Delta t_\mathrm{B} - \Delta t_\mathrm{A})$, o kterou letí světlo ze středu vlaku déle k jeho přednímu konci (než k zadnímu), to jest $l + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\, l = \gamma^2 l$.

Ale jak je tedy vlastně vlak dlouhý — jaký je vztah mezi l' a l? Měřit délku vzhledem k danému systému znamená určit polohu obou konců předmětu ve *stejném* okamžiku daného času. V soustavě spojené s vlakem je to jedno, konce lze zaznamenat kdykoliv, protože se vůči ní nepohybují, ale podstatné je to v nečárkované soustavě spojené s nádražím. Poznačíme si tedy v této soustavě v nějakém okamžiku t polohu konců vlaku a délku l určíme jako rozdíl těchto hodnot. Jak už víme, hodiny, které *jedou* na koncích vlaku, však při tomto odečtu neukazují stejně — ty vpředu ukazují méně než ty vzadu. To znamená, že vůči soustavě vlaku neproběhl odečet polohy jeho konců současně, zadek byl zaznamenán později než předek. Z toho lze očekávat, že l bude menší než l'. Úvahu ještě záhy upřesníme, zatím si jen budeme pamatovat, že délka předmětu závisí na jeho pohybu vůči soustavě, vzhledem k níž ji měříme; konkrétně v "podélném" směru (podél relativní rychlosti) je předmět patrně kratší než vzhledem ke své klidové soustavě.

Představme si nyní, že ve vlaku i na nádraží je čas realizován soustavou velmi jednoduchých, tzv. světelných hodin, v nichž mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly ve vzdálenosti Δy od sebe kmitá světelný paprsek. Umístěme hodiny ve vlaku tak, aby paprsek kmital kolmo ke směru jeho pohybu vůči nádraží. Je jasné, že máme na mysli polohu zrcadel rovnoběžnou s pohybem vlaku, a také proč jsme ji zvolili — protože už víme, že s délkou pohybujících se předmětů se v podélném směru něco děje, a nechceme, aby se nám to sem pletlo, tj. chceme zde pro jednoduchost $\Delta y' = \Delta y$. Vůči nádraží se ovšem paprsek hodin ve vlaku *nebude* pohybovat přesně kolmo k zrcadlům, protože během každého kmitu vlak o kousek popojede. Označíme-li periodu jednoho kmitu hodin ve vlaku $\delta t' = \frac{2\Delta y'}{c} = \frac{2\Delta y}{c}$, pak jí odpovídající interval nečárkovaného času zjistíme z jednoduché Pythagorovy věty (stejně jako při výpočtu času letu "druhého" paprsku u Michelsonova-Morleyova experimentu)

$$\left(\frac{c\delta t}{2}\right)^2 = \Delta y^2 + \left(\frac{v\delta t}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \delta t = \frac{2\Delta y}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\delta t' \;\; (> \delta t') \; . \tag{1.5}$$

Všimněme si, že dvě události, jejichž časové odlehlosti jsme porovnávali — totiž dva po sobě následující "tiky" hodin jedoucích ve vlaku —, se z hlediska vlaku staly na *stejném* místě (takovýto časový interval mezi soumístnými událostmi nazýváme intervalem **vlastního času**), kdežto z hlediska nádraží se staly ve vzdálenosti $v\delta t$ od sebe. Úvahu bychom ovšem mohli obrátit a přepočítat naopak (vlastní) periodu nádražních hodin na časový úsek uplynulý ve vlaku; postupovali bychom úplně stejně (oba inerciální systémy jsou rovnocenné) a vyšel by stejný (symetrický) výsledek, $\delta t' = \gamma\delta t$. Obecný závěr tedy je, že časy spojené s inerciálními systémy, které se vůči sobě pohybují, jdou navzájem vůči sobě γ-krát *pomaleji* — nastává tzv. **dilatace času**. Označíme-li interval vlastního času $\delta\tau$, můžeme toto zjištění zapsat $\delta t = \gamma\delta\tau$; z časových úseků, naměřených mezi danými dvěma událostmi v různých inerciálních soustavách, je tedy interval vlastního času tím nejkratším. (Dodejme, že vztah musí "fungovat" i pro jiné než světelné hodiny, protože v opačném případě by šlo porovnáním chodů různých typů hodin rozlišit mezi inerciálními systémy.)

Nyní se můžeme vrátit ke kontrakci a vyčíslit ji přesně. Porovnejme "samozřejmé" vztahy, které platí pro interval mezi průjezdy konců vlaku určitým místem nádraží. Z hlediska vlaku je $l' = v\Delta t'$, z hlediska nádraží $l = v\Delta t$. Z hlediska nádraží jsou průjezdy konců soumístnými událostmi, takže Δt je úsekem vlastního času mezi nimi a přepočet zní (jak jsme zjistili v předchozím odstavci) $\Delta t' = \gamma \Delta t$ $(\equiv \gamma \Delta \tau)$. Dosazením do l' ihned vidíme, že tudíž

$$l' = v \Delta t' = v \gamma \Delta t = \gamma l \,. \tag{1.6}$$

Délkové míry spojené s inerciálními systémy, které se vůči sobě pohybují, jsou tedy navzájem vůči sobě *v podélném směru* ($\equiv$ směru rovnoběžném se vzájemnou rychlostí) γ-krát *zkráceny* — nastává tzv. **kontrakce délek**. Upřesněme ještě, že l' je délkou vlaku v jeho klidovém systému, tzv. **klidovou** nebo **vlastní délkou**, pro niž budeme užívat značení l_0. Vztah pro kontrakci tedy můžeme zapsat $l_0 = \gamma l$: z délek vlaku, naměřených v různých inerciálních soustavách, je klidová/vlastní délka tou *největší*.

1.3.3 Způsob myšlení

Cesta k poznání obyčejně začíná zkušenostmi (observační a experimentální data), ta se přenesou do souborů čísel, mezi těmi se (pokud možno) najdou pravidelnosti, které se vystihnou "zákonem" (ve fyzice rovnicí). Jak poznamenává např. Richard Feynman ve svých Přednáškách, proniknutí k Přírodě však není úplné, pokud se nenalezne "způsob myšlení", v rámci něhož jsou objevené zákony přirozeně pochopitelné. Jestliže jste předtím přijali observační a experimentální fakta (rovnocennost inerciálních soustav a konečnost a invarianci rychlosti světla), doufáme, že již nyní vám analýza pojmu současnosti na průjezdu vlaku nádražím pomohla — jako kdysi Albertu Einsteinovi — najít způsob myšlení, v rámci něhož by měly být všechny následující úvahy přirozeně (pocho)pitelné. Pokud ano, můžeme v následující kapitole odpočívat. Vlastně v ní jen shrneme předchozí "železniční" úvahy do axiomatičtější podoby: předpoklady utřídíme do "výchozích principů" a z nich pak odvodíme deduktivně základní důsledky. Ale abychom si mohli speciální relativity náležitě užít, budeme se poté ještě muset přestěhovat za Hermannem Minkowskim, do čtyřrozměrného prostoročasu!

KAPITOLA 2

Výchozí principy speciální teorie relativity

“Chceme-li popsat *pohyb* hmotného bodu, zadáme jeho souřadnice jako funkce času. Měli bychom však pamatovat, že aby měl takový matematický popis fyzikální smysl, musíme nejdříve vyjasnit, co zde rozumět ‘časem’. Uvědomme si, že všechny naše úsudky zahrnující čas jsou vždy úsudky o *současných* událostech. Když např. řeknu ‘vlak sem přijíždí v 7 hodin’, znamená to víceméně, že ‘to, že malá ručička na mých hodinách míří na sedmičku, a příjezd vlaku jsou současné události’.”

Redakce *Annalen der Physik* obdržela Einsteinův článek *K elektrodynamice pohybujících se těles* 30. června 1905 a zařadila ho na stránky 891-921 ročníku 17.[1] Jak podotýkají historikové, těžko v odborné literatuře najít práci s “triviálnějším” úvodem. O pár stránek dále — a aniž by náročnost úvah nějak výrazně vzrostla — je však fyzika postavena na nové základy. Po definici inerciálního času pomocí sady navzájem klidných hodin, synchronizovaných signálem konečné a “absolutní” rychlosti, Einstein ukazuje relativitu časových měření. Tato myšlenka je klíčem k teorii relativity, dovoluje totiž sloučit princip relativity s invariancí rychlosti světla. Od třetího oddílu článku již Einstein postupuje axiomaticky, rozvíjí svou novou teorii deduktivně z výchozích principů.

Principy jsou tři a jsou na celé teorii tím nejvíce překvapivým. Jedná se vlastně o “estetické” předpoklady jednoduchosti (symetrie), chcete-li harmonie světa, ke které se Einstein vždy hlásil — a zároveň upozorňoval na její nesamozřejmost (“Nejnepochopitelnější věcí na světě je, že svět je pochopitelný.”). Od Einsteinových dob vytěžila teoretická fyzika z této víry “nerozumně mnoho” a dnes na ní stojí všechny fundamentální fyzikální teorie. Výchozí principy speciální relativity jsou však opravdu *speciálně* jednoduché:

1. Newtonův zákon

(Galileiho princip setrvačnosti) Existuje kartézský referenční systém, vůči němuž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře. Nazveme jej **inerciálním systémem**.

- Je jasné, že pokud existuje jeden inerciální systém, existuje jich dokonce nekonečně mnoho, protože všechny kartézské systémy, které se vůči “tomu prvnímu” pohybují

[1] Další dvě Einsteinovy práce jeho “zázračného roku” (o nichž jsme četli v dopisu C. Habichtovi) vyšly v témže ročníku na stranách 132-184 (o světelných kvantech) a 549-560 (molekulárně-kinetická teorie tepla).

rovnoměrně přímočaře, jsou nutně také inerciální. Inerciální soustavy jsou realizovány ideálními tuhými tyčemi a sadami ideálních hodin (čas je třeba měřit v každém bodě prostoru), které jsou navzájem v klidu a jsou světelně synchronizovány.

- Komentář k použitým pojmům:
  Volným hmotným bodem máme na mysli hmotný bod, na který nepůsobí žádné pravé síly. Tato představa je problematická u gravitačního působení, poněvadž gravitace je univerzální a nejde tím pádem "odstínit". Je proto třeba předpokládat, že gravitační pole žádné není. (Přesněji řečeno by šlo připustit pole homogenní, ale budeme pro jednoduchost od gravitace odhlížet.)
  Ideálními tuhými tyčemi jsou tuhé tyče, na které nepůsobí žádné síly. Přívlastek *tuhé* je v tuto chvíli třeba chápat intuitivně, protože abychom ho upřesnili, museli bychom *nejdříve* rozvinout celou teorii a v rámci ní zformulovat teorii tuhých těles. (Tento problém je pro výstavbu fyzikálních teorií obvyklý; v zásadě se po dokončení teorie může dokonce ukázat, že s ní výchozí pojmy nejsou konzistentní.)
  Ideálními hodinami nazýváme sadu stejných (tedy také stejně jdoucích) hodin, které nejsou vystaveny působení sil.

Princip speciální relativity

Všechny inerciální systémy jsou z hlediska fyzikálních zákonů rovnocenné. Tj. všechny fyzikální zákony je možno formulovat ve tvaru, který je ve všech inerciálních soustavách stejný.

- Jak jsme již zdůrazňovali dříve, postuluje se zde *principiální* rovnocennost — rovnocennost vůči "pravidlům hry", nikoli vůči vlastnostem konkrétních fyzikálních systémů. Je zřejmé, že *rozmístění hmoty* ani *nemůže být* z hlediska všech inerciálních systémů stejné, takže přirozeně určuje různé "prakticky privilegované" systémy (klidová soustava Galileiho plavidla, klidová soustava Země, systém, v němž je izotropní reliktní záření).

- Princip mj. znamená, že fyzikální zákony musejí být nezávislé na místě a směru a nesmějí se měnit s časem. Jeho "praktickým" důsledkem je to, že všechny fyzikální experimenty by měly vůči všem inerciálním soustavám dopadnout stejným způsobem, pokud byly vůči všem stejně připraveny (stejné podmínky).

Princip invariance (a konečnosti) rychlosti světla

Ve vakuu se světlo šíří vůči všem inerciálním systémům rovnoměrně přímočaře konečnou rychlostí c.

- Tento princip se zdá být důsledkem Maxwellovy teorie, ale je logičtější zde odhlédnout od historické návaznosti a uvědomit si, že princip relativity je *obecnějším* požadavkem, nevztahujícím se jen na oblast elektromagnetických jevů, a že by jej v zásadě mělo být možno sloučit i s jinými teoriemi šíření světla. Tudíž je vhodné princip formulovat jako svébytný postulát, nezávislý na Maxwellově či jiné konkrétní teorii.

- Princip lze také nahlížet jako důsledek principu relativity. Bez újmy na obecnosti lze totiž tvrdit, že v přírodě existuje určitá maximální rychlost, na kterou lze libovolné hmotné těleso urychlit. Tato rychlost musí být stejná vůči všem inerciálním systémům, protože v opačném případě by nebyly fyzikálně rovnocenné — byl by dokonce jasný praktický způsob, jak je odlišit. Jsou jen dvě možnosti: je-li tato maximální rychlost nekonečná, pak princip relativity vede k tomu, že inerciální systémy jsou svázány Galileiho transformací, je-li maximální rychlost konečná, vede k transformaci Lorentzově. Podstatné sdělení principu tak vlastně zní: *maximální přírodní rychlost je konečná a je to rychlost, se kterou se ve vakuu šíří světlo*.

2.1 Lorentzova transformace

Jestliže je rychlost světla konečná a stejná vůči všem inerciálním soustavám, nemůže se mezi soustavami přecházet Galileiho transformací, protože podle té by se rychlost světla skládala se vzájemnou rychlostí soustav ($c' = c \pm v$) jako každá jiná (konečná) rychlost. Musíme tedy odvodit novou transformaci, která bude ponechávat c invariantní. Mohli bychom ji získat na základě poznatků, ke kterým jsme již dospěli přemýšlením o průjezdu vlaku nádražím v kapitole 1.3.2, ale pojďme znovu přímo od výchozích principů.

Předpokládejme, že dvě inerciální soustavy, IS a IS', se navzájem pohybují rychlostí v. Jejich osy můžeme vždy nastavit tak, že vzájemný pohyb bude směřovat jen podél os x a x'; konkrétně nechť se IS' pohybuje vůči IS rychlostí v v kladném směru osy x a nechť osa x' má stejnou orientaci jako x (takže IS se naopak vůči IS' pohybuje rychlostí $v' = -v$ ve směru x').[2] Počátky soustav lze volit libovolně — a učiníme to tak, aby sebou v určitém okamžiku prošly. Dále budeme předpokládat, že osy y', z' v tomto okamžiku splývají s osami y, z a časy jsou nastaveny na $t = 0$ a $t' = 0$ (tedy nečárkované inerciální hodiny v počátku IS ukazují v tom okamžiku nulu a stejně tak i čárkované inerciální hodiny v počátku IS'). Tato nastavení jsou samozřejmě újmou na obecnosti tvaru hledané transformace (užívá se proto označení **speciální Lorentzova transformace**), ale nikoliv újmou na obecnosti sledovaného fyzikálního dění — to je na vztažném systému zcela nezávislé. Navíc je jasné, že systémy lze uvedeným nejjednodušším způsobem nastavit *vždy* a že podstatné rysy nové transformace se při tomto nastavení projeví v "nejčistší" podobě.

Tvar hledané transformace můžeme omezit na základě několika požadavků, které jsou vlastně mlčky obsaženy v 1. Newtonově zákonu a v principu relativity:

- Pokud má mít 1. Newtonův zákon dobrý smysl, musí se vůči sobě inerciální systémy pohybovat rovnoměrně přímočaře. Rovnoměrný přímočarý pohyb se tedy musí transformovat opět na rovnoměrný přímočarý. To znamená, že transformace musí být *lineární*.
- Všechny prostorové body a časové okamžiky jsou v principu rovnocenné (předpoklad homogenity prostoru a času). Díky tomu musejí být rovnocenné i všechny prostorové *směry* kolmé ke směru vzájemného pohybu našich dvou soustav. Spojením těchto požadavků s principem relativity (tedy s tím, že transformace musí mít stejný tvar směrem "tam", IS→IS', i směrem zpátky) zjišťujeme, že osy y, z se musejí transformovat identicky ($y' = y$, $z' = z$) a že tyto souřadnice se nesmějí "plést" do transformace t a x.

Transformaci tedy budeme hledat ve tvaru

$$t' = At + Bx, \qquad x' = Ct + Dx, \qquad \text{kde } A, B, C, D \text{ jsou konstanty} .$$

Jeden vztah mezi konstantami plyne okamžitě z definice vzájemné rychlosti soustav: počátek IS' se vůči IS pohybuje rychlostí v, tedy podle rovnice $x = vt$ (čas t je nastaven na nulu v

[2] Rychlost je samozřejmě definována jako podíl přírůstku polohy $\mathrm{d}x \equiv x_2 - x_1$ a přírůstku času $\mathrm{d}t \equiv t_2 - t_1$ v daném inerciálním systému. Je dobré uvědomit si i další "samozřejmost", totiž že časy t_2 a t_1 jsou odečteny na *různých* hodinách — t_1 na hodinách nacházejících se v místě x_1 a t_2 na hodinách v místě x_2. (Tyto hodiny jsou *samozřejmě* navzájem v klidu a synchronizovány.)

okamžiku, kdy počátky splývají), tudíž musí pro něj podle druhé transformační rovnice platit $0\,(=x' = Ct + Dx) = Ct + Dvt$. Odtud vidíme, že $C = -Dv$, takže druhý vztah nabývá podoby $x' = D(x - vt)$. Nyní využijeme výchozích principů:

- Rovnocennost IS a IS' vyžaduje, aby inverzní transformace měla stejný tvar jako transformace přímá, tedy speciálně $x = D(x' - v't') = D(x' + vt')$.

- Pokud v okamžiku, kdy sebou počátky procházejí, v nich blikneme, musí se světlo šířit podél x i podél x' stejnou rychlostí c, tedy podle rovnic $x = ct$ a $x' = ct'$. Tyto rovnice tedy musejí být podle transformace konzistentní. Jejich dosazením do přímého a zpětného vztahu $x' = D(x - vt)$, $x = D(x' + vt')$ dostáváme $ct' = Dt(c - v)$, $ct = Dt'(c + v)$. Vynásobením obou a vydělením tt' vychází $c^2 = D^2(c^2 - v^2)$. Při odmocnění volíme kladné znaménko, protože případ $v = 0$ musí odpovídat identitě ($x' = x$), tedy $D = 1$:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \ . \tag{2.1}$$

  Tento výraz, daný vzájemnou rychlostí uvažovaných dvou inerciálních soustav, se nazývá **Lorentzův faktor**. Již nás nikdy neopustí.

Transformační vztah pro čas už teď vyplývá ze vztahů $x' = \gamma(x - vt)$, $x = \gamma(x' + vt')$ — stačí z nich vyloučit x' a vyjádřit t'. Například vynásobením první rovnice γ a sečtením obou dostaneme

$$\gamma x' + x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma x' + \gamma vt' \implies \gamma vt' = \gamma^2 vt + (1 - \gamma^2)x \implies t' = \gamma\Big(t - \frac{v}{c^2}\,x\Big)$$

$\Big($totiž $1 - \gamma^2 = -\frac{v^2}{c^2}\,\gamma^2\Big)$.

Můžeme tedy shrnout, že **speciální Lorentzova transformace** "ve směru x" je dána

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2.2}$$

2.2 Bezprostřední důsledky Lorentzovy transformace

Za důsledek Lorentzovy transformace lze považovat vlastně celý další obsah speciální teorie relativity, ale zde si všimneme jen nejjednodušších důsledků nového vztahu mezi inerciálními systémy pro prostorová a časová měření. Většinu z nich známe už z "železniční" kapitoly 1.3.2. Budeme uvažovat dvě inerciální soustavy, IS a IS', nastavené podle minulé kapitoly, a tudíž svázané speciální Lorentzovou transformací ve směru x. A budeme předpokládat, že se vše, o čem bude dále řeč, odehrává na stejných $y' = y$ a $z' = z$, například přímo na ose x, resp. x' (prostě že směry y, z jsou nepodstatné).

2.2.1 Relativita soumístnosti

Mějme (např.) dvě události, které se v IS' stanou na témže místě, $x'_2 = x'_1$, takže jejich čárkovaná prostorová odlehlost je nulová, $\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1 = 0$. Polohy událostí se transformují podle Lorentzovy transformace

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2), \quad x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \qquad \implies \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)\ ,$$

a tedy v našem případě

$$0 = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x = v\Delta t \ .$$

Pokud se tedy události nestanou ve stejném čase ($\Delta t \equiv t_2 - t_1 \neq 0$), je jejich nečárkovaná prostorová odlehlost $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ nenulová. Tento výsledek je "přirozený", protože úplně stejně vychází i pro Galileiho transformaci — soumístnost je relativním pojmem již v newtonovské fyzice.

2.2.2 Relativita současnosti

Mějme nyní dvě události, které se v IS stanou ve stejný čas, $t_2 = t_1$, takže jejich nečárkovaná časová odlehlost je nulová, $\Delta t \equiv t_2 - t_1 = 0$. Časy událostí se transformují podle Lorentzovy transformace

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right), \quad t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \ ,$$

a tedy v našem případě

$$\Delta t' = -\gamma\, \frac{v}{c^2}\, \Delta x \ .$$

Pokud se tedy události nestanou v IS i na stejném místě ($\Delta x \neq 0$), je jejich čárkovaná časová odlehlost $\Delta t'$ *nenulová*. Tento výsledek je — na rozdíl od relativity soumístnosti — nový; podle Galileiho transformace nenastává, poněvadž podle té je čas absolutní (transformuje se identicky), a tedy absolutní (na systému nezávislou) je i časová odlehlost událostí.

2.2.3 Kontrakce délek

Mějme ideální tyč, která je vůči IS' v klidu a míří čistě ve směru x'. Její délka v IS' je tedy $\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1$ a je zároveň *klidovou délkou* tyče, $\Delta x' \equiv l_0$. Pro polohy konců platí Lorentzova transformace

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2), \quad x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \ .$$

Měřit délku tyče v IS znamená zaregistrovat *vzhledem k tomuto systému současnou* polohu konců tyče. Události $2 \equiv$ zápis polohy "předního" konce a $1 \equiv$ zápis polohy "zadního" konce tyče tedy musejí proběhnout ve *stejném* čase t, tj. musí být $\Delta t \equiv t_2 - t_1 = 0$. Dosazením do transformace máme okamžitě

$$l_0 \equiv \Delta x' = \gamma\Delta x \equiv \gamma l \ \ (> l) \qquad \ldots \text{ kontrakce délek} \ . \tag{2.3}$$

Jak již víme, tyč má tedy největší délku vůči svému klidovému systému.

Poznámka: Je jasné, že k měření délky je třeba nejméně dvojice (inerciálních, navzájem stojících a synchronizovaných) hodin — u každého konce tyče musejí být (právě v okamžiku registrace jeho polohy) jedny. Jak jsme již několikrát zdůraznili (naposledy v minulém odstavci), co je současné vůči IS, není obecně současné vůči IS'. Z transformace času můžeme dopočítat, že odečet poloh konců tyče, současný vzhledem k IS, není současný vůči IS':

$$t'_2 - t'_1 \equiv \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = -\gamma\, \frac{v}{c^2}\, \Delta x \equiv -\gamma\, \frac{v}{c^2}\, l \ ,$$

tedy z hlediska IS' probíhá měření délky vůči IS tak, že poloha "předního" konce tyče je zaznamenána dříve než poloha "zadního" konce.

2.2.4 Dilatace času

Mějme ideální hodiny, které jsou v klidu vůči IS', a uvažujme nějaký časový interval $\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1$, který na nich uběhne. Počáteční i koncový "tik" tohoto časového intervalu se v IS' staly na stejném místě (hodiny v IS' stojí!), tedy je mezi nimi prostorová odlehlost $\Delta x' \equiv x'_2 - x'_1 = 0$. Pro odpovídající interval nečárkovaného času tak zjistíme z inverzní Lorentzovy transformace

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma \Delta t' \equiv \gamma \Delta\tau \ \ (> \Delta\tau) \qquad \ldots \text{ dilatace času} \ . \tag{2.4}$$

(Časovou odlehlost naměřenou na stojících hodinách jsme již dříve označili jako interval vlastního času, $\Delta\tau$, a říkali jsme, že je to ze všech časových intervalů, které se dají naměřit mezi určitými dvěma událostmi, ten nejkratší.)

Poznámka: Z hlediska IS se počáteční a koncový "tik" čárkovaných hodin odehrály na *různých* místech (vzdálených od sebe $v\Delta t$), takže zatímco $\Delta t'$ je úsek odečtený na *jedněch* hodinách, Δt je rozdíl údajů na dvou *různých* (navzájem synchronizovaných) hodinách, vzdálených od sebe $v\Delta t$.

2.2.5 Transformace třírozměrné rychlosti

Představme si, že se něco pohybuje vůči IS tří-rychlostí $\vec{w} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ a ptejme se, jaká bude odpovídající rychlost $\vec{w}' \equiv \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ vůči IS'.[3] Ze speciální Lorentzovy transformace zjistíme

$$w'_x \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{d[\gamma(x - vt)]}{d\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \frac{\gamma\, d(x - vt)}{\gamma\, d\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \equiv \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}w_x} \ , \tag{2.5}$$

$$w'_y \equiv \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{d\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{1}{\gamma}\frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \equiv \frac{1}{\gamma}\frac{w_y}{1 - \frac{v}{c^2}w_x} \ , \tag{2.6}$$

$$w'_z \equiv \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{d\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \ldots \text{(stejně)} \ldots = \frac{1}{\gamma}\frac{w_z}{1 - \frac{v}{c^2}w_x} \ . \tag{2.7}$$

Využili jsme jen toho, že vzájemná rychlost soustav v — a tedy i odpovídající Lorentzův faktor γ — jsou konstantní (jinak by aspoň jeden ze systémů nebyl inerciální!). Pokud se IS' pohybuje vůči IS v *záporném* směru x, je třeba všude u transformační rychlosti v změnit znaménko. Pro $v \to 0$ jde $\gamma \to 1$ a transformační vztahy nabývají galileiovské podoby

$$w'_x = w_x \mp v, \quad w'_y = w_y, \quad w'_z = w_z \ .$$

"Zkouška"

Zkontrolujme, jak se vztahy chovají pro rychlosti blízké c. Nechť se tedy vůči IS pohybuje IS' rychlostí $v = c(1 - \delta)$ v záporném směru osy x a sledovaný předmět rychlostí $w_x = c(1 - \epsilon)$

---

[3] Zde poprvé se setkáváme s mírnou notační potíží, spočívající v tom, že v teorii se vyskytuje vícero rychlostí: jednak třírozměrná rychlost nějakého objektu (částice, pozorovatele, ...) měřená vůči nějakému inerciálnímu systému, případně vůči dvěma takovým systémům (IS a IS'), v dalším výkladu se objeví také její čtyř-rozměrná obdoba (tu budeme značit u^μ), a konečně vzájemná rychlost pohybu IS' vůči IS (ta bude vždy značena v). Většinou budeme $\vec{v}$ značit i prvně zmíněnou tří-rychlost studovaného objektu a téměř nikde snad nedojde k nejasnostem, ale v tomto odstavci raději použijeme písmena $\vec{w}$.

v kladném směru x. Zajímá nás rychlost předmětu vůči IS’. Galileiho aditivní formule dává $w'_x = c(2-\epsilon-\delta)$, speciálně pro $\delta \to 0$, $\epsilon \to 0$ tedy $2c$, kdežto Lorentzova transformace vede k

$$w'_x = \frac{w_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,w_x} \;=\; \frac{c(2-\epsilon-\delta)}{1+(1-\delta)(1-\epsilon)} = c\,\frac{2-\epsilon-\delta}{2-\epsilon-\delta+\delta\epsilon} = \;=\; c\,\frac{2-\epsilon-\delta+\delta\epsilon-\delta\epsilon}{2-\epsilon-\delta+\delta\epsilon} = c\left(1 - \frac{\delta\epsilon}{2-\epsilon-\delta+\delta\epsilon}\right).$$

Tato hodnota je pro jakákoliv nezáporná ϵ a δ menší než c, takže složením dvou podsvětelných rychlostí nikdy nevznikne rychlost nadsvětelná. Pokud je kterákoliv ze skládaných rychlostí *přesně* rovna c (tedy pokud platí $\delta\epsilon = 0$), pak ji transformace ponechá přesně stejnou. Ověřili jsme tedy, že transformace skutečně vyhovuje principu invariance rychlosti světla.

Poznámka: co je to vlastně “rychlost vůči systému”?

“Rychlostí vůči danému systému” rozumíme $\vec{w} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$, tedy dráhu, kterou předmět vůči systému urazí za časovou jednotku vyměřenou množinou hodin *tohoto systému*. “Z praxe” jsme zvyklí zaměňovat takto definovanou rychlost s dráhou, kterou předmět vůči vztažné soustavě urazí za jednotku *jeho vlastních* hodin, tedy s hodnotou $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'}$. (Viz např. když sledujete na patnících podél dálnice, kolik ujedete za [svou] minutu kilometrových úseků.) Nyní však víme, že díky dilataci času nejsou tyto dva pojmy rychlosti ekvivalentní,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \vec{w}\gamma \qquad \left(\text{zde } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\right).$$

“Hybridní” rychlost $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'}$ má tedy vždy větší velikost než w, může být i nadsvětelná a pro w blížící se rychlosti světla jde díky faktoru γ dokonce do nekonečna![4]

Aby nevznikl pocit, že tady něco “nehraje”, uvažte, že z hlediska vašeho klidového systému je ovšem vzdálenost mezi patníky u silnice γ-krát zkontrahovaná, takže kdybyste kromě svých hodin použili k měření rychlosti i svého metru, zjistili byste “správně”

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\gamma = \vec{w}\,.$$

2.2.6 Invariance prostoročasového intervalu a skalárního součinu vektorů

Vůči Galileiho transformaci $t' = t$, $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$ je invariantní časová odlehlost $\mathrm{d}t$ (čas je “absolutní”).[5] Lorentzova transformace ponechává naproti tomu invariantní rozdíl $-c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2$ — tzv. **(prostoročasový) interval** $\mathrm{d}s^2$. Skutečně,[6]

$$\mathrm{d}s'^2 \;\equiv\; -c^2\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 = -\gamma^2\left(c\,\mathrm{d}t - \frac{v}{c}\,\mathrm{d}x\right)^2 + \gamma^2\,(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t)^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 =$$

[4] Všimněte si, že porovnáte-li údaj na světelné tabuli na začátku obce s okamžitým údajem na svém tachometru, zjistíte u sebe větší hodnotu. Nechceme váš stroj podceňovat, ale v tomto případě *nejde* o relativistický efekt.

[5] Prostorová vzdálenost $\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ je invariantní vůči transformaci *prostorových* souřadnic v $\mathbb{E}^3$ (jedná se o speciální případ invariance skalárního součinu dvou vektorů), nikoli však vůči Galileiho transformaci. (Viz výše diskusi efektů relativity soumístnosti a relativity současnosti.) Děkuji doc. J. Obdržálkovi za upozornění na tuto “samozřejmou”, také však “samozřejmě” překrucovanou skutečnost.

[6] Standardně užívaným zápisem $\mathrm{d}t^2$ apod. se myslí $(\mathrm{d}t)^2$, nikoli $\mathrm{d}(t^2)$.

$$= \gamma^2 \left(-c^2 \mathrm{d}t^2 + 2v\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x - \frac{v^2}{c^2}\, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^2 - 2v\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x + v^2 \mathrm{d}t^2 \right) + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 =$$

$$= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(-c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 \right) + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \equiv \mathrm{d}s^2 .$$

Invariance intervalu je ve skutečnosti speciálním případem mnohem obecnější symetrie. V příští kapitole budeme pro popis fyzikálního dění ve čtyřrozměrném Minkowského prostoročasu zavádět pojem čtyřrozměrných vektorů a tenzorů. Čtyř-vektor bude v souřadnicové bázi reprezentován čtyřmi složkami, které se při změně báze transformují stejně jako diferenciály souřadnic, v našem případě tedy podle Lorentzovy transformace. Snadno ověříme, že tato transformace ponechává invariantním "skalární součin" libovolných dvou čtyř-vektorů (např. V, W); skalární součin píšeme v uvozovkách, protože je odlišný od skalárního součinu v $\mathbb{E}^3$ — v kartézských souřadnicích, v nichž budeme pracovat, je generovaný nikoliv jednotkovou maticí, ale maticí $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Označíme-li složky čtyř-vektorů indexy nahoře, jak to budeme dělat v další kapitole, tj. (V^t, V^x, V^y, V^z), pak tedy jejich speciální Lorentzova transformace zní

$$V'^t = \gamma \left(V^t - \frac{v}{c}\, V^x \right), \quad V'^x = \gamma \left(V^x - \frac{v}{c}\, V^t \right), \quad V'^y = V^y, \quad V'^z = V^z$$

(pro W obdobně), a tudíž skalární součin se transformuje

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'^t \\ V'^x \\ V'^y \\ V'^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W'^t \\ W'^x \\ W'^y \\ W'^z \end{pmatrix} = -V'^t W'^t + V'^x W'^x + V'^y W'^y + V'^z W'^z =$$

$$= -\gamma^2 \left(V^t - \frac{v}{c}\, V^x \right) \left(W^t - \frac{v}{c}\, W^x \right) + \gamma^2 \left(V^x - \frac{v}{c}\, V^t \right) \left(W^x - \frac{v}{c}\, W^t \right) + V^y W^y + V^z W^z =$$

$$= \gamma^2 \left(-V^t W^t + \frac{v}{c} V^t W^x + \frac{v}{c} V^x W^t - \frac{v^2}{c^2} V^x W^x + V^x W^x - \frac{v}{c} V^x W^t - \frac{v}{c} V^t W^x + \frac{v^2}{c^2} V^t W^t \right)$$
$$+ V^y W^y + V^z W^z =$$

$$= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(-V^t W^t + V^x W^x \right) + V^y W^y + V^z W^z =$$

$$= -V^t W^t + V^x W^x + V^y W^y + V^z W^z \; .$$

Speciálním případem právě dokázané invariance je případ $W = V$, tedy skalární součin čtyř-vektoru se sebou samým — neboli kvadrát "prostoročasové normy" čtyř-vektoru. Invariance prostoročasového intervalu je pak speciálně invariancí kvadrátu "prostoročasové normy" přírůstku polohového čtyř-vektoru, tedy čtyř-vektoru s kartézskými složkami $(c\, \mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$.

2.3 *Můj čas teď nemá valné hodnoty. . .*

Doufáme, že první, "kinematická" část Einsteinova průkopnického článku vás zaujala podobně jako Conrada Habichta. Einstein v ní ještě na základě relativity současnosti a dilatace času poprvé uvažuje o "paradoxu dvojčat" a dovozuje, že hodiny na zemském rovníku jdou vůči stejným hodinám na pólu nepatrně pomaleji. Slovo "kinematická" je v souvislosti se speciální relativitou důležité. Při pohledu zpět do historie se totiž znovu a znovu vynořuje otázka, jak to, že Lorentz — a hlavně Poincaré — "neobjevili speciální relativitu", když matematicky ji vlastně měli více než připravenou. A dále: proč si Einsteinovy teorie ani po r. 1905 téměř nevšímali? (S Poincarém se Einstein téměř neznal, ale Lorentz se s ním velmi přátelil.) Odpověď je zřejmě taková, že z jejich hlediska nebyl Einsteinův postup uspokojivý: Einstein dostal Lorentzovu transformaci “automaticky” z čistě kinematického “principu relativity”, kdežto oni usilovali o její “hlubší”, *dynamické* vysvětlení (pomocí vlastností éteru).

Každopádně po kinematické části článku začíná Einstein s elektrodynamikou. Nejdříve dokazuje lorentzovskou invarianci bezzdrojových Maxwellových(-Hertzových) rovnic, odvozuje vztahy pro Dopplerův jev a aberaci a pro tlak záření, poté transformuje polní rovnice za přítomnosti zdrojů a dovozuje, že elektrický náboj je invariant, a konečně analyzuje pohybovou rovnici pro elektron — z jejích průmětů nalézá podélnou a příčnou hmotnost a navrhuje, jak chování elektronů ověřit experimentálně. V závěru neuvádí žádnou literaturu, jen děkuje za diskuse příteli M. Bessoovi.

V září 1905 přišel z patentového úřadu Conradu Habichtovi další dopis: “. . . Můj čas teď nemá valné hodnoty; není vždy námětů zralých k přemítání. Aspoň ne těch doopravdy vzrušujících. Bylo by tu samozřejmě téma spektrálních čar; ale myslím, že jednoduchý vztah mezi těmito jevy a těmi už prozkoumanými vůbec neexistuje, takže se mi ty věci zdají prozatím málo slibné. Napadl mě důsledek toho studia elektrodynamiky. Totiž princip relativity ve spojení s Maxwellovými fundamentálními rovnicemi vyžaduje, aby hmotnost byla přímou mírou energie obsažené v tělese; světlo s sebou nese hmotnost. V případě radia by mělo docházet ke znatelnému úbytku hmotnosti. Zábavná a svůdná úvaha; ale pokud vím, Všemohoucí Bůh se možná celé záležitosti směje a vodí mě za nos.” — O smíchu není nic známo, ale vedl Einsteina k rovnici $E = mc^2$. Den předtím, než se v Annalen der Physik (28. září 1905) objevila Einsteinova práce *K elektrodynamice pohybujících se těles*, byl k publikaci tamtéž přijat třístránkový “doplněk” *Závisí setrvačnost tělesa na jeho energetickém obsahu?*; vyšel téhož roku v ročníku 18 na stránkách 639-641. Souvislost mezi hmotností a elektromagnetickou energií elektronů byla na přelomu století studována a Friedrich Hasenörl dokázal, že záření v dutině je možno připsat hmotnost úměrnou jeho energii. Nyní však Einstein nalezl *zcela universální* vztah mezi oběma veličinami. Dostaneme se k němu až v odstavci 4.4, ale už teď předešleme, že to byla *bomba* — přeneseně, ale tak trochu i doslova. . .

KAPITOLA 3

Minkowského prostoročas

"Toho bych se od Einsteina nenadál," divil se Hermann Minkowski, když sledoval, jak se v 17. ročníku prestižního časopisu *Annalen der Physik* (r. 1905) objevuje jeden článek jeho bývalého studenta za druhým. Přesto ještě netušil, že ty články obrátí fyziku naruby. Einstein 5 let předtím studoval na curyšské Polytechnice, ale jeho profesoři matematiky Minkowski a Hurwitz ho z té doby moc neznali. ("Nikdo mě nikdy nepřiměje, abych chodil na matematické semináře!")

Minkowski si pročetl hlavně článek *O elektrodynamice pohybujících se těles,* který přináší novou interpretaci Lorentzovy transformace a odvozuje řadu jejích podivuhodných důsledků. Einsteinovo zpracování tématu se však Minkowskému zdálo "matematicky příliš rozvláčné".[1] V roce 1907 pak Minkowski začal během semináře věnovaném elektrodynamice, který pořádal na göttingenské universitě spolu s Davidem Hilbertem, formulovat zpracování nové, "geometrické". Především si všiml, že na rozdíl od Galileiho transformace $t' = t$, $x' = x - vt$ se v transformaci Lorentzově vyskytují časová a prostorová souřadnice zcela symetricky a jsou vzájemně provázány:

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}\,x\right), && (3.1)\\
x' &= \gamma\left(x - \frac{v}{c}\,ct\right). && (3.2)
\end{aligned}
$$

Znamená to, že žijeme ve čtyř-rozměrném eukleidovském prostoru-času, jehož tři rozměry jsou prostorové a jeden časový? Nikoliv, jak ukáže struktura invariantů.

3.1 Indexový formalismus v $\mathbb{E}^3$ — připomenutí

Nejdříve připomeneme (velmi pragmatickým způsobem!) pár základních věcí z třírozměrného eukleidovského prostoru. Zavádíme tam různé typy souřadnic $x_i \equiv (x_1, x_2, x_3)$ — například kartézské (x, y, z), sférické (r, θ, ϕ) či cylindrické (ρ, ϕ, z). Při přechodu od jedné souřadnicové báze k jiné, $x_j \to x'_i = x'_i(x_j)$, se veličiny transformují pomocí dvou matic: Jacobiho "matice přechodu" $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ a matice k ní inverzní $\frac{\partial x_j}{\partial x'_k}$. Složky **vektorů** se transformují přes "přímou" matici

[1] Einsteinovu reakci na tento postřeh neuvádíme, je do 21 let nepřístupná.

a jejich “prototypem” je diferenciál polohy,[2]

$$\mathrm{d}x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \quad\longrightarrow\ \text{stejně všechny vektory}:\quad V'_i(x') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\,V_j(x)\ . \tag{3.3}$$

Složky **lineárních funkcionálů** (= lineárních forem = kovektorů), tedy objektů k vektorům duálních, se transformují přes inverzní matici a jejich “prototypem” je gradient,

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\,\frac{\partial}{\partial x_j} \quad\longrightarrow\ \text{stejně všechny kovektory}:\quad C'_k(x') = \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\,C_j(x)\ . \tag{3.4}$$

Vektory a kovektory lze nahlížet jako speciální případy **tenzorů**. Tenzory jsou abstraktně definovány jako multilineární zobrazení z kartézského součinu určitého počtu ($\equiv r$) kovektorových a určitého počtu ($\equiv s$) k nim duálních (vektorových) prostorů do reálných čísel. “Dřevorubecky” řečeno, tenzory jsou jako skříně, které mají na jedné straně r zásuvek, do nichž se dají zastrčit kovektory, a na druhé straně s zásuvek, do nichž se dají strčit vektory. Když se to provede a “zatočí se klikou”, vypadne číslo. Pokud se chce sdělit, kolik má tenzor kterých zásuvek, řekne se, že je “typu (r, s)”, nebo též “r-krát kontravariantní a s-krát kovariantní” — celkově pak “tenzor $(r+s)$-tého řádu”. V souřadnicích jsou tenzory reprezentovány d^{r+s} složkami, kde d je dimenze prostoru (u nás zatím $d = 3$) a $r + s$ je počet indexů. Definiční operace “zapůsobení tenzorem T na r kovektorů C, D, ... a s vektorů V, W” (tedy “zasunutí argumentů do jeho zásuvek a zatočení klikou”) má ve složkách podobu vnitřního součinu

$$T_{ij\ldots mn\ldots}C_iD_j\ldots V_mW_n\ldots \quad (=\text{číslo})\ .$$

Složky tenzoru typu (r, s) se při přechodu mezi souřadnicovými bázemi transformují přes r přímých Jacobiho matic a s matic inverzních (“vektorové indexy se transformují přes přímé matice a kovektorové indexy přes inverzní matice”),

$$T'_{i\ldots m\ldots}(x') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\,\ldots\,\frac{\partial x_n}{\partial x'_m}\,\ldots\,T_{j\ldots n}(x)\ . \tag{3.5}$$

Vždy tedy celkově tolik transformačních matic, kolik indexů (tj. $r + s$). Pokud nemá tenzor ani jeden index (nemá ani jednu “zásuvku”), pak se tedy transformuje zcela bez transformačních matic, což ovšem znamená

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{3.6}$$

— tedy hodnota takovéhoto “tenzoru nultého řádu” je ve všech souřadnicích stejná; hovoříme o **invariantu** (někdy se jako synonymum říká **skalár**, ale my budeme raději užívat prvního termínu a druhý ponecháme pro označení jakékoliv, *obecné* jednosložkové veličiny).

Ne všechny fyzikální veličiny jsou matematicky popsány tenzory — speciálně ne každá matice představuje složky nějakého tenzoru, ne každý řádek či sloupec reprezentuje (ko)vektor a ne každá funkce je invariantem. Poznáme to právě podle toho, jak se transformují. V teorii relativity jsou však tenzory zvlášť důležité, protože jsou to veličiny definované abstraktně, *bez vazby na jakoukoli konkrétní bázi*, a tím pádem *obsahují určitou invariantní, na zvolené bázi*

[2] Budeme všude užívat Einsteinova sumačního pravidla: přes dva stejné indexy v součinu se automaticky sčítá, tedy $X_iY_i \equiv \sum_{i=1}^{d} X_iY_i$, kde d je dimenze uvažovaného prostoru. K notaci ještě poznamenejme, že při přechodu od “nečárkovaných” k “čárkovaným” složkám je zvykem psát čárku u písmena označujícího veličinu (a budeme to tak dělat i my), ale je snad jasné, že ve skutečnosti by se čárka měla psát k indexům, protože mění se souřadnice, nikoliv veličina (zvláště, když je tenzorová).

nezávislou informaci. Přesně to budeme potřebovat, když budeme chtít zformulovat fyzikální zákony — v duchu principu relativity — nezávisle na inerciálním systému, konkrétně tak, aby byly *invariantní vůči Lorentzově transformaci*. Prakticky vzato, pokud zapíšeme zákon jako rovnici, na jejíž levé i pravé straně bude tenzor, pak to ovšem samozřejmě musejí být tenzory stejného typu (aby rovnost vůbec měla matematický smysl) — což ale znamená, že při změně souřadnic se bude levá i pravá strana rovnice transformovat stejně, a tedy *tvar* rovnice se přitom nezmění.

V čem ale spočívá ona “invariantní informace”, obsažená v tenzorové veličině, jak ji z tenzoru extrahovat? Obsahují ji invarianty, které se z tenzorů získají úžením (kontrakcí) a/nebo vnitřními (skalárními) součiny. Významnou úlohu budou hrát především invarianty dané skalárními součiny vektorů. Obecně (v křivočarých souřadnicích) se zapíšou $g_{ij} V_i W_j$, kde g_{ij} je **metrický tenzor**, speciálně v kartézských souřadnicích je metrickým tenzorem jednotková matice, takže skalární součin je $\delta_{ij} V_i W_j$. Invariance skalárního součinu

$$g'_{ij} V'_i W'_j = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} g_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} V_m \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} W_n = g_{mn} V_m W_n$$

nabývá v kartézských souřadnicích (v nichž $g'_{ij} = \delta_{ij} = g_{ij}$) podoby

$$\delta_{ij} V'_i W'_j = \delta_{ij} \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} V_m \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} W_n = \delta_{mn} V_m W_n \ ,$$

tedy je tam ekvivalentní “relacím ortogonality”

$$\delta_{ij} \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} = \delta_{mn} \ .$$

Tyto relace je možno nahlížet jako podmínky pro transformační matice, zároveň se však jedná prostě o transformační vztah pro metrický tenzor jakožto tenzor typu $(0,2)$ (tedy bilineární formu) — v tomto případě speciálně tzv. izotropní tenzor (tenzor, který je ve všech souřadnicích daného typu stejný).

Skalárním součinem vektoru se sebou samým dostaneme velikost (normu) vektoru v 2. mocnině,

$$g_{ij} V_i V_j = |V|^2 \equiv V^2 \ .$$

Pokud jako vektor vezmeme speciálně přírůstek souřadnic mezi dvěma blízkými body, $V_i \equiv \mathrm{d}x_i$, získáme invariantní **vzdálenost** těchto bodů,

$$g_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = |\mathrm{d}x|^2 \equiv \mathrm{d}l^2 \ , \tag{3.7}$$

která se v kartézských složkách redukuje na Pythagorovu větu

$$\mathrm{d}l^2 = \delta_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 \ .$$

3.2 Indexový formalismus v Minkowského prostoročasu

Minkowského prostoročas je čtyřrozměrný (má oproti $\mathbb{E}^3$ navíc časový rozměr), kromě toho se ale liší jen v jednom ohledu: jeho metrický tenzor má v jakýchkoliv kartézských souřadnicích složky $g_{\mu\nu} \overset{\text{kart}}{=} \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \equiv \eta_{\mu\nu}$ (tedy nikoliv $\mathrm{diag}(1,1,1,1) = \delta_{\mu\nu}$). Tento tvar metrického tenzoru se nazývá **Minkowského tenzorem**. Řeckými písmeny na místě indexů budeme značit časo-prostorové složky: mohou nabývat hodnot $0,1,2,3$, přičemž první z nich (lépe řečeno "nultá") bude odpovídat časové složce, zbylé prostorovým složkám; prostorové hodnoty $1, 2, 3$ budeme značit latinskými indexy (jako dosud).

Ještě bude jeden rozdíl ve formalismu: aby bylo možné na první pohled rozlišit vektory a kovektory, budeme "vektorové" indexy psát nahoru a "kovektorové" dolů. Sčítání přes indexy bude probíhat vždy přes jeden horní a jeden dolní index výrazu. V součinu se může určitý index vyskytovat buď jednou — pak se nazývá **volným indexem** (za takový index lze dosadit jakoukoliv hodnotu 0–3, samozřejmě konzistentně s případnými ostatními členy ve výrazu či rovnici), nebo dvakrát, a to jednou nahoře a jednou dole (nebo naopak) — pak se nazývá **sčítacím indexem** (v daném součinu se sčítá přes všechny jeho hodnoty). Volný index se může jmenovat jakkoli, ale samozřejmě konzistentně v celém výrazu či rovnici; sčítací index se může jmenovat jakkoli a lze jej po dvojicích přejmenovat i zvlášť v každém součinu. Důležité praktické pravidlo: *v žádném členu obsahujícím jen násobení se žádný index nesmí vyskytovat víckrát než dvakrát — a pokud dvakrát, pak vždy v opačných polohách jako indikace úžení nebo vnitřního součinu*. Až na rozlišování vektorových (tzv. "kontravariantních") a kovektorových (tzv. "kovariantních") indexů je tedy formalismus stejný jako v $\mathbb{E}^3$. My to navíc budeme mít speciálně jednoduché, protože budeme po celou dobu pracovat v kartézských souřadnicích (neboť inerciální systémy jsou dle definice kartézskými bázemi). Souřadnice označíme

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad \text{speciálně kartézské}: \quad x^\mu \equiv (ct, x, y, z)\,. \tag{3.8}$$

Vektory a kovektory se ovšem poznají teprve podle toho, jak se transformují. Vektory, resp. kovektory mají čtyři složky, které se při přechodu mezi souřadnými soustavami $x^\nu \to x'^\mu(x^\nu)$ transformují stejně jako diferenciály souřadnic, resp. stejně jako gradient:

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \quad \longrightarrow \text{ stejně všechny vektory}: \;\; V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,V^\nu(x)\,, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad \longrightarrow \text{ stejně všechny kovektory}: \;\; C'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\,C_\beta(x)\;. \tag{3.10}$$

Obecný tenzor typu (r, s), tedy s r indexy nahoře a s indexy dole (tj. tenzor "r-krát kontravariantní a s-krát kovariantní"), je pak veličina o 4^{r+s} složkách, které se transformují přes r přímých a s inverzních Jacobiho matic,

$$T'^{\mu\ldots}{}_{\alpha\ldots}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\;\ldots\;\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\;\ldots\;T^{\nu\ldots}{}_{\beta\ldots}(x)\;. \tag{3.11}$$

Speciálním případem — "tenzorem bez indexů" ($r = 0$, $s = 0$) — je invariant. Je to veličina, jejíž *hodnota* je ve všech vztažných systémech stejná,

$$\Phi'(x') = \Phi(x). \tag{3.12}$$

Jako "absolutní", na souřadnicích nezávislé veličiny jsou invarianty v teorii relativity obzvlášť významné.

Během přednášky se seznámíme s řadou skalárních veličin (nebo jejich kombinací), které jsou invariantní. Kromě toho jsou invariantními všechna zúžení (kontrakce) tenzorů, jejich determinant a vnitřní (skalární) součiny. Obě tyto operace představují ve složkovém podání sčítání přes určité indexy. **Zúžením (kontrakcí) tenzoru** $T^{\cdots\mu\cdots}{}_{\ldots\alpha\ldots}$ v indexech μ a α (vždy jeden musí být nahoře a jeden dole) se nazývá tenzor řádu o 2 nižšího, který vznikne vysčítáním přes zmíněné dva indexy, $T^{\cdots\iota\cdots}{}_{\ldots\iota\ldots}$. **Vnitřní (skalární) součin** je určen **metrickým tenzorem** $g_{\mu\nu}$, jehož nejdůležitejší vlastností je, že je ve svých indexech symetrický. Ve významném případě dvou čtyř-vektorů V^μ, W^μ je například skalární součin ve složkách vyjádřen $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$. My budeme v celém kursu vztahovat veličiny k inerciálním systémům, takže budeme používat kartézských souřadnic. V těch, jak už víme, nabývá metrický tenzor Minkowského podoby $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu}$. Invariance skalárního součinu

$$\eta_{\mu\nu} V'^{\mu} W'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} V^{\rho} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} W^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} V^{\rho} W^{\sigma}$$

je v nich ekvivalentní **relacím ortogonality**

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma} \tag{3.13}$$

(jedná se vlastně o transformační předpis pro izotropní bilineární formu $\eta_{\mu\nu}$, zapsaný ovšem opačně než jsme zvyklí, totiž "čárkovaným" je zde $\eta_{\mu\nu}$ stojící *vlevo*). Speciálně je invariantní skalární součin jakéhokoli čtyř-vektoru se sebou samým, tedy $\eta_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$ — prostoročasová "velikost" či "norma" vektoru. A ještě speciálněji, pro čtyř-vektor tvořený konkrétně diferenciály čtyřrozměrné polohy, $V^{\mu} \equiv \mathrm{d}x^{\mu}$, se jedná o tzv. **(prostoročasový) interval**, $\eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} \equiv \mathrm{d}s^2$.

Zdůrazněme znovu rozepsáním složek,

$$\eta_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} = -V^0 W^0 + \delta_{ij} V^i W^j \,,$$

že Minkowského prostoročas se hodnotou $\eta_{00} = -1$ liší od čtyřrozměrného eukleidovského prostoru (jehož metrický tenzor má v kartézských souřadnicích složky $\delta_{\mu\nu}$). Skalární součin díky ní *není* pozitivně semi-definitní, nýbrž indefinitní — jeho výsledkem může být kladná, záporná i nulová hodnota; nulová hodnota přitom *nemusí* odpovídat triviálnímu případu $V^{\mu} = 0$ nebo $W^{\mu} = 0$. Nejlépe je rozdíl vidět na prostoročasovém intervalu

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} = -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \,,$$

který *není* čtyřrozměrnou vzdáleností (neboť časový člen v něm vystupuje s mínusem).

3.2.1 Přechod mezi vektory a kovektory: snižování a zvyšování indexů

Tenzory typu (r, s) jsou definovány jako multilineární zobrazení r kovektorů a s vektorů do reálných čísel, ale ve skutečnosti nemusejí být *všechny* tyto argumenty dosazeny. Pokud tenzor typu (r, s) zapůsobí jen na $u < r$ kovektorů a $v < s$ vektorů, není výsledkem číslo, ale tenzor typu $(r-u, s-v)$ — je to prostě dáno tím, kolik jakých argumentů zůstane nezaplněných. (Je to jasné jak na abstraktní úrovni, tak ve složkách, protože neobsazené argumenty odpovídají indexům, které se nevysčítají, takže je výsledná veličina i nadále má.) Představme si speciálně součin $T_{\mu\nu} V^{\nu}$, kde $T_{\mu\nu}$ je nějaký tenzor a V^{ν} vektor. Výsledek má jeden index dole, tedy je to kovektor. Pokud provedeme takovýto součin speciálně s metrickým tenzorem, bude výsledkem kovektor, který je duální právě k vektoru V^{ν}, a ten se značí stejným písmenem jako původní vektor, $\eta_{\mu\nu} V^{\nu} \equiv V_{\mu}$. Metrický tenzor má tedy dvojí základní roli: jednak definuje vnitřní součin, jednak zobrazuje vektory na kovektory. A také naopak; opačné přiřazení je možné díky tomu, že k matici $\eta_{\mu\nu}$ existuje inverze (protože $\eta_{\mu\nu}$ má nenulový determinant, totiž -1) — označíme ji $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\iota} \eta_{\iota\alpha} \, (\equiv \eta^{\mu}_{\alpha}) = \delta^{\mu}_{\alpha} \qquad \ldots \text{ obecně } \; g^{\mu\iota} g_{\iota\alpha} \, (\equiv g^{\mu}_{\alpha}) = \delta^{\mu}_{\alpha} \,. \tag{3.14}$$

Je zřejmé, že $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, tedy u Minkowského tenzoru jsou ryze kontravariantní složky stejné jako složky ryze kovariantní. (V případě obecného metrického tenzoru — tedy v případě obecných, křivočarých souřadnic, případně navíc v prostoročasu složitější geometrie než má Minkowského prostoročas — však mohou být kontravariantní a kovariantní složky výrazně odlišné.) Máme tedy “tam a zpátky”

$$\eta_{\mu\nu}V^\nu = V_\mu \quad \longleftrightarrow \quad \eta^{\alpha\mu}V_\mu\,(=\eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu}V^\nu = \delta^\alpha_\nu V^\nu) = V^\alpha\,.$$

Obdobným způsobem lze pomocí metrického tenzoru zvyšovat a snižovat *jakýkoliv* index, tj. index u jakékoliv veličiny (notace se skutečně používá nejen u tenzorů, ale i u netenzorových vícesložkových veličin) — na příklad

$$\eta_{\kappa\lambda}T^{\dots\lambda\dots}{}_{\dots} = T^{\dots}{}_{\kappa}{}^{\dots}{}_{\dots}\,, \qquad \eta^{\gamma\delta}T^{\mu}{}_{\delta} = T^{\mu\gamma}\,.$$

3.3 Lorentzovy transformace

V případě přechodu mezi inerciálními soustavami, tedy v případě Lorentzovy transformace, budeme Jacobiho matici značit $\Lambda^\mu{}_\nu$. Jako speciální případ obecné transformace vektorů (3.9) tak máme

$$\mathrm{d}x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \mathrm{d}x^\nu \quad \longrightarrow \text{ stejně všechny vektory : } \quad V'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x)\,. \tag{3.15}$$

Lorentzovy transformace jsou, jak víme, lineární, takže jejich matice $\Lambda^\mu{}_\nu$ nezávisejí na souřadnicích (závisejí jen na vzájemné rychlosti IS, mezi kterými se přechází). Díky tomu platí stejný vztah i pro samotné hodnoty souřadnic,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \;\; (+b^\mu) \tag{3.16}$$

— tedy až na konstantní člen (b^μ), který odpovídá triviální volnosti ve volbě počátku a my jej budeme volit nulový. Jako příklad uvedeme matici **speciální Lorentzovy transformace** ve směru $+x$, kterou jsme probírali v minulé kapitole. Její složky najdeme porovnáním “člen po členu” transformačního předpisu $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ a vztahů (2.2),

$$\begin{aligned}
x'^0 &= \Lambda^0{}_0x^0 + \Lambda^0{}_1x^1 + \Lambda^0{}_2x^2 + \Lambda^0{}_3x^3 \quad &&\longleftrightarrow \quad ct' = \gamma\Big(ct - \frac{v}{c}\,x\Big)\,,\\
x'^1 &= \Lambda^1{}_0x^0 + \Lambda^1{}_1x^1 + \Lambda^1{}_2x^2 + \Lambda^1{}_3x^3 \quad &&\longleftrightarrow \quad x' = \gamma\Big(x - \frac{v}{c}\,ct\Big)\,,\\
x'^2 &= \Lambda^2{}_0x^0 + \Lambda^2{}_1x^1 + \Lambda^2{}_2x^2 + \Lambda^2{}_3x^3 \quad &&\longleftrightarrow \quad y' = y\,,\\
x'^3 &= \Lambda^3{}_0x^0 + \Lambda^3{}_1x^1 + \Lambda^3{}_2x^2 + \Lambda^3{}_3x^3 \quad &&\longleftrightarrow \quad z' = z\,,
\end{aligned}$$

stačí jen uvážit očíslování souřadnic $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$. Matice má tedy podobu

$$(\Lambda^\mu{}_\nu)_{\text{speciální,+x}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\,\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Druhou základní obecnou vlastností Lorentzových transformací (kromě linearity) je ortogonalita. **Relace ortogonality** (3.13) mají pro ně “samozřejmou” podobu

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}\,. \tag{3.18}$$

Z lineární algebry je známo, že pro ortogonální matice je jejich inverze rovna transpozici. Skutečně, vynásobme vztah $\eta^{\sigma\alpha}$ a dostaneme vztah pro inverzi matic,

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\eta^{\sigma\alpha}\,(=\eta_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\alpha}) = \delta^\alpha_\rho\,, \tag{3.19}$$

kde u druhé matice $\Lambda^\nu{}_\sigma$ snížíme první a zvýšíme druhý index pomocí přítomných metrických tenzorů, $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma\eta^{\sigma\alpha} = \Lambda_\mu{}^\alpha$, a máme

$$\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda_\mu{}^\alpha = \delta^\alpha_\rho \qquad \Longrightarrow \qquad [\Lambda^\alpha{}_\mu]^{-1} = \Lambda_\mu{}^\alpha\ . \tag{3.20}$$

Inverze matice Lorentzovy transformace je tedy skutečně dána transpozicí. (Je proto důležité dávat pozor na polohu indexů.) “Ve složkách” se inverzní Lorentzova transformace liší od přímé jen znaménkem vzájemné rychlosti systémů, takže např. matice inverzní speciální Lorentzovy transformace ve směru $+x$ vypadá

$$\left[(\Lambda^\mu{}_\nu)_{\text{speciální,+x}}\right]^{-1} = (\Lambda_\nu{}^\mu)_{\text{speciální,+x}} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\,\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ +\gamma\,\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Nyní můžeme dodat, že pro kovektory máme z obecného vztahu (3.10) v případě Lorentzovy transformace

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \qquad \longrightarrow \ \text{stejně všechny kovektory :} \quad C'_\alpha(x') = \Lambda_\alpha{}^\beta C_\beta(x) \tag{3.22}$$

a pro obecné tenzory z formule (3.11)

$$T'^{\mu\ldots}{}_{\alpha\ldots}(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \ldots \Lambda_\alpha{}^\beta \ldots T^{\nu\ldots}{}_{\beta\ldots}(x)\ . \tag{3.23}$$

3.4 Tenzory a principy speciální relativity

Nejdůležitějším sdělením teorie relativity jsou její výchozí principy. Hned po nich následuje obecný návod, jak jim dostát: mají-li rovnice vyjadřující fyzikální zákony splňovat princip speciální relativity, musejí mít ve všech těchto systémech stejný obsah, neboli stejný “tvar” — říká se, že musejí být **kovariantní** (= “invariantní co do tvaru”). To vyžaduje, aby byly zapsány pomocí matematických veličin, které jsou definovány bez odkazu na nějaký konkrétní vztažný systém, jejichž význam není závislý na konkrétní souřadnicové bázi. Takovými vhodnými veličinami jsou tenzory. Souřadnicové složky všech tenzorů (daného typu) se transformují podle stejných formulí, pomocí Jacobiho matic a matic inverzních, přičemž v případě Minkowského prostoročasu a přechodů mezi inerciálními systémy je tvar těchto matic dán Lorentzovými transformacemi. Výchozí principy speciální relativity tedy — krátce shrnuto — vyžadují **lorentzovskou invarianci (“tenzorovou povahu”) fyzikálních zákonů**. Aby šlo tuto invarianci prakticky naplňovat, je třeba vědět, jak se pozná, zda určitá veličina je tenzorem. Připomínáme proto ještě jednou (a v průběhu dalších kapitol to budeme dělat u konkrétních veličin průběžně), že “ne podle indexů, ale *podle transformace* složek poznáš tenzor”. (Tedy ne vše, co má indexy, musí být tenzorem. Speciálně třeba matice Lorentzovy transformace *nejsou* tenzory. Podobně se setkáme — vlastně jsme se již setkali! — s řadou skalárních veličin, které vůči Lorentzově transformaci *nejsou* invariantní, např. délka, čas, rychlost, hmotnost, hustota, nebo jednotlivé složky tenzorů.)

3.4.1 Počítání s tenzory

K obecným řečem připojíme různé praktické, ale i některé zásadnější poznámky ke složkové práci s tenzory:

- Skalární součin jsme zapisovali zatím vždy ve tvaru $\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$, ale jde ho zapsat i několika jinými způsoby, když využijeme snižování a zvyšování indexů pomocí Minkowského tenzoru:

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = V_\nu W^\nu = V^\mu W_\mu = \eta^{\mu\nu}V_\nu W_\mu \ . \tag{3.24}$$

Speciálně si budeme pamatovat, že v *jakémkoli* výrazu (součinu), v němž se sčítá přes dvojici indexů, je jedno, zda jsou indexy "tak či onak", totiž zda je první nahoře a druhý dole, nebo naopak. To samé platí pro kontrakce tenzorů, například

$$T^{\mu\sigma\kappa}{}_{\sigma\beta} = \eta^{\sigma\rho}\, T^\mu{}_\rho{}^\kappa{}_{\sigma\beta} = T^\mu{}_\rho{}^{\kappa\rho}{}_\beta = \eta_{\rho\sigma}\, T^{\mu\sigma\kappa\rho}{}_\beta \ ,$$

speciálně pro **stopu tenzoru 2. řádu**

$$T \equiv T^\alpha{}_\alpha = \eta_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = T_\beta{}^\beta = \eta^{\beta\alpha}T_{\beta\alpha} \ .$$

- Vnitřní násobení je komutativní, takže je jedno, v jakém pořadí násobené tenzory zapíšeme, např.

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = V^\mu \eta_{\mu\nu} W^\nu = W^\nu V^\mu \eta_{\mu\nu} = V_\nu W^\nu = W^\nu V_\nu \quad \text{apod.}\,,$$

samozřejmě kromě případů, kdy některý z tenzorů je operátorem (třeba gradientem).

- Když už byl zmíněn gradient: tento diferenciální operátor jsme v transformačních předpisech (3.4), (3.10) uvedli jako prototyp kovektoru, takže si budeme pamatovat, že *"parciální derivace se chovají tenzorově"*, což bude podstatné pro lorentzovskou kovarianci diferenciálních rovnic. K tomu ale výrazné upozornění: ve skutečnosti se (parciální) gradient chová jako kovektor *jen vůči lineárním transformacím*, jak snadno zjistíme, když přetransformujeme např. gradient vektoru:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}V^\nu\right) = \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \ .$$

Pouze pokud je první člen nulový, vychází transformace tenzoru 2. řádu (jednou kontravariantního a jednou kovariantního). A první člen je nulový pro *lineární* transformace (pro které je Jacobiho matice přechodu nezávislá na souřadnicích). V tomto kursu budeme vesměs pracovat v kartézských inerciálních soustavách, mezi těmi se přechází Lorentzovými transformacemi, a ty jsou lineární, takže při parciálním derivování nemusíme mít (o tenzory) obavy — uvedený gradient čtyř-vektoru se například transformuje

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\alpha} = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\alpha{}^\beta \, \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\beta} \ ,$$

ale už kdybychom přešli do křivočarých souřadnic, parciální derivace by se tenzorově nechovaly! (*Samotný operátor* parciálního gradientu se tedy transformuje jako kovektor, ale je také důležité, na co a v jakých souřadnicích působí. Gradient invariantu $\Phi_{,\alpha}$ je *vždy* kovektorem, ale na (ko)vektory a vyšší tenzory působí gradient tenzorově jen pokud se transformují lineárně.)

- Říkali jsme, že budeme celý semestr nahlížet svět z inerciálních soustav. Vzhledem k tomu, že naším světem bude Minkowského prostoročas, je to zdaleka nejvýhodnější a nejpřirozenější. Jednou bychom ale mohli ukázat, co by se stalo, kdybychom pracovali např. ve sférických nebo cylindrických souřadnicích. Jak snadno zjistíte dosazením za $\mathrm{d}x^\mu$ z transformačních vztahů

$$\begin{aligned}
&x = r\sin\theta\cos\phi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\phi\,, \quad z = r\cos\theta\,, \quad (t \ \text{zůstává})\,,\\
&\text{resp.} \quad x = \rho\cos\phi\,, \quad y = \rho\sin\phi\,, \quad (t,\ z \ \text{zůstávají})\,,
\end{aligned}$$

prostoročasový interval v tom případě vypadá

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &\overset{\text{sfér.}}{=} -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\,,\\
\mathrm{d}s^2 &\overset{\text{cyl.}}{=} -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2\,,
\end{aligned}$$

to znamená, že metrický tenzor *nemá Minkowského tvar* $\eta_{\mu\nu}$, nýbrž

$$g_{\mu\nu} \overset{\text{sfér.}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad g_{\mu\nu} \overset{\text{cyl.}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tyto podoby jsou stále velmi jednoduché, především jsou diagonální, ale jsou již obecnější v tom, že složky *závisejí* na souřadnicích, $g_{\mu\nu,\rho} \neq 0$. Můžeme je najít také přímo z transformačních vztahů ("relací ortogonality")

$$g'_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\,g_{\rho\sigma}\,,$$

dosadíme-li do nich náš případ $g_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$, $x^\mu = (ct, x, y, z)$ a $x'^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$, resp. $x'^\mu = (ct, \rho, \phi, z)$.

- U metrického tenzoru se navíc dají psát indexy v libovolném pořadí, protože je symetrický. Obecný tenzor však žádnou symetrii mít nemusí, takže je třeba dbát na pořadí indexů, speciálně u smíšených tenzorů *nepsat indexy pod sebe*; toto samozřejmě neplatí pro symetrické tenzory 2. řádu, tam je naopak přirozené horizontální pozici indexů nerozlišovat — viz např. δ^μ_α.

  K symetriím tenzorů se vážou následující velmi užitečná pravidla. Každý tenzor řádu ≥ 2 lze rozepsat na část symetrickou a část antisymetrickou *v daných dvou indexech*, speciálně pro tenzor 2. řádu máme identitu

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \equiv T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]} \tag{3.25}$$

  (oblé/hranaté závorky značí symetrizaci/antisymetrizaci v uzavřených indexech). Tento rozpis je často výhodný vzhledem k tomu, že *stopa vnitřního součinu symetrického a antisymetrického tenzoru je nulová*. Skutečně, označíme-li tenzor symetrický v indexech $\{\mu,\nu\}$ jako $S_{\mu\nu}$ a tenzor antisymetrický v těchto indexech $A_{\mu\nu}$, máme jednoduše

$$S^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = S^{\nu\mu}A_{\nu\mu} = -S^{\mu\nu}A_{\mu\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad S^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = 0\,, \tag{3.26}$$

kde jsme v prvním kroku indexy *přeznačili* ($\mu \leftrightarrow \nu$) a v druhém kroku jsme je *prohodili*: přeznačení samozřejmě neznamená žádnou změnu (sčítací indexy se mohou jmenovat jakkoli), kdežto při prohození se symetrická matice nezmění a antisymetrická se změní o mínus.

Z těchto vlastností plyne důležitý závěr: pokud se nějaký tenzor vnitřně násobí s jiným v indexech, ve kterých je symetrický/antisymetrický, pak do součinu přispěje jen ta část druhého tenzoru, která je v daných indexech také symetrická/antisymetrická (součin se zbylou, antisymetrickou/symetrickou částí druhého tenzoru je nulový).

Z toho také např. plyne, že stopa antisymetrické matice je nulová, $\eta_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0$. (Je to ostatně jasné, antisymetrická matice má na diagonále samé nuly.) Platí to zjevně i obecněji: zúžení přes dvojici indexů, v nichž je výraz antisymetrický, dává nulu. A základním invariantem antisymetrického tenzoru $A_{\mu\nu}$ tak není jeho stopa, ale jeho “kvadrát” $A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}$.

K tomuto odstavci ještě dvě poznámky: (i) hovořili jsme v něm sice o “tenzorech”, ale pro zmíněné vlastnosti *není* podstatný tenzorový charakter kterékoliv z veličin — jde o vlastnosti “maticové”; (ii) vlastnosti jsme ilustrovali na tenzorech 2. řádu (nebo tedy maticích), ale ve skutečnosti se může jednat o multikomponentové výrazy, které mají kromě zmíněných $\{\mu, \nu\}$ ještě jakékoliv další indexy (ty jsme nevyznačovali).

3.5 Invariance intervalu z výchozích principů

Vraťme se nyní ještě jednou k invarianci prostoročasového intervalu (skalárního součinu vektorů). Došli jsme k ní takto: (i) uvážili jsme, že transformace mezi inerciálními systémy musí být lineární (aby byl naplněn 1. Newtonův zákon, tedy aby se rovnoměrné přímočaré pohyby skládaly zase na rovnoměrné přímočaré); (ii) z výchozích principů a linearity jsme odvodili (speciální) Lorentzovu transformaci, (iii) ukázali jsme, že vůči této transformaci je prostoročasový interval (obecně skalární součin vektorů) invariantní. Lze postupovat i jinak — dojít k invarianci prostoročasového intervalu přímo z výchozích principů a pak z této invariance odvodit, jaké vlastnosti musí mít transformace. Postup je cenný hlavně v tom, že ukáže, zda prostoročasový interval není invariantní i vůči nějakým jiným (než Lorentzovým) transformacím, tj. zda vlastnosti, kterými jsme Lorentzovy transformace vymezili (linearita a ortogonalita), jsou nejen postačující, ale také nutné.

Nejdříve si představíme jednoduchý “experiment”: v libovolném bodě prostoročasu blikneme a sledujeme pohyb vzniklých fotonů z hlediska jakýchkoliv dvou inerciálních systémů. Podle principu invariance rychlosti světla se musejí vyslané fotony šířit vůči oběma systémům ve všech směrech rychlostí c, takže v obou musejí v jakémkoliv okamžiku (t, resp. t') tvořit sféru (o poloměru $c\Delta t$, resp. $c\Delta t'$). Dle Pythagorovy věty bude tedy po jakémkoliv čase (Δt, resp. $\Delta t'$) platit

$$\begin{aligned} (c\Delta t)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \\ (c\Delta t')^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \end{aligned}$$

tj.

$$(\Delta s)^2 = 0, \quad (\Delta s')^2 = 0. \tag{3.27}$$

Ve speciálním případě nulové hodnoty je tedy interval invariantem.

Nyní zadejme libovolně dvě události a zapišme zcela obecný vztah mezi veličinami $(\Delta s)^2$ a $(\Delta s')^2$,

$$(\Delta s')^2 = F\big(\ldots;(\Delta s)^2\big) + G(\ldots).$$

Tři tečky zde představují vůbec všechny (další) parametry, které se v situaci vyskytují — tedy nečárkované a čárkované souřadnice obou událostí, jejich souřadnicové odlehlosti v obou inerciálních systémech a vzájemnou rychlost těchto systémů; kromě toho může být samozřejmě přítomna univerzální konstanta c. Požadujeme-li však v obou inerciálních systémech homogenitu prostoročasu (v časovém i v prostorových rozměrech), nesmí vztah záviset na žádné ze souřadnic. Dále, má-li se vztah pro světlo redukovat na $0 = 0$, nesmí záviset ani na jednotlivých souřadnicových přírůstcích Δx^μ (pouze na jejich kombinaci Δs). A požadujeme-li prostorovou izotropii, nesmí se ve vztahu vyskytovat ani *směr* vzájemné rychlosti. V úvahu tak připadá jen velikost této rychlosti v,

$$(\Delta s')^2 = F\big(v;(\Delta s)^2\big) + G(v).$$

Dále, funkce $F(v;(\Delta s)^2)$ musí být v $(\Delta s)^2$ lineární, poněvadž člen s jinou mocninou $(\Delta s)^2$ by musel být z rozměrových důvodů násoben patřičnou mocninou nějaké veličiny o rozměru délky a žádná taková veličina není k dispozici (máme jen rychlosti v, c — a z těch vytvořit nejde). Kromě toho víme, že podél světočar fotonů nabývají $(\Delta s)^2$ a $(\Delta s')^2$ *zároveň* nulových hodnot, což je nyní možné jedině pokud $G(v) = 0$. Hledaný vztah se tak redukuje na

$$(\Delta s')^2 = f(v)(\Delta s)^2.$$

Nakonec mějme *tři* různé inerciální systémy, intervaly v nich naměřené a spočítané označíme $(\Delta s_1)^2$, $(\Delta s_2)^2$ a $(\Delta s_3)^2$. Podle poslední verze vztahu musí současně platit

$$(\Delta s_1)^2 = f(v_{12})(\Delta s_2)^2, \quad (\Delta s_2)^2 = f(v_{23})(\Delta s_3)^2, \quad (\Delta s_1)^2 = f(v_{13})(\Delta s_3)^2,$$

kde značení velikostí vzájemných rychlostí je zjevné. Nyní například poslední z těchto rovnic porovnáme s rovnicí vzniklou kombinací prvních dvou:

$$(\Delta s_1)^2 = f(v_{13})(\Delta s_3)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\Delta s_1)^2 = f(v_{12})f(v_{23})(\Delta s_3)^2;$$

musí tedy platit

$$f(v_{13}) = f(v_{12})f(v_{23}).$$

Zde pravá strana závisí jen na velikostech rychlostí v_{12}, v_{23}, kdežto levá strana závisí obecně i na jejich vzájemném úhlu. Podmínce tak lze obecně vyhovět jen pokud $f(v) = 1$. Prostoročasový interval mezi jakýmikoli dvěma událostmi je tedy ve všech inerciálních systémech stejný.

3.5.1 Lorentzova transformace z invariance intervalu

Ukažme, co z invariance prostoročasového intervalu plyne pro transformaci mezi inerciálními systémy. (Tj. zde začínáme znovu "ab inicio" a o transformaci předem *vůbec nic* netvrdíme.) Především je zcela obecně

$$\mathrm{d}s'^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\,, \qquad \mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta\,,$$

takže pokud má platit $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$ pro *jakékoli* dvě události (tj. jakékoli odpovídající souřadnicové odlehlosti $\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$), musí být splněna rovnost

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \ . \tag{3.28}$$

To jsou ovšem **relace ortogonality** pro transformační matici.

Relace zderivujeme podle x^ρ a výsledek pak zapíšeme třikrát s cyklicky permutovaným pořadím volných indexů:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} &= \eta_{\alpha\beta,\rho} = 0 \ , \\
\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} &= \eta_{\rho\alpha,\beta} = 0 \ , \\
\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\alpha} &= \eta_{\beta\rho,\alpha} = 0 \ .
\end{aligned}$$

A nyní (např.) první dvě rovnosti sečteme a tu poslední odečteme. Budeme přitom myslet jen na dvě věci: jednak že parciální derivace jsou záměnné (to je podmínka integrability souřadnicové transformace), a hlavně že metrický tenzor je symetrický, takže je jedno, zda má člen s 2. derivací nahoře index μ a člen s 1. derivací index ν, nebo naopak. Vzhledem k těmto dvěma záměnnostem se ve zmíněné kombinaci odečtou člen vpravo dole se členem vlevo nahoře a člen vlevo dole se členem vpravo uprostřed, zatímco zbylé dva členy (vpravo nahoře a vlevo uprostřed) se sečtou na výslednou rovnost

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} = 0 \ . \tag{3.29}$$

Nyní budeme muset trochu přemýšlet. Uvědomme si nejdříve, co říkají relace ortogonality (3.28): že čtyři “sloupcové vektory”

$$\left\{ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right\}_{\alpha=0,1,2,3}$$

(tvořené sloupci Jacobiho matice souřadnicové transformace) tvoří v prostoru čtyřrozměrných sloupcových vektorů ortonormální bázi. Totiž určitý sloupec skalárně vynásobený sám se sebou dá ± 1, zatímco skalární součin různých sloupců dá nulu,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^0} = -1 \ , \qquad \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^j} = \delta_{ij} \ , \qquad \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^j} = 0 \ .$$

Rovnice (3.29) tvrdí, že ke *všem* těmto sloupcovým vektorům ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) mají být kolmé další takové čtveřice, totiž

$$\left\{ \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} \right\}_{\beta\rho\,=\,00,01,02,03,11,12,13,22,23,33} \ .$$

V rámci daného prostoru (zde prostoru čtyřrozměrných sloupcových vektorů) však nemůže být něco netriviálního kolmé k celé jeho bázi. Tudíž musí platit

$$\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\rho} = 0 \qquad , \text{ neboli } \text{ transformace musí být lineární} \ . \tag{3.30}$$

Zjistili jsme tedy, že invariance prostoročasového intervalu (obecněji řečeno invariance skalárního součinu čtyř-vektorů) je *ekvivalentní* tomu, že transformace mezi inerciálními soustavami jsou lineární a splňují relace ortogonality. Takové transformace nazýváme Lorentzovými transformacemi.

3.6 Prostoročasové diagramy, kauzální struktura

Mnohé z vlastností Minkowského prostoročasu, o nichž jsme se zmínili, jsou pěkně vidět na **prostoročasových diagramech**. Tyto diagramy reprezentují poměry v prostoročasu z hlediska určitého inerciálního systému a nejsou ničím novým, oproti $\mathbb{E}^3$ se prostě jen jako jedna z os zakreslí časová osa ct. Na rozdíl od uspořádání obvyklého na střední škole a v klasické mechanice se však v relativitě kreslí časová osa zásadně *svislá*, směřující (do budoucnosti) nahoru. Tři prostorové směry "žijí" ve vodorovných rovinách; samozřejmě se do takových rovin všechny nevejdou, ale to jen zřídkakdy vede k problémům (zbylý rozměr si prostě představíme. . .); k pochopení novinek speciální relativity ostatně většinou stačí dvourozměrný diagram (ct, x).

Délkové jednotky nastavíme stejné podél všech os (prostorových i časové). Události se na diagramech zobrazují jako body, světočáry jako křivky, plochy jako plochy, atd. Dvě události vůči sobě mohou být v různých pozicích a světočáry, plochy a nadplochy mohou mít různý charakter — podle toho, zda "vedou spíš svisle (v časovém směru), nebo spíš vodorovně (v prostorových směrech)". Pokud je daná světočára historií nějakého pohybu, pak sklon tečny ke světočáře odpovídá souřadnicové rychlosti pohybu $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ v příslušném místě. Je-li rychlost nulová, je tečna přesně svislá, se zvětšující se rychlostí v daném směru se odklání od časové osy k příslušné prostorové ose; pokud by tečna byla vodorovná, odpovídalo by to nekonečné prostorové rychlosti. Nejvýznamnější hodnotou rychlosti je rychlost světla c — té odpovídají na dvourozměrném diagramu (ct, x) směry $\mathrm{d}x = \pm c\mathrm{d}t$ (tedy diagonální směry, skloněné pod úhlem $45°$), na třírozměrném diagramu (ct, x, y) směry površek kuželových ploch $c^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ (ty se ještě dají zakreslit) a "ve skutečnosti", na čtyřrozměrném diagramu, jsou to površky třírozměrných kuželových nadploch $c^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$. Nejčastěji se užívá jen dvourozměrného diagramu (ct, x), v němž se světelné směry vyznačí zakreslením **světelného kuželu** $x = \pm ct$ do počátku. Pohyb podsvětelnou/nadsvětelnou rychlostí tedy na diagramech probíhá ve směru odkloněném od osy ct o méně/více než $45°$.

Je podobně jednoduché si uvědomit, jak se na prostoročasovém diagramu zobrazují (jako "šipky") různé typy čtyř-vektorů. Je zřejmé, že

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 \lesseqgtr 0 \quad \Leftrightarrow \quad |V^0| \gtreqless \sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2}\,.$$

Vektory s $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0$ tudíž na diagramech míří "spíš v časovém směru" (jsou od časového směru odkloněny o méně než $45°$), proto je nazýváme **časupodobnými**; vektory s $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0$ na diagramech míří "spíš v prostorovém směru" (jsou od časového směru odkloněny o více než $45°$), proto je nazýváme **prostorupodobnými**; a vektory s $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$ na diagramech míří přesně diagonálně (jsou od časového směru odkloněny právě o $45°$), nazýváme je **světelnými** či **nulovými**. Obdobně se klasifikují i plochy (časupodobné plochy mají v daném místě aspoň jeden tečný směr časupodobný, světelné plochy mají aspoň jeden tečný směr světelný a všechny ostatní směry prostorupodobné, prostorupodobné plochy mají všechny tečné směry prostorupodobné) a nadplochy (stejně jako u ploch).[3] U ploch a nadploch je však šikovnější posuzovat charakter podle charakteru jejich *normálových* vektorových polí: tam, kde je normála časupodobná, je příslušná plocha/nadplocha prostorupodobná, et vice versa. Normála ke světelné ploše či nadploše je světelná.

[3] Snad je zde vhodná příležitost k následující poznámce. V minulé části jsme souřadnicové odlehlosti značili Δt, Δx atd. (což je obvyklé u konečných úseků), zatímco v této části píšeme většinou $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$ atd. (což je obvyklé u infinitesimálních úseků). Pro výklad to zatím nebylo podstatné. Na obecné úrovni je zvykem bavit se spíš o infinitesimálně vzdálených událostech, z toho důvodu, že typickou úlohou na určení prostoročasového intervalu je právě posouzení charakteru nějaké světočáry, plochy či nadplochy. Pokud je např. světočára urychlená (na diagramu to není přímka), nemělo by valného smyslu počítat interval mezi nějakými jejími *vzdálenými* body, protože tím by se nezjistil přesný charakter světočáry v určitém daném místě, ale jen "průměrný" charakter na dlouhém úseku.

Speciálním případem čtyř-vektoru je spojovací vektor (relativní polohový vektor) mezi dvěma událostmi, $\mathrm{d}x^\mu$. Pokud je časupodobný, tedy pokud je **prostoročasový interval mezi danými dvěma událostmi** $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ záporný (časupodobný), jsou události vzdáleny "víc v čase než v prostoru", tedy leží navzájem uvnitř "svých" světelných kuželů ("druhá" událost leží uvnitř budoucí části světelného kuželu "první" události, zatímco "první" leží uvnitř minulé části světelného kuželu "druhé"). Pokud je interval kladný (prostorupodobný), jsou události naopak vzdáleny "víc v prostoru než v čase", tedy leží navzájem *vně* svých světelných kuželů. Konečně je-li interval nulový (světelný), jsou události vzdáleny "stejně v čase jako v prostoru", tedy leží navzájem na svých světelných kuželech. Pokud by se mezi událostmi, které dělí časupodobná/prostorupodobná/světelná hodnota intervalu, něco pohybovalo, pak by se to pohybovalo podsvětelnou/nadsvětelnou/světelnou rychlostí, jak je snadno vidět i z vydělení předpisu pro interval $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ (kladným číslem) $\mathrm{d}t^2$:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 \lesseqgtr 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -c^2 + v^2 \lesseqgtr 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |v| \lesseqgtr c$$

$\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \equiv v^i\right.$ má v tom případě význam tří-rychlosti vůči danému inerciálnímu systému; kvadrát její velikosti je $\left.v^2 = \delta_{ij}v^iv^j = \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2}\right)$.

3.6.1 Lorentzova transformace na prostoročasových diagramech

Při přechodu mezi inerciálními soustavami bývá v obecnosti i v konkrétních úlohách velmi účinné a instruktivní nakreslit si, jak se Lorentzova transformace zobrazuje na prostoročasovém diagramu. Podstatné rysy transformace jsou pěkně vidět na nejjednodušší, speciální Lorentzově transformaci. Vezmeme tradičně transformaci "ve směru $\pm x$" a najdeme, jak se na dvourozměrném diagramu (ct, x) zobrazují čárkované osy. Osa ct' je dána rovnicí $x' = 0$ a osa x' naopak rovnicí $ct' = 0$; co tyto rovnice znamenají v nečárkovaných osách, v nichž je diagram zakreslen, najdeme snadno z transformačních rovnic:

$$\text{osa } ct' \quad : \quad 0 = x' = \gamma\left(x \mp \frac{v}{c}\,ct\right) \quad \Leftrightarrow \quad ct = \pm\frac{c}{v}\,x\ , \tag{3.31}$$

$$\text{osa } x' \quad : \quad 0 = ct' = \gamma\left(ct \mp \frac{v}{c}\,x\right) \quad \Leftrightarrow \quad ct = \pm\frac{v}{c}\,x\ . \tag{3.32}$$

Čárkované osy se tedy (samozřejmě) zobrazují jako přímky procházející počátkem, přičemž osa ct' má směrnici $\pm c/v$ a osa x' má směrnici $\pm v/c$. S růstem vzájemné rychlosti inerciálních systémů v od nuly po c se tudíž osy stále více (symetricky) přiklánějí ke světelnému kuželu $ct = x$; s růstem rychlosti v na druhou stranu (od nuly po $-c$) se osy naopak symetricky "odklánějí" (rozevírají) ke světelnému kuželu $ct = -x$. (Rychlost $|v| \geq c$ nemá dobrý smysl uvažovat, protože pro $|v| > c$ by čárkované osy byly kvůli faktoru γ imaginární a pro $|v| = c$ tento faktor diverguje.)

Na diagramu (ct, x) se zakreslenými čárkovanými osami jsou jasně vidět základní důsledky Lorentzovy transformace. Relativita soumístnosti je dána tím, že v netriviálním případě $v \neq 0$ není osa ct' rovnoběžná s osou ct, takže přímky představující historie míst s $x' = \mathrm{konst}$ jsou stejným způsobem nakloněné vůči přímkám $x = \mathrm{konst}$. Novinkou (oproti Galileiho transformaci) je relativita současnosti, daná tím, že také osa x' není rovnoběžná s x, takže nadplochy (na našem 2D diagramu přímky) $ct' = \mathrm{konst}$ (rovnoběžné s osou x') jsou nakloněné vůči nadplochám-přímkám $ct = \mathrm{konst}$. Toto skutečně podle Galileiho transformace nenastává, protože tam je osa x' dána $ct' = 0$, což však znamená $ct = 0$ (protože čas je absolutní, $t' = t$), tedy osa x' je s osou x totožná, nenaklání se. (Časová osa se naproti tomu chová stejně jako podle Lorentzovy transformace: $0 = x' = x \mp vt \;\Leftrightarrow\; ct = \pm\frac{c}{v}\,x$.) Můžeme také zkontrolovat, že světelný kužel se při transformaci nemění: přímky $x' = \pm ct'$ skutečně odpovídají $x = \pm ct$, jak plyne snadno dosazením transformačních vztahů,

$$\begin{aligned} x' = +ct' \quad &\Leftrightarrow \quad x \mp \tfrac{v}{c}\,ct = ct \mp \tfrac{v}{c}\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = +ct\;, \\ x' = -ct' \quad &\Leftrightarrow \quad x \mp \tfrac{v}{c}\,ct = -ct \pm \tfrac{v}{c}\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = -ct\;. \end{aligned}$$

Ještě k relativitě soumístnosti a současnosti: nad prostoročasovým diagramem se zakreslenými nečárkovanými a čárkovanými osami si lze možná nejlépe uvědomit *relativitu prostoru a času*, totiž relativitu pojmů “prostor v daném okamžiku” a “historie daného místa”. Hermann Minkowski to na 80. shromáždění Německého spolku přírodovědců a lékařů (21. září 1908 v Kolíně nad Rýnem) shrnul takto: *“Od této hodiny už se prostor a čas samy o sobě propadají do věčného stínu a jen určitá jednota obou má nárok na svébytnost.”*[4] Věc se zdá být jasná, ale jen do chvíle, kdy se v nějaké úvaze vyskytne “v určitém okamžiku” nějaký nebodový děj... Je tím poznamenán např. pojem měření, protože ten typicky znamená zachycení polohy nějakých odlehlých bodů (třeba konců tyče) *v určitém (stejném) čase* — ale to vůči různým IS právě znamená něco jiného! Speciálně relativita současnosti je “zakomponována” skoro v každém relativistickém “paradoxu”...

3.6.2 Kauzální struktura Minkowského prostoročasu

Z chování os při Lorentzově transformaci je zřejmé, že časové pořadí událostí je relativní. Tedy správněji: časové pořadí *některých* událostí je relativní. Přechodem do dostatečně “rychlého” IS’ lze, jak jsme zjistili, prostorovou osu x' naklonit na obě strany až ke světelnému kuželu, což znamená, že pro každou dvojici událostí, jejichž relativní polohový vektor $\mathrm{d}x^\mu$ je prostorupodobný ($\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu > 0$), lze najít takový IS, v němž se ty události odehrály ve stejný čas (t'). (Existuje nekonečně IS, v nichž zmíněné události proběhnou v pořadí “AB”, a stejně tak nekonečně jiných IS, kde proběhnou v opačném pořadí “BA”.) Osu x' však nelze transformací naklonit až nad světelný směr (ostatně ani *do* světelného směru), takže pořadí událostí, jejichž relativní polohový vektor je časupodobný ($\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu > 0$), je ve všech IS stejné — *absolutní*. Podle těchto poměrů se také nazývají části prostoročasu, vymezené určitým světelným kuželem (kuželem majícím vrchol v určité zvolené události):

- Vnitřek “minulé” části světelného kuželu (včetně jeho povrchu) se nazývá **absolutní minulostí** zvolené události, protože je tvořen událostmi, které se z hlediska všech IS staly dříve než daná událost. Od kterékoliv události v této oblasti lze ke zvolené události ve vrcholu kuželu vyslat časupodobnou (nebo světelnou) světočáru. Kterákoliv událost v absolutní minulosti tedy mohla (ale nemusela) danou událost kauzálně ovlivnit, a to prostřednictvím signálu pohybujícího se podsvětelnou (nebo světelnou) rychlostí.

- Vnitřek “budoucí” části světelného kuželu (včetně jeho povrchu) se nazývá **absolutní budoucností** zvolené události, protože je tvořen událostmi, které se z hlediska všech IS staly později než daná událost. Ke kterékoliv události v této oblasti lze od události ve vrcholu kuželu vyslat časupodobnou (nebo světelnou) světočárou. Kterákoliv událost v

[4] Na Einsteina zprvu nový přístup jeho bývalého profesora moc nezapůsobil: “Od té doby, co se teorie relativity zmocnili matematikové, už jí nerozumím.” Einstein se ji pak ale zase naučil — přestal “čtvrtý rozměr” označovat za divadelní strašidlo a k matematice získal velký respekt. Potřeboval ji, aby mohl svou teorii rozvinout v *obecnou* relativitu.

absolutní budoucnosti tedy může (ale nemusí) být uvažovanou událostí v počátku kauzálně ovlivněna, a to prostřednictvím signálu pohybujícího se podsvětelnou (nebo světelnou) rychlostí.

- Oblast vně světelného kuželu se nazývá **relativní přítomností** zvolené události, protože je tvořena událostmi, které se z hlediska některých IS odehrály před uvažovanou událostí, kdežto z hlediska některých IS až po ní (a speciálně existuje IS, v němž se staly současně). Žádnou z událostí v této oblasti nejde s událostí v počátku spojit časupodobnou ani světelnou světočárou (ani jejich kombinací). Pokud se tedy v přírodě signály mohou šířit nanejvýš světelnou rychlostí, pak události z relativní přítomnosti nemohou být s uvažovanou událostí vůbec v kauzálním kontaktu. (K otázce nadsvětelných rychlostí se vrátíme v kapitole 4.5.)

3.6.3 Vlastní vzdálenost a klidová délka, vlastní čas

Pro každou dvojici událostí, které jsou vzdáleny “více v prostoru než v čase” (mezi nimiž je prostorupodobný interval), tedy existuje IS, ve kterém jsou současné. V takovémto IS se invariantní interval redukuje na prostorovou vzdálenost, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}l^2$, a hodnota této vzdálenosti se nazývá **vlastní vzdáleností** událostí. Prostorupodobně odlehlou dvojici událostí mohou představovat například polohy konců tyče, odměřené vůči nějakému IS *v daném čase* t. Tímto IS *nemusí* být klidový systém tyče, ale pokud jím je, má naměřená vlastní vzdálenost význam **klidové délky** tyče l_0, tedy délky tyče v jejím klidovém systému. Ze vztahu $\Delta s^2 = \Delta l^2 \equiv l_0^2$ je jasné, že klidová délka je invariantní.

Obdobný výrok platí symetricky i pro časupodobně vzdálené události a jejich časovou odlehlost, jak je opět zřejmé z prostoročasového diagramu (zde konkrétně z naklánění *časové* osy při transformaci). Pro každou dvojici událostí, které jsou vzdáleny “více v čase než v prostoru” (mezi nimiž je časupodobný interval), existuje IS, ve kterém jsou *soumístné*. V takovémto IS se invariantní interval redukuje na časovou odlehlost, $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 \equiv -c^2\mathrm{d}\tau^2$, a hodnota $\mathrm{d}\tau$ se nazývá úsekem **vlastního času**. Intervalem vlastního času mezi dvěma událostmi je tedy jejich časová odlehlost v IS, ve kterém se obě události odehrály na stejném místě. Dvojicí časupodobně odlehlých událostí jsou například dva “tiky” daných hodin; z hlediska různých IS bude jejich časová odlehlost různá (ovšem vesměs kladná), přičemž v systému přímo spojeném s hodinami bude nejmenší a bude mít význam intervalu jejich vlastního času. Podobně jako vlastní vzdálenost (klidová délka) je i interval vlastního času invariantní.

Kontrakce délek a dilatace času: invariantní hyperboly

Už jsme dost zdůraznili, že si máte kreslit prostoročasové diagramy? Nechceme ale tvrdit, že je na nich *všechno* vidět jednoduše. Není například bezprostředně vidět kontrakci délek a dilataci času. Tyto efekty *nejsou* dány pouhými projekcemi mezi čárkovanými a nečárkovanými osami! Při transformaci se totiž nejen naklánějí osy, ale také se deformují *jednotky* podél nich. Lze se spolehnout jen na *invariantní* míry. Invariantní délkovou mírou je prostoročasový interval, takže síť “vrstevnic” $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{konst}$ vynesená vzhledem k určité zvolené události (nacházející se v počátku diagramu) poskytuje souřadnicově nezávislou mapu vzdáleností (od zvolené události). Speciálně vrstevnice $\mathrm{d}s^2 = 1\,\mathrm{m}^2$ určují, kam sahá od zvolené události (v různých prostorupodobných směrech — podél různých možných prostorových os) délková jednotka, tedy 1 metr. Podobně vrstevnice $\mathrm{d}s^2 (= -c^2\mathrm{d}\tau^2) = -1\,\mathrm{m}^2$ určují, kam sahá 1 metr v různých časupodobných směrech, tj. podél různých možných časových os. Na dvourozměrném diagramu (ct, x)

tedy leží události, které dělí od výchozí události $(0,0)$ v různých systémech stejná prostorová vzdálenost 1 metr, na hyperbolách

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 = 1\,\mathrm{m}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}x = \pm\sqrt{1\,\mathrm{m}^2 + c^2\mathrm{d}t^2}\,. \tag{3.33}$$

Po zakreslení těchto hyperbol stačí do diagramu vynést osy "čárkovaného" systému — průsečík prostorové osy s invariantní hyperbolou ukazuje, kam je to podél této osy 1 metr. (Viz obrázek **??**.)

Zcela obdobně (symetricky) lze na diagramu (ct,x) vyměřit 1 metr v časupodobných směrech. Události, které dělí od výchozí události $(0,0)$ v různých systémech stejná "časová" vzdálenost 1m, leží na hyperbolách

$$-c^2\mathrm{d}\tau^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 = -1\,\mathrm{m}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad c\,\mathrm{d}t = \pm\sqrt{1\,\mathrm{m}^2 + \mathrm{d}x^2}\,. \tag{3.34}$$

Po zakreslení hyperbol opět stačí do diagramu vynést osy "čárkovaného" systému — průsečík časové osy s invariantní hyperbolou ukazuje, kam je to podél této osy 1 metr. (Viz obrázek **??**.)

Když nyní do takto "vybaveného" diagramu znázorníme historii tyče, která je v klidu vůči IS' a tvoří např. první metr jeho osy x', lze z porovnání délky tyče podél os x a x' zjistit (a skutečně přesně odměřit!) kontrakci. Symetrický výsledek vyjde pro historii tyče, která je naopak v klidu vůči IS podél jeho osy x. Podobně lze z diagramu "odečíst" dilataci času: zakreslíme jednak přímku všech událostí, které mají v systému IS' určitou časovou souřadnici (např. právě $ct' = 1\mathrm{m}$), a na jejím průsečíku s nečárkovanou osou ct se ujistíme, že podél *této* osy je to k ní od počátku *blíž*; symetricky však zjistíme, že přímka událostí, které mají *nečárkovanou* souřadnici $ct = 1\mathrm{m}$, je podél čárkované osy od počátku také blíž. (Viz obrázek???.)

3.6.4 *No space, no future. . .* Světlo!

Již jsme se divili rovnocenosti inerciálních systémů i invarianci rychlosti světla. Úloha rychlosti světla v našem fyzikálním světě je opravdu centrální a ještě to snad z různých stran *uvidíme* (hlavně v odstavci o nadsvětelných — ale také podsvětelných a světelných — rychlostech). V této kapitole jsme probírali časové a prostorové — vlastně *prostoročasové* — poměry v Minkowského světě. Nahlíželi jsme ho z různých inerciálních soustav a ptali se, jak se mezi nimi přechází a kdo co měří. Viděli jsme, že ústřední roli v prostoročasu hrají světelné kužely. Světelné kužely především určují kauzální strukturu a vystupují (vzhledem k tomu) jako limitní případy transformačních formulí. Zdá se, že bychom měli všechny vzorečky projít ještě jednou, a to zvlášť'opatrně, pro speciální, singulární případ $v = c$. Je to ale zbytečné, nic nového bychom nezjistili. Světlo je *opravdu* zvláštní, je opravdu "z jiného světa". Má nulovou klidovou hmotnost — ale nejde to vlastně ověřit, protože vůči všem se musí pohybovat jedině a přesně rychlostí c. A nejen to: prostoročasový interval podél světočáry jakéhokoli fotonu je $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 = 0$. Světočára má tedy *nulovou* délku a (konzistentně s tím) také čas, který "si s sebou jakýkoliv foton nese", stojí. Doslova změřit to ale zase nejde, protože žádný metr ani hodiny se nemohou pohybovat spolu se světlem — klidový systém fotonů vůbec neexistuje.

3.7 "Paradoxy" speciální relativity

Pokud se ovšem ze speciální relativity něco objeví v médiích, jsou to nejspíš "paradoxy" — a nejspíš špatně. Ve skutečnosti se ani nejedná o paradoxy, ale o chyby v úvaze, nejčastěji opomenutí relativity současnosti. Ostatně můžete si sami ověřit, že libovolně dlouhé auto se opravdu vejde do libovolně krátké garáže! Předpokládejme, že v klidu je vaše auto delší než garáž $l_0^{\text{auto}} > l_0^{\text{garáž}}$. Vy ale víte, že *pohybující se* auto bude vůči klidovému systému garáže γ-krát zkontrahované, tak se pořádně rozjedete — aspoň rychlostí, pro kterou bude

$$l_0^{\text{auto}} = l_0^{\text{garáž}}\gamma \qquad \Longrightarrow \qquad v = c\,\sqrt{1-\left(\frac{l_0^{\text{garáž}}}{l_0^{\text{auto}}}\right)^2}\ ,$$

no a jakmile vjedete dovnitř, my za vámi ("okamžitě") zavřeme dveře. Jak bude experiment vypadat z hlediska vašeho klidového systému (tj. systému spojeného s autem)? Vzhledem k vám bude podélně zkontrahovaná naopak garáž, tak vás možná napadne, že jste nezvolili vhodný postup — zvláště, když víte, že zadní stěna garáže je nekonečně pevná. Ale nebojte, speciální relativita je správně a děj nemůže v různých systémech dopadnout rozdílně. Rozdílná (protože *relativní*) je jen časová následnost událostí. Pokud jedete právě výše zmíněnou rychlostí, pak z hlediska garáže jsou události "předek auta je u zadní stěny" a "zadek auta je těsně za vraty" současné, takže za vámi můžeme zavřít a problém je vyřešen. Zdálo by se, že po zastavení o zadní stěnu se auto zase "natáhne" na svou klidovou délku a bude mu v garáži těsno, ale není tomu tak, jak ukáže pohled ze systému auta: tam zmíněné události *nejsou* současné, předek auta narazí do zadní zdi dříve než se zadek dostane za práh garáže. Předek se začne o zeď deformovat, protože signál o nárazu se autem nešíří nekonečně rychle (nejvýše rychlostí světla) a ta část auta, kam zatím nedorazil, se dále pohybuje původní rychlostí vpřed (materiál tam zatím neví, že se má deformaci bránit). Signál dorazí až na konec auta právě v okamžiku, kdy je auto celé v garáži (a jsou zavřena vrata). Řidič má tedy i ze svého hlediska celé auto v garáži. Pravda, auto má nyní menší klidovou délku, $l_0^{\text{auto}} = l_0^{\text{garáž}}$.

Nejlépe je děj vidět na prostoročasovém diagramu (viz obr. **??**). Je ale snad zřejmé, že uvedený popis byl prakticky vzato velmi nepřesný. Ve skutečnosti ani zadní stěna garáže nemůže být "nekonečně pevná", i ona se (minimálně) z důvodu konečné rychlosti signálu do určité míry zdeformuje ("vyboulí"). Především by však bylo třeba vůbec nějak popsat fyziku nárazu auta na stěnu. "V praxi" by ostatně účastníky experimentu více než relativita současnosti ovlivnily jiné efekty, jak je vidět z následujícího odhadu: pokud bylo auto původně např. o 1% delší než garáž, tj. $l_0^{\text{auto}} = 1.01\, l_0^{\text{garáž}}$, musíte přijet s $\gamma = 1.01$, tedy rychlostí $v = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2-1} \doteq 0.14\,c$. Při vjezdu do garáže tak budete mít kinetickou energii $0.01\,m_0c^2$, což při klidové hmotnosti auta $m_0 = 1100\,\text{kg}$ činí 10^{18} joulů. Zhruba taková energie byla uvolněna při legendárním výbuchu sopky Krakatau v r. 1883.[5]

Vzpomenutý "paradox" se vyskytuje v mnoha podobách. "Nejčistší" je verze s tyčí pohybující se rovnoměrně přímočaře nad podložkou, v níž je díra. V klidu nechť je tyč delší než díra. Bude-li se však tyč vůči podložce pohybovat, bude v systému spojeném s podložkou zkontrahovaná a od určité rychlosti tam bude kratší než díra. Zařídíme-li to tak, že v okamžiku, kdy bude tyč prolétávat nad dírou, do ní "zeshora" (a po celé její délce současně) bouchne nějaký "buchar", pak otvorem propadne. A nyní z hlediska systému spojeného s tyčí. Tam je sice podélně zkontrahovaný naopak otvor, takže je vůči tyči ještě kratší než v klidu, ale řešení je stejné jako u auta a garáže: z hlediska tyče *nedopadne* "buchar" na všechna místa tyče současně — ráz postupuje od "předního" konce tyče k "zadnímu", a to nadsvětelnou rychlostí, takže tyč nemůže v žádné své části na úder reagovat (všechny body tyče se až do okamžiku, kdy *do nich* buchar udeří, pohybují rovnoměrně přímočaře "vpřed").[6] Výsledkem je, že se tyč do díry

[5] Od té doby nebyl žádný sopečný výbuch tak silný. Srovnatelné množství energie bylo uvolněno ještě při koncertu matfyzácké skupiny *Deprese* na Beánii v r. 1990.

[6] Nadsvětelná rychlost postupu rázu podél tyče je jasná z toho, že v systému podložky je ráz *současný* po celé délce tyče. To znamená, že události, které tento ráz představují, jsou navzájem v relativní přítomnosti (jsou odděleny prostorupodobnými intervaly), a tedy nemohou být propojeny jinou než prostorupodobnou spojnicí.

“zalomí”. Zdálo by se, že bude tím pádem odlétat nakloněná (zatímco v systému spojeném s podložkou je po celou dobu vodorovná), ale to je v pořádku, protože obecný prostorový směr se při Lorentzově transformaci “nezachovává”. Konkrétněji, po průchodu otvorem je tyč orientována ve směru, který je odkloněn “doleva” od směru jejího pohybu. Přepočet orientace tyče do systému podložky je tak dán kontrakcí podélné složky její délky, což znamená natočení tyče ještě více “doleva” (v našem případě právě do vodorovné pozice).

3.7.1 “Paradox hodin”

Nechceme “paradoxy” trávit příliš (prostoro)času, ale jeden z nich přináší zajímavou předpověď a měl by patřit k obecnému povědomí. Nejedná se opět o paradox, ale o efekt, který podle newtonovské (galileiovské) fyziky nenastává a zdá se být zvláštní: když někam odletíte (nejlépe velkou rychlostí a daleko) a pak se vrátíte zpátky, budou vaše hodiny ukazovat méně než ty, které jste zanechali doma (“na Zemi”). Chceme-li děj probrat jen se znalostí Lorentzovy transformace, musíme zajistit, aby v něm nikde nedocházelo ke zrychlení, tj. složit jej výhradně z rovnoměrných přímočarých pohybů. Mějme trojici ideálních hodin, které si mohou “na krátko” (přes libovolně krátké kontakty nebo elektromagneticky po libovolně krátké dráze) předávat časovou informaci — “na Zemi” necháme hodiny H, které budou po celou dobu měřit “pozemský” čas, jejich klidový inerciální systém označíme IS; hodiny H’ (spojené se systémem IS’) se budou pohybovat rovnoměrně přímočaře ve směru x pozemského IS, přičemž na začátku se při průletu kolem hodin H nastaví na stejný čas; po nějaké době předají hodiny H’ svůj čas stejným způsobem hodinám H” (spojeným s IS”), se kterými se minou přesně v protisměru po nějakém čase a které pak doletí rovnoměrně přímočaře stejnou rychlostí zpět k Zemi, tj. ve směru $-x$ vůči pozemskému IS; když budou H” prolétávat kolem výchozího bodu, porovná se jejich čas s “pozemským” časem na hodinách H.

Vzhledem k nekonečnému zrychlení v bodě “otočky” by to byla problematická mise, ale ze slohových důvodů si experiment představíme jako výlet kosmonauta. Jaký výsledek čekají na Zemi a co čeká “kosmonaut”? Označme odlet H’ od H jako událost A, “otočku” H’$\to$H” jako událost B a návrat H” k H jako událost C.

- Kosmonaut se vůči Zemi pohybuje po celou dobu rovnoměrně přímočaře (otočka je jen jediný bod) určitou rychlostí v, takže jeho hodiny (H’ a posléze H”) jdou vůči pozemským hodinám H po celou dobu γ-krát pomaleji. Při návratu by tudíž jeho hodiny měly ukazovat $t''_{\mathrm{C}} = \frac{t_{\mathrm{C}}}{\gamma}\ (< t_{\mathrm{C}})$.
- Pohled kosmonauta je vůči pozemskému “symetrický” — Země se vůči němu po celou dobu pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v, takže pozemské hodiny H tikají vůči jeho hodinám (H’, posléze H”) po celou dobu γ-krát pomaleji. Při návratu by tudíž pozemské hodiny měly ukazovat $t_{\mathrm{C}} = \frac{t''_{\mathrm{C}}}{\gamma}\ (< t''_{\mathrm{C}})$.
- Tyto předpovědi nejsou kompatibilní (proto “paradox”). Výsledek však musí být jednoznačný, tak která předpověď je správná?

Nejlépe je to opět vidět na prostoročasovém diagramu (viz obr. **??**), když si jen uvědomíme, že “současnost” definují v IS vodorovné přímky (rovnoběžné s osou x), kdežto v IS’ přímky rovnoběžné s osou x' a v IS” přímky rovnoběžné s x''.

- Pozemský pozorovatel tedy podél vodorovných přímek přiřazuje události na kosmonautově světočáře událostem na své světočáře, přičemž takto proběhne celou historii svou i kosmonauta a všechny odpovídající si časové úseky (které vytknou na obou světočárách vodorovné přímky $t = \mathrm{konst}$) jsou ve vztahu $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$, po otočce $\Delta t'' = \frac{\Delta t}{\gamma}$. Celkově tedy pozemskému pozorovateli vyjde $t''_\mathrm{C} = \frac{t_\mathrm{C}}{\gamma}$, jak jsme uvedli.

- Kosmonaut přiřazuje v první fázi letu úseky na světočáře Země úsekům na své světočáře podél přímek rovnoběžných s x' a takto vytknuté odpovídající si časové intervaly jsou ve vztahu $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}$; ve druhé fázi letu přiřazuje události zcela symetricky podél přímek rovnoběžných s x'' a odpovídající si časové intervaly jsou ve vztahu $\Delta t = \frac{\Delta t''}{\gamma}$. Celkově mu tedy vyjde skutečně $t_\mathrm{C} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma}$.
- Pojem kosmonautovy současnosti se však při obrátce skokem změní (z přímek rovnoběžných s x' na přímky rovnoběžné s x''), takže kosmonaut při přepočítávání časových úseků *neprojde celou světočáru Země* — v první fázi skončí u (pozemské) události, která je s obrátkou současná z hlediska IS' (označme ji D), a v druhé fázi začne u (pozemské) události, která je s obrátkou současná z hlediska IS" (označme ji E). Kosmonaut tedy vůbec nezapočítal čas, který na Zemi proběhl mezi událostmi D a E, protože z jeho hlediska není žádná pozemská událost z intervalu mezi D a E současná s nějakou událostí na jeho světočáře — k žádné události z intervalu D a E nevede přímkový "průvodič" reprezentující jeho pojem současnosti.

To ovšem znamená, že k času $t_\mathrm{C} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma}$, který kosmonaut předpověděl jako výsledek experimentu, je třeba připočítat úsek $t_{DE} \equiv t_\mathrm{E} - t_\mathrm{D}$. Označíme-li ještě F pozemskou událost, která je současná s obrátkou z hlediska Země (IS), pak je ze symetrie jasné (předpokládali jsme, že pohyb tam i zpět probíhá stejnou rychlostí), že $t_{DE} = 2t_{DF}$. Hodnotu tohoto opomenutého časového úseku určíme inverzní Lorentzovou transformací ze systému IS', přičemž využijeme nejdříve toho, že události F a B jsou z hlediska pozemského času t současné, a poté toho, že události D a B jsou současné z hlediska času t':

$$t_{DE} = 2t_{DF} = 2t_{DB} = 2\gamma \left(t'_\mathrm{DB} + \frac{v}{c^2}\, x'_\mathrm{DB} \right) = 2\gamma\, \frac{v}{c^2}\, x'_\mathrm{DB} = 2\gamma\, \frac{v}{c^2}\, \frac{1}{2}\, t''_\mathrm{C} v = \gamma \frac{v^2}{c^2}\, t''_\mathrm{C}\,.$$

V závěru jsme dosadili $x'_\mathrm{DB} = \frac{1}{2}\, t''_\mathrm{C} v$ — jedná se o vzdálenost, ve které je od kosmonauta Země podél osy x' v okamžiku jeho obrátky, tedy kam se podél osy x' vzdálila za polovinu celkového kosmonautova času t''_C. Přičteme-li opomenutý čas t_{DE} ke kosmonautově původnímu propočtu $t_\mathrm{C} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma}$, dostaneme

$$t_\mathrm{C} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma} + t_{DE} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma} + \gamma \frac{v^2}{c^2}\, t''_\mathrm{C} = \frac{t''_\mathrm{C}}{\gamma} \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = t''_\mathrm{C} \gamma\,,$$

což je již výsledek shodný s propočtem učiněným ze Země. Hodiny H" tedy po návratu ukazují *méně* než hodiny H, tj. kosmonautovi během cesty uplynulo *méně* času než zatím uplynulo na Zemi.

Dodejme, že problém lze uvažovat i jako výlet skutečného kosmonauta, tedy se zahrnutím úvodního urychlení, brždění před otočkou, urychlení zpátečním směrem a brždění při přistání, ale v této realističtější verzi *není* kosmonaut inerciální a popis poměrů z jeho hlediska je trochu obtížnější, než na co jsme zvyklí v tomto kursu (zde nahlížíme prostoročas až na výjimky z inerciálních systémů). Výsledek je však i v tomto obecnějším případě kvalitativně stejný jako v naší limitní, neurychlené verzi.

KAPITOLA 4

Relativistická mechanika

Jak jsme zdůrazňovali už v úvodu, speciální relativita není teorií nějakého určitého výseku fyzikální skutečnosti — není “konstruktivní teorií”, nýbrž principem (relativity), který by měly všechny fyzikální teorie splňovat. V tomto krátkém kursu se nebudeme věnovat “všem fyzikálním teoriím”, ale pouze mechanice a elektrodynamice. Z úvodu si také pamatujeme, že speciální relativita vzešla z rozporu mezi chováním Maxwellovy elektrodynamiky a Newtonovy mechaniky při přechodu mezi inerciálními systémy a že tento rozpor byl Einsteinem rozhodnut ve prospěch elektrodynamiky.[1] Je proto jasné, že elektrodynamika bude z hlediska principu relativity “automaticky správně”, kdežto mechaniku bude třeba “opravit” — tak, aby byla invariantní vůči Lorentzovým, nikoliv Galileiovým transformacím. Pokusíme se udělat to “minimálním” způsobem, tedy co nejpřirozenější a nejjednodušší úpravou veličin a rovnic do podoby, v níž budou vyhovovat principu relativity (tj. do *tenzorové* podoby).

4.1 Světočára, čtyř-rychlost, čtyř-zrychlení

Základním problémem mechaniky je problém pohybu. Znát pohyb tělesa znamená vědět, kde se těleso v kterou chvíli nachází. V klasické mechanice tato znalost odpovídá znalosti *trajektorie* tělesa $x_i = x_i(t)$, tedy polohy v nějakém souřadnicovém systému v závislosti na (absolutním) čase. V teorii relativity je konfiguračním prostorem čtyřrozměrný Minkowského prostoročas, tedy poloha má čtyři souřadnice a parametrem pohybu je vlastní čas: hovoříme o *světočáře* tělesa v Minkowského protoročasu, $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Pohyb by sice šlo i nadále parametrizovat některou z časových *souřadnic* (některým z inerciálních časů t), ale vlastní čas tělesa je privilegován tím, že je invariantní. Není zde podstatná “praktická” stránka věci (že je příjemné, když se něco transformuje jednoduše), nýbrž to, že jen derivací podle invariantu vzniknou z tenzorů opět tenzory. Pochopíme to vzápětí na zavedení čtyřrozměrného pojmu rychlosti.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme v následujících kapitolách (4.1–4.4) uvažovat pohyb částic po *časupodobných* světočárách (tedy pohyb “hmotných” částic, ne fotonů).

[1] S citem pro spravedlnost komentuje historii W. Rindler ve své učebnici [10]: “Je jednou z ironií tohoto vývoje, že Newtonova teorie, která byla vždy známa tím, že v rámci klasické představy prostoru a času splňuje princip relativity, nyní vyžadovala úpravu, kdežto Maxwellova teorie, s její zjevnou konceptuální závislostí na preferovaném systému éteru, prošla nedotčená — vlastně byla pro speciální relativitu silným doporučením.”

4.1.1 Čtyř-rychlost

Rychlost je definována jako tečný vektor k trajektorii — nyní světločáře, tedy

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \; . \tag{4.1}$$

Diferenciál polohy je čtyř-vektorem, $\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha$ (v případě *speciální* relativity konkrétně $\mathrm{d}x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$), a $\mathrm{d}\tau$ je invariant, takže čtyř-rychlost je čtyř-vektorem,

$$u'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\, u^\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha u^\alpha \; .$$

Je také hned jasné, že úplná derivace polohy podle *souřadnicového* času $\frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}t'}$ *nedává* čtyř-vektor, protože v její transformaci navíc vystupuje transformace t, totiž $c\mathrm{d}t' = \Lambda^0{}_\beta \mathrm{d}x^\beta$.

V minulé kapitole jsme probírali, že v důsledku ortogonality Lorentzovy transformace (relací ortogonality) je “čtyř-vektorovost” ekvivalentní tomu, že skalární součin čtyř-vektorů je invariantní. Skalární součin čtyř-rychlosti se sebou samou tedy musí být invariantem. Skutečně, přímo z definice (a díky vztahu mezi prostoročasovým intervalem a přírůstkem vlastního času) dostáváme

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} = -c^2 \; . \tag{4.2}$$

Tento výsledek (svou záporností) potvrzuje, že čtyř-rychlost je vektorem časupodobným.

Můžeme ještě vyjasnit vztah čtyř-rychlosti k třírozměrné rychlosti $\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$:[2]

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(ct,\vec{x})}{\mathrm{d}t}\,\gamma = \gamma(c,\vec{v}) \; , \tag{4.3}$$

kde jsme si bokem spočítali, že $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$ je Lorentzův faktor odpovídající rychlosti tělesa vůči danému inerciálnímu systému (v),

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \;&=\; \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}} = \frac{c}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}} = \frac{c}{\sqrt{-\eta_{00}c^2 - \eta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}} = \\ &=\; \frac{c}{\sqrt{c^2 - \delta_{ij}v^i v^j}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \end{aligned}$$

(to už ostatně víme z předchozích kapitol — jedná se o vztah pro dilataci času mezi hodinami spojenými s tělesem a hodinami daného vztažného systému). Nyní je také jasné, proč je třeba čtyř-rychlost značit jinak než třírozměrnou rychlost: protože prostorovou částí čtyř-rychlosti *není* přímo tří-rychlost, $u^i = \gamma v^i \neq v^i$.

---

[2] Jak jsme upozorňovali už v kapitole o Lorentzově transformaci, v se standardně značí rychlost vzájemného pohybu mezi inerciálními systémy, takže pro rychlost pohybu sledovaného objektu vůči určitému inerciálnímu systému bychom měli zavést nějaký jiný symbol. Nebudeme to však dělat — totiž u jsme právě vyhradili pro čtyř-rychlost, takže by se zřejmě muselo jednat o velké V, dvojité w nebo něco podobně umělého (od mala jsme přece zvyklí na to, že “těleso se pohybuje rychlostí $\vec{v}$”. . .). K nedorozumění by dojít nemělo, protože s výjimkou odstavce o relativistických srážkách (a také o vzhledech objektů dále) již nebudeme Lorentzovu transformaci *detailně* probírat a oba zmíněné významy rychlosti se současně nevyskytnou.

4.1.2 Čtyř-zrychlení

Zjištěný vztah pro normalizaci čtyř-rychlosti, $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$, říká nejen to, že rychlost je časupodobným čtyř-vektorem — je významný nejen tím, že $-c^2$ vpravo je záporné a invariantní, ale navíc tím, že je to *konstanta*, která na ničem nezávisí. Především nezávisí na čase. Geometricky řečeno, čtyř-rychlost je podél světočáry pořád stejně “dlouhá”, takže měnit se může jen její *směr* — neboli změna u^μ podél světočáry musí být na u^μ *kolmá*. Časovou změnou čtyř-rychlosti je ovšem čtyř-zrychlení, takže v Minkowského prostoročasu je zrychlení vždy kolmé na rychlost. Nyní “ve vzorečcích”: čtyř-zrychlení je definováno “samozřejmě”

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} \; ; \tag{4.4}$$

díky invariantnosti τ (a čtyř-vektorovosti u^μ) je zjevně čtyř-vektorem. Derivací normalizačního vztahu $-c^2 = \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ podle vlastního času dostaneme

$$0 = \eta_{\mu\nu}(a^\mu u^\nu + u^\mu a^\nu) = 2\eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu \; ,$$

kde jsme využili jen toho, že Minkowského tenzor je symetrický.[3] Tedy ještě jednou: *čtyř-zrychlení je v kterémkoliv bodě jakékoliv (časupodobné) světočáry kolmé na čtyř-rychlost.*

Krátká poznámka, totiž vzpomínka na odvozování Lorentzovy transformace: konstatovali jsme tam, že transformace mezi inerciálními systémy musí být lineární, aby se rovnoměrné přímočaré pohyby skládaly zase na rovnoměrné přímočaré a 1. Newtonův zákon měl smysl. Později, v odstavci 3.5.1, jsme linearitu “dokázali” jako vlastnost nutně plynoucí z invariance prostoročasového intervalu. Komu však původně v kapitole 2.1 připadalo, že jsme to přešli moc rychle, může si to nyní — se znalostí čtyř-formalismu a konkrétně čtyř-zrychlení — zapsat podrobně: pokud bychom *neznali* vlastnosti transformace, měli bychom pro transformaci čtyř-zrychlení zcela obecně

$$a'^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u'^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,u^\alpha\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,a^\alpha + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\,u^\alpha u^\beta \; .$$

Pokud tedy v nějakém (“nečárkovaném”) IS platí $a^\alpha = 0$, bude to platit i v libovolném jiném (IS’) právě tehdy, když druhý člen bude nulový. Musí to platit pro *libovolný* rovnoměrný přímočarý pohyb, tedy libovolnou čtyř-rychlost u^μ, takže požadavek zní $\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$ — transformace musí být lineární.

4.2 Vlastnosti hmotnosti a čtyř-hybnost

Nyní přirozeně zkusíme zavést čtyř-hybnost vztahem $p^\mu \equiv mu^\mu$, kde m je hmotnost, ale hned se zarazíme, protože neumíme říct, jaká je matematická povaha takovéto veličiny: *nevíme totiž, jak se transformuje hmotnost*. Musíme to proto nejdříve zjistit — a učiníme tak rozborem velmi jednoduchého případu srážky.

4.2.1 Relativistické srážky a závislost hmotnosti na rychlosti

Mějme dvě stejné elektricky neutrální koule a nechme je centrálně srazit. Předpokládejme, že na sebe působí jen mechanicky při srážce a že jinak s ničím neinteragují (jejich systém je izolovaný) — nedochází např. k žádnému vyzařování. Předpokládejme dále, že v jakémkoliv

[3] Úplně “po lopatě”: $\eta_{\mu\nu}(a^\mu u^\nu + u^\mu a^\nu) = \eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu + \eta_{\nu\mu}u^\nu a^\mu = 2\eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu$.

inerciálním systému, ze kterého budeme děj sledovat, se během něj bude zachovávat celková hmotnost koulí a také jejich celková (třírozměrná) hybnost. Srážku posoudíme z hlediska dvou inerciálních systémů — těžišťového a nějakého jiného, pohybujícího se vůči těžišťovému (např.) v kladném směru osy x. Jsou-li koule stejné, pak v těžišťovém systému se vůči sobě musejí pohybovat stejnou rychlostí (opačné orientace). Hodnoty veličin v těžišťovém systému budeme značit dolním indexem T, hodnoty naměřené vůči druhému systému nijak speciálně značit nebudeme. Transformační chování hmotnosti získáme z toho, že víme, jak se transformuje (třírozměrná) rychlost (a na základě zmíněných zákonů zachování).

Nechť se tedy vůči systému $\mathrm{IS_T}$ pohybují dvě koule hmotností $m_{\mathrm{T}}^{(1)} \equiv m_{\mathrm{T}}$, $m_{\mathrm{T}}^{(2)} \equiv m_{\mathrm{T}}$ rychlostmi $\vec{v}_{\mathrm{T}}^{(1)} \equiv \vec{v}_{\mathrm{T}} = (v_{\mathrm{T}}, 0, 0)$, $\vec{v}_{\mathrm{T}}^{(2)} \equiv -\vec{v}_{\mathrm{T}} = (-v_{\mathrm{T}}, 0, 0)$. Zachováním celkové hmotnosti a celkové hybnosti máme na mysli předpoklady, že součet zúčastněných hmotností a součet zúčastněných tří-hybností jsou před srážkou a v okamžiku srážky stejné,

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{T}}^{(1)} + m_{\mathrm{T}}^{(2)}\,(= 2m_{\mathrm{T}}) &= M_{\mathrm{T}}\,(\equiv M_0)\ , \\ m_{\mathrm{T}}^{(1)}\vec{v}_{\mathrm{T}}^{(1)} + m_{\mathrm{T}}^{(2)}\vec{v}_{\mathrm{T}}^{(2)}\,[= m_{\mathrm{T}}(\vec{v}_{\mathrm{T}} - \vec{v}_{\mathrm{T}})] &= M_{\mathrm{T}}\vec{V}_{\mathrm{T}} = \vec{0}\ . \end{aligned}$$

Označili jsme M_{T} celkovou hmotnost koulí *v okamžiku srážky*, tj. ve chvíli, kdy se v těžišťovém systému zastavily, $\vec{V}_{\mathrm{T}} = \vec{0}$ (M_{T} má tedy povahu *klidové* hmotnosti, proto je logické i označení M_0). Pohyb koulí po srážce neřešíme — nezabýváme se tím, zda je srážka pružná či nepružná. Podobu zákonů zachování v systému $\mathrm{IS_T}$ jsme zapsali spíše jen “pro rozcvičení”; speciálně zachování hybnosti je v těžišťovém systému triviální — těžišťový systém je přece *definován* nulovostí celkové hybnosti.

Nyní situaci posoudíme z inerciálního systému (IS), který se vůči těžišťovému pohybuje rychlostí v v kladném směru osy x_{T}. Zapíšeme v něm rovnici pro zachování celkové hybnosti (píšeme již jen netriviální, x-ovou složku)

$$m^{(1)}v^{(1)} + m^{(2)}v^{(2)} = MV$$

a provedeme v ní tři dosazení: (i) z požadavku zachování celkové hmotnosti, $m^{(1)} + m^{(2)} = M$, dosadíme doprava za M; (ii) vpravo dále dosadíme $V = -v$ (v okamžiku srážky se koule v $\mathrm{IS_T}$ zastaví, takže vůči IS se v tu chvíli pohybují rychlostí $V = -v$); (iii) vlevo dosadíme za rychlosti podle speciální Lorentzovy transformace rychlostí (2.5), zde tedy

$$v^{(1)} = \frac{v_{\mathrm{T}} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}}\ , \qquad v^{(2)} = \frac{-v_{\mathrm{T}} - v}{1 + \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}}\ .$$

Po těchto dosazeních zní rovnice pro zachování hybnosti

$$m^{(1)}\,\frac{v_{\mathrm{T}} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}} + m^{(2)}\,\frac{-v_{\mathrm{T}} - v}{1 + \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}} = -(m^{(1)} + m^{(2)})\,v\ ,$$

tudíž

$$m^{(1)}\left(\frac{v_{\mathrm{T}} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}} + v\right) = m^{(2)}\left(\frac{v_{\mathrm{T}} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}} - v\right)\ .$$

Po převedení na společného jmenovatele vyjdou čitatele stejně, takže je zkrátíme a máme

$$\frac{m^{(1)}}{1 - \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}} = \frac{m^{(2)}}{1 + \frac{v}{c^2}\,v_{\mathrm{T}}}\ . \tag{4.5}$$

Nyní provedeme cimrmanovský úkrok stranou a rozepíšeme Lorentzovy faktory $\gamma^{(1,2)}$ odpovídající rychlostem koulí vůči IS $v^{(1,2)}$:

$$1-\left(\frac{v^{(1,2)}}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{\pm\frac{v_\mathrm{T}}{c}-\frac{v}{c}}{1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}}\right)^2 = \frac{\left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)^2-\left(\pm\frac{v_\mathrm{T}}{c}-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)^2} =$$
$$= \frac{1+\frac{v^2v_\mathrm{T}^2}{c^4}-\frac{v_\mathrm{T}^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{v_\mathrm{T}^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)^2}\ ,$$

takže

$$\gamma^{(1,2)} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^{(1,2)}}{c}\right)^2}} = \left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{T}^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \left(1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T}\right)\gamma_\mathrm{T}\,\gamma\ , \tag{4.6}$$

kde jsme označili $\gamma_\mathrm{T}\equiv\gamma(v_\mathrm{T})$, $\gamma\equiv\gamma(v)$. Tyto dva Lorentzovy faktory jsou ovšem pro obě koule stejné, takže když ze získaného vztahu vyjádříme

$$1\mp\frac{v}{c^2}\,v_\mathrm{T} = \frac{\gamma^{(1,2)}}{\gamma_\mathrm{T}\,\gamma}$$

a dosadíme do rovnosti (4.5) plynoucí ze zákonů zachování, můžeme $(\gamma_\mathrm{T}\gamma)$ zkrátit a zbývá velmi jednoduchý závěr

$$\frac{m^{(1)}}{\gamma^{(1)}} = \frac{m^{(2)}}{\gamma^{(2)}}\ . \tag{4.7}$$

Uvědomme si, co tento závěr znamená. Především zjevně nezávisí na tom, jak jsme nastavili parametry vůči těžišťové soustavě, takže se můžeme soustředit jen na výslednou rovnost, platnou v *nějakém* (libovolném) inerciálním systému IS. Máme dvě stejná tělesa (tělesa stejné klidové hmotnosti), která se vůči IS pohybují rychlostmi $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ a mají vůči IS hmotnosti $m^{(1)}$, $m^{(2)}$. Rychlosti i hmotnosti jsou obecně různé, ale poměr $m^{(1,2)}/\gamma^{(1,2)}$ je stejný. Zjevně bychom mohli uvažovat libovolně mnoho těles (dané klidové hmotnosti m_0), pohybujících se vůči zvolenému IS nejrůznějšími rychlostmi $v^{(n)}$: hmotnosti těles vůči tomuto IS $m^{(n)}$ budou takové, že jejich poměr vůči příslušným Lorentzovým faktorům $\gamma^{(n)}$ bude pro všechna tělesa stejný. Situaci však můžeme nahlížet i opačně: máme *jedno* těleso a řadu inerciálních systémů, vůči kterým se toto těleso pohybuje nejrůznější rychlostí, tedy “má vůči nim” různé Lorentzovy faktory γ. Pak hmotnost tělesa vůči těmto IS je taková, že poměr m/γ je ve všech stejný.[4]

A nyní stručně: zjistili jsme, že poměr m/γ je invariantem Lorentzovy transformace. Tento poměr má však význam klidové hmotnosti tělesa, jak se lze snadno přesvědčit dosazením nulové rychlosti [a tedy $\gamma(v=0)=1$],

$$\frac{m(v)}{\gamma(v)} = \frac{m(0)}{\gamma(0)} = m_0\ . \tag{4.8}$$

<u>Závěr</u>: klidová hmotnost tělesa je invariantní (ve všech IS stejná), ale *relativní* hmotnost m (často označovaná jako *relativistická* hmotnost, popř. prostě hmotnost) <u>závisí na rychlosti</u> — vzhledem k IS, vůči němuž se pohybuje rychlostí v, má těleso hmotnost

$$\boxed{m = m_0\gamma \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ \ (\geq m_0)}\ . \tag{4.9}$$

[4] Poznamenejme, že ve srážkovém myšlenkovém experimentu jsme sice uvažovali jen pohyb ve směru osy x, ale přesto můžeme vyslovit závěr obecně, protože závislost vlastností tělesa na *směru* jeho pohybu vůči danému IS by byla ve sporu s principem relativity a/i s předpokladem izotropie prostoru.

Vůči svému klidovému systému má tedy těleso *nejmenší* hmotnost; čím se pohybuje vůči danému IS rychleji, tím je jeho hmotnost vůči tomuto IS větší, limitně pro $v \to c$ dokonce nekonečná.

Poznámka k proměnnosti m_0

Uvažujme teď pro snazší představu, že srážka je dokonale nepružná, tudíž že koule po srážce zůstanou v IS_T stát na místě, a vraťme se k prvnímu vztahu $m_\mathrm{T}^{(1)} + m_\mathrm{T}^{(2)}$ $(= 2m_\mathrm{T}) = M_\mathrm{T}$ $(\equiv M_0)$, tedy požadavku rovnosti celkové hmotnosti před srážkou a v okamžiku srážky z hlediska těžišťového systému. Dosadíme-li do něj právě zjištěnou skutečnost $m_\mathrm{T} = m_0\gamma_\mathrm{T}$, dostáváme

$$(M_0 \equiv)\ M_\mathrm{T} = 2m_\mathrm{T} = 2m_0\gamma_\mathrm{T} > 2m_0\ . \tag{4.10}$$

To je překvapivé: vzali jsme dvě tělesa klidové hmotnosti m_0, hodili je proti sobě a nechali je srazit — a jejich výsledná klidová hmotnost M_0 je $\gamma(v_\mathrm{T})$-krát větší než $2m_0$. Klidová hmotnost těles se v důsledku srážky zvětšila, přestože jsme zajistili, že systém je uzavřený a nikudy do něj není žádná hmotnost “přisypávána”. Klidová hmotnost se tedy může s časem měnit! Na otázku, při jakých fyzikálních procesech k tomu může docházet, odpovíme přesněji v odstavci 4.4, zde jen odhadneme, že nárůst klidové hmotnosti asi souvisí s tím, že jsme tělesům před srážkou udělili určitou kinetickou energii a ta se při srážce přeměnila na jejich vnitřní (a deformační) energii. Činíme tedy zatím aspoň vágní závěr, že klidová hmotnost tělesa se mění tehdy, když se mění jeho vnitřní energie. V dalším uvidíme, že tento odhad je správný a přímo souvisí s Einsteinovou slavnou formulí pro ekvivalenci hmotnosti a energie.

4.2.2 Čtyř-hybnost

Na začátku kapitoly jsme odhadli, že čtyř-hybnost bude vhodné zavést vztahem $p^\mu \equiv mu^\mu$, ale teď vidíme, že to nebyl správný odhad, protože hmotnost m *není invariantem*, tudíž takto definovaná veličina by nebyla čtyř-vektorem (v její transformaci by kromě Lorentzovy transformace navíc vystupoval Lorentzův faktor). Zároveň jsme však zjistili, že *klidová* hmotnost invariantní je, takže už víme, jak čtyř-hybnost definovat správně:

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu \quad \ldots = m_0\gamma(c, \vec{v}) = m(c, \vec{v}) = (mc, \vec{p})\ . \tag{4.11}$$

Využili jsme definice rovnou i ke zjištění vztahu mezi čtyř-hybností a třírozměrnou hybností; jak vidíme po dosazení složek čtyř-rychlosti (4.3), prostorová část čtyř-hybnosti je rovna přímo tří-hybnosti, takže je na místě, že jsme čtyřrozměrnou veličinu označili stejným písmenkem jako třírozměrnou. (Je však třeba pamatovat, že nyní už ani $\vec{p}$ není “klasickou hybností”! Obsahuje přece hmotnost, která je v relativitě závislá na rychlosti vůči danému IS.)

4.3 Pohybová rovnice, čtyř-síla

Je jasné, že zjištěná závislost “hmotnosti na rychlosti” bude mít pro mechaniku dalekosáhlé důsledky. (Setrvačná) hmotnost především vystupuje v pohybové rovnici. Jako možná relativistická obdoba Newtonova $\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = ma^i$ se na levé straně pohybové rovnice nabízejí dva čtyř-vektory, $\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ nebo $m_0 a^\mu$. Vzhledem k definici čtyř-hybnosti (4.11) je mezi nimi vztah

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\, u^\mu + m_0 a^\mu\ .$$

V odstavci o srážkách jsme zjistili, že existují fyzikální procesy, při nichž se práce spotřebovává (také) na změnu klidové hmotnosti (nastává to, když síla těleso “ohřívá”), a proto dáme přednost první možnosti. O čtyř-rozměrné síle těžko v obecnosti něco řekneme — tedy samozřejmě kromě toho, že to musí být čtyř-vektor, aby pohybová rovnice byla ve shodě s principem relativity. I v dalších základních vlastnostech čtyř-síly se tedy spolehneme na pohybovou rovnici,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu}. \tag{4.12}$$

Rozepíšeme-li vlevo

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t}\,\gamma$$

a dosadíme složky $p^\mu = (mc, \vec{p})$, docházíme k rozpisu

$$F^\mu = \left(c\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}\,, \gamma\vec{f}\right) = \gamma\left(c\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,, \vec{f}\right)\,, \tag{4.13}$$

kde $\vec{f} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ je “klasická” třírozměrná síla. (Pro čtyř-sílu používáme jiné označení — velké písmeno —, protože $F^i \neq f^i$, je tam navíc γ.)

Prostorová část relativistické pohybové rovnice tedy vypadá “zcela klasicky”, $\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = f^i$, ale přesto obsahuje podstatnou novinku: v hybnosti $p^i = mv^i$ je hmotnost závislá na rychlosti. Při urychlování tělesa se bude (vůči danému IS) zvětšovat setrvačný odpor tělesa (charakterizovaný m), takže bude zřejmě zapotřebí více práce, než by odpovídalo čistě změně rychlosti v^i při *konstantní* hmotnosti m. Oproti newtonovskému $\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = ma^i$ bude na levé straně konkrétně

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_0\gamma v^i)}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + m_0\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\,v^i + \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}\,\gamma v^i = ma^i + \left(m_0\gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}\right)\gamma v^i\,,$$

kde bylo třeba jen zderivovat γ,

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}}} = \gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\,.$$

Jen pokud je závorka $\left(m_0\gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}\right)$ nulová, platí i v relativitě $\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = ma^i$. Příkladem takové situace je pohyb nabité částice v magnetickém poli: při tomto pohybu je $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$, a v kapitole o Lorentzově síle uvidíme, že se při něm také nemění m_0.

4.3.1 “Příčná” a “podélná” hmotnost

Ve svém slavném článku *K elektrodynamice pohybujících se těles* ilustruje Einstein vlastnosti (třírozměrné) pohybové rovnice $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}$ také na jejím rozkladu do směru příčného a podélného vzhledem k prostorové rychlosti $\vec{v}$. Po rozepsání

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + m\vec{a}$$

je ihned jasné, že ke kolmé složce rovnice přispívá jen druhý člen, takže

$$m\vec{a}_\perp = \vec{f}_\perp\,. \tag{4.14}$$

K podélné složce přispívají oba členy. Rádi bychom i tuto složku uvedli do “newtonovského” tvaru. Umožní nám to vyjádření rychlosti $\vec{v}$ pomocí podélné složky zrychlení:

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_{(v)})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_{(v)} + v\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{(v)}}{\mathrm{d}t} \equiv \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} \equiv v\vec{e}_{(v)} = v\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\,\vec{a}_\parallel\,,$$

kde jsme označili $\vec{e}_{(v)}$ jednotkový vektor ve směru rychlosti $\vec{v}$. Na levé straně podélného průmětu pohybové rovnice tedy stojí

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + m\vec{a}_\parallel = \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,v\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} + m\right)\vec{a}_\parallel = \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}\,v + m\right)\vec{a}_\parallel\ .$$

Můžeme ještě upravit

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}v}\,\gamma + m_0\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}v}\,\gamma + m_0\gamma^3\frac{v}{c^2}\ ,$$

takže pokud je během uvažovaného pohybu $\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}v} = 0$, nabývá závorka, která hraje roli "podélné hmotnosti", velmi jednoduché podoby

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}\,v + m = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}v}\,\gamma v + m_0\gamma^3\frac{v^2}{c^2} + m = m\gamma^2\frac{v^2}{c^2} + m = m\left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + 1\right) = m\gamma^2\ .$$

Podélný průmět pohybové rovnice tak (v případě neproměnné klidové hmotnosti) zní

$$m\gamma^2\vec{a}_\parallel = \vec{f}_\parallel\ . \tag{4.15}$$

Ve směru pohybu se tedy těleso brání urychlení γ^2-krát více než ve směru kolmém — "podélná setrvačná hmotnost je γ^2-krát větší než kolmá setrvačná hmotnost".

4.4 (Ne)konstantnost klidové hmotnosti, práce a $E = mc^2$

V závěru kapitoly o srážkách jsme si uvědomili, že při (nepružné) srážce se *mění* klidová hmotnost těles. Na základě "energetické bilance" jsme usoudili, že změna souvisí s tím, že tělesa se při srážce zahřejí. Přesnější odpověď na otázku (ne)konstantnosti m_0 přináší skalární součin, který je "čtyřrozměrnou obdobou" výkonu síly $\delta_{ij}f^iv^j$:

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}F^\mu u^\nu &= \eta_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,u^\nu = \eta_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}(m_0u^\mu)}{\mathrm{d}\tau}\,u^\nu = \eta_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\,u^\mu u^\nu + \eta_{\mu\nu}m_0\,\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,u^\nu = \\ &= -c^2\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} + \eta_{\mu\nu}m_0a^\mu u^\nu = -c^2\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\ .\end{aligned} \tag{4.16}$$

Využili jsme pouze pohybové rovnice, definice p^μ, normalizace čtyř-rychlosti a kolmosti čtyř-zrychlení na čtyř-rychlost. Klidová hmotnost se tedy v čase nemění právě tehdy, když čtyř-síla je (v prostoročasovém slova smyslu) kolmá na čtyř-rychlost, et vice versa.[5]

Získaný vztah je očividně invariantní. Poskytuje i další, neinvariantní informace, když do levé strany dosadíme složky $F^\mu = \gamma\left(c\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,, \vec{f}\right)$, $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$:

$$-\gamma cF^0 + \gamma^2\delta_{ij}f^iv^j = -c^2\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} \quad\Longrightarrow\quad F^0\left(= \gamma c\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right) = c\,\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{c}\,\vec{f}\cdot\vec{v}\ . \tag{4.17}$$

[5] Čtyř-rychlost je časupodobný vektor, takže k ní může být (v prostoročasovém smyslu) kolmý jen prostorupodobný čtyř-vektor (součin dvou časupodobných vektorů je vždy nenulový, speciálně jsou-li oba do budoucna orientované, pak je vždy záporný). Čtyř-síly, které nemění m_0, tedy musejí být prostorupodobné. Naopak při působení časupodobné čtyř-síly se klidová hmotnost určitě mění.

Jednak teď lépe vidíme význam F^0; speciálně druhý člen představuje výkon třírozměrné síly $\vec{f}$ násobený γ (tedy vztažený na jednotku vlastního času) a dělený c. Vztah má vlastně tvar 1. věty termodynamické (vynásobte $\frac{c}{\gamma}\,\mathrm{d}t$),

$$c^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{\gamma}\,c^2\,\mathrm{d}m_0 + \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,, \tag{4.18}$$

přičemž dle očekávání hraje člen daný změnou klidové hmotnosti roli dodané tepelné energie a druhý člen je přírůstek práce.

4.4.1 Einsteinův vztah ekvivalence hmotnosti a energie

V klasické fyzice obvykle celková energie systému nějak souvisí s jeho setrvačnou hmotností (obvykle lineárně), ale vztah mezi těmito veličinami je pro každý fyzikální systém jiný. Einstein ve svém “doplňku ke speciální relativitě”, nazvaném *Závisí setrvačnost tělesa na jeho energetickém obsahu?* a vyšlém rovněž ještě v r. 1905, dospěl k převratnému závěru, že mezi setrvačnou hmotností a energií je ve skutečnosti *universální* vztah. Lze k němu dospět různými cestami, z nichž však žádná nemá povahu “teorému s důkazem”. Podívejme se například, jak se vyvíjí kinetická energie tělesa T, jestliže na těleso působí síla $\vec{f}$, a to tak, že veškerá její práce se spotřebuje na urychlení tělesa (tedy nic nejde na zvýšení klidové hmotnosti — síla těleso “neohřívá”). Ze vztahu (4.18) máme ihned

$$\mathrm{d}T = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(mc^2)\,,$$

což jest nepochybně integrovati přes rychlost (neboť T se “dle definice” mění s rychlostí),

$$T - T_{\rm in} = \int_{T_{\rm in}}^{T}\mathrm{d}T = \int_{v_{\rm in}}^{v}\mathrm{d}(mc^2) = mc^2 - m_{\rm in}c^2\,,$$

kde $m \equiv m(v)$, $m_{\rm in} \equiv m(v_{\rm in})$. Bude-li těleso urychlováno (vůči danému inerciálnímu systému) z klidu ($v_{\rm in} = 0$, $T_{\rm in} = 0$, $m_{\rm in} = m_0$), máme tedy

$$T = mc^2 - m_0c^2\,, \qquad \text{neboli (sugestivněji)} \qquad mc^2 = m_0c^2 + T\,. \tag{4.19}$$

Člen m_0c^2 je “čistě klidový”, člen T “čistě pohybový”. Jak jinak vztah *interpretovat* než tak, že *celková energie tělesa je součtem jeho klidové a kinetické energie*, tedy že

$$E = E_0 + T, \qquad \text{kde} \quad \boxed{E = mc^2}, \quad \text{(tudíž)}\ E_0 = m_0c^2\,. \tag{4.20}$$

To ovšem znamená, že celková hmotnost a energie jsou ekvivalentní veličiny, úměrné přes faktor c^2. Mimochodem, tento faktor je obrovský, takže v jednom kilogramu látky (v klidu!) je skoro 10^{17} joulů energie; zhruba tolik se uvolnilo např. při výbuchu sopky Mount Pinatubo v r. 1991 — největším sopečném výbuchu od r. 1912.

Celková energie mc^2 není invariantní (protože hmotnost m není invariant), a to zjevně díky neinvarianci kinetické části energie, protože klidová část m_0c^2 invariantní je. Přítomnost tohoto invariantního členu mimochodem implikuje, že na rozdíl od klasické mechaniky má v relativitě těleso určitou energii “už za to, že existuje”, tedy aniž by se vůči vztažnému IS muselo pohybovat, a je to pravda i v případě, že vůbec s ničím neinteraguje (a nemá tedy ani žádnou potenciální část energie).

4.4.2 Vztah energie a hybnosti

V kapitole o čtyř-hybnosti jsme nepočítali prostoročasovou "normu" tohoto čtyř-vektoru, tak to zde napravíme, a to hned dvěma způsoby — dosazením definice $p^\mu = m_0 u^\mu$ a dosazením složek $p^\mu = (mc, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$. Porovnáním výsledků získáme vztah mezi energií a hybností:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \begin{cases} m_0^2\, \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -m_0^2 c^2 \\ -m^2c^2 + p^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E^2 = c^2(m_0^2 c^2 + p^2)} \,. \tag{4.21}$$

Tento vztah je velmi důležitý hlavně v částicové fyzice.[6] Kvadrát energie E^2 a kvadrát tří-hybnosti p^2 sice nejsou invarianty, ale jejich rozdíl $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$ tedy invariantem je. Invariantní nadplocha (třírozměrný hyperboloid), kterou tato formule v Minkowského prostoročasu definuje, se nazývá **hmotnostním hyperboloidem** (anglicky často *mass shell*).

Limitní případy vztahu: je-li kinetický člen malý proti klidovému, $p^2 \ll m_0^2 c^2$, rozvineme

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \doteq m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

a poznáváme klasický kinetický člen (kromě toho ovšem i klidový příspěvek, který nemá klasickou analogii). Opačnou, "rychlou" limitu představuje případ částic s $m_0 = 0$. Skutečně, aby takové částice mohly mít nenulovou energii a hybnost ($E = m_0 \gamma c^2$, $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$), musejí se pohybovat rychlostí světla ($\gamma \to \infty$). V jejich případě je celá energie kinetické povahy,

$$E = T = pc \qquad \left(\text{ve vlnovém jazyce } \; = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega = \hbar c k\right)$$

(h je Planckova konstanta, $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$, ν je frekvence a $\omega \equiv 2\pi\nu$ kruhová frekvence, $\lambda = \frac{c}{\nu}$ je vlnová délka a $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ vlnočet), a pomocí ní můžeme definovat "efektivní" (setrvačnou) hmotnost částic

$$m \equiv \frac{E}{c^2} = \frac{p}{c} \,.$$

4.4.3 Kovariantní vztah pro energii

Hmotnost-energie je časovou složkou čtyř-hybnosti a jak jsme zjistili v odstavci o srážkách, *není* to invariantní veličina. Vztah $p^t = mc = \frac{E}{c}$ ale *lze* napsat kovariantně. Abychom vymysleli jak, stačí uvážit, že "časová složka" je průmětem na časovou osu určitého systému, což ovšem znamená průmět na čtyř-rychlost jakéhokoliv pozorovatele, který vůči tomuto systému stojí. Zobecnění na *libovolného* pozorovatele je nasnadě: energie tělesa (částice) *vůči určitému pozorovateli v daném místě* je dána tím, co je *pro tohoto pozorovatele* časovou složkou p^μ, to znamená průmětem p^μ na *jeho* čtyř-rychlost $\hat{u}^\mu$,

$$\hat{E} = -p_\sigma \hat{u}^\sigma = m_0 \hat{\gamma} c^2 \,. \tag{4.22}$$

Označili jsme $\hat{\gamma}$ relativní Lorentzův faktor,

$$\hat{\gamma} c^2 \equiv -u_\sigma \hat{u}^\sigma = \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{c^2}}} \,, \qquad \text{kde } \; \hat{v}^2 \equiv \hat{v}_\iota \hat{v}^\iota$$

[6] Dá se napsat i jiným úhledným způsobem, $p^2 = (m^2 - m_0^2)c^2$.

a $\hat{v}^\mu$ je relativní rychlost částice vůči pozorovateli. Tato rychlost představuje normálovou složku čtyř-rychlosti částice u^μ vůči pozorovatelově čtyř-rychlosti $\hat{u}^\mu$,

$$u^\mu = \hat{\gamma}(\hat{u}^\mu + \hat{v}^\mu)\,, \qquad \text{kde} \;\; \hat{v}_\sigma \hat{u}^\sigma = 0\,. \tag{4.23}$$

Snadno se přesvědčíme, že "to sedí": vynásobením rozkladu $\hat{u}_\mu$ vyjde identita $-\hat{\gamma}c^2 = -\hat{\gamma}c^2$, vynásobením $\hat{v}_\mu$ vyjde $u^\mu \hat{v}_\mu = \hat{\gamma}\hat{v}^2$ a vynásobením u_μ vyjde $-c^2 = -\hat{\gamma}^2 c^2 + \hat{\gamma}\hat{v}^\mu u_\mu$, což po dosazení $u^\mu \hat{v}_\mu = \hat{\gamma}\hat{v}^2$ z předchozího průmětu dává $1 = \hat{\gamma}^2\left(1 - \frac{\hat{v}^2}{c^2}\right)$, tedy definici $\hat{\gamma}$.

Vztah $\hat{E} = -p_\sigma \hat{u}^\sigma$ je zjevně kovariantní, tedy lze vyjádřit "BÚNO" v jakýchkoli souřadnicích (a nejen inerciálních). Speciálně v systému spojeném s pozorovatelem je $\hat{u}^\mu = (c, 0, 0, 0)$, takže relativní energie přechází v "souřadnicovou" hodnotu, související obvyklým způsobem s časovou složkou čtyř-hybnosti, $\hat{E} = -p_t c\,(\equiv E)$.

Zatím jsme evidentně hovořili o částicích s $m_0 \neq 0$ (až na občasné "limitní" zmínky tomu tak bylo v celé této části), ale vztah $\hat{E} = -p_\sigma \hat{u}^\sigma$ je skutečně zcela obecný — platí i pro fotony. V tom případě však roli čtyř-rychlosti (tečného vektoru ke světočáře) hraje tzv. vlnový vektor k^μ (viz kap. 5.5) a čtyř-hybnost s ním souvisí vztahem $p^\mu = \hbar k^\mu$. Časovou složkou vlnového čtyř-vektoru je $\frac{\omega}{c}$, takže skutečně $p^0 = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}$ jako u "hmotných" částic. Z průmětu $\hat{E} = -p_\sigma \hat{u}^\sigma$ pak plyne relativní energie vyjádřená způsobem obvyklým u fotonů, tj. pomocí relativní frekvence (případně vlnové délky).

4.5 Otázka nadsvětelných rychlostí a princip kauzality

Pohyby rychlostí větší než je rychlost světla c jsme zatím nijak "nezakázali", ale na mnoha místech bylo zřejmé, že případy $v = c$ a $v > c$ vedou k problémům a že je kdyžtak třeba je řešit zvlášť. Nejviditelnější potíž je s Lorentzovým faktorem $\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, který pro $v \to c$ diverguje a pro $v > c$ je imaginární. Pokud by se jednalo o γ vystupující v Lorentzově transformaci, tedy pokud by v značilo vzájemnou rychlost inerciálních systémů, mezi nimiž přecházíme, pak "čárkovaný" systém by měl podél os imaginární hodnoty. Z toho důvodu se *transformace* s nadsvětelnou rychlostí neuvažují (nemají fyzikální význam). Podobně nemá (ani matematický) smysl ani transformace s $v = c$, tj. do systému, jehož osy by ležely na plášti světelného kuželu. Jinou věcí ale je, že existují prostorupodobné světočáry a že se můžeme ptát, co by se stalo, kdyby se po takových světočárách něco pohybovalo (kdyby se podél nich šířila informace) — aniž bychom se snažili transformovat do spolu-pohybujících se systémů. V této podkapitole ukážeme, že světy podsvětelných, světelných a nadsvětelných rychlostí jsou z několika různých hledisek oddělené, navzájem nedosažitelné. Nakonec nadsvětelné rychlosti signálů odmítneme s poukazem na princip kauzality.

4.5.1 Zvláštnosti nadsvětelných rychlostí

Podívejme se, co by se stalo podle transformačního vztahu pro "obyčejnou" rychlost (2.5), tedy

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,w_x}\;,$$

kdyby se (např.) vůči "nečárkovanému" IS nějaký předmět pohyboval nadsvětelnou rychlostí w_x. Vůči IS' by se pohyboval také nadsvětelně, ale žádné problémy by podle této formule nemusely nutně nastat. Pro jakoukoliv hodnotu $w_x > c$ však existuje takový IS' — totiž IS' pohybující se vůči IS rychlostí $v = \frac{c^2}{w_x} < c$ —, vůči kterému by se předmět pohyboval *nekonečnou* rychlostí

w'_x. Ještě podivnější by byla situace ve všech systémech IS', pro které by platilo $vw_x > c^2$ a jmenovatel vztahu klesl pod nulu: z hlediska IS se takové systémy pohybují v kladném směru x rychlostí $v < c$, sledovaný předmět je předhání (protože se pohybuje rychlostí $w_x > v$), ale přitom vůči IS' se pohybuje *v záporném směru* osy x' (Lorentzova transformace dává $w'_x < 0$)!

Objekt pohybující se nadsvětelně má vůči (libovolnému) IS řadu parametrů imaginárních: na první pohled $\mathrm{d}\tau$, (a díky tomu) γ, u^μ, také však m_0 (jeho čtyř-hybnost je prostorupodobná, takže musí být $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m_0^2 c^2 > 0$). Zajímavé je, že nejdůležitejší veličina — čtyř-hybnost — je reálná, jak je zřejmé přímo z definice $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0\gamma(c, \vec{v}) = (mc, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$. Ryzí imaginárnost γ a m_0 se však vynásobí v něco *záporného*, takže hmotnost-energie nadsvětelně se pohybujícího předmětu vychází záporná (alternativně se dá říci, že čtyř-hybnost je orientována do minulosti — má zápornou časovou složku). Nyní ještě pohleďme na pohybovou rovnici. Pokud její parametr τ "přeškálujeme" na $\frac{\tau}{m_0}$ (za předpokladu, že m_0 je konstantní), je rovnice reálná a dá se s ní normálně pracovat. (Takto se s ní dá pracovat i v podsvětelném případě, takže úprava ji nijak nepokazí.) Zdá se tedy, že aspoň některé části speciální relativity by se s nadsvětelnými rychlostmi docela snadno vyrovnaly.

4.5.2 Oddělené světy $\{v < c\}$, $\{c\}$, $\{v > c\}$

Třírozměrná rychlost se při Lorentzově transformaci obecně mění, avšak — jak je vidět (nejlépe na prostoročasovém diagramu **??**) z chování os (t, x) — časupodobné směry zůstávají časupodobnými, světelné světelnými (světelný kužel je invariantní) a prostorupodobné prostorupodobnými. Je to jasné z toho, že hodnota skalárního součinu $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$, která rozhoduje o prostoročasovém charakteru jakéhokoli vektoru V^μ, je invariantní. Je-li řeč konkrétně o pohybu, jde o charakter tečného vektoru k příslušné světočáře. Výrok lze snadno vyslovit i pomocí třírychlosti, jak už ostatně víme: nechť se pohyb děje po světočáře, jejíž určitý element odpovídá intervalu

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 \quad \ldots \text{ vydělením } \mathrm{d}t^2 : \quad \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} = -c^2 + v^2 \; .$$

Hodnota $\mathrm{d}s^2$ je ovšem invariantní a c^2 také, takže v jakémkoliv jiném (čárkovaném) systému dostaneme obdobně

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t'^2} = -c^2 + v'^2 \; .$$

Rychlost v' je obecně odlišná od rychlosti v a hodnota levé strany také — ale *znaménko* levé strany je stejné, je určeno (invariantní) hodnotou $\mathrm{d}s^2$. Tím pádem je invariantní také to, zda je rychlost v menší, větší, nebo rovna c. Kdo se chce potrápit trochu víc, může přetransformovat velikost třírozměrné rychlosti podle vztahů (2.5)–(2.7) speciální Lorentzovy transformace:

$$\begin{aligned} w'^2 \equiv (w'_x)^2 + (w'_y)^2 + (w'_z)^2 \quad &= \quad \frac{(w_x - v)^2 + [(w_y)^2 + (w_z)^2]\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vw_x}{c^2}\right)^2} = \\ &= \quad \ldots = c^2\left[1 - \frac{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vw_x}{c^2}\right)^2}\right] , \end{aligned}$$

po vydělení c^2 a úpravě tedy[7]

$$1-\frac{w'^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vw_x}{c^2}\right)^2}\qquad \ldots \text{ neboli}\quad \gamma(w')=\gamma(w)\gamma(v)\left(1-\frac{vw_x}{c^2}\right)\ .$$

Za předpokladu $v^2<c^2$ je znaménko $1-\frac{w'^2}{c^2}$ stejné jako znaménko $1-\frac{w^2}{c^2}$.

Světy podsvětelných, světelných a nadsvětelných rychlostí jsou tedy oddělené ve smyslu transformace — nedá se mezi nimi přecházet Lorentzovou transformací (s podsvětelnou rychlostí). Krátce řečeno, výroky $w<c$, $w=c$, $w>c$ jsou *absolutní*.

Světelná rychlost je oboustrannou bariérou i ve smyslu energetickém, jak je jasné z výrazu pro energii (hmotnost) $E=m_0\gamma c^2$: těleso s $m_0\neq 0$ se musí pohybovat buď podsvětelně (je-li jeho m_0 reálná kladná), nebo nadsvětelně (je-li m_0 imaginární), protože při $v=c$ by jeho energie byla nekonečná; těleso (částice) s $m_0=0$ se naopak *musí* pohybovat rychlostí světla, protože jinak by jeho energie byla nulová. Částice s reálnou kladnou m_0 tedy nejde urychlit na rychlost světla — a částice s imaginární m_0 ("tachyony") naopak nejde na rychlost světla zbrzdit.

4.5.3 Hyperbolický pohyb

Klíčem k mechanickému pochopení tohoto energetického závěru je zřejmě závislost hmotnosti na rychlosti: podle relativity je prostě urychlení hmotného tělesa obtížnější než v klasické mechanice, protože odpor tělesa vůči urychlení (charakterizovaný $m(v)$) s rychlostí roste a směrem k rychlosti světla jde do nekonečna. Podíváme se, jak se takové urychlení přesně děje. Představme si, že urychlujeme po přímce těleso s nenulovou klidovou hmotností. Inerciální systém, v němž budeme děj sledovat, nastavíme tak, aby pohyb probíhal podél některé z os, a soustředíme se již jen na tuto netriviální prostorovou složku pohybové rovnice: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=f$. Pro obecnou sílu f bychom rovnici nemuseli umět integrovat, ale zde nám jde o získání základní představy o zrychleném pohybu, takže je na místě uvažovat intuitivně co nejjednodušší případ. Takovým je urychlení konstantní silou (silou neproměnnou v čase). Integrace je v tom případě úplně snadná:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=f=\text{konst}\quad\Rightarrow\quad p=ft,\quad \text{tj.}\ \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=ft\quad\Rightarrow\quad v=c\,\frac{ft}{\sqrt{m_0^2c^2+f^2t^2}}\ . \tag{4.24}$$

Integrační konstantu jsme nastavili na nulu, což odpovídá urychlování z klidu, $v(t=0)=0$. Pro $ft\ll m_0c$ vztah přechází v klasické $v=\frac{ft}{m_0}=at$; opačná limita se však značně liší, totiž rychlost zůstane vždy menší než c, pouze se k c limitně přiblíží, $\lim\limits_{ft\to\infty}v=c$ (podle klasického $v=\frac{ft}{m_0}$ lze dosáhnout libovolně vysoké rychlosti, roste totiž lineárně s t).

Snadno lze provést i druhou integraci a najít světočáru $x(t)$,

$$x=c\int_0^t\frac{\frac{ft}{m_0c}}{\sqrt{1+\frac{f^2t^2}{m_0^2c^2}}}\,\mathrm{d}t=\frac{m_0c^2}{f}\int_0^\xi\frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{m_0c^2}{f}\sqrt{1+\xi^2}=\frac{m_0c^2}{f}\sqrt{1+\frac{f^2t^2}{m_0^2c^2}}\ . \tag{4.25}$$

Opět jsme zvolili speciálně integrační konstantu — tak, že těleso na začátku urychlování není v počátku, ale v místě $x(t=0)=\frac{m_0c^2}{f}$. Přepíšeme-li po umocnění na druhou výsledek do tvaru

$$x^2-c^2t^2=\frac{m_0^2c^4}{f^2}\ ,$$

[7] Ve skutečnosti tento výsledek už známe z kapitoly o srážkách — viz vztah (4.6).

je vidět, že na prostoročasovém diagramu se jedná o hyperbolu s asymptotami $x = \pm ct$. Pohybu pod působením konstantní síly v teorii relativity se proto říká **hyperbolický pohyb**. Pro srovnání, v klasické mechanice je výsledkem takového působení “rovnoměrně zrychlený” pohyb, který, jak známo, se děje po *parabole*, $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{ft^2}{2m_0}$.

Je zajímavé vyjádřit získaný pohyb v závislosti na vlastním času. Integrací vztahu

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{f^2t^2}{m_0^2c^2 + f^2t^2}} = \frac{m_0c}{\sqrt{m_0^2c^2 + f^2t^2}}$$

dostaneme (opět využijeme neproměnnosti síly f)

$$\frac{f\tau}{m_0c} = \operatorname{arcsinh}\frac{ft}{m_0c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{ft}{m_0c} = \sinh\frac{f\tau}{m_0c}\,, \tag{4.26}$$

což můžeme dosadit zpět do rychlosti a polohy,

$$v = c\tanh\frac{f\tau}{m_0c}\,, \qquad x = \frac{m_0c^2}{f}\cosh\frac{f\tau}{m_0c}\,. \tag{4.27}$$

S vlastním časem tedy poloha roste dost rychle! Kosmická loď, která by vystartovala z klidu (v=0) z místa $x_{\mathrm{in}} \equiv x(\tau{=}0) = m_0c^2/f$ a tahem svých motorů udržovala “vlastní” zrychlení (zrychlení v okamžitém klidovém systému lodi) f/m_0 na konstantní hodnotě rovné gravitačnímu zrychlení na povrchu Země $9.81\,\mathrm{m/s^2}$, by měla za rok *svého* času τ vůči Zemi rychlost $v \doteq 0.775\,c$ ($\sim \gamma \doteq 1.582$) a byla by od ní ve vzdálenosti $x - x_{\mathrm{in}} \doteq 0.564$ světelného roku. Po deseti letech vlastního času by ovšem už rychlost byla blízká c ($\gamma \doteq 15430$) a dosažená vzdálenost $x - x_{\mathrm{in}} \doteq 14779$ světelných let. Pokud by se někdo takto vydal na výlet, 10 let svého času zrychloval, pak 10 let brzdil, pak zase 10 let zrychloval zpět a nakonec 10 let brzdil před přistáním na Zemi (tj. udržoval by na lodi po celou dobu tíhové podmínky jako na Zemi), tak po návratu by zjistil, že na Zemi zatím uběhlo 59119 let! Vztahy se prostě (exponenciálně) rychle rozbíhají pro velké hodnoty časů — během obdobné cesty, která by na lodi trvala čtyři roky, by na Zemi uběhlo jen o $3/4$ roku víc.

Ani kratší — např. ten čtyřroční — zájezd s $f = \mathrm{konst}$ však zatím cestovní agentury nenabízejí.[8] Důvod je energetický, jak snadno spočítáme, protože síla je v našem případě konstantní a působí stále v podélném směru, takže

$$E = f \cdot [\text{proběhlá dráha}]_0^{\tau_{\mathrm{fin}}} = m_0c^2\left(\cosh\frac{f\tau_{\mathrm{fin}}}{m_0c} - 1\right)$$

pro jeden (ze čtyř) úseků cesty. Pro zmíněný čtyřroční výlet ($\Leftrightarrow \tau_{\mathrm{fin}} = 1\,\mathrm{rok}$) s garantovanou pozemskou hodnotou zrychlení $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ vychází celkem zhruba 2.329-krát klidová energie kosmické lodi. Tím se ovšem úloha úplně rozpadá, protože pokud si má loď vézt palivo s sebou, musí rozhodně tvořit většinu (počáteční) hmotnosti lodi a úlohu by bylo třeba řešit jako problém s proměnnou klidovou hmotností.[9]

---

[8] Můžete ho však absolvovat s Ústavem teoretické fyziky, dokonce bezplatně, na stránkách [9] (viz interaktivní scénu 11 tohoto krátkého filmu) nebo [5] mých kolegů.

[9] S takovýmto případem, kdy je do pohonu tělesa nutno investovat část jeho klidové hmotnosti (“palivo”), se setkáváme velmi často — viz ostatně i “provoz” živých organismů. I zde situace odpovídá tomu, že působící čtyř-síla není kolmá ke čtyř-rychlosti tělesa.

4.5.4 Tachyony a princip kauzality

Existenci tachyonů striktně vzato nelze vyloučit a zatím jsme proti ní ani nic nenamítali. Pokud by však takové částice mohly interagovat s "naším" světem podsvětelných rychlostí, tj. pokud by se informace mohly přenášet nadsvětelnou rychlostí, byl by to vážný problém. Problém by však neměla ani tak teorie relativity, jako spíš samotná myšlenka příčinnosti (a tím vůbec způsob uvažování, na který jsme zvyklí — tedy alespoň tady na MFF).

V kapitole o základních vlastnostech Minkowského prostoročasu jsme kladli zvláštní důraz na jeho kauzální strukturu, určenou pro každou událost "jejím", místním světelným kuželem. Připomeňme, že světelný kužel rozděluje prostoročas na tři oblasti — absolutní minulost, absolutní budoucnost a relativní přítomnost uvažované události (označme ji **U**). Absolutní minulost události **U**, tedy minulou část jejího světelného kuželu včetně vnitřku, tvoří události, které se z hlediska všech IS staly před **U**; všechny takové události lze s **U** spojit časupodobnou nebo nulovou světočárou. Totéž platí i pro absolutní budoucnost, tam je ale časové pořadí opačné. "Relativní přítomnost" události **U** tvoří takové události, které se v některých IS staly před **U**, v některých naopak po ní a v jednom IS (až na volbu počátku) současně s **U**. Žádnou z nich nelze s **U** spojit světočárou, která by byla všude časupodobná nebo nulová.

Zatím jsme o událostech mluvili jako o nezávislých, ale nyní se ptejme, co kdyby spolu v jednotlivých uspořádáních kauzálně souvisely. Události v absolutní minulosti **U** mohly **U** ovlivnit prostřednictvím signálu, který cestoval po časupodobné nebo nulové světočáře, tedy signálu šířícího se podsvětelnou nebo světelnou rychlostí. Události v absolutní budoucnosti **U** mohly být naopak událostí **U** *ovlivněny* prostřednictvím podsvětelného či světelného signálu. Události v relativní přítomnosti **U** dělí od události **U** prostorupodobný interval, takže mohou s **U** souviset jen prostřednictvím signálů pohybujících se nadsvětelnou rychlostí. Pokud by se tedy informace mohly šířit nadsvětelnou rychlostí, mohly by spolu kauzálně souviset i události, jejichž časové pořadí je relativní (závisí na IS). V některých IS by se takové signály šířily do minulosti. To by však bylo ve sporu s principem kauzality, který žádá, aby vzhledem ke všem systémům vždy příčina předcházela před následkem.[10] Pokud tedy nevyloučíme samotnou existenci tachyonů, musíme aspoň "zakázat", aby jakkoli interagovaly s "naším světem" (což je ovšem prakticky totéž).

Opět můžeme uzavřít, že světy $\{v > c\}$, c a $\{v < c\}$ jsou oddělené — tentokrát kauzálně. Svět, ve kterém "žije" světlo, tvoří neprostupnou "bariéru" mezi podsvětelnými a nadsvětelnými rychlostmi. Lze to říct i tak, že tato bariéra zabraňuje, aby někdo mohl prostorový rozměr vnímat jako čas a naopak.

[10] Nejedná se zde tedy o "filosofický" pojem kauzality, podle něhož se "nic neděje bez příčiny". (Na *tomto* kupodivu fyzika tak striktně netrvá.)

KAPITOLA 5

Elektrodynamika ve vakuu

Na rozdíl od *relativistické* mechaniky píšeme zde jen “elektrodynamika”. Elektrodynamika — myslíme Maxwellova elektrodynamika — je totiž relativistická automaticky. Jistě, její studium přece kdysi vedlo k Michelsonovu-Morleyovu experimentu, k Lorentzově transformaci, a nakonec ke speciální relativitě. Úkolem této kapitoly tak nebude objevit nějakou novou fyziku, úkolem bude přepsat základní rovnice elektrodynamiky do čtyřrozměrné tenzorové podoby, v níž se jejich lorentzovská invariance stane zjevnou. Uvidíme, že prostoročasové podání bude v případě elektrodynamiky také obzvlášť stručné a elegantní. Budeme postupovat tak, že si “tipneme” základní čtyř-rozměrné veličiny podle toho, jak by se nám hodily pro zestručnění rovnic, rovnice zapíšeme, a průběžně budeme v různých chvílích kontrolovat, zda zavedené veličiny a rovnice mají skutečně invariantní význam.

5.1 Čtyřrozměrný proud, potenciál a tenzor EM pole

Začneme na “pravé”, zdrojové straně teorie. Zdroji elektromagnetického pole jsou náboje a proudy, přitom hustota elektrického náboje ρ je skalár a hustota elektrického proudu $\vec{J} = \rho\vec{v}$ vektor ($\vec{v}$ je rychlost pohybu nabité substance), takže když vezmeme v úvahu jejich rozměr, je vlastně jediná možnost, jak z nich utvořit čtyř-vektor:

$$J^\mu \equiv (\rho c, \vec{J}) = (\rho c, \rho\vec{v}) = \rho(c, \vec{v}) = \frac{\rho}{\gamma}\,\gamma(c, \vec{v}) = \frac{\rho}{\gamma}\,u^\mu = \rho_0 u^\mu \ . \tag{5.1}$$

Zavedenou **čtyřrozměrnou hustotu proudu** (“čtyř-proud”) jsme hned vyjádřili velmi užitečným způsobem pomocí čtyř-rychlosti u^μ a **klidové hustoty náboje**

$$\rho_0 \equiv \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0} = \frac{\mathrm{d}Q}{\gamma \mathrm{d}V} = \frac{\rho}{\gamma} \ ,$$

kde Q je celkový náboj tělesa. Vztah mezi klidovým a “pohybujícím se” elementem objemu $\mathrm{d}V_0 = \gamma \mathrm{d}V$ je zřejmý z toho, že při pohybu dochází k relativní kontrakci jeho rozměru v jednom (“podélném”) směru faktorem γ (a klidový objem je ten největší). Ještě názorněji si lze odpovídající přepočet $\rho = \gamma\rho_0$ zkontrolovat tak, že si představíme, že máme daný element objemu a měříme, kolik se do něj vejde náboje. Pokud se substance nesoucí náboj vůči elementu pohybuje, vejde se jí do objemu γ-krát víc, než kdyby byla vůči objemu v klidu, protože její sloupec bude vůči systému elementu ve směru pohybu γ-krát zkontrahovaný. (Klidová hustota je tedy naopak ze všech nejmenší.) Podstatné ovšem je, že klidový objem je invariantní, takže pokud je invariantní také elektrický náboj, je invariantní i jeho klidová hustota ρ_0. Nemáme žádný důvod si myslet, že tomu tak není — ve všech *experimentech* jsou náboje nezávislé na systému.[1] Budeme proto *předpokládat*, že *náboj je invariantem Lorentzovy transformace*, a příležitostně si uvědomíme, co s tím souvisí a co by se stalo, kdyby invariantní nebyl. Nyní tedy vidíme, že pokud *je* náboj invariantní, pak díky tomu, že čtyř-rychlost je čtyř-vektorem, je čtyř-vektorem také zavedený čtyř-proud $J^\mu = \rho_0 u^\mu$. To ovšem znamená, že jeho "kvadrát"

$$-c^2\rho^2 + \vec{J}\cdot\vec{J} = \eta_{\mu\nu}J^\mu J^\nu = -c^2\rho_0^2 \tag{5.2}$$

je invariantní.

Popis "levé", polní strany teorie začneme u pojmu **čtyř-potenciálu**. Podobně jako u proudové hustoty je vlastně jediný způsob, jak ho vytvořit ze skalárního a vektorového potenciálu:

$$A^\mu \equiv \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) . \tag{5.3}$$

Že je tato čtveřice funkcí souřadnicovou reprezentací čtyř-vektoru, nelze ověřit přímočaře, protože "jak se to transformuje" nevíme. Navíc to nelze stanovit ani porovnáním měření v různých soustavách, jelikož potenciály nejsou měřitelnými veličinami. Měřitelná jsou jen pole, která se z nich získají derivacemi. Takže pojďme nejdříve k polím a pak se k otázce vrátíme.

Začneme u magnetického pole. To je dáno $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, po složkách $B^i = \epsilon^{ijk}A_{k,j}$. Tohle ale na čtyř-rozměrný vektor přímočaře nerozšíříme, protože $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_{\lambda,\kappa}$ není vektorem, ale tenzorem druhého řádu. Souvisí to s tím, že $\vec{B}$ je tzv. axiální vektor. Axiální vektory se jen tváří jako vektory, ale ve skutečnosti jsou to antisymetrické tenzory 2. řádu (tzv. bivektory). Poznáme je podle toho, že při inverzi souřadnic nezmění znaménko. Typicky vznikají operací, která má dobrý význam právě jen v dimenzi 3 — třírozměrným vektorovým součinem "normálních" (tzv. polárních) vektorů. Zmíněný "dobrý význam" je umožněn tím, že ve 3D má bivektor 3 nezávislé složky — a ty se právě "vejdou" do 3D vektoru. Ve 4D má bivektor 6 nezávislých složek, a to se do čtyř-vektoru nevejde. . . Tenzorem asociovaným konkrétně s naším axiálním vektorem B^i je tenzor $B_{jk} = A_{k,j} - A_{j,k}$, souvisejí spolu vztahy

$$B^i = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}B_{jk} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_{jk} = \epsilon_{jkl}B^l$$

(snadno dosazením zjistíme, že vztahy jsou kompatibilní). Přirozeným a správným tipem je pokusit se do čtyř rozměrů rozšířit tento asociovaný tenzor magnetického pole B_{jk}. Odpovídající čtyř-tenzor označíme tradičně $F_{\mu\nu}$:

$$\boxed{F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}} . \tag{5.4}$$

Jeho prostoro-prostorové složky tvoří samozřejmě $B_{jk} = \epsilon_{jkl}B^l$, ale zajímalo by nás, co je na $F_{0j} = -F_{j0}$ místech (diagonální složky jsou samozřejmě nulové díky antisymetrii):

$$F_{0j} = A_{j,0} - A_{0,j} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = -\frac{E_j}{c} ,$$

[1] Uvažte, že závislost náboje na soustavě by znamenala, že jakýkoliv předmět by se např. mohl jevit neutrálním z jedné soustavy, zatímco nabitým z jiné. Podobně třeba nábojová bilance srážkových experimentů na urychlovačích by mohla záviset na soustavě, z jaké se výsledek sleduje.

kde jsme jen dosadili $A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ a využili standardního vztahu $E_j = -\phi_{,j} - A_{j,t}$. V určité (ale jakékoliv) inerciální soustavě tedy reprezentuje veličinu $F_{\mu\nu}$ matice

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{E_y}{c} & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{E_z}{c} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{c} & \frac{E^y}{c} & \frac{E^z}{c} \\ -\frac{E^x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E^y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E^z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

(kontravariantní tvar se získá normálně zvednutím indexů, $F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu}$, jsou v něm jen prohozena znaménka v "časovém" řádku a sloupci; poznamenejme, že rozlišování horních a dolních indexů u $\vec{E}$ a $\vec{B}$ je v případě kartézských složek jen "kosmetické", ne podstatné). Je velmi potěšitelné, že jsme získali veličinu, která obsahuje elektrické i magnetické pole — takže vektor $\vec{E}$ už do 4D rozšiřovat nemusíme. Veličině $F_{\mu\nu}$ říkáme **tenzor elektromagnetického pole**. Je ale opravdu tenzorem? Je dána gradientem A_μ a gradient má povahu kovektoru, takže $F_{\mu\nu}$ je tenzorem, pokud je čtyř-potenciál A_μ (ko)vektorem. To nás ovšem stále čeká ověřit!

5.2 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole mají na levé straně první derivace $\vec{E}$ a $\vec{B}$, takže ve čtyřrozměrném tvaru tam budou jistě první derivace $F^{\alpha\beta}$. V úvahu připadá buď gradient, nebo divergence. V první sérii rovnic vystupuje vpravo proudová hustota, takže v této sérii bude zřejmě divergence $F^{\alpha\beta}$ (protože ta je vektorem). Skutečně, 1. sérii Maxwellových rovnic představuje stručný zápis

$$\boxed{F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu J^\alpha}, \tag{5.6}$$

kde μ je permeabilita vakua.[2] Ověříme, že jeho složky odpovídají obvyklé třírozměrné podobě rovnic. Využijeme přitom často pohledu na matice (5.5). Složka $\alpha = 0$ dává vlevo

$$F^{0\beta}{}_{,\beta} = F^{0j}{}_{,j} = \frac{1}{c}E^j{}_{,j} = \frac{1}{c}\,\mathrm{div}\vec{E}$$

a vpravo $\mu J^0 = \mu c\rho$, takže s využitím známého vztahu (platného pro vakuum!) $\epsilon\mu c^2 = 1$ dostáváme po vynásobení ϵc rovnici $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$. Složky $\alpha = i$ dávají vlevo

$$F^{i\beta}{}_{,\beta} = F^{i0}{}_{,0} + F^{ij}{}_{,j} = -\frac{1}{c^2}E^i{}_{,t} + \epsilon^{ijk}B_{k,j} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^i}{\partial t} + \left(\mathrm{rot}\vec{B}\right)^i$$

a vpravo μJ^i, takže po vydělení μ — a opět s využitím vztahu $\epsilon\mu c^2 = 1$ — dostáváme rovnici $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

V druhé sérii Maxwellových rovnic zdroje vůbec nevystupují. A druhou možností, jak zderivovat tenzor elektromagnetického pole, je jeho gradient (tedy derivace podle indexu, který se "nevysčítá"). Samotný gradient $F_{\mu\nu,\rho}$ má příliš nezávislých složek (totiž 6x4=24) na to, aby představoval 4 rovnice, ale to se dá zredukovat cyklickou permutací: spočítáme tedy (z definice)

$$F_{[\mu\nu,\rho]\mathrm{cykl}} \equiv F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = A_{\nu,\mu\rho} - A_{\mu,\nu\rho} + A_{\mu,\rho\nu} - A_{\rho,\mu\nu} + A_{\rho,\nu\mu} - A_{\nu,\rho\mu} = 0\ . \tag{5.7}$$

[2] Pokud se probírá také elektrodynamika *v prostředí*, značí se permeabilita vakua (tedy tato speciální hodnota veličiny μ) obvykle μ_0, ale my zde budeme ve vakuu stále, tak to nebudeme indexem zdůrazňovat. Stejně tak permitivitu vakua budeme značit prostě ϵ. "Intenzity" a "indukce" polí tedy budou všude ve vztahu $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Výraz vlevo je *antisymetrický ve všech indexech*, jak se snadno ověří prostě jejich prohozením (provedeme to s $\mu \leftrightarrow \rho$, ale je jedno, pro kterou dvojici se to vyzkouší, protože díky cyklické permutaci vystupují ve výrazu všechny tři indexy zcela rovnocenně):

$$F_{[\rho\nu,\mu]\mathrm{cykl}} \equiv F_{\rho\nu,\mu} + F_{\mu\rho,\nu} + F_{\nu\mu,\rho} = -F_{\nu\rho,\mu} - F_{\rho\mu,\nu} - F_{\mu\nu,\rho} \equiv -F_{[\mu\nu,\rho]\mathrm{cykl}} \ .$$

Výraz, který je ve všech indexech antisymetrický, má ovšem "všechny diagonály" nulové: mají-li aspoň dva jeho indexy stejnou hodnotu, je příslušná složka automaticky nulová. Jako netriviální tedy zbývají jen možnosti $\mu\nu\rho = 123, 012, 013, 023$ plus jejich permutace. Permutace indexů však nanejvýš změní znaménko výrazu — a rovnice (5.7) mají na pravé straně nulu, takže permutace v našem případě žádnou novou informaci nepřinášejí. Rovnice tak představují jen 4 nezávislé netriviální vztahy. Pro $\mu\nu\rho = 123$ je to

$$\begin{aligned} 0 &= F_{[12,3]\mathrm{cykl}} \equiv F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} = \\ &= \epsilon_{12i} B^i{}_{,3} + \epsilon_{31i} B^i{}_{,2} + \epsilon_{23i} B^i{}_{,1} = B^3{}_{,3} + B^2{}_{,2} + B^1{}_{,1} = \mathrm{div}\vec{B} \end{aligned}$$

a pro $\mu\nu\rho = 0jk$

$$0 = F_{[0j,k]\mathrm{cykl}} \equiv F_{0j,k} + F_{k0,j} + F_{jk,0} = -\frac{1}{c}\, E_{j,k} + \frac{1}{c}\, E_{k,j} + \frac{1}{c}\, \epsilon_{jkl} B^l{}_{,t} \ ,$$

což po vynásobení $c\,\epsilon^{ijk}$ (a díky vztahům $-\epsilon^{ijk} E_{j,k} = \epsilon^{ikj} E_{j,k} = \epsilon^{ijk} E_{k,j}$, $\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta^i_l$) dává

$$0 = \epsilon^{ijk}(E_{k,j} - E_{j,k}) + \epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl} B^l{}_{,t} = 2\epsilon^{ijk} E_{k,j} + 2B^i{}_{,t} \ , \qquad \text{neboli} \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ .$$

Shrnutí Maxwellových rovnic:

$$\text{1. série :} \qquad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu J^\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ , \quad \mathrm{div}\vec{D} = \rho \ , \tag{5.8}$$

$$\text{2. série :} \qquad F_{[\rho\nu,\mu]\mathrm{cykl}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \ . \tag{5.9}$$

Vzpomeneme-li, že J^α je čtyř-vektor (a μ je invariant), pak má-li mít první série rovnic invariantní význam, konkrétně má-li to být vektorová rovnice, musí být $F^{\alpha\beta}$ tenzor. Jinak by jeho divergencí nemohl vzniknout čtyř-vektor. Druhá rovnice už je pak tenzorová "samozřejmě", protože gradientem tenzorů vznikají, jak víme, opět tenzory.

5.2.1 Rovnice kontinuity

Díky antisymetrii $F^{\alpha\beta}$ (a záměnnosti parciálních derivací) je $F^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} = 0$ (zúžení výrazu ve dvou antisymetrických a dvou symetrických indexech je ekvivalentní stopě součinu antisymetrické a symetrické matice, což je nula), takže divergence první sady Maxwellových rovnic vede k **rovnici kontinuity**:

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0 \, , \quad \text{tj.} \quad J^0{}_{,0} + J^i{}_{,i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J} = 0 \ . \tag{5.10}$$

Jak víme, gradient je kovektor, takže výsledkem divergence (zde skalárního součinu gradientu s vektorem) je invariant. Kdyby náboj nebyl invariantní, nebyla by invariantní ani rovnice kontinuity — tedy její pravá strana by nemusela být ve všech soustavách nulová. Tím se kruh uzavírá: rovnice kontinuity říká, že náboj nemá nikde vznikat nebo zanikat; pokud by náboj *nebyl* invariantem, pak by rovnice v některých soustavách neplatila, takže v těch by náboj *mohl* vzniknout či zaniknout.

5.2.2 Nejednoznačnost čtyř-potenciálu — kalibrační invariance teorie

Nyní se na Maxwellovy rovnice podíváme z druhé strany, jako na přírodou předložené fundamentální rovnice. Co s nimi? Jak víme, druhá sada je automaticky splněna, pokud se pole vyjádří pomocí potenciálů známým způsobem $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, čtyř-rozměrně zapsáno $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Kdybychom místo čtyř-potenciálu A_μ vzali jiný čtyř-potenciál

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \chi_\mu \ ,$$

kde χ_μ je nějaká čtveřice funkcí, pak $F_{\mu\nu}$ se změní na

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \tilde{A}_{\nu,\mu} - \tilde{A}_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu} - \chi_{\mu,\nu} \equiv F_{\mu\nu} + \chi_{\nu,\mu} - \chi_{\mu,\nu} \ ,$$

— tedy nezmění se, pokud bude platit

$$\chi_{\mu,\nu} = \chi_{\nu,\mu} \ .$$

Tato podmínka je splněna právě tehdy, když χ_μ je gradientem nějaké skalární funkce ($\equiv \chi$), tedy $\chi_\mu = \chi_{,\mu}$ (díky záměnnosti parciálních derivací).

Shrneme: čtyř-potenciál není určen jednoznačně, na polích (tím pádem na Maxwellových rovnicích) se *nic nezmění*, pokud provedeme "kalibrační transformaci"

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \chi_{,\mu} \ , \tag{5.11}$$

kde χ je libovolný skalár ["elektrodynamika je invariantní vůči kalibrační transformaci (5.11)"]. Tato **kalibrační volnost** je podstatným rysem elektrodynamiky. Lze jí také prakticky využít a zvolit funkci χ tak, aby potenciál nabyl podoby, která je pro daný problém co nejvýhodnější.

Nejobvyklejší volbu představuje **Lorenzova kalibrační podmínka**[3]

$$A^\beta{}_{,\beta} = 0 \, , \quad \text{tj.} \quad A^0{}_{,0} + A^i{}_{,i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0 \ . \tag{5.12}$$

Je zřejmé, jak se ke čtyř-potenciálu takovéto vlastnosti dá dostat od "obecného" případu A^β: využije se kalibrační volnosti, přejde se k $\tilde{A}^\beta = A^\beta + \chi^{,\beta}$, po novém potenciálu se požaduje $\tilde{A}^\beta{}_{,\beta} = 0$ a z toho dosazením vyplyne, že kalibrační transformaci je třeba provést s χ splňujícím rovnici

$$\chi^{,\beta}{}_{,\beta} \equiv \Box\chi = -A^\beta{}_{,\beta} \ .$$

Čtvereček značí tzv. d'Alembertův operátor, totiž součet druhých parciálních derivací; jedná se o rozšíření Laplaceova operátoru o časový člen v duchu skalárního součinu Minkowského,

$$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \ \left(\equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \equiv \partial^\nu\partial_\nu\right) \ = \eta^{00}\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} + \eta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \ .$$

Dále je zřejmé, že čtyř-potenciál není ani Lorenzovou podmínkou určen jednoznačně: můžeme jej bez porušení podmínky měnit o gradienty funkcí χ, které vyhovují d'Alembertově rovnici $\Box\chi = 0$.

Výhodnost Lorenzovy kalibrační volby je vidět na vlnové rovnici:

[3] Podmínka se jmenuje podle dánského fyzika L. Lorenze, nikoli podle jeho holandského kolegy H. A. Lorentze (pro nás spojeného především s transformací).

5.2.3 Vlnová rovnice

Druhou sadu Maxwellových rovnic jsme tedy identicky splnili volbou $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, ale ještě se musíme podrobněji podívat, co plyne dosazením tohoto vyjádření do první sady:

$$A^{\beta,\alpha}{}_{\beta} - A^{\alpha,\beta}{}_{\beta} = \mu J^{\alpha} \,.$$

V druhém členu vidíme $-\Box A^{\alpha}$. První člen lze díky záměnnosti parciálních derivací vynulovat volbou čtyř-potenciálu, který vyhovuje Lorenzově podmínce $A^{\beta}{}_{,\beta} = 0$,

$$A^{\beta,\alpha}{}_{\beta} = A^{\beta}{}_{,\beta}{}^{\alpha} = \left(A^{\beta}{}_{,\beta}\right)^{,\alpha} = 0 \,.$$

Pro čtyř-potenciály, které splňují Lorenzovu kalibrační podmínku, tedy první sada Maxwellových rovnic vede k **vlnové rovnici**

$$\Box A^{\alpha} = -\mu J^{\alpha} \,. \tag{5.13}$$

Vzpomeneme-li na definice $J^{\alpha} \equiv (c\rho, \vec{J})$, $A^{\alpha} \equiv \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$, snadno tuto čtyř-vektorovou rovnici rozepíšeme na známé třírozměrné tvary

$$(\alpha = 0 :) \quad \Box\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \,, \qquad\qquad (\alpha = j :) \quad \Box\vec{A} = -\mu\vec{J} \,.$$

Na vlnové rovnici je konečně přímočaře vidět, že čtyř-potenciál musí být čtyř-vektorem. Čtyř-proud na pravé straně je totiž čtyř-vektorem a d'Alembertův operátor vlevo je po algebraické stránce invariantem (je to skalární součin dvou gradientů a gradient je kovektorem). Kdo by to chtěl úplně přesně, ať si uvědomí kalibrační volnost v potenciálu (5.11): čtyř-potenciál vlastně *nemusí* být čtyř-vektorem, ale musí se od čtyř-vektoru lišit nejvýše o člen, který se dá vyjádřit jako gradient skalární funkce. (Pokud navíc požadujeme Lorenzovu kalibrační podmínku — a u vlnové rovnice tvaru (5.13) jsme ji požadovali —, pak tato funkce musí navíc splňovat homogenní vlnovou rovnici $\Box\chi = 0$.)

Vlnová rovnice pro $F_{\mu\nu}$

"Vlnovou rovnicí" se v elektrodynamice obvykle myslí *konkrétně* vlnová rovnice pro potenciál A^{μ}, o které jsme právě mluvili. Avšak i samotný tenzor elektromagnetického pole (tedy elektrické a magnetické pole) splňuje vlnovou rovnici, jak se snadno přesvědčíme, když druhou sadu Maxwellových rovnic (5.7) zderivujeme podle jednoho z již se vyskytujících indexů — například podle x^{ρ}:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu}\right)^{,\rho} = F_{\mu\nu,\rho}{}^{\rho} + F_{\rho\mu,\nu}{}^{\rho} + F_{\nu\rho,\mu}{}^{\rho} = \qquad (5.14) \\ &= \Box F_{\mu\nu} + F_{\rho\mu}{}^{,\rho}{}_{\nu} + F_{\nu\rho}{}^{,\rho}{}_{\mu} = \Box F_{\mu\nu} - \mu J_{\mu,\nu} + \mu J_{\nu,\mu} \\ &\Longrightarrow \quad \Box F_{\mu\nu} = \mu\left(J_{\mu,\nu} - J_{\nu,\mu}\right) \,. \qquad (5.15) \end{aligned}$$

Využili jsme (v druhém a třetím členu) jen záměnnosti parciálních derivací a poté 1. sady Maxwellových rovnic. Jak vidno, tato vlnová rovnice je dokonce homogenní, pokud má čtyř-proud nulovou čtyřrozměrnou rotaci.

5.3 Duální tenzor a invarianty elektromagnetického pole

Jak jsme již vzpomínali, Einstein uváděl, že na jeho cestě k principu speciální relativity sehrál významnou roli odlišný obraz “magnet-elektrické” indukce z hlediska magnetu a z hlediska vodivé smyčky: bylo zjevné, že v soustavě magnetu je jen magnetické pole, zatímco v soustavě spojené se smyčkou musí existovat jak magnetické, tak elektrické pole. Einstein tak vytušil, že jen určité *společné* jednotě elektrického a magnetického pole lze přiznat objektivní, na vztažném systému nezávislou existenci. Ve čtyř-rozměrném podání elektrodynamiky je *relativita elektrického a magnetického pole* vyjádřena tím, že jako složky tenzoru elektromagnetického pole jsou E^i a B^i závislé na inerciální soustavě — jejich hodnoty ve dvou inerciálních soustavách jsou konkrétně svázány Lorentzovou transformací

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma}\,, \qquad F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta F^{\gamma\delta}\,.$$

Často lze dokonce pro dané elektromagnetické pole $F_{\mu\nu}$ najít takovou soustavu, v níž vymizí elektrické pole, a na druhé straně jinou soustavu, v níž vymizí pole magnetické. Je-li ovšem $F_{\mu\nu}$ tenzorem, má informace v něm obsažená i určitou invariantní, na systému nezávislou část. Tvar a způsob získání této informace nejsou závislé na fyzikálním obsahu tenzoru, jsou dány čistě tím, že $F_{\mu\nu}$ je bivektorem (antisymetrickým tenzorem 2. řádu).

Z libovolného bivektoru se totiž dají vytvořit dva nezávislé invarianty, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ a $F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}$, kde

$$^*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{5.16}$$

je tenzor **duální** k $F^{\mu\nu}$. Je to zjevně také bivektor, takže na diagonále má rovněž nuly. Když upřesníme, že čtyřrozměrný Levi-Civitův tenzor je zcela antisymetrický tenzor určený složkou

$$\epsilon^{0123}\ (= -\epsilon^{123}) \equiv -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \epsilon_{0123}\ (= \epsilon_{123}) \equiv +1\ \ ,$$

snadno dopočítáme i další komponenty duálního tenzoru,

$$^*F^{0j} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{0j\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{0jkl}F_{kl} = -\frac{1}{2}\,\epsilon^{jkl}\epsilon_{klm}B^m = -B^j\ ,$$
$$^*F^{ij} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk0}F_{k0} = \epsilon^{ij0k}F_{0k} = -\epsilon^{ijk}F_{0k} = \frac{1}{c}\,\epsilon^{ijk}E_k\ ,$$

tedy zcela explicitně

$$^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & \frac{E^z}{c} & -\frac{E^y}{c} \\ -B_y & -\frac{E^z}{c} & 0 & \frac{E^x}{c} \\ -B_z & \frac{E^y}{c} & -\frac{E^x}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad ^*F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B^y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B^z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Vidíme, že dualitní transformace vzájemně prohazuje elektrické a magnetické pole.

Pomocí duálního tenzoru se dají zapsat Maxwellovy rovnice v duálním tvaru

$$^*F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0\,, \qquad ^*F_{[\mu\nu,\rho]\mathrm{cykl}} = \mu J^\sigma \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\ . \tag{5.18}$$

První (tj. vlastně druhá) sada plyne z toho, že

$$^*F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma,\beta} = \frac{1}{6}\,\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{[\rho\sigma,\beta]\mathrm{cykl}} = 0\ ;$$

druhou (tj. první) sadu si můžete ověřit třeba po složkách, podobně jako jsme to dělali s (5.7).

Mezi původním a duálním bivektorem existují různé obecně platné vztahy (hlavním z nich je, že duál z duálu je mínus původní tenzor), ale nebudeme zde “vlastnosti hvězdičky” nijak dále rozvíjet, zaměříme se jen na invarianty. Především by se mohlo zdát, že další invarianty poskytují vícenásobné součiny $F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\iota F_\iota{}^\kappa \dots F_\lambda{}^\tau F_\tau{}^\mu$, ale není tomu tak: součiny s lichým počtem činitelů jsou nulové, poněvadž součiny se sudým počtem členů a s nevysčítanými “krajními” indexy jsou v těchto symetrické; a o sudých součinech se ukáže, že se dají vyjádřit pomocí uvedených dvou “kvadratických” invariantů. Invariantem je také determinant (smíšeného) tenzoru 2. řádu, ale ani ten nepřináší v případě bivektoru nic nového — je totiž dán druhým invariantem,

$$\det(F_\mu{}^\nu) = \det({}^*F_\mu{}^\nu) = -\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}\right)^2 . \tag{5.19}$$

Nyní již ze znalosti složek (5.5), (5.17) invarianty vyjádříme pomocí elektrického a magnetického pole:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2F_{0j}F^{0j} + F_{ij}F^{ij} = -\frac{2}{c^2}E_jE^j + \epsilon_{ijk}B^k\epsilon^{ijl}B_l = 2B^2 - \frac{2E^2}{c^2} , && (5.20)\\ F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} &= 2F_{0j}{}^*F^{0j} + F_{ij}{}^*F^{ij} = \frac{2}{c}E_jB^j + \frac{1}{c}\,\epsilon_{ijk}B^k\epsilon^{ikl}E_l = \frac{4}{c}\,\vec{E}\cdot\vec{B} . && (5.21)\end{aligned}$$

5.3.1 Kovariantní vyjádření elektrického a magnetického pole

Na začátku kapitoly o elektrodynamice jsme zjistili, že snaha o rozšiřování tří-vektorů $\vec{E}$, $\vec{B}$ o časovou složku není dobrou cestou k prostoro-časovému elektro-magnetismu (test: pokud jste dosud četli pořádně, nevidíte v těchto slovech pomlčky; v opačném případě doporučujeme začít znovu od začátku — a opakovat to tak dlouho, . . .). Nyní, když máme tenzory $F_{\mu\nu}$ a ${}^*F_{\mu\nu}$, se můžeme znovu zeptat, zda přece jen nejde s jejich pomocí vyjádřit elektrické a magnetické pole nějak kovariantně. Vidíme, že elektrické pole je dáno “časovými” složkami $F_{\mu\nu}$ a magnetické pole “časovými” složkami ${}^*F_{\mu\nu}$. Tento výrok *lze* říci kovariantně: elektrické a magnetické pole mají v systému spojeném s pozorovatelkou charakterizovanou čtyř-rychlostí $\hat{u}^\mu$ (nemusí být ani nutně inerciální) hodnoty

$$\hat{E}_\mu = F_{\mu\nu}\hat{u}^\nu , \qquad \hat{B}_\mu = -\frac{1}{c}\,{}^*F_{\mu\nu}\hat{u}^\nu . \tag{5.22}$$

Je ihned vidět, že

$$\hat{E}_\mu\hat{u}^\mu = 0, \qquad \hat{B}_\mu\hat{u}^\mu = 0$$

a že když vztahy vyčíslíme speciálně v klidové soustavě pozorovatelky, tedy v soustavě, v níž má (její) čtyř-rychlost $\hat{u}^\mu$ složky $(c, 0, 0, 0)$, dostaneme správně

$$\hat{E}_\mu = F_{\mu 0}c = E_\mu , \qquad \hat{B}_\mu = -\frac{1}{c}\,{}^*F_{\mu 0}c = -{}^*F_{\mu 0} = B_\mu .$$

Vztahy (5.22) lze přepsat i v opačném směru,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2}\left(\hat{E}_\nu\hat{u}_\mu - \hat{E}_\mu\hat{u}_\nu\right) + \frac{1}{c}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda , && (5.23)\\ {}^*F_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2c^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\hat{E}^\sigma\hat{u}^\rho - \hat{E}^\rho\hat{u}^\sigma\right) + \frac{1}{2c}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\rho\sigma\kappa\lambda}\hat{u}_\kappa\hat{B}_\lambda = \\ &= \frac{1}{c^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{E}^\sigma\hat{u}^\rho - \frac{1}{c}\left(\delta^\kappa_\mu\delta^\lambda_\nu - \delta^\kappa_\nu\delta^\lambda_\mu\right)\hat{u}_\kappa\hat{B}_\lambda = \\ &= \frac{1}{c^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{u}^\rho\hat{E}^\sigma + \frac{1}{c}\left(\hat{B}_\mu\hat{u}_\nu - \hat{B}_\nu\hat{u}_\mu\right) , && (5.24)\end{aligned}$$

kde jsme využili identity

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\rho\sigma\kappa\lambda} = -2\left(\delta^\kappa_\mu\delta^\lambda_\nu - \delta^\kappa_\nu\delta^\lambda_\mu\right) .$$

Snadno se zkontroluje, že první, resp. druhé přiřazení (5.22) plyne ze (5.23), resp. (5.24) prostě vynásobením $\hat{u}^\nu$ — stačí si k tomu uvědomit, že $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{u}^\kappa\hat{u}^\nu = 0$ (Levi-Civitův tenzor je antisymetrický ve všech indexech, takže jeho vnitřní vynásobení libovolným symetrickým tenzorem dává nulu), a využít normalizace čtyř-rychlosti $\hat{u}_\nu\hat{u}^\nu = -c^2$.

Kdo chce, může si ještě dosazením kovariantních rozkladů (5.23), (5.24) "elegantně" vyčíslit invarianty,

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\nu\hat{u}_\mu - \frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{u}_\nu + \frac{1}{c}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\right)\left(\frac{1}{c^2}\,\hat{E}^\nu\hat{u}^\mu - \frac{1}{c^2}\,\hat{E}^\mu\hat{u}^\nu + \frac{1}{c}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{u}_\rho\hat{B}_\sigma\right) = \\
&= -\frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\nu\hat{E}^\nu - \frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{E}^\mu + \frac{1}{c^2}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\hat{u}_\rho\hat{B}_\sigma = \\
&= -\frac{2}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{E}^\mu - \frac{2}{c^2}\,(\delta^\rho_\kappa\delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\kappa\delta^\rho_\lambda)\,\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\hat{u}_\rho\hat{B}_\sigma = \\
&= -\frac{2}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{E}^\mu - \frac{2}{c^2}\,\hat{u}^\rho\hat{B}^\sigma\hat{u}_\rho\hat{B}_\sigma = -\frac{2}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{E}^\mu + 2\hat{B}^\sigma\hat{B}_\sigma\ , \\
F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\nu\hat{u}_\mu - \frac{1}{c^2}\,\hat{E}_\mu\hat{u}_\nu + \frac{1}{c}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\right)\left(\frac{1}{c}\,\hat{B}^\mu\hat{u}^\nu - \frac{1}{c}\,\hat{B}^\nu\hat{u}^\mu + \frac{1}{c^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{u}_\rho\hat{E}_\sigma\right) = \\
&= \frac{1}{c}\,\hat{E}_\nu\hat{B}^\nu + \frac{1}{c}\,\hat{E}_\mu\hat{B}^\mu + \frac{1}{c^3}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\hat{u}_\rho\hat{E}_\sigma = \\
&= \frac{2}{c}\,\hat{E}_\mu\hat{B}^\mu - \frac{2}{c^3}\,(\delta^\rho_\kappa\delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\kappa\delta^\rho_\lambda)\,\hat{u}^\kappa\hat{B}^\lambda\hat{u}_\rho\hat{E}_\sigma = \frac{4}{c}\,\hat{E}_\mu\hat{B}^\mu\ .
\end{aligned}$$

5.4 Lorentzova čtyř-síla

Zatím jsme se zabývali vlastnostmi elektromagnetického pole a tím, jak je toto pole buzeno zdroji. Nyní je ještě třeba dodat, jak dané pole působí na testovací náboj. Víme, že to je dáno Lorentzovou silou. Mezi čtyř-silou F^μ a třírozměrnou silou f^i jsme nalezli obecný vztah $F^\mu = (\ldots, \gamma\vec{f})$, tak budeme Lorentzovu čtyř-sílu odhadovat podle tvaru jejího třírozměrného protějšku $\vec{f}_\mathrm{L} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Veličiny, které v $\vec{f}_\mathrm{L}$ vystupují, jsou v Minkowského prostoročasu obsaženy ve veličinách q, $F^{\mu\nu}$ a u^μ. Je zjevné, že (až na znaménko) existuje jediný rozumný způsob, jak z těchto veličin sestavit čtyř-vektor:

$$\boxed{F^\mu_\mathrm{L} = qF^{\mu\nu}u_\nu}\ . \tag{5.25}$$

Porovnáním s (5.22) vidíme, že se jedná o q-násobek elektrického pole v soustavě testovacího náboje (dané jeho čtyř-rychlostí u^μ). Vyjádříme-li F^μ_L v obecném inerciálním systému, zjistíme, že prostorovými ($\mu = i$) složkami tohoto čtyř-vektoru jsou skutečně (i se správným znaménkem)

$$F^i_\mathrm{L} = qF^{i\nu}u_\nu = q(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j) = q\gamma\left(E^i + \epsilon^{ijk}v_jB_k\right) = \gamma q\left[E^i + (\vec{v}\times\vec{B})^i\right] = \gamma f^i_\mathrm{L}\ ,$$

kde jsme jen dosadili $u_\mu = \gamma(-c, \vec{v})$. Podívejme se, co vychází v časové složce:

$$F^0_\mathrm{L} = qF^{0j}u_j = \frac{1}{c}\,\gamma qE^jv_j = \frac{1}{c}\,\gamma q\vec{E}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\,\gamma\vec{f}_\mathrm{L}\cdot\vec{v}\ .$$

Výraz $q\vec{E}\cdot\vec{v}$ znamená výkon elektrických sil a díky tomu, že $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = 0$ (magnetická síla nekoná práci, protože působí kolmo ke směru pohybu), jedná se zároveň o výkon celé

Lorentzovy síly, $\vec{f}_\mathrm{L} \cdot \vec{v}$. Uvážíme-li dále, že $\gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, je vidět, že časová složka Lorentzovy čtyř-síly má význam výkonu Lorentzovy síly $\vec{f}_\mathrm{L}$ vztaženého na jednotku *vlastního* času testovací částice τ a děleného c.

Dodejme zde, že elektromagnetická interakce je jedinou fundamentální makroskopickou interakcí kromě gravitace. Gravitaci ovšem ve speciální teorii relativity neuvažujeme, kromě toho v obecné teorii relativity je gravitační interakce "geometrizována" (popsána geometrickými vlastnostmi prostoročasu) a pojem "gravitační síly" se tam vůbec nezavádí. Lorentzova čtyř-síla je tak v teorii relativity zdaleka nejvýznamnějším případem čtyř-síly.

5.4.1 Lorentzova čtyř-síla nemění klidovou hmotnost

V kapitole o mechanice jsme odvodili vztah $\eta_{\mu\nu} F^\mu u^\nu = -c^2 \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}$, který říká, že pokud na těleso působí čtyř-síla kolmá na jeho čtyř-rychlost, nemění se při pohybu klidová hmotnost tělesa. Lorentzova čtyř-síla *má* tuto vlastnost, jak snadno uvidíme po dosazení,

$$\eta_{\mu\nu} F^\mu_\mathrm{L} u^\nu = \eta_{\mu\nu} q F^{\mu\lambda} u_\lambda u^\nu = q F^{\mu\lambda} u_\lambda u_\mu = 0 \ ,$$

z toho, že tenzor $F^{\mu\lambda}$ je v indexech $[\mu, \lambda]$ antisymetrický a $u_\lambda u_\mu$ symetrický. Pokud se klidová hmotnost částice v čase nemění, je $\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}$, takže pro Lorentzovu čtyř-sílu má pohybová rovnice podobu

$$m_0 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu \ . \tag{5.26}$$

5.4.2 Hustota Lorentzovy čtyř-síly

Pokud je třeba popsat působení síly na rozlehlé těleso, hodí se k tomu více čtyř-síla vztažená na jednotku objemu. Čtyř-vektorový charakter veličiny, jak víme, "nepokazí" definování takovéto hustoty vzhledem k *vlastnímu* objemu — výsledkem je vlastní hustota čtyř-síly $\Phi^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}F^\mu}{\mathrm{d}V_0}$. Konkrétně v Lorentzově čtyř-síle je však extenzívní veličinou (takovou, která se mění s objemem) jen náboj testovacího tělesa, takže její vlastní hustota má podobu

$$\Phi^\mu_\mathrm{L} \equiv \frac{\mathrm{d}F^\mu_\mathrm{L}}{\mathrm{d}V_0} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V_0} F^{\mu\nu} u_\nu \equiv \rho_0 F^{\mu\nu} u_\nu = F^{\mu\nu} J_\nu = \left(\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J} ,\ \vec{\Phi}_\mathrm{L} \right) \ , \tag{5.27}$$

kde pro časovou složku platí také

$$\Phi^0_\mathrm{L} = \frac{1}{c\rho} \vec{\Phi}_\mathrm{L} \cdot \vec{J} = \frac{1}{c} \vec{\Phi}_\mathrm{L} \cdot \vec{v}$$

a hustota třírozměrné Lorentzovy síly je

$$\vec{\Phi}_\mathrm{L} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{f}_\mathrm{L}}{\mathrm{d}V} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \ .$$

5.5 Rovinná harmonická vlna. Vlnový čtyř-vektor

Uvažujme vlnovou rovnici v oblasti bez zdrojů ($J^\alpha = 0$), tedy $\Box A^\alpha = 0$, a pokusme se o její nejjednodušší vlnové řešení — ve tvaru **rovinné harmonické vlny**

$$A^\alpha = \Re \left\{ \hat{A}^\alpha \, e^{\mathrm{i} k_\sigma x^\sigma} \right\} \ , \tag{5.28}$$

kde $\hat{A}^\alpha$ je amplituda a k^α je **vlnový čtyř-vektor**.[4] Aby se skutečně jednalo o řešení odpovídající rovinné harmonické vlně, musejí být $\hat{A}^\alpha$ a k^α konstantní: jednak “harmonickým” se nazývá netlumené vlnění typu sinus/cosinus, takže s konstantní amplitudou, jednak “rovinnou” vlnou je taková, kdy místa stejné fáze (tedy i stejné hodnoty pole) tvoří *v daném okamžiku* rovinu. To znamená požadavek, aby vztah $(k_\sigma x^\sigma)_{t=\mathrm{konst}:=T} = \mathrm{konst}$, neboli $k_0 cT + k_i x^i = \mathrm{konst}$, určoval rovinu. Požadavek je splněn, pokud k_μ je konstantní — pak vztah přechází v $k_i x^i = \mathrm{konst}$, což je rovnice roviny.

Je třeba zkontrolovat, za jakých okolností je výraz (5.28) skutečně řešením bezzdrojové vlnové rovnice $\Box A^\alpha = 0$. Výpočet levé strany vyžaduje znát první a druhé derivace A^α:

$$A^\alpha{}_{,\mu} = \hat{A}^\alpha e^{\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma} \mathrm{i}k_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu} = A^\alpha \mathrm{i}k_\sigma \delta^\sigma_\mu = \mathrm{i}k_\mu A^\alpha \, , \tag{5.29}$$

$$A^\alpha{}_{,\mu\nu} = (A^\alpha{}_{,\mu})_{,\nu} = (\mathrm{i}k_\mu A^\alpha)_{,\nu} = \mathrm{i}k_\mu A^\alpha{}_{,\nu} = \mathrm{i}k_\mu \mathrm{i}k_\nu A^\alpha = -k_\mu k_\nu A^\alpha \, . \tag{5.30}$$

Dosazením tak máme podmínku

$$0 = \Box A^\alpha \equiv \left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) A^\alpha \equiv \eta^{\mu\nu} A^\alpha{}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu A^\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \tag{5.31}$$

(triviální případ A^α nemá smysl uvažovat). *Vlnový čtyř-vektor tedy musí být světelný.* To znamená, že na prostoročasovém diagramu míří “pod 45°”, podél některé površky místního světelného kuželu. Fyzikálně to znamená, že *elektromagnetické vlnění se šíří rychlostí světla*.

Je nutné dodat podstatnou okolnost: vlnová rovnice má tvar $\Box A^\alpha = -\mu J^\alpha$ jen za předpokladu, že čtyř-potenciál splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku $A^\alpha{}_{,\alpha} = 0$. Tudíž hledá-li se řešení vlnové rovnice tohoto tvaru, je třeba automaticky zároveň požadovat, aby vyhovovalo této kalibrační podmínce. Podle toho, co jsme výše spočítali, to znamená požadovat

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k_\alpha A^\alpha = 0 \, . \tag{5.32}$$

Pole rovinné harmonické vlny je velmi speciální, jak se snadno přesvědčíme dosazením do $F_{\mu\nu}$ a ${}^*F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = \mathrm{i}k_\mu A_\nu - \mathrm{i}k_\nu A_\mu \, , \qquad {}^*F^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathrm{i}\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_\mu A_\nu \tag{5.33}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{\mu\nu} k^\nu = 0, \quad {}^*F_{\mu\nu} k^\nu = 0, \qquad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu} = 0 \, . \tag{5.34}$$

Jak vidíme z (5.20) a (5.21), nulovost invariantů říká, že $c^2 B^2 = E^2 \ \wedge \ \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Měli bychom ještě poznamenat, že k^μ skutečně musí být čtyř-vektor. Má-li totiž být kovariantní (konkrétně vektorovou) vlnová rovnice, pak $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$ musí být invariant, a tedy k^μ musí být vektor. Podobně lze argumentovat z toho, že fáze $k_\sigma x^\sigma$ musí být invariantní.

Poslední, ale pro další kapitolu o vzhledu objektů podstatná poznámka: má-li se fáze $k_\sigma x^\sigma$ rovnat obvyklému “klasickému” výrazu $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$, tedy má-li platit

$$k_\sigma x^\sigma \equiv k_0 ct + k_i x^i = -\omega t + k_i x^i \, ,$$

musí mít vlnový čtyř-vektor složky

$$k_\mu = \left(-\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right), \qquad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \, . \tag{5.35}$$

[4] Pro větší přehlednost nebudeme v dalším upozorňovat na to, že z exponenciály je třeba vzít reálnou (případně imaginární) část.

Nulovou (světelnou) povahu k^μ lze takto "ve složkách" vyjádřit

$$0 = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -(k^0)^2 + \delta_{ij} k^i k^j = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k^2 \equiv |\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \ .$$

— Samozřejmě, prostorová část (světelného) vektoru musí mít stejnou velikost jako časová. Vlnový čtyř-vektor lze tedy také rozepsat

$$k^\mu = \frac{\omega}{c} \left(1, \vec{e}_{(k)}\right) ,$$

kde $\vec{e}_{(k)}$ je jednotkový tří-vektor mířící ve směru $\vec{k}$.

KAPITOLA 6

Vzhled objektů

Už jste asi zjistili, že věci nejsou vždy takové, jak vypadají! Připustíte-li konečnou rychlost světla, je tomu tak už podle Newtonovy teorie; s *konečnou* rychlostí signálu se totiž netriviálně skládá vzájemná rychlost zdroje a pozorovatele. Důsledkem je hned několik efektů:

- **Dopplerův jev**: ačkoliv rychlost šíření světla, jak víme, na pohybu zdroje ani pozorovatele nezávisí, ovlivňuje tento pohyb detekované rozložení vln (a také jednotlivých diskrétních signálů): vlny (signály) se jeví "nahuštěnější", resp. "zředěnější", pokud se zdroj a pozorovatel přibližují, resp. vzdalují. Barva (spektrum) blížícího se zdroje je tedy "modřejší", vzdalujícího se zdroje naopak "červenější".

- **Aberace**: zdroj je vidět v trochu jiném směru, než v jakém se v okamžiku vyslání světla "skutečně" nacházel (tj. kde bychom jej viděli "okamžitě na dálku", prostřednictvím nekonečně rychlého signálu). Obecněji řečeno, vzhledem k systému pozorovatele jsou všechny paprsky zdroje poněkud uchýleny ("*aberovány*") do směru, v němž se zdroj pohybuje — celý vyzařovací diagram zdroje je soustředěn do směru vzájemného pohybu. Přibližující se zdroj je tím pádem pozorován jako jasnější a vzdalující se zdroj jako méně jasný (tomuto aspektu se anglicky říká *beaming*).

- **Deformace**: zdroj je vidět v podélném směru ($\equiv$ podél směru vzájemného pohybu) prodloužený, pokud se přibližuje, a zkrácený, pokud se vzdaluje. (Nakreslete si to, vtip je stejný jako u Dopplerova jevu.) Navíc je zdroj vidět pootočený: poletí-li např. v dálce po přímce krychle tak, že jedna její stěna bude natočena přesně k nám a jiná přesně do směru pohybu, uvidíme navzdory popsané geometrii trochu i její "zadní" stěnu, poněvadž fotony, které nás nakonec zasáhnou, mohou vylétat ze "zadní" stěny mírně šikmo "dozadu".

Ve speciální relativitě by tyto efekty měly vycházet jinak, poněvadž se jinak skládají rychlosti. Speciálně tam navíc dochází k dilataci času a kontrakci délek, a to by mohlo být zajímavé u přibližujících se zdrojů. Totiž podle Lorentzovy transformace jdou jakékoliv "pohybující se" hodiny (tedy i ty, které se "přibližují") vůči "stojící" soustavě pomaleji (dilatace času), avšak klasický Doppler říká, že pokud se na blížící se hodiny podíváme, *uvidíme* je jít *rychleji* než stojící. Podobně je to s délkou: podle Lorentzovy transformace jsou veškerá "pohybující se" tělesa (tedy i ta, která se "přibližují") vůči "stojící" soustavě v podélném směru zkrácena, avšak jednoduchá newtonovská úvaha o chodu fotonů říká, že blížící se tělesa *jsou vidět* v podélném směru delší.

“Lokálně odměřit” versus “(na dálku) vidět”

Uvědomte si, proč jsou zdůrazněna slova *vidět*: když jsme odvozovali např. vztah pro kontrakci délek, zajímali jsme se o polohu bodů tyče v určité inerciální soustavě *v daném okamžiku příslušného inerciálního času*; podobně při odvozování vztahu pro dilataci času jsme okamžitý údaj na “pohybujících se” hodinách porovnávali vždy s údajem na “stojících hodinách” *v daném místě*. Tedy když jsme podle Lorentzovy transformace přepočítávali mezi soustavami délkové či časové úseky, nevstupovalo nikde do hry šíření světla. Když se však nyní (poprvé) ptáme, jak *vidí* nějakou tyč nebo hodiny určitý pozorovatel, musíme šíření světla vzít také v úvahu, protože fotony, které k pozorovateli dojdou v určitém okamžiku, obecně cestovaly po různých drahách a startovaly z různých míst zdroje v různých časech.

Takže jak to vlastně dopadne?

6.1 Dopplerův jev a aberace

S jakou frekvencí a z jakého směru přichází k pozorovateli světlo zdroje? Obě informace jsou obsaženy ve vlnovém čtyř-vektoru k^μ. Spojme se zdrojem soustavu IS’ a s pozorovatelem soustavu IS, přičemž jejich osy x a x' natočíme (bez újmy na obecnosti) tak, aby mířily přesně ve směru vzájemné rychlosti a aby se IS’ vůči IS pohyboval v kladném smyslu x. Úloha je dvourozměrná, protože vzájemná rychlost $\vec{v}$ a spojující světelný paprsek (vlnový vektor $\vec{k}$) definují rovinu. Nastavíme proto dále soustavy tak, aby osy z a z' byly k této rovině kolmé; úloha se tak bude odehrávat v rovině (x, y), resp. (x', y'). Vlnový vektor je, jak víme, světelný ($\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0 \Leftrightarrow k = \omega/c$), takže jeho složky v soustavách IS a IS’ lze zapsat

$$k^\mu = \frac{\omega}{c}\,(1, \vec{e}_{(k)}) = \frac{\omega}{c}\,(1, \cos\theta, \sin\theta, 0)\,,$$
$$k'^\mu = \frac{\omega'}{c}\,(1, \vec{e}_{(k')}) = \frac{\omega'}{c}\,(1, \cos\theta', \sin\theta', 0)\,,$$

kde θ (resp. θ') je úhel mezi kladným směrem osy x (resp. x') a směrem, *ve kterém míří* paprsek (tedy vlnovým vektorem), orientovaný “proti směru hodinových ručiček”. Nečárkované a čárkované složky vlnového čtyř-vektoru jsou svázány Lorentzovou transformací $k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$, konkrétně speciální Lorentzovou transformací “ve směru x”.

6.1.1 Dopplerův jev

Dosazením do časové složky transformace $k'^0 = \Lambda^0{}_0 k^0 + \Lambda^0{}_1 k^1$, tedy $\omega' = \gamma\omega - \gamma\frac{v}{c}\,\omega\cos\theta$, dostáváme ihned vztah pro Dopplerův jev,

$$\omega = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\omega'}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}\,, \quad \text{neboli} \quad \omega_{\rm obs} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\omega_{\rm em}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{6.1}$$

(připomeňme, že $\omega' \equiv \omega_{\rm em}$ je frekvence záření vůči klidové soustavě zdroje a $\omega \equiv \omega_{\rm obs}$ frekvence vůči klidové soustavě pozorovatele). Je vidět, že oproti klasickému vzorečku je zde navíc Lorentzův faktor γ. Zkontrolujme speciální případy:

- $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ odpovídá tomu, že světlo k pozorovateli přichází přesně v kladném směru osy x, neboli pozorovatel vidí zdroj přesně v záporném směru osy x — tudíž zdroj se k pozorovateli přibližuje. Vychází

$$\omega_{\rm obs} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\omega_{\rm em}}{1 - \frac{v}{c}} = \omega_{\rm em}\,\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}}{1 - \frac{v}{c}} = \omega_{\rm em}\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\ , \tag{6.2}$$

tedy pozorovaná frekvence je *vyšší* než vysílaná.

- $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$ odpovídá tomu, že světlo k pozorovateli přichází přesně v záporném směru osy x, neboli pozorovatel vidí zdroj přesně v kladném směru osy x — tudíž zdroj se od pozorovatele vzdaluje. Vychází

$$\omega_{\rm obs} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\omega_{\rm em}}{1+\frac{v}{c}} = \omega_{\rm em}\,\frac{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}}{1+\frac{v}{c}} = \omega_{\rm em}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\ , \tag{6.3}$$

  tedy pozorovaná frekvence je *nižší* než vysílaná.

- $\theta = \pm\pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0$ odpovídá tomu, že světlo k pozorovateli přichází přesně ve směru kolmém na osu x, neboli pozorovatel vidí zdroj přesně ve směru kolmém na směr jejich vzájemného pohybu — tudíž v okamžiku, kdy se jejich vzdálenost neměnila. Vychází

$$\omega_{\rm obs} = \frac{\omega_{\rm em}}{\gamma}\ ,$$

  tedy pozorovaná frekvence je *nižší* než vysílaná.

“Klasická část” Dopplerova jevu, způsobená “ředěním” / “zahušťováním” vlnoploch v důsledku vzdalování / přibližování zdroje, je tedy silnější než relativistický efekt dilatace času (který je *nezávislý* na směru vzájemného pohybu): pokud bychom skutečně *sledovali* přibližující se hodiny, *viděli* bychom je (navzdory relativistické dilataci) jít *rychleji* než hodiny stojící. U vzdalujících se hodin mají dilatace i důsledek šíření fotonů konečnou rychlostí “stejné znaménko”, hodiny vidíme jít pomaleji. Relativistická dilatace se však “nerušeně” projevuje v případě čistě tangenciálního pohybu — a způsobuje nový, čistě relativistický, tzv. **příčný Dopplerův jev**.

6.1.2 Aberace

Nyní ještě uvážíme některou netriviální prostorovou složku transformační rovnice $k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$, třeba y-ovou ($\mu = 2$): $k'^2 = \Lambda^2{}_2 k^2$, tedy $\omega' \sin\theta' = \omega\sin\theta$. Dosazením $\omega' = \gamma\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)$ z dopplerovského vztahu (6.1) dostáváme

$$\sin\theta' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\ . \tag{6.4}$$

Podobně bychom dosazením ω' do x-ové ($\mu = 1$) složky transformační rovnice,

$$k'^1 = \Lambda^1{}_0 k^0 + \Lambda^1{}_1 k^1, \qquad \text{tj.} \quad \omega'\cos\theta' = -\gamma\frac{v}{c}\,\omega + \gamma\omega\cos\theta\,,$$

dostali

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\ , \tag{6.5}$$

což se dá invertovat snadněji než vztah pro $\sin\theta'$:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta'} \qquad \left[\ \Longrightarrow\ \ \sin\theta = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\theta'}{1+\frac{v}{c}\cos\theta'}\ \right]. \tag{6.6}$$

To jsou tedy formule pro aberaci; oproti klasické podobě se opět navíc objevuje Lorentzův faktor (nikoli však ve vztahu pro $\cos\theta$). Tento faktor ($\gamma > 1$) snižuje velikost $\sin\theta$, tedy naklání

$\vec{k}$ (ještě více) do směru osy x — to znamená, že relativistická aberace je *výraznější* než klasická. ("V praxi" ovšem bývá faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ jen velmi málo odlišný od jedničky, např. pro rychlost Země ve sluneční soustavě, $v \doteq 30\,\mathrm{km/s}$, je $\frac{1}{\gamma} \doteq \sqrt{1-10^{-8}}$.) Podíváme se opět na speciální případy:

- $\theta' = 0$ nebo $\theta' = \pi \Rightarrow \sin\theta' = 0$, $\cos\theta' = \pm 1$: pak je také $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = \pm 1$.
- $\theta' = \pm\pi/2 \Rightarrow \sin\theta' = \pm 1$, $\cos\theta' = 0$: pak $\sin\theta = \pm\frac{1}{\gamma}$, $\cos\theta = \frac{v}{c}$.

6.2 Jak dlouhou se jeví letící tyč?

Posledním základním aspektem vzhledu tělesa je pozorovaný tvar. Obecně je dán průnikem okamžitého minulého světelného kuželu pozorovatele (podél toho k pozorovateli přicházejí světelné informace) s historií zdroje (tedy jeho světotrubicí). Tato historie je čtyřrozměrným, prostoročasovým útvarem, a světelný kužel je třírozměrný, takže jejich průnikem je třírozměrná oblast. Pokud je těleso neprůhledné, "vidí" pozorovatel průnik svého minulého světelného kuželu s historií *povrchu* tělesa (která je třírozměrná) — pak je výsledek dvourozměrný. My se však v této kapitole nebudeme zabývat úlohou v takové obecnosti, položíme si jen jednoduchou otázku: jak dlouhou vidí pozorovatel tyč, která se vůči němu pohybuje v podélném směru?

Budeme úlohu počítat v klidové soustavě pozorovatele. Natočíme ji tak, aby se tyč pohybovala přesně podél osy x v jejím kladném směru a pozorovatele posadíme do místa ($x = 0$, $y = y_\mathrm{P} > 0$); osa z je irelevantní, protože problém je opět rovinný. Základní úvahou je to, že obraz tyče, který pozorovatel v daném okamžiku vnímá, je dán fotony, které právě v tom okamžiku přiletí od tyče do jeho oka. Délku tyče vymezují dva speciální fotony — ten, který v tom okamžiku přilétá od "předního" konce tyče ($\equiv$ B), a ten, který ve stejném okamžiku přilétá od konce "zadního" ($\equiv$ A). Pro délku letu těchto dvou fotonů platí

$$c(t_\mathrm{P}-t_\mathrm{B})\cos\theta_\mathrm{B} = -x_\mathrm{B}(t_\mathrm{B}) \;, \qquad c(t_\mathrm{P}-t_\mathrm{A})\cos\theta_\mathrm{A} = -x_\mathrm{A}(t_\mathrm{A}) \;, \tag{6.7}$$

kde t_P je čas, ve který se pozorovatel na tyč podívá, t_B a t_A jsou časy, v nichž z konce B, resp. A startovaly fotony, které právě v okamžiku t_P přiletí k pozorovateli, $x_\mathrm{B}(t_\mathrm{B})$ a $x_\mathrm{A}(t_\mathrm{A})$ jsou polohy těchto konců ve startovních časech t_B, resp. t_A, a konečně θ_B a θ_A jsou úhly, pod kterými fotony z konců tyče k pozorovateli letí, měřené od kladného směru osy x proti směru hodinových ručiček — tedy pro něž platí $\tan\theta = \frac{y_\mathrm{P}}{-x(t)}$. Vydělením cosiny a vynásobením v/c ještě rovnice upravíme na

$$vt_\mathrm{P} - vt_\mathrm{B} = -\frac{v}{c}\,\frac{x_\mathrm{B}(t_\mathrm{B})}{\cos\theta_\mathrm{B}} \;, \qquad vt_\mathrm{P} - vt_\mathrm{A} = -\frac{v}{c}\,\frac{x_\mathrm{A}(t_\mathrm{A})}{\cos\theta_\mathrm{A}} \;. \tag{6.8}$$

Nyní druhá dvojice důležitých rovnic: vztahy pro pohyb konců tyče,

$$x_\mathrm{B}(t) = vt + \frac{l}{2} \;, \qquad x_\mathrm{A}(t) = vt - \frac{l}{2} \;. \tag{6.9}$$

Zde $l = \frac{l_0}{\gamma}$ je délka tyče vůči pozorovatelově klidové soustavě, tedy délka zkontrahovaná oproti klidové délce l_0. (Čas jsme nastavili tak, že v $t = 0$ je tyč právě symetricky kolem počátku.) Ze vztahů (6.9) nyní vyjádříme vt_B, resp. vt_A, tedy

$$vt_\mathrm{B} = x_\mathrm{B}(t_\mathrm{B}) - \frac{l}{2} \;, \qquad vt_\mathrm{A} = x_\mathrm{A}(t_\mathrm{A}) + \frac{l}{2} \;,$$

a dosadíme je do rovnic (6.8). Snadnými úpravami najdeme polohy konců tyče v okamžicích, kdy z nich startovaly fotony,

$$x_B(t_B) = \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c\cos\theta_B}}\,, \qquad x_A(t_A) = \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c\cos\theta_A}}\,, \tag{6.10}$$

a odsud lineární délku tyče odpovídající pozorovanému vjemu,

$$l_P \equiv x_B(t_B) - x_A(t_A) = \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c\cos\theta_B}} - \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c\cos\theta_A}}\,. \tag{6.11}$$

Dále podrobněji vyšetříme limitní případy — když je tyč velmi daleko před počátkem a velmi daleko za počátkem.

- Tyč přilétá z dálky: $x_B(t_B)$ a $x_A(t_A)$ jsou velké (proti y_P) a záporné, takže $\cos\theta_B \to 1$, $\cos\theta_A \to 1$. Vztah (6.11) v tom případě dává

$$l_P^+ = \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{l}{1 - \frac{v}{c}} = l_0\,\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = l_0\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\,. \tag{6.12}$$

  Zjevně platí $l_P^+ > l_0\,(> l)$. Navzdory relativistické kontrakci je tedy přibližující se tyč *vidět* delší, než kdyby se nepohybovala.

- Tyč odlétá do dálky: $x_B(t_B)$ a $x_A(t_A)$ jsou velké (proti y_P) a kladné, takže $\cos\theta_B \to -1$, $\cos\theta_A \to -1$. Vztah (6.11) v tom případě dává

$$l_P^- = \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 + \frac{v}{c}} - \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{l}{1 + \frac{v}{c}} = l_0\,\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = l_0\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\,. \tag{6.13}$$

  Zjevně platí $l_0\,(> l) > l_P^-$ — tyč se jeví ještě kratší než podle relativistické kontrakce (jak ovšem víme, “optický” efekt je ve skutečnosti silnější, takže je spíše na místě říkat, že tyč se díky kontrakci jeví ještě o něco kratší než “klasicky”).

- V době, kdy je tyč “okolo” počátku, je třeba použít přesný vzorec (6.11). Jedině pokud by byla tyč velmi dlouhá proti y_P, šlo by i v této fázi částečně uvažovat limitní případy, zde konkrétně $x_B(t_B) \gg y_P > 0$ a zároveň $x_A(t_A) \ll -y_P < 0$, tudíž $\cos\theta_B \to -1$ a zároveň $\cos\theta_A \to 1$. Vztah pro pozorovanou délku tyče (6.11) v tomto případě dává

$$l_P = \frac{vt_P + \frac{l}{2}}{1 + \frac{v}{c}} - \frac{vt_P - \frac{l}{2}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{l - 2vt_P\frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{6.14}$$

  Tyč se tedy v tomto přiblížení postupně zkracuje, a to lineárně s časem t_P. Vztah přechází v první limitní výsledek l_P^+ v čase $t_P = -\frac{l}{2v}$ a v druhý limitní výsledek l_P^- v čase $t_P = +\frac{l}{2v}$. Dosazením do (6.9) potvrdíme, že v čase $t = -\frac{l}{2v}$ je $x_B = 0$, $x_A = -l$ a v čase $t = +\frac{l}{2v}$ je $x_B = +l$, $x_A = 0$, tedy že první hodnota dle očekávání odpovídá okamžiku, kdy je přední konec tyče právě v počátku, a druhá hodnota okamžiku, kdy je tam zadní konec. (Právě v těchto fázích ovšem *není* zde uvažovaná limita platná!)

- Ještě bychom mohli vyzkoušet, kdy pozorovatel vidí “správnou” (zkontrahovanou) délku l. Jistě to musí být v “prostřední” době, takže vyjdeme z rovnosti $\frac{l-2vt_{\mathrm{P}}\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = l$. Snadno najdeme, že jí odpovídá čas $t_{\mathrm{P}} = \frac{l}{2c}$. Z “pohybových rovnic” (6.9) bychom mohli opět zjistit, kde se v tento okamžik nacházejí konce tyče, ale zde je spíše význačné to, kde *byly* konce tyče, když z nich startovaly fotony, které doletěly k pozorovateli v okamžiku $t_{\mathrm{P}} = \frac{l}{2c}$. Na to odpovídají výrazy (6.10). Uchýlíme-li se opět k jejich limitám $\cos\theta_{\mathrm{B}} \to -1$, resp. $\cos\theta_{\mathrm{A}} \to 1$, najdeme dosazením času $t_{\mathrm{P}} = \frac{l}{2c}$ pozice $x_{\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}}) = +\frac{l}{2}$, $x_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}) = -\frac{l}{2}$, tedy tyč symetricky položenou kolem počátku. (Pokud je tyč velmi dlouhá ve srovnání s y_{P}, je tedy pro tento úsudek uvažovaná limita použitelná!)

Kapitola 7

Variační principy

Na billboardech se tvrdí, že (můj svět) = (moje banka), ale doufáme, že vy si oblíbíte jiné rovnosti. Teoretičtí fyzikové vás například budou učit, že (můj svět) = (můj lagrangián). Eugene Wigner kdysi napsal článek o tom, jak “nepochopitelně účinná” je matematika — *naše* matematika — při poznávání světa. Ještě nepochopitelnější je, jak účinná jsou při něm “estetická” východiska, především předpoklady symetrií. V této kapitole připomeneme postupy z podobné kategorie, které se přes svůj naivní obsah zdají mít podivuhodně obecnou platnost a pomocí nichž se zejména v teoriích pole “rutinně” procházejí celé třídy možností: variační principy. V nerelativistické fyzice se probírají spíše pro zajímavost, jako doplnění “kauzálního” pohledu vyjádřeného diferenciálními rovnicemi, ale v relativitě — ve spojení s požadavkem invariance teorie (tedy akce a lagrangiánu) vůči Lorentzovým transformacím — nabývají hlubšího fyzikálního významu a stávají se i velmi praktickou metodou hledání možných podob zákonů.

Historie variačních principů je připomínána od Herona z Alexandrie (10-70), který si všiml, že při odrazu si světlo vybírá nejkratší cestu. Perský učenec Ibn al-Haytham (latinsky známý jako Alhacen; 965-1039) ve svých rozsáhlých pojednáních o optice mj. užil podobného pravidla (o “nejsnadnější” cestě) pro pochopení zákona o lomu světla, který tehdy objevil Ibn Sahl (940-1000) z Baghdádu; zákon je dnes znám spíše podle leidenského matematika Willebrorda Snellia (1580-1626). Jeho přesné vysvětlení poskytl Pierre de Fermat (1607-1665), na základě principu, že světlo se šíří podél dráhy, podél níž spotřebuje nejméně *času*. (**Fermatův princip** byl později ještě dále upřesněn tak, že spotřebovaný čas nabývá podél realizované dráhy *stacionární* hodnoty — může to být i maximum, jako např. u gravitačních čoček.)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) uvažoval o tom, že součin hmotnosti, rychlosti a vzdálenosti (mvs), přesněji integrál z rychlosti podél dráhy (tzv. **účinek**), je patrně v přírodním dění extremalizován. “Variační” je ostatně i jeho známé přesvědčení o “nejlepším z možných světů”, vybraném stvořitelem metodou minimalizace zla, které se stalo vlivnou verzí pohledu typického pro křesťanské myslitele. K “nekonečně moudrému tvůrci” dospěl i Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), ale na základě věrohodnějšího (podle něj dokonce nejsilnějšího možného) argumentu: svět je zařízen tak, aby k veškerému dění stačilo co nejméně úsilí. Tvrdil, že při pohybu tělesa je účinek (obvykle uvažoval integrál z kinetické energie přes čas) minimalizován, avšak nebylo moc jasné, zda právě takováto možnost je “nejúspornější” a proč by se vůbec měla realizovat. Počátky variačního počtu v “techničtější” podobě se spojují se jménem Jakoba Bernoulliho (1654-1705), konkrétně s jeho řešením problému brachystochrony, předloženého jeho bratrem Johannem. Při řešení Huygensova problému tautochrony pak ve formulaci variačního počtu výrazně pokročili Leonhard Euler (1707-1783) a

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).[1] Především spolu našli nutnou podmínku pro minimalizaci integrálu z funkce závislé na poloze, rychlosti a čase (Eulerovy-Lagrangeovy rovnice této variační úlohy) a Lagrange následně variační počet rozvinul téměř do moderní podoby. V jedné práci o extrémech křivek dodal Euler k "optimalizaci světa": "Jelikož uspořádání Všehomíra je to nejdokonalejší a pochází od nejmoudřejšího Stvořitele, neděje se ve světě nic, na čem by se neprojevovala nějaká vlastnost maxima či minima. Nemůže býti proto nejmenší pochybnosti, že veškeré účinky ve Všehomíru lze dovoditi jak metodou maxim a minim, tak z působení příčin."

To je ovšem docela hustá káva, upozorňovali zvláště následovníci Reného Descarta, protože místo toho, aby bylo dění v každém okamžiku určeno dostatečnými příčinami, zde jako by Příroda viděla do budoucnosti a na základě toho si *vybírala*, jak se zachová teď. Ve skutečnosti do budoucnosti moc vidět nemusí, poněvadž má-li být určitá veličina optimalizována podél nějaké konečné dráhy, musí být optimalizována podél každého jejího jakkoli malého úseku. Ale prvek výběru zde rozhodně je — jako by si např. částice v každém bodě dráhy "ohledala" své prostorové a časové okolí a pak se vydala extremální cestou. Jak píše R. Feynman ve svých Přednáškách, nejpodivnější je, že se to tak opravdu děje. (Feynman to i podrobně vysvětluje, ale do toho se tady nebudeme pouštět, je k tomu zapotřebí vlnových představ. Dodejme, že právě Feynman podal formulaci kvantové mechaniky, v jejímž rámci částice spíše "běží zároveň po *všech* myslitelných drahách", ale pravděpodobnost jejího výskytu má obvykle velmi ostré maximum na "klasické trajektorii".)

V této kapitole připomeneme d'Alembertův princip virtuálních prací, hlavně však ukážeme použití integrálního, Hamiltonova principu — při hledání pohybových rovnic pro hmotnou částici, ale také při odvození první sady Maxwellových rovnic. Zdůrazníme přitom roli Lagrangeovy funkce a požadavku její lorentzovské invariance a ukážeme možnost, jak tuto funkci hledat s pomocí d'Alembertova principu, pokud by sama invariance nebyla dostatečným vodítkem.

7.1 d'Alembertův princip, Lagrangeovy rovnice 1. druhu

V klasické mechanice d'Alembertův variační princip zní

$$\left(f_i - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right)\delta x^i = 0\,, \tag{7.1}$$

kde f_i je výslednice vtištěných sil a δx^i je **virtuální posunutí**. Virtuální posunutí je zavedeno jako izochronní, tj. ($\delta t \equiv 0$), což mj. znamená, že *skutečné* posunutí je vždy jiné než posunutí virtuální. Je-li systém podroben nějaké vazbě $\varphi(t, \vec{r}) = 0$, pak virtuální posunutí s ní musí být ve shodě, tj. musí platit $\varphi_{,i}\delta x^i = 0$ — jinak řečeno virtuální práce vazbových sil je nulová.[2] Jinak však může být δx^i libovolné, takže sečtením d'Alembertova principu a vazbové podmínky (vynásobené Lagrangeovým multiplikátorem λ) obdržíme **Lagrangeovy rovnice 1. druhu**

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = f_i + \lambda\varphi_{,i}\,. \tag{7.2}$$

[1] Tautochrona (též izochrona) je rovinná křivka význačná tím, že hmotné body, které jsou v daný okamžik puštěny z kteréhokoli jejího bodu, aby podél ní bez tření padaly pod vlivem homogenní tíže, doběhnou do jejího minima ve *stejný* okamžik. Brachystochrona má jinou význačnou vlastnost: body po ní proběhnou určenou dráhu *za nejkratší dobu*. Ukázalo se, že obě vlastnosti má stejná křivka, totiž cykloida.

[2] Právě na tuto skutečnost — tedy na to, že na rozdíl od Newtonovy pohybové rovnice *není* třeba do f_i zde v závorce zahrnovat *všechny* síly, ale jen ty "opravdové" ("vtištěné") — upozornil Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Jinak je tento diferenciální princip dílem Lagrangeovým.

Ve speciální relativitě se kromě “samozřejmostí”, totiž přechodu do čtyřrozměrného prostoročasu a od “souřadnicového” (absolutního) času t k vlastnímu času τ, mění vlastně jen to, že virtuální posunutí δx^μ *není* izochronní. Vzhledem k relativitě současnosti by totiž takovou vlastnost stejně nešlo žádat vůči *všem* inerciálním soustavám. Jinak je vše obdobné jako v klasické mechanice: vazbu zapíšeme $\varphi(x^\mu) = 0$, vazbovou sílu tedy $\lambda\varphi_{,\mu}$ a vazbovou podmínku $\varphi_{,\mu}\delta x^\mu = 0$. Po jejím sečtení s d'Alembertovým principem $\left(F_\mu - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta x^\mu = 0$ dostaneme Lagrangeovy rovnice 1. druhu v podobě

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = F_\mu + \lambda\varphi_{,\mu}\,. \tag{7.3}$$

Představují 4 rovnice pro 6 neznámých (x^μ, λ, m_0); navíc však máme rovnici $\varphi(x^\mu) = 0$ pro vazbu a normalizační podmínku $u_\mu u^\mu = -c^2$ pro čtyřrychlost. Rovnice jsou evidentně kovariantní, protože p_μ je kovektor, a to i po derivaci podle invariantu τ — a na pravé straně F_μ je kovektor, φ je invariant, takže $\varphi_{,\mu}$ kovektor, a λ je invariant.

7.2 Hamiltonův princip, Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Po Lagrangeovi dále rozvinul variační počet William Rowan Hamilton (1805-1865). Především jej zobecnil a převedl do integrální podoby, která se později ukázala být použitelnou nejen na problémy diskrétních těles a vůbec na problémy mechaniky, ale “zázračně” i v teoriích pole. Hamiltonův princip v klasické mechanice říká, že systém sleduje mezi zvolenými časy t_1 a t_2 v konfiguračním prostoru (vybaveném nějakými zobecněnými souřadnicemi q_i, kde i probíhá stupně volnosti systému) takovou trajektorii, podél níž je variace **akce** ($\equiv$ **účinku**)

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,\mathrm{d}t$$

nulová (L je lagrangián). Princip platí pro systémy, na které působí síly mající potenciál (ten může záviset na poloze, rychlosti i čase) a které jsou podrobeny holonomním vazbám (lze zahrnout i některé neholonomní vazby, ale nebudeme takový případ uvažovat). Pro takovéto systémy jsou nutnou a postačující podmínkou stacionarity akce (tedy nulovosti její variace) **Lagrangeovy rovnice 2. druhu**

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

(v obecnosti se těmto rovnicím říká **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice** dané variační úlohy).

Ve speciální relativitě je úloha jiná ve dvou bodech:

- Lagrangián musí být invariantem Lorentzovy transformace (jinak by hledané Eulerovy-Lagrangeovy rovnice měly různý tvar v různých inerciálních soustavách). Už z toho plyne, že nemůže být roven “$T - V$” (neboť kinetická energie je vůči různým soustavám různá — již podle svého názvu je relativním pojmem). Budeme nicméně předpokládat, že jako v klasické mechanice je lagrangián funkcí polohy, rychlosti a času — zde budeme pro jednoduchost uvažovat systém tvořený jednou částicí a použijeme naše “normální” souřadnice x^μ (v nich tedy již i čas) a odpovídající čtyř-rychlost u^μ. A nezapomeneme, že z důvodu invariance akce se lagrangián musí integrovat přes *vlastní* čas.

- Geometrickým významem variační úlohy, jak známo, je výběr skutečné světočáry z "vřetena" virtuálních světočar. V klasické mechanice jsou všechny tyto světočáry parametrizované stejným časem t (protože je absolutní), zatímco v relativitě běží podél každé světočáry jiný, *pro ni specifický vlastní čas*, takže při variaci — tj. přechodu mezi sousedními světočárami, $x^\mu \to x^{*\mu} \equiv x^\mu + \delta x^\mu$ — bychom měli variovat i vlastní čas τ, a tím pádem i jeho přírůstek $\mathrm{d}\tau$ probíhaný při integraci.

Připravíme si tuto variaci ($\delta\mathrm{d}\tau$) — a také variaci čtyř-rychlosti (δu^μ) — rovnou, ať pak můžeme postupovat bez přerušení. Vyjdeme ze vztahu $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^* &= \frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{*\mu}\mathrm{d}x^{*\nu}} = \frac{1}{c}\left[-\eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}\delta x^\mu)(\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}\delta x^\nu)\right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{c}\left[c^2\mathrm{d}\tau^2 - 2\,\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}\delta x^\nu + O(\delta^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{d}\tau\left[1 - \frac{2}{c^2}\,\eta_{\mu\nu}u^\mu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + O(\delta^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \mathrm{d}\tau - \frac{1}{c^2}\,\eta_{\mu\nu}u^\mu\mathrm{d}\delta x^\nu + O(\delta^2)\ . \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Využili jsme jen definice $x^{*\mu} \equiv x^\mu + \delta x^\mu$, dále toho, že díky symetričnosti $\eta_{\mu\nu}$ je $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\delta x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}\delta x^\nu$, definice čtyř-rychlosti $u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ a rozvoje typu $\sqrt{1-2\delta} = 1 - \delta + O(\delta^2)$. Variace je infinitesimální, takže členy $O(\delta^2)$ zanedbáme a máme výsledek

$$\delta\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}\tau^* - \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{c^2}\,\eta_{\mu\nu}u^\mu\mathrm{d}\delta x^\nu = -\frac{1}{c^2}\,u_\nu\mathrm{d}\delta x^\nu\ . \qquad (7.5)$$

Variaci čtyř-rychlosti určíme z její definice a využitím nalezeného $\mathrm{d}\tau^*$:

$$\begin{aligned}
u^{*\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{*\mu}}{\mathrm{d}\tau^*} &= \frac{\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau\left(1 - \frac{1}{c^2}\,u_\nu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)} = \left(u^\mu + \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}\,u_\nu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right) + O(\delta^2) = \\
&= u^\mu + \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + O(\delta^2) = \\
&= u^\mu + \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right)\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + O(\delta^2)\ . \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Zde jsme jen použili na závorku ve jmenovateli rozvoj typu $\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + O(\delta^2)$. Zjišťujeme tedy, že

$$\delta u^\mu \equiv u^{*\mu} - u^\mu = \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right)\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\ . \qquad (7.7)$$

Tento výraz má jednu podstatnou vlastnost — je kolmý k nevariované čtyř-rychlosti u^μ. Můžeme si říct i obecnější fakt, totiž že výraz v závorce je projekční tenzor, který promítá na třírozměrnou nadplochu (prostor) kolmou k u^μ. Skutečně, protože promítat stačí jednou, poznají se projektory podle toho, že "$(\mathrm{projektor})^2 = \mathrm{projektor}$", a to náš výraz splňuje,

$$\left(\delta^\mu_\iota + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\iota\right)\left(\delta^\iota_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\iota u_\nu\right) = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu - \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu$$

(využilo se jen normalizace čtyř-rychlosti). Kam výraz promítá zjistíme tak, že ho aplikujeme na u^ν (nebo u_μ),

$$\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right)u^\nu = u^\mu - u^\mu = 0\ , \qquad \left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right)u_\mu = u_\nu - u_\nu = 0\ .$$

A že je výraz tenzorem je jasné, poněvadž se v něm nevyskytuje nic, co by nebylo tenzorového typu. Díky tomu, že tedy platí $\eta_{\mu\nu}u^\mu\delta u^\nu = 0$, je ale

$$\eta_{\mu\nu}u^{*\mu}u^{*\nu} = \eta_{\mu\nu}(u^\mu+\delta u^\mu)(u^\nu+\delta u^\nu) = -c^2+2\eta_{\mu\nu}u^\mu\delta u^\nu+O(\delta^2) = -c^2+O(\delta^2)\ . \quad (7.8)$$

Tečný vektor k variované světočáře $u^{*\mu}$ je tedy *správně normalizován*, tj. $u^{*\mu}$ má skutečně podél variované světočáry význam *čtyř-rychlosti*.

Nyní máme připraveno vše, co budeme potřebovat k variaci akce

$$\boxed{S \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\ \mathrm{d}\tau}\ ,$$

kde jsme relativistický lagrangián označili $\mathcal{L}$. Připomeneme z mechaniky, že se jedná o nalezení stacionární hodnoty funkcionálu S na třídě funkcí $x^\mu(\tau)$, které jsou na uvažovaném intervalu $[\tau_1, \tau_2]$ spojité a mají tam aspoň po částech spojitou derivaci u^μ [tento stupeň hladkosti je tedy žádán od $x^\mu(\tau)$ i od variace $\delta x^\mu(\tau)$]; lagrangián musí mít spojité derivace do 2. řádu podle všech argumentů. U nás se jedná o "úlohu s pevnými konci", poněvadž hledáme vývoj systému mezi *zadanými* koncovými stavy [zde polohami $x^\mu(\tau_1)$ a $x^\mu(\tau_2)$], takže pro variaci je předepsáno $\delta x^\mu(\tau_1) = 0$, $\delta x^\mu(\tau_2) = 0$. (Pro každý daný čas τ má variace δx^μ význam virtuálního posunutí, vystupujícího v diferenciálních variačních principech.) A nyní již

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}(\delta\mathcal{L}\mathrm{d}\tau + \mathcal{L}\delta\mathrm{d}\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\delta u^\mu\right)\mathrm{d}\tau + \mathcal{L}\delta\mathrm{d}\tau\right] = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right)\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}\tau - \mathcal{L}\,\frac{1}{c^2}\,u_\nu\mathrm{d}\delta x^\nu\right\} = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right) - \frac{1}{c^2}\,\mathcal{L}u_\nu\right]\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right\}\ \mathrm{d}\tau \overset{\mathrm{pp}}{=} \\
&\overset{\mathrm{pp}}{=} \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\left(\delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}\,u^\mu u_\nu\right) - \frac{1}{c^2}\,\mathcal{L}u_\nu\right]\delta x^\nu\right\}\ \mathrm{d}\tau = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\,u^\mu - \mathcal{L}\right)u_\nu\right]\right\}\ \delta x^\nu\ \mathrm{d}\tau\ \ ,
\end{aligned}$$

kde kromě dosazení za δu^μ a $\delta\mathrm{d}\tau$ a rutinních úprav proběhla jen (na vyznačeném místě) integrace per partes druhé části integrandu. Využilo se při ní toho, že "vyintegrovaný" člen je úměrný $[\delta x^\nu]^{\tau_2}_{\tau_1}$, což je ovšem nula. Variace δx^ν je ovšem *libovolnou* funkcí (splňující na zadaném intervalu výše uvedené podmínky), takže podle "základního lemmatu variačního počtu" platí, že $\delta S = 0$ (akce nabývá stacionární hodnoty) podél světočáry dané rovnicemi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\,u^\mu - \mathcal{L}\right)u_\nu\right] = 0\ . \quad (7.9)$$

Toto jsou **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice** našeho variačního problému $\delta S = 0$, zde v mechanice nazývané **Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu**. Jsou zjevně kovariantní, protože $\mathcal{L}$ je dle předpokladu invariant, jeho derivace podle x^ν tedy kovektor, podobně derivace podle u^ν (poněvadž u^ν je vektor), a derivace podle invariantu τ "nic nepokazí".

Poznamenejme, že pokud je systém podroben vazbě $\varphi(x^\mu) = 0$ (jak jsme říkali, uvažujeme jen vazby holonomní), je třeba rovnici $\delta S = 0$ sečíst se zintegrovanou vazbovou podmínkou

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi_{,\nu} \delta x^\nu \,\mathrm{d}\tau = 0$$

(vynásobenou Lagrangeovým multiplikátorem λ). V Eulerových-Lagrangeových rovnicích tím přibude vlevo člen $+\lambda\varphi_{,\nu}$.

7.3 Nalezení Lagrangeovy funkce

Pro nalezení relativistického lagrangiánu není k dispozici žádný universální postup. Většinou je ovšem možný tvar lagrangiánu velmi omezen již tím, že musí být lorentzovsky invariantní, výběrem proměnných, které jsou pro daný problém relevantní, a také tím, že na základě obecného tvaru Eulerových-Lagrangeových rovnic můžeme již předem rozhodnout, které členy v lagrangiánu nechceme (abychom pak v “pohybových rovnicích” např. nedostali vyšší než n-té derivace určité veličiny, a podobně). Přesto uvedeme možnost, jak se někdy lagrangián dá najít i bez “hádání”, a poté ji ilustrujeme na případu nabité částice pohybující se v elektromagnetickém poli. Nápověda vychází z kombinace d’Alembertova a Hamiltonova principu. Zintegrujme d’Alembertův princip $\left(F_\mu - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \delta x^\mu = 0$ stejným způsobem, jako je v Hamiltonově principu integrován lagrangián, tedy od τ_1 do τ_2, přičemž virtuální posunutí nechť v koncových bodech vymizí. Integrací druhého členu per partes a dosazením

$$p_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu = m_0 u_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu = -m_0 c^2 \delta \mathrm{d}\tau$$

ze vztahu pro $\delta\mathrm{d}\tau$, získaného v minulé kapitole, snadno upravíme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_\mu - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \delta x^\mu \,\mathrm{d}\tau \overset{\mathrm{pp}}{=} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_\mu \delta x^\mu + p_\mu \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \mathrm{d}\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_\mu \delta x^\mu \mathrm{d}\tau + p_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu\right) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_\mu \delta x^\mu \mathrm{d}\tau - m_0 c^2 \delta \mathrm{d}\tau\right) . \end{aligned} \tag{7.10}$$

Z porovnání s Hamiltonovým principem

$$0 = \delta S = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} \,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta\mathcal{L} \mathrm{d}\tau + \mathcal{L} \delta \mathrm{d}\tau)$$

je vidět, že jako lagrangián *volné* částice ($F_\mu = 0$) lze vzít $\mathcal{L} = -m_0 c^2$. V ostatních případech závisí další postup na tvaru čtyř-síly F_μ; každopádně snahou je upravit integrál získaný z d’Alembertova principu do tvaru $\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\text{NĚCO})\, \mathrm{d}\tau$, protože pak srovnání s Hamiltonovým principem napovídá, že NĚCO by mohlo být úměrné lagrangiánu. Že to může fungovat, ukážeme na následujícím příkladu.

7.3.1 Lagrangián nabité částice v elektromagnetickém poli

Na nabitou částici, která se nachází v elektromagnetickém poli, působí *Lorentzova* čtyř-síla, takže

$$F_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu = q\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)u^\nu$$

a první člen v integrandu (7.10) dává

$$F_\mu \delta x^\mu = q\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)u^\nu \delta x^\mu = q\left(\delta A_\nu\, u^\nu - \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^\mu\right) ,$$

poněvadž v prvním členu $A_{\nu,\mu}\delta x^\mu = \delta A_\nu$ a v druhém $A_{\mu,\nu}u^\nu = \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau}$. Dosadíme do integrálu (7.10), v druhém členu provedeme per partes ("vyintegrovaný" člen vypadne díky pevným koncům) a dosadíme $\mathrm{d}\delta x^\nu = \delta \mathrm{d}x^\nu = \delta(u^\nu \mathrm{d}\tau)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(F_\mu \delta x^\mu \mathrm{d}\tau - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[q\left(\delta A_\nu\, u^\nu - \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^\mu\right)\mathrm{d}\tau - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right] \overset{\mathrm{pp}}{=} \\
&\overset{\mathrm{pp}}{=} \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[q\left(\delta A_\nu\, u^\nu + A_\mu\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right] = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[q\left(\delta A_\nu\, u^\nu \mathrm{d}\tau + A_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu\right) - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right] = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{q\left[\delta A_\nu\, u^\nu \mathrm{d}\tau + A_\mu \delta(u^\mu \mathrm{d}\tau)\right] - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right\} = \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[q\delta(A_\nu u^\nu \mathrm{d}\tau) - m_0c^2\delta\mathrm{d}\tau\right] = \\
&= \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(qA_\nu u^\nu - m_0c^2\right)\mathrm{d}\tau\ .
\end{aligned}$$

V posledním řádku jsme "samozřejmě" vyšli s variací před m_0c^2 a před q, protože tyto parametry úlohy jsou pevně zadané, ty se při ní (v rámci nějakého virtuálního souboru možností) *nehledají* — prostě jejich variace je nula. Well, takže lagrangiánem nabité částice v elektromagnetickém poli by měla být funkce

$$\mathcal{L} = -m_0c^2 + qA_\nu u^\nu\ . \tag{7.11}$$

Ověříme, zda dosazením tohoto $\mathcal{L}$ do Lagrangeových rovnic (7.9) skutečně dostaneme správnou pohybovou rovnici. Takže pozor, za chvilku proběhne

Zkouška lagrangiánu!

Napíšeme si Lagrangeovy rovnice 2. druhu ještě jednou,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\,u^\mu - \mathcal{L}\right)u_\nu\right] = 0$$

a v lagrangiánu přeznačíme sčítací index, ať se neplete: $\mathcal{L} = -m_0c^2 + qA_\sigma u^\sigma$. Máme tedy

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu} = qA_{\sigma,\nu}u^\sigma \,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} = qA_\sigma\delta^\sigma_\nu = qA_\nu \,, \qquad \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\,u^\mu - \mathcal{L}\right) = m_0c^2 \,,$$

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\,u^\mu - \mathcal{L}\right)u_\nu\right] = qA_\nu + m_0u_\nu = qA_\nu + p_\nu \,.$$

Dosazením do rovnic vyjde opravdu

$$\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}\tau} = qA_{\sigma,\nu}u^\sigma - q\frac{\mathrm{d}A_\nu}{\mathrm{d}\tau} = q(A_{\sigma,\nu} - A_{\nu,\sigma})\,u^\sigma = qF_{\nu\sigma}u^\sigma \,.$$

Právě proběhla zkouška lagrangiánu.

7.4 “Klasičtější” formulace Hamiltonova principu ($\delta\mathrm{d}\tau = 0$)

Při odvozování Eulerových-Lagrangeových rovnic (7.9) jsme poctivě brali v úvahu, že různé virtuální světočáry jsou parametrizovány různými vlastními časy. Variovali jsme proto i $\mathrm{d}\tau$, tedy způsob, jak jsme je při integraci probíhali. Výhodou tohoto přístupu je, že podél *všech* virtuálních světočar — tedy nejen na skutečné světočáře — má τ význam vlastního času a u^μ význam čtyř-rychlosti. To například znamená, že vztahu pro normalizaci čtyř-rychlosti lze využít *kdykoliv* během řešení úlohy, nejen až po dosazení do výsledných Eulerových-Lagrangeových rovnic (které už platí jen podél *skutečné* světočáry).

Je ovšem možno postupovat i “méně poctivě” (ale také správně, pokud se dá pozor), podobněji klasickému postupu, kdy jsou všechny dráhy parametrizovány stejným parametrem t, v našem relativistickém případě τ. V tomto případě bude mít ovšem τ význam vlastního času a u^μ význam čtyř-rychlosti jen na skutečné světočáře, což mimo jiné znamená, že normalizace $u_\sigma u^\sigma = -c^2$ bude povoleno využít teprve až po dosazení do Eulerových-Lagrangeových rovnic. Skutečně, pokud $\mathrm{d}\tau^* = \mathrm{d}\tau$, je variovaná čtyř-rychlost

$$u^{*\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{*\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = u^\mu + \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \,,$$

takže

$$\delta u^\mu \equiv u^{*\mu} - u^\mu = \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \,,$$

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}u^{*\mu}u^{*\nu} &= \eta_{\mu\nu}(u^\mu + \delta u^\mu)(u^\nu + \delta u^\nu) = -c^2 + 2\eta_{\mu\nu}u^\mu\delta u^\nu + O(\delta^2) = \\ &= -c^2 + 2u_\nu\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + O(\delta^2) \,.\end{aligned}$$

Naopak výhodou tohoto alternativního postupu je kratší (totiž “klasický”) tvar výsledných Eulerových-Lagrangeových rovnic. Zopakujme tedy variaci mechanické akce $S = \int \mathcal{L}\mathrm{d}\tau$ podle kapitoly 7.2, ale bez variace $\mathrm{d}\tau$ a s dosazením $\delta u^\mu = \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta\mathcal{L}\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\delta u^\mu\right)\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau \overset{\text{pp}}{=} \\ &\overset{\text{pp}}{=} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right)\delta x^\mu\right]\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right)\right]\delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau \,.\end{aligned}$$

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (→ Lagrangeovy rovnice 2. druhu) mají tedy známou podobu

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right) = 0\ . \tag{7.12}$$

Případná vazbová podmínka $\varphi_{,\nu}\delta x^\nu = 0$ opět přidá vlevo člen $+\lambda\varphi_{,\mu}$.

7.4.1 . . . a odpovídající lagrangián

Je-li jiná formulace variační úlohy, bude zřejmě muset být odlišný i lagrangián (aby příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice vedly ke správné pohybové rovnici). Nebudeme zde dlouze diskutovat, jak k němu dospět, a rovnou uvedeme, že dobrými tipy jsou například

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_0 u_\sigma u^\sigma + qA_\sigma u^\sigma\ , \qquad \mathcal{L} = -m_0 c\sqrt{-u_\sigma u^\sigma} + qA_\sigma u^\sigma\ . \tag{7.13}$$

Jako zkušení relativisté máte jistě tendenci zestručnit výrazy využitím $u_\sigma u^\sigma = -c^2$ — jenže to zde právě *nesmíte udělat*! “Normalizace čtyř-rychlosti”, daná tím, že parametr τ má význam vlastního času, platí v této formulaci úlohy *jen podél skutečně realizované světočáry*, takže ji lze použít *teprve po dosazení do Eulerových-Lagrangeových rovnic*. “Po dosazení” zde znamená až *po* výpočtu derivací, které v těchto rovnicích vystupují. Jistě, teprve *řešení* rovnic odpovídá skutečné světočáře; jejich jednotlivé členy se musí spočítat obecně a teprve pak dosadit a požadovat rovnost, jinak bychom řešení předjímali ještě než bychom ho opravdu určili. Tato jemnost, u variačních úloh obvyklá, by nebyla choulostivá, pokud by v rovnicích nebyly derivace. Derivace $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}$ jsou ale obecné, nikoli promítnuté do nějakého speciálního směru, takže i kdybychom je počítali a priori na skutečné světočáře, závisela by jejich hodnota na chování lagrangiánu i v jejím okolí. Totéž se týká gradientu $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$ — ten by také nedopadl správně, kdybychom například do lagrangiánu již předem dosadili speciální průběh čtyř-potenciálu A_μ na vybrané (“skutečné”) světočáře. Při derivování podle vlastního času se však již *můžeme* omezit na hledanou skutečnou světočáru, protože v rovnicích má nakonec tato operace význam derivace *čistě podél ní*.

S tímto na paměti spočítáme derivace $\mathcal{L}$ a ověříme, zda Eulerovy-Lagrangeovy rovnice vedou ke správné pohybové rovnici:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = qA_{\sigma,\mu}u^\sigma\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu} = \begin{cases} m_0 u_\mu + qA_\mu = p_\mu + qA_\mu \\ m_0 c\frac{u_\mu}{\sqrt{-u_\sigma u^\sigma}} + qA_\mu = m_0 u_\mu + qA_\mu = p_\mu + qA_\mu \end{cases},$$

kde vpravo odpovídá horní řádek prvnímu a dolní druhému předloženému lagrangiánu. V druhém řádku — *po* provedení derivace — jsme již využili normalizačního vztahu $-u_\sigma u^\sigma = c^2$ (poněvadž výsledek čeká už jen derivace podle τ, jak jsme právě probírali) a vidíme, že pro oba lagrangiány vyšlo totéž, takže jsou z hlediska naší variační úlohy ekvivalentní. Dosazením do rovnic již snadno dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q(A_{\sigma,\mu} - A_{\mu,\sigma})\,u^\sigma = qF_{\mu\sigma}u^\sigma\ .$$

7.5 Variační odvození Maxwellových rovnic

Různé verze Hamiltonova principu se (ve spojení s požadavkem lorentzovské invariance, případně dalších symetrií) ukázaly být neobyčejně plodnou metodou hledání kandidátek na přijatelné **teorie pole**. Místo detailního rozboru “fyziky” určitého výseku skutečnosti se tak dá i zde velmi úspěšně odhadnout lagrangián a docela jednoduše dospět k návrhu polních rovnic z požadavku stacionární hodnoty odpovídající akce. Že to "funguje" je ještě podivuhodnější než v mechanice, poněvadž veličiny, jejichž význačné chování se v dané oblasti požaduje, nemívají zdaleka tak intuitivní význam jako proběhnutá dráha, spotřebovaný čas nebo "vynaložené úsilí". Teoretičtí fyzici mají dnes skutečně *minimum* pochybností o tom, že Euler měl pravdu, když říkal, že "ve světě se neděje nic, na čem by se neprojevovala nějaká vlastnost maxima či minima".

Ukážeme zde, že z Hamiltonova principu se dá docela snadno odvodit první, "netriviální" sérii Maxwellových rovnic. Úloha zde není "diskrétní" jako u mechanického problému částice, ale "spojitá" (konfiguraci pole budeme hledat v celé nějaké prostoročasové oblasti), takže místo lagrangiánu přejdeme k jeho (vlastní) hustotě. Taková veličina má rozměr hustoty energie a má-li být invariantní, pak z výrazů sestavených ze základních "elektromagnetických" veličin (J^μ, A_μ, $F_{\mu\nu}$) připadají v úvahu $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ a $J^\alpha A_\alpha$. Správnou volbou je skutečně

$$\mathcal{L} = \int\limits_{V_0} \left(-\frac{1}{4\mu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) \mathrm{d}V_0 \ . \tag{7.14}$$

Variační úloha je formulována tak, že hledáme polní konfiguraci v nějaké pevně zvolené prostoročasové oblasti Ω, přičemž na její hranici $\partial\Omega$ je pole pevně zadáno (je tam $\delta A_\alpha = 0$) a pevně dané jsou (všude) také zdroje J^μ (jejich uspořádání se *nehledá*). V takovém případě se hustota lagrangiánu variuje jen vzhledem k potenciálu A_α a jeho derivacím. Postup je díky tomu docela jednoduchý:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}\,\mathrm{d}\tau = \delta \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{V_0} \left(-\frac{1}{4\mu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) \mathrm{d}V_0\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \int\limits_{\Omega} \delta \left(-\frac{1}{4\mu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + J^\alpha A_\alpha \right) \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2\mu}\, F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} + J^\alpha \delta A_\alpha \right) \mathrm{d}\Omega = \\
&= \int\limits_{\Omega} \left[-\frac{1}{2\mu}\, F^{\alpha\beta}(\delta A_{\beta,\alpha} - \delta A_{\alpha,\beta}) + J^\alpha \delta A_\alpha \right] \mathrm{d}\Omega = \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu}\, F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta} + J^\alpha \delta A_\alpha \right) \mathrm{d}\Omega \overset{\text{pp}}{=} \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{\mu}\, F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\delta A_\alpha + J^\alpha \delta A_\alpha \right) \mathrm{d}\Omega = \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{\mu}\, F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + J^\alpha \right) \delta A_\alpha\,\mathrm{d}\Omega \ .
\end{aligned}$$

V druhém řádku jsme použili "samozřejmý" fakt

$$\delta(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = \delta F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} = \delta F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} = 2F^{\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} \ ,$$

ve čtvrtém řádku pak nejdříve to, že

$$\begin{aligned}
F^{\alpha\beta}(\delta A_{\beta,\alpha} - \delta A_{\alpha,\beta}) &= F^{\alpha\beta}\delta A_{\beta,\alpha} - F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta} = F^{\beta\alpha}\delta A_{\alpha,\beta} - F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta} = \\
&= -F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta} - F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta} = -2F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

(podstatná je antisymetrie $F^{\alpha\beta}$), a posléze se první člen integrálu upravil "per partes"

$$\int\limits_{\Omega} F^{\alpha\beta}\delta A_{\alpha,\beta}\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\Omega} (F^{\alpha\beta}\delta A_\alpha)_{,\beta}\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\Omega} F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\delta A_\alpha\,\mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{\Omega} F^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\delta A_\alpha\,\mathrm{d}\Omega \ ,$$

kde se integrál s divergencí převedl pomocí Gaussovy věty na povrch oblasti a využilo se tamější nulovosti δA_α,

$$\int\limits_{\Omega} (F^{\alpha\beta}\delta A_\alpha)_{,\beta}\,\mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} (F^{\alpha\beta}\delta A_\alpha)\,\mathrm{d}\Sigma_\beta = 0\ .$$

Požadavek stacionarity akce $\delta S = 0$ tak při obecnosti δA_α implikuje první sadu Maxwellových rovnic

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu J^\alpha\ . \tag{7.15}$$

Připomeňme ještě, že druhou sadu ($F_{[\mu\nu,\rho]\mathrm{cykl}} = 0$) není třeba hledat — platí automaticky díky definici $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ (tedy díky zvolenému vyjádření polí pomocí potenciálů).

KAPITOLA 8

Tenzor energie a hybnosti

V této kapitole nastíníme existenci a některé vlastnosti symetrického tenzoru 2. řádu, který je jedním z centrálních objektů *obecné* teorie relativity. Reprezentuje tam zdroje gravitačního pole — v geometrickém jazyce zdroje zakřivení prostoročasu. Neděste se (vlastně *netěšte* se!), zde ve speciální relativitě se nám taková věc nemůže stát, naším prostoročasem je za všech okolností Minkowského, "plochý" prostoročas; ale už zde je zmíněný tenzor významný a užitečný. Dokáže totiž popsat energii a hybnost *jakéhokoli fyzikálního systému*, tím pádem se pomocí něj velmi elegantně zapíšou zákony zachování těchto veličin. Řeč je o **tenzoru energie a hybnosti**. Seznámíme se s ním na důležitých příkladech nabitého nekoherentního prachu a elektromagnetického pole.[1]

8.1 Svázaný systém nabitého hmotného prachu a EM pole

8.1.1 $T^{\mu\nu}$ pro nabitý hmotný prach

Uvažujme elektricky nabité kontinuum bez vnitřní mechanické interakce (tj. s nulovým tlakem) — **nabitý nekoherentní prach**. Jak víme, každý jeho element se pohybuje pod působením Lorentzovy síly F_{L}^{μ} podle rovnice (5.26),

$$m_0 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F_{\mathrm{L}}^{\mu} \; (= qF^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}) \, ,$$

kde m_0 je klidová hmotnost a q elektrický náboj elementu. Vztáhneme-li pohybovou rovnici na jednotku vlastního objemu V_0, tedy místo m_0 vezmeme její klidovou hustotu $\rho_{00} \equiv \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}V_0}$ a místo Lorentzovy síly její vlastní hustotu $\Phi_{\mathrm{L}}^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{L}}^{\mu}}{\mathrm{d}V_0} = F^{\mu\nu}J_\nu$ (zrychlení není extenzívní, na objemu nezávisí), máme tvar vhodnější pro spojité prostředí,

$$\rho_{00} \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \Phi_{\mathrm{L}}^{\mu} \, . \qquad (8.1)$$

[1] Tím se ovšem dostáváme do no(ta)čních potíží, protože se současně vyskytne hustota hmotnosti i elektrického náboje a každý ví, že obě se značí ρ. V učebnicích, které nejsou psány v soustavě SI, se dá hustota hmotnosti značit μ, ale u nás má μ zamluveno permeabilita. Vyřešíme to takto: na rozdíl od kapitoly o elektrodynamice bude v této kapitole ρ značit hustotu hmotnosti — a budeme doufat, že hustotu elektrického náboje vůbec nebudeme potřebovat výslovně zmínit.

Na levé straně můžeme upravit

$$\rho_{00}\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \rho_{00}u^\mu{}_{,\nu}u^\nu = (\rho_{00}u^\mu u^\nu)_{,\nu} - u^\mu(\rho_{00}u^\nu)_{,\nu} = (\rho_{00}u^\mu u^\nu)_{,\nu} = (T^{\mu\nu}_{\text{prach}})_{,\nu}\ ,$$

kde druhý člen vypadl díky rovnici kontinuity (zachování klidové hmotnosti) $(\rho_{00}u^\nu)_{,\nu} = 0$ a první jsme zapsali pomocí **tenzoru energie a hybnosti nekoherentního prachu**

$$T^{\mu\nu}_{\text{prach}} \equiv \rho_{00}u^\mu u^\nu. \tag{8.2}$$

8.1.2 Fyzikální význam $T^{\mu\nu}_{\text{prach}}$

Fyzikální obsah $T^{\mu\nu}_{\text{prach}}$ je vidět bezprostředně na jeho složkách vůči nějakému inerciálnímu systému. Rozepíšeme-li čtyř-rychlost prachu na složky $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$, máme

$$T^{00}_{\text{prach}} = \rho_{00}u^0u^0 = \rho_{00}\gamma^2c^2 = \rho c^2, \tag{8.3}$$
$$T^{0j}_{\text{prach}} = \rho_{00}u^0u^j = \rho_{00}\gamma^2cv^j = \rho cv^j, \tag{8.4}$$
$$T^{ij}_{\text{prach}} = \rho_{00}u^iu^j = \rho_{00}\gamma^2v^iv^j = \rho v^iv^j, \tag{8.5}$$

tedy

- T^{00}_{prach} je hustota energie, totiž $\rho \equiv \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{\gamma\mathrm{d}m_0}{\frac{\mathrm{d}V_0}{\gamma}} = \gamma^2\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}V_0} \equiv \rho_{00}$
- T^{0j}_{prach} je tok hustoty energie (dělené c), jinak řečeno hustota hybnosti (násobená c)
- T^{ij}_{prach} je tok hustoty hybnosti (spíš se to ale říká opačně: hustota toku hybnosti), konkrétně hustota toku i-té složky hybnosti ve směru j-té souřadnicové osy (jinak řečeno jsou to složky tlaku/napětí, neboť tok hybnosti = hybnost za čas = síla, a hustota síly odpovídá tlaku).

Nyní je zřejmé, že časová složka rovnice $(T^{\mu\nu}_{\text{prach}})_{,\nu} = \Phi^\mu_{\text{L}}$ představuje zákon zachování energie a prostorové složky zákon zachování hybnosti.

8.1.3 $T^{\mu\nu}$ pro elektromagnetické pole

Na pravé straně rovnice $(T^{\mu\nu}_{\text{prach}})_{,\nu} = \Phi^\mu_{\text{L}}$ vystupuje vnější síla, což signalizuje, že uvažovaný systém není “uzavřený” — neinteraguje jen sám se sebou (původce vnější síly není zahrnut). Jistě, ve $\Phi^\mu_{\text{L}} = F^\mu{}_\nu J^\nu$ vystupuje elektromagnetické pole $F^\mu{}_\nu$, o kterém se vůbec nic neřeklo, přitom jistě také nese nějakou energii a hybnost. Elektromagnetické pole musíme uvažovat už z důvodu konzistence, protože sám (nabitý) prach nějaké pole budí. Doplňme systém právě o “self-konzistentní” **elektromagnetické pole** (= pole generované čistě samotným nabitým prachem a indukující právě takovou Lorentzovu sílu, která s prachem “správně” hýbe). U této části problému budeme postupovat opačně — tenzor energie a hybnosti popisující elektromagnetické pole prostě napíšeme a ukážeme, že jeho složky mají stejný význam jako u prachu a že splňuje analogický zákon zachování. Tenzor vypadá takto:

$$T^{\mu\nu}_{\text{EM}} = \frac{1}{\mu}\left(F^{\mu\iota}F^\nu{}_\iota - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = \frac{1}{2\mu}\left(F^{\mu\iota}F^\nu{}_\iota + {}^*F^{\mu\iota\,*}F^\nu{}_\iota\right). \tag{8.6}$$

8.1.4 Fyzikální význam $T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$

Především vzpomeneme na invariant (5.20), tj. že $F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 2B^2 - \frac{2E^2}{c^2}$. Určíme složky $T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$:

- T^{00}_{EM} je hustota energie elektromagnetického pole v daném inerciálním systému (značívá se w),

$$\begin{aligned} \mu T^{00}_{\mathrm{EM}} &= F^{0j}F^{0}{}_{j} - \frac{1}{4}\eta^{00}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) \\ \Longrightarrow \quad T^{00}_{\mathrm{EM}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) \equiv w \end{aligned} \tag{8.7}$$

- T^{0j}_{EM} je hustota toku energie (dělené c), neboli hustota hybnosti (násobená c) — totiž Poyntingův vektor dělený c,

$$T^{0j}_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{\mu}F^{0k}F^{j}{}_{k} = \frac{1}{\mu}\frac{E^k}{c}\epsilon^{j}{}_{kl}B^l = \frac{1}{c}\epsilon^{j}{}_{kl}E^kH^l \equiv \frac{1}{c}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)^j \equiv \frac{1}{c}S^j \tag{8.8}$$

- prostorová část tenzoru energie a hybnosti T^{ij}_{EM} bývá označována jako Maxwellův tenzor napětí, má význam hustoty toku hybnosti elektromagnetického pole,

$$\begin{aligned} \mu T^{ij}_{\mathrm{EM}} &= F^{i0}F^{j}{}_{0} + F^{ik}F^{j}{}_{k} - \frac{1}{4}\delta^{ij}\left(2B^2 - \frac{2E^2}{c^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{c^2}E^iE^j + \epsilon^{ikm}B_m\epsilon^{j}{}_{kn}B^n - \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{c^2}E^iE^j + \delta^{ij}B^2 - B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{c^2}E^iE^j - B^iB^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) \\ \Longrightarrow \quad T^{ij}_{\mathrm{EM}} &= -E^iD^j - H^iB^j + \delta^{ij}w\ ; \end{aligned} \tag{8.9}$$

  kromě dosazení jsme využili jen staré známé identity $\epsilon^{ikm}\epsilon^{j}{}_{kn} = \delta^{ij}\delta^m_n - \delta^i_n\delta^{mj}$.

Složky $T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$ mají tedy fyzikální význam zcela analogický složkám $T^{\mu\nu}_{\mathrm{prach}}$.

Povšimneme si ještě dvou zajímavých vlastností tenzoru energie a hybnosti elektromagnetického pole. Jednak má nulovou stopu, $(T_{\mathrm{EM}})^{\mu}_{\mu} = 0$ — stačí uvážit, že stopa metrického tenzoru je 4, totiž $g^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu}_{\mu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$. A za druhé pro něj platí

$$\begin{aligned} T^{0\nu}_{\mathrm{EM}}T^{\mathrm{EM}}_{0\nu} &= T^{00}_{\mathrm{EM}}T^{\mathrm{EM}}_{00} + T^{0j}_{\mathrm{EM}}T^{\mathrm{EM}}_{0j} = w^2 - \frac{S^2}{c^2} = \frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right)^2 - \frac{1}{\mu^2c^2}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right)^2 - \frac{1}{\mu^2c^2}E^2B^2 + \frac{1}{\mu^2c^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)^2 + \frac{1}{\mu^2c^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2 = \frac{1}{16\mu^2}\left[(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu}{}^{*}F^{\mu\nu})^2\right], \end{aligned}$$

kde jsme využili obecně platnou vektorovou identitu $\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2 = E^2B^2$. Zjistili jsme tím, že výraz $w^2 - \frac{S^2}{c^2}$ je invariantní a nezáporný, přičemž nulový je jen pokud jsou nulové oba invarianty elektromagnetického pole.

8.1.5 Zákony zachování pro $T^{\mu\nu}$

Nyní spočítáme divergenci $T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$,

$$\begin{aligned}
\mu(T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}})_{,\nu} &= F^{\mu\iota}{}_{,\nu}F^{\nu}{}_{\iota} + F^{\mu\iota}F^{\nu}{}_{\iota,\nu} - \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}{}_{,\nu}F_{\rho\sigma} = \\
&= F^{\mu\iota,\nu}F_{\nu\iota} + F^{\mu}{}_{\iota}F^{\nu\iota}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\,F^{\rho\sigma,\mu}F_{\rho\sigma} = \\
&= F^{\mu[\iota,\nu]}F_{\nu\iota} - F^{\mu}{}_{\iota}F^{\iota\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\,F^{\nu\iota,\mu}F_{\nu\iota} = \\
&= -F^{\mu}{}_{\iota}\,\mu J^{\iota} + \frac{1}{2}\left(F^{\mu\iota,\nu} - F^{\mu\nu,\iota} - F^{\nu\iota,\mu}\right)F_{\nu\iota} = \\
&= -\mu\Phi^{\mu}_{\mathrm{L}} - F^{[\mu\nu,\iota]\mathrm{cykl}}F_{\nu\iota} = -\mu\Phi^{\mu}_{\mathrm{L}}\,. \qquad (8.10)
\end{aligned}$$

V předposledním řádku jsme použili 1. sadu Maxwellových rovnic, $F^{\iota\nu}{}_{,\nu} = \mu J^{\iota}$, a v posledním řádku jejich 2. sadu $F^{[\mu\nu,\iota]\mathrm{cykl}} = 0$. Spojíme-li tento výsledek s odpovídajícím výsledkem $(T^{\mu\nu}_{\mathrm{prach}})_{,\nu} = \Phi^{\mu}_{\mathrm{L}}$ pro samotný prach jakožto zdroj daného elektromagnetického pole, zjišťujeme, že tenzor energie a hybnosti $T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{\mathrm{prach}} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$, popisující kompletní, “self-konzistentní” systém nabitého hmotného prachu a elektromagnetického pole, splňuje jednoduché rovnice

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0}\,. \qquad (8.11)$$

Tyto rovnice mají význam **zákonů zachování** — časová složka zákona zachování energie a prostorové složky zachování hybnosti. Dosazením složek $T^{\mu\nu}_{\mathrm{prach}}$ a $T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}}$ a složek Φ^{μ}_{L} (5.27) vychází zvlášť pro část příslušející prachu

$$(T^{0\nu}_{\mathrm{prach}})_{,\nu} = \Phi^{0}_{\mathrm{L}} \iff \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{1}{c^2}\,\vec{E}\cdot\vec{J}\,, \qquad (8.12)$$

$$(T^{i\nu}_{\mathrm{prach}})_{,\nu} = \Phi^{i}_{\mathrm{L}} \iff \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}\vec{v}) = \vec{\Phi}_{\mathrm{L}} \qquad (8.13)$$

a pro část příslušející elektromagnetickému poli

$$(T^{0\nu}_{\mathrm{EM}})_{,\nu} = -\Phi^{0}_{\mathrm{L}} \iff \frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{J}\,, \qquad (8.14)$$

$$(T^{i\nu}_{\mathrm{EM}})_{,\nu} = -\Phi^{i}_{\mathrm{L}} \iff \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overset{\leftrightarrow}{T}_{\mathrm{EM}} = -\vec{\Phi}_{\mathrm{L}}\,. \qquad (8.15)$$

Oboustranná šipka nad T značí tenzor 2. řádu (přesněji dvakrát kontravariantní tenzor). [Jak vidíte, šipka není tak pěkná jako šipky vektorů vytvořené pomocí `\vec`, navíc písmeno T je při jednoduchém použití `\stackrel` posunuto pod základní úroveň řádku. Uvítám *elegantní* řešení tohoto LaTeXového problému!]

K notaci ještě nostalgickou poznámku: speciální relativitu jsem kdysi převzal po docentu Kurtu Fišerovi, který byl proslulý mj. tím, že striktně odmítal indexové značení. Přednášku sice fakticky dělal v kartézských souřadnicích (jak je ve speciální relativitě přirozené), ale nechtěl, aby si studenti mysleli, že není možno pracovat v souřadnicích jiných, popř. že veličiny lze zapisovat *jedině* ve složkách, nebo dokonce že veličiny “žijí” jen prostřednictvím svých složek. Indexový formalismus odmítal i přesto, že teorie relativity matematicky stojí na diferencovatelných varietách (jejichž hlavní vlastností je, že na nich existuje úplný atlas souřadnicových map), a i pokud se zdůraznilo, že se ve skutečnosti jedná o formalismus tzv. *abstraktních* indexů, v němž indexy *nepředstavují* nutně složky. Pokud ovšem chtěl zapsat vše INVARIANTNĚ (toto slovo vyslovoval s obřadným důrazem) — a přitom tak, aby bylo na každé veličině ihned patrno, jakého je typu —, musel najít vhodné symboly (místo indexů). Čtyř-vektory proto značil "kladívkem" (tří-vektory normálně šipkou) a čtyř-tenzory druhého řádu oboustranným kladívkem (jejich třírozměrné protějšky oboustrannou šipkou).[2] Pan docent užíval dříve rozšířeného tzv. imaginárního formalismu, v němž jsou časové složky veličin násobeny imaginární jednotkou; tím se uměle "zařídí" mínus u časové části vnitřních součinů, aniž by (v kartézských souřadnicích. . .) bylo třeba zavádět metrický tenzor (jeho úlohu hraje jednotková matice $\delta_{\mu\nu}$) nebo Laméovy koeficienty, speciálně jsou totožné kontravariantní a kovariantní (kartézské!) složky veličin.

Když jsem pak přednášku převzal, chtěl jsem v ní "Minkowského ducha" rozhodně zachovat, ale měl jsem pocit, že důležitější v tomto směru je nemaskovat pravou povahu veličin, totiž jasně *rozlišit* vektory a lineární formy (kovektory) atd., tedy přejít k formalismu reálnému. Kromě "fyzikálního" kursu speciální a obecné relativity začal tou dobou na katedře paralelně probíhat i kurs geometrických metod (kde se probírá matematické podloží teorie relativity, případně i dalších oblastí teoretické fyziky), takže bylo přirozené a pro studenty poučné, aby byla v obou ctěna notace v daném oboru obvyklá, tedy v relativitě indexová a v geometrii abstraktní. Než se toto vyjasnilo, uvažoval jsem ve snaze o kontinuitu výuky předmětu i o psaní značek *pod* písmena v případě kovariantních veličin — kladívek u čtyř-kovektorů a oboustranných kladívek u tenzorů typu (0,2). To však vypadá velmi nepřirozeně a navíc je pak obtížné "nedestruktivně" označit tenzor smíšený (např. jednou kontravariantní a jednou kovariantní), pročež kolegové doporučovali psát označení tenzorů výhradně *nad* písmena, ale pro kovariantní verzi použít jiný pracovní nástroj, např. sekyrku. Dobře, že přednost nakonec dostala kontinuita směrem k navazujícímu kursu obecné relativity, jinak by teď problémů s LaTeXem bylo víc. . .

8.2 Tenzor energie a hybnosti rovinné elektromagnetické vlny

V kapitole 5.5 jsme zjistili, že pro speciální případ elektromagnetického pole — rovinnou harmonickou vlnu — má tenzor $F^{\mu\nu}$ velmi speciální vlastnosti, především oba jeho invarianty $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}{}^{*}F^{\mu\nu}$ jsou nulové. Pro zajímavost se podívejme, jak vypadá pro takové pole tenzor energie a hybnosti. Dosazením (reálné části) $F_{\mu\nu} = \mathrm{i}k_\mu A_\nu - \mathrm{i}k_\nu A_\mu$ z (5.33) máme

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{\mu} F^{\mu\iota} F^{\nu}{}_{\iota} = \frac{1}{\mu} (k^\iota A^\mu - k^\mu A^\iota)(k_\iota A^\nu - k^\nu A_\iota) = \frac{1}{\mu} A^\iota A_\iota k^\mu k^\nu \left(\equiv \alpha^2 k^\mu k^\nu\right) \ ,$$

kde jsme využili jen světelnosti vlnového vektoru ($k^\iota k_\iota = 0$) a rovnosti $k^\iota A_\iota = 0$, plynoucí z Lorentzovy kalibrační podmínky. Tvar tenzoru je tedy stejný jako u nekoherentního prachu (úměrný diadickému součinu vektorových polí tečných ke světočárám), jen místo čtyř-rychlosti vystupuje u světla samozřejmě vlnový vektor k^μ. Hustota hybnosti tohoto pole (násobená c) $T^{0i}_{\mathrm{EM}} = \frac{S^i}{c} = \alpha^2 k^0 k^i$ a hustota jeho energie $T^{00}_{\mathrm{EM}} = w = \alpha^2 k^0 k^0$ spolu souvisejí vztahem

$$|\vec{S}| = c\,\alpha^2 k^0 |\vec{k}| = c\,\alpha^2 (k^0)^2 = cw \ ,$$

tedy tok energie odpovídá tomu, že veškerá energie se pohybuje rychlostí c. O polích zjištěného tvaru tenzoru energie a hybnosti se proto hovoří jako o polích *nulových* nebo *(ryze) zářivých*.

[2] Speciálním zážitkem (pro křídu často fatálním) býval zápis vnitřního (skalárního) součinu, který bylo třeba jasně odlišit od součinu vnějšího (*dyády*). . .

Literatura

[1] Dvořák L., *Speciální teorie relativity*, v přípravě

[2] Fölsing A., *Albert Einstein* (Volvox Globator, Praha 2001)

[3] Horský J., *Speciální teorie relativity* (SNTL, Praha 1972)

[4] Horský J., Novotný J., Štefaník M., *Mechanika ve fyzice* (Academia, Praha 2001)

[5] Krtouš P., *Výlet ke hvězdám* (Praha 2005); http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/StarTrip/

[6] Kvasnica J., *Teorie elektromagnetického pole*, (Academia, Praha 1985)

[7] Votruba V., *Základy speciální teorie relativity* (Academia, Praha 1969, 1977)

[8] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation* (Freeman, New York 1973)

[9] Obdržálek J. a kol., *Relativita — 7 krát NE!* (Creative Connections, Charles Multimedia Education, Praha 2005); http://utf.mff.cuni.cz/ jobdr/, první položka v části “Multimediální pořady”

[10] Rindler W., *Introduction to Special Relativity* (Clarendon Press, Oxford 1982, 1991)

[11] Stephani H., *General Relativity. An introduction to the theory of the gravitational field* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1982)