

kteře jsou ve vzájemném pohybu, Einstein ukázal, že Newtonovy představy o absolutním prostoru a čase je nutno opustit a nahradit je novým, relativistickým pojetím.

Důsledky tohoto poznatku se nemohly ve fyzice omezit jen na elektrodynamiku, která už vlastně byla relativistickou teorií, ale musely se projevit hlubokým vlivem i na všechny ostatní oblasti fyziky. Relativistické pojetí prostoru a času vedlo především k revizi a korekci základních zákonů Newtonovy mechaniky, v nichž zvláště idea absolutního času zůstala (i po Machově reformulaci) pevně zakořeněna. Ukázalo se, že Newtonovy pohybové rovnice jsou aproximací rovnic relativistických a že se jich dá použít jen při rychlostech malých proti rychlosti světla. Pohybové rovnice nové, relativistické mechaniky jsou už (stejně jako Maxwellovy-Lorentzovy rovnice elektromagnetického pole) invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Nová mechanika přivedla Einsteina též k objevu důležitého obecného vztahu mezi setrvačnou hmotou hmotných těles a jejich energií. Nakonec pak relativistické pojetí prostoru, času a pohybu umožnilo Einsteinovi vybudovat r. 1916 i zcela novou teorii gravitace a podat obdivuhodnou geometrickou interpretaci tohoto základního fyzikálního jevu. Tím bylo nepochybně dosaženo vrcholu tzv. „klasické“ (nekvantové) fyziky.

Jak již uvedeno, byla revize klasických fyzikálních pojmů, kterou provedla teorie relativity, dlouhou dobu před tím připravována a vývoj fyziky k ní nevyhnutelně směřoval. A tak není pochyby, že dnes bychom teorii relativity (alespoň tzv. speciální teorii) měli i bez Einsteina. K řadě výsledků obsažených v první Einsteinově práci z r. 1905 dospěl současně a nezávisle i Poincaré. Pro další rychlý vývoj teorie relativity byla neocenitelnou spolupráce matematiků (Minkowski, Hilbert, Weyl) a vhodný pojmový i formálně matematický aparát, který byl ve starších i novějších geometrických teoriích (Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Riemann, Ricci a Levi-Civita) pohotov. Ostatně i zase teorie relativity působila blahodárně na rozvoj moderní diferenciální geometrie. Vzhledem k tomu, že teorie relativity hluboce zasáhla do tak základních pojmů jako jsou prostor a čas, projevil se její vliv i mimo rámec vlastní fyziky a matematiky a zasáhl např. i do filosofie.

Hlavním oborem praktického použití principů teorie relativity je ovšem dnešní atomová fyzika, zvláště fyzika jaderná a fyzika elementárních částic. V těchto oborech je relativistický popis a výklad pozorovaných jevů nezbytný a v nich se dnes teorie relativity uplatňuje i v technické praxi. Zatímco v době svého vzniku vysvětlovala jen několik subtilních fyzikálních jevů bez praktického významu, dnes je už nepostradatelná i při konstrukci a provozu mohutných strojních zařízení. Např. velké urychlovače elektronů a protonů by se nedaly projektovat, sestavit a řídit bez předchozích výpočtů na základě relativistické mechaniky a elektrodynamiky.

Fyziku elementárních částic si nelze představit bez Einsteinova vztahu mezi hmotou a energií a dnešní teorie elementárních částic by se neobešly bez Einsteinova principu relativity, resp. postulátu invariance vůči tzv. Poincaréově grupě, který je pro ně stále i neocenitelným principem heuristickým. Podobný význam má teorie relativity také v moderní astronomii a kosmologii, v nichž je stálým zdrojem nových spekulací.

KAPITOLA I

NEWTONOVA MECHANIKA A GALILEIHO PRINCIP RELATIVITY

Newtonovou mechanikou budeme v dalším rozumět teorii, podle níž je materiální svět složen z hmotných bodů a hmotné body se pohybují podle Newtonových zákonů pod vlivem centrálních sil, jimiž na sebe vzájemně působí přímo do dálky.

Toto velmi konkrétní a jasné Laplaceovo pojetí Newtonovy mechaniky mělo základní význam pro rozvoj nejen klasické mechaniky samotné, ale i celé novodobé fyziky jakožto exaktní vědy. Newtonova mechanika v Laplaceově pojetí byla první novodobou obecnou fyzikální teorií, prvním pozoruhodným pokusem o přesnou matematickou formulaci úplné soustavy základních zákonů fyzikálního světa. Znalost jejích hlavních pojmů a zákonů je nezbytná, mají-li se náležitě pochopit novější fyzikální teorie sledující podobné cíle. Je nezbytná i k náležitému pochopení a hodnocení Einsteinovy teorie relativity.

V této kapitole si připomeneme základní pojmy, zákony, předpoklady a hypotézy Newtonovy mechaniky i některé jejích významné důsledky, z nichž nejdůležitější pro nás bude tzv. Galileiho princip relativity. Pojednáme také o základních představách Machovy mechaniky, podáme jednoduchou matematickou formulaci jejích zákonů a ukážeme, že v této teorii platí obecnější princip relativity než v mechanice Newtonově.

Náš výklad v této kapitole nemá být ovšem náhradou za studium klasické analytické mechaniky podle běžného programu; může však být v jistém smyslu jeho doplněním, neboť některé otázky, důležité z hlediska našeho konečného cíle, rozvádí a objasňuje podrobněji než je v učebnicích analytické mechaniky [1] obvyklé.

1. PROSTOR A ČAS V KLASICKÉ MECHANICE

1.1. REFERENČNÍ SOUSTAVY, SYSTÉMY SOUŘADNIC, TRANSFORMACE SOUŘADNIC

Základní pojmy, s nimiž se v mechanice setkáváme hned na počátku, jsou hmotný bod a jeho poloha v daném okamžiku. Polohu bodu M lze určit např. tak, že udáme jeho kartézské (pravoúhlé) souřadnice x_1, x_2, x_3 v systému S , jehož tři (vzájemně kolmé) osy procházejí středem Země a jsou s ní pevně spojeny. Hmotnou soustavu (těleso), vůči níž jsou ustáleny osy používaného systému kartézských souřadnic, nazýváme *referenční* (opěrnou, vztažnou) *soustavou* (tělesem). V uvedeném příkladě je Země referenční soustavou a její střed je zvolen za počátek O systému S .

Někdy je výhodnější zvolit jiný systém (kartézských) souřadnic x'_1, x'_2, x'_3 , např. systém S' , jehož osami jsou průsečnice určitých dvou sousedních stěn a podlahy laboratoře. Pak nové souřadnice x'_j ($j = 1, 2, 3$) bodu M souvisí s původními souřadnicemi x_j obecně vztahy

$$x'_j = \sum_{k=1}^3 C_{jk}(x_k - x_k(O')), \quad (1)$$

v nichž $x_k(O')$ jsou původní souřadnice počátku O' systému nových souřadnic x'_j .

Koeficient C_{jk} je kosinus úhlu mezi j -tou osou systému S' a k -tou osou systému S . Platí tedy mezi koeficienty vztahy ortogonality

$$\sum_{i=1}^3 C_{ji}C_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } j = k, \\ 0 & \text{je-li } j \neq k, \end{cases} \quad (2)$$

i obrácené vztahy

$$\sum_{i=1}^3 C_{ij}C_{ik} = \delta_{jk}. \quad (2a)$$

Z nich plyne řada dalších, známých a užitečných relací, které si připomeneme podle potřeby později. (Vztahy (2a) jsou algebraickým důsledkem vztahů (2) a obráceně.)

Aby se zápis rovnic a vzorců zjednodušil, nadále budeme v rovnicích (1), (2) a jim podobných vynechávat sumační znaky a bude platit, že se automaticky sčítá (od 1 do 3) podle latinského indexu, který označuje osu souřadnic a v jednom členu se vyskytuje dvakrát, není-li výjimečně uvedeno, že se sčítat nemá. Výrazy typu $\sum x_j^2$ budeme důsledně psát ve tvaru $x_j x_j$ (nikoliv x_j^2).

Pro nové souřadnice počátku O původních souřadnic dostáváme z rovnic (1) vyjádření

$$x'_j(O) = -C_{jk} x_k(O'),$$

neboť $x_k(O) = 0$. Rovnice (1) můžeme tedy nahradit rovnicemi

$$x'_j - x'_j(O) = C_{jk} x_k. \quad (3)$$

Použitím vztahů (2a) se rovnice (1) popř. (3) snadno rozřeší podle původních souřadnic a tím se získají inverzní transformace

$$x_k - x_k(O') = C_{ik} x'_i, \quad (4)$$

popř.

$$x_k = C_{ik}(x'_i - x'_i(O)). \quad (5)$$

Důležité jsou dva zvláštní případy transformace (1):

Prvním je prosté posunutí počátku se zachováním směrů os. V tomto případě $C_{jk} = \delta_{jk}$ a rovnice (1) se zjednoduší na

$$x'_j = x_j - x_j(O'). \quad (6)$$

Druhým zvláštním případem je pootočení trojhranu os kolem jedné osy, např. osy 3 $\equiv 3'$ o úhel φ . V tomto případě rovnice (1) přejdou na tvar

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad (7)$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi,$$

$$x'_3 = x_3.$$

Tuto transformaci zapíšeme symbolicky ve tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{R}(3, \varphi) \mathbf{x}$.

Z transformace (6) a ze tří transformací typu (7), totiž

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{R}(3', \varphi) \mathbf{x}',$$

$$\mathbf{x}''' = \mathbf{R}(1'', \vartheta) \mathbf{x}'',$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(3''', \psi) \mathbf{x}''',$$

a popř. ještě ze zrcadlení $\bar{x}_j = -\bar{x}_j$, lze složit libovolnou obecnou transformaci tvaru (1). Úhly φ, ϑ, ψ jsou Eulerovy úhly známé z kinematiky tuhého tělesa. Lze také ukázat, že množina transformací (1) tvoří grupu. (Viz úlohy na konci kap. I.)

1.2. TRANSFORMACE SLOŽEK RYCHLOSTI A ZRYCHLENÍ

Přistupme nyní k důležitým transformačním vzorcům pro veličiny charakterizující pohyb hmotného bodu. Pohyb bodu M vůči systému S je určen, jsou-li jeho souřadnice x_j vyjádřeny funkcemi času t . Uvažujme nejprve o případě, kdy jsou trojhrany os obou systémů S, S' pevně spojeny s tímž referenčním tělesem (např. se Zemí) a tedy i spolu navzájem, takže koeficienty C_{jk} a souřadnice $x_k(O')$ v rovnicích (1) jsou konstanty. Derivováním rovnic (1) podle času pak dostáváme pro složky rychlosti a zrychlení bodu M transformační vzorce

$$u'_j = \dot{x}'_j (\equiv dx'_j/dt) = C_{jk} \dot{x}_k = C_{jk} u_k, \quad (8)$$

$$a'_j = \dot{u}'_j = C_{jk} \dot{u}_k = C_{jk} a_k. \quad (9)$$

Z těchto rovnic a ze vztahů ortogonality (2a) dále plyne

$$u' = (u'_j u'_j)^{\frac{1}{2}} = (u_k u_k)^{\frac{1}{2}} = u, \quad (8a)$$

a podobně

$$a' = a. \quad (9a)$$

Velikost rychlosti a zrychlení bodu M se tedy při uvažovaných speciálních transformacích nemění.

Důležitější a zajímavější je případ, kdy jsou trojhrany os systémů S a S' spojeny s různými referenčními tělesy a jsou tedy obecně vůči sobě navzájem v pohybu. Transformace souřadnic je opět dána obecnými rovnicemi (1), ale veličiny C_{jk} a $x_k(O')$ jsou funkcemi času t . Funkce $C_{jk}(t)$ nelze ovšem volit vzájemně nezávisle a libovolně, neboť musí v každém okamžiku splňovat vztahy (2) a (2a), jsou-li oba systémy souřadnic kartézské.

Všimněme si nejprve dvou speciálních případů takové transformace souřadnic:

První vznikne z (6), položíme-li tam

$$x_j(O') = v_j t + x_j^0(O'). \quad (10)$$

Veličiny v_j a $x_j^0(O')$ jsou konstanty. V tomto případě zřejmě běží o rovnoměrný translaci pohybu celého trojhranu os $1', 2', 3'$ vzhledem k trojhranu os $1, 2, 3$. Přitom stejnojmenné osy obou systémů S, S' jsou rovnoběžné. Veličiny v_j jsou složky rychlosti $u_j(O')$ nového počátku O' vůči původnímu systému S. Složky rychlosti původního počátku O vůči novému systému S' jsou pak

$$u'_j(O) = -u_j(O') = -v_j. \quad (11)$$

To plyne z rovnic (6), neboť $x_j(O) = 0$.

Složky rychlosti a zrychlení libovolného bodu M se nyní transformují takto:

$$u'_j = u_j - v_j, \quad (12)$$

$$a'_j = a_j. \quad (13)$$

Rovnice (12), popř. $u_j = v_j + u'_j$, vyjadřují v Newtonově mechanice velmi důležitou větu o sčítání rychlostí (adiční teorém).

Druhý speciální případ vznikne z transformace (7), je-li úhel φ přímo úměrný času, tj. $\varphi = \omega t$, ($\omega = \text{konst.}$). Pro složky rychlosti a zrychlení bodu M pak platí tyto transformační vzorce:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi + \omega(-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi), \\ u'_2 &= -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi - \omega(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi), \\ u'_3 &= u_3; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi + 2\omega(-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi) - \\ &\quad - \omega^2(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi), \\ a'_2 &= -a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi - 2\omega(u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) - \\ &\quad - \omega^2(-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi), \\ a'_3 &= a_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Vidíme, že nyní se složky rychlosti a zrychlení transformují složitějším způsobem než samotné souřadnice. Rovnice (14) a (15) lze užitím (7) a (14) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u'_1 &= -\omega' x'_2 + (u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi), \\ u'_2 &= \omega' x'_1 + (-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi), \\ u'_3 &= u_3; \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} a'_1 &= \omega'^2 x'_1 - 2\omega' u'_2 + (a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi), \\ a'_2 &= \omega'^2 x'_2 + 2\omega' u'_1 + (-a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi), \\ a'_3 &= 0 + 0 + a_3. \end{aligned} \quad (15a)$$

V těchto formulích $\omega' = -\omega$ je úhlová rychlost rotace osového trojhranu systému S vůči systému S' (kolem osy $3'$). První členy na pravé straně rovnic (15a) udávají složky zrychlení odstředivého, druhé zrychlení Coriolisova a třetí jsou projekce zrychlení bodu M vůči S do směrů čárkovaných os v okamžiku t .

Vezměme nakonec obecnou transformaci (3) s časově proměnnými koeficienty C_{jk} i souřadnicemi $x'_j(O)$. Derivováním rovnic (3) podle času dostáváme vztahy

$$u'_j = \dot{C}_{jk} x_k + C_{jk} u_k + u'_j(O).$$

Vyšetřujeme nejprve pohyb *pevných bodů* systému S vůči systému S'. Pro tyto body máme $u_k = 0$. Dosadíme-li ještě za x_k z rovnic (4), můžeme složky rychlosti vůči S' vyjádřit vzorcem

$$u'_j = \omega'_{ji} x'_i + u'_j(Q),$$

v němž

$$\omega'_{ji} \equiv \dot{C}_{jk} C_{ik},$$

$$u'_j(Q) \equiv \dot{C}_{jk} x_k(O') + u'_j(O).$$

Význam veličin ω'_{ji} a $u'_j(Q)$ snadno určíme:

Bod Q je zřejmě ten pevný bod systému S, který je v uvažovaném okamžiku t právě v počátku O' a veličiny $u'_j(Q)$ jsou složky jeho okamžité rychlosti vůči S'. Derivováním podmínek ortogonality (2) podle času snadno zjistíme, že výraz ω'_{ji} je antisymetrický ($\omega'_{ji} = -\omega'_{ij}$). Zavedeme-li tedy označení

$$\omega' \equiv (\omega'_{32}, \omega'_{13}, \omega'_{21}),$$

$$\mathbf{x}' \equiv (x'_1, x'_2, x'_3),$$

$$\mathbf{u}' \equiv (u'_1, u'_2, u'_3),$$

můžeme $\mathbf{u}'$ zapsat v obvyklém vektorovém tvaru

$$\mathbf{u}' = \omega' \times \mathbf{x}' + \mathbf{u}'(Q).$$

Tento vzorec ukazuje, že v daném okamžiku je pohyb systému S vůči S' složen z translace rychlostí $u'(Q)$ a z rotace úhlovou rychlostí ω' kolem osy procházející počátkem O' .

Vraťme se nyní k bodu M, který se obecně pohybuje vůči S i S'. Derivujeme-li rovnice (4) dvakrát podle času a násobíme C_{jk} , dostaneme užitím (2) vzorce

$$a'_j = C_{jk}[a_k - a_k(O') - \ddot{C}_{ik}x'_i - 2\dot{C}_{ik}u'_i]. \quad (16)$$

Podle podmínek ortogonalit a definice veličin ω'_{jk} je

$$C_{jk}\ddot{C}_{ik} = \dot{\omega}'_{ij} - \omega'_{jk}\omega'_{ik},$$

takže (16) lze zapsat ve tvaru

$$a'_j = -C_{jk}a_k(O') + \omega'_{jk}\omega'_{ik}x'_i + 2\omega'_{ji}u'_i + \dot{\omega}'_{ji}x'_i + C_{jk}a_k. \quad (16a)$$

Druhý, třetí a čtvrtý člen na pravé straně udává postupně odstředivé, Coriolisovo a Eulerovo zrychlení, jak se snadno přesvědčíme, zapíšeme-li je vektorově použitím ω' . K formulím (16), (16a) se ještě vrátíme.

1.3. ABSOLUTNÍ ČAS, ABSOLUTNÍ VZDÁLENOST

Nakonec je nutné upozornit na důležité fyzikální předpoklady, které jsou víceméně „samozřejmé“ a které jsme zatím mlčky činili, takže jsou v uvedených transformačních rovnicích již implicitně obsaženy.

Je to především známá Newtonova hypotéza o univerzálním *absolutním čase*. Chceme-li ji výslovně uvést, můžeme k transformačním rovnicím (1) připojit ještě také rovnici

$$t' = t.$$

Tuto „transformační rovnici“ bychom ostatně mohli nahradit poněkud obecnější rovnicí

$$t' = t + \text{konst.},$$

která sice dovoluje počítat čas v čárkovaném systému od jiného okamžiku než v původním systému, ale zachovává beze změny časové intervaly mezi událostmi ($dt' = dt$).

Později uvidíme, že o oprávněnosti absolutního času, tj. času, který je nezávislý na volbě systému souřadnic x_j (popř. na volbě referenčního tělesa), vznikly vážné pochybnosti. Podrobně si vyložíme proč vznikly, a jak výsledky různých fyzikálních pokusů a měření donutily teoretiky k tomu, aby Newtonovu hypotézu o absolutním čase přezkoumali a nakonec ji opustili.

Při *obecné* ortogonální transformaci (1), tj. i při časově proměnných koeficientech C_{jk} a souřadnicích $x_k(O')$ platí vztahy

$$x'_j(N) - x'_j(M) = C_{jk}[x_k(N) - x_k(M)], \quad (17)$$

jestliže $x_k(M)$ a $x_k(N)$ určují *současné polohy* bodů M a N. Ze vztahů (17) a (2a) pak plyne rovnice

$$\begin{aligned} r'_{MN} &\equiv \{[x'_j(N) - x'_j(M)][x'_j(N) - x'_j(M)]\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \{[x_k(N) - x_k(M)][x_k(N) - x_k(M)]\}^{\frac{1}{2}} \equiv r_{MN}. \end{aligned} \quad (17a)$$

Je tedy v našich transformačních rovnicích obsažen i další (zase zdánlivě zcela samozřejmý) fyzikální předpoklad, který lze vyslovit takto: *Vzdálenost současných poloh dvou bodů je absolutní*, nezávislá na volbě systému souřadnic popř. referenčního tělesa, vzhledem k němuž jsou polohy těch bodů určeny.

Později uvidíme, že ani oprávněnost absolutní délky (vzdálenosti r_{MN}) nezůstala nepochybnou, a že zkušenost donutila fyziky i tento předpoklad přezkoumat a nakonec také opustit.

Zkušenosti, které vedly k revizi těchto základních pojmů a předpokladů klasické fyziky, nejsou z oboru jevů, k jejichž popisu byla vytvořena a slouží Newtonova mechanika. Při formulaci a rozboru dynamických zákonů Newtonovy mechaniky proto budeme všech vztahů z tohoto odstavce používat ještě bez omezení a beze změn.

2. ZÁKON SETRVAČNOSTI, INERCIÁLNÍ SYSTÉMY SOUŘADNIC

Galileiho zákon setrvačnosti, kterému se též říká první pohybový zákon Newtonovy mechaniky, je možno vyslovit takto:

Existuje (a lze nalézt) systém S kartézských souřadnic x_j , tzv. *inerciální systém*, v němž se pohyb každého volného hmotného bodu M řídí rovnicemi

$$a_j(M) = 0. \quad (18)$$

Volným hmotným bodem se rozumí hmotný bod nepodrobený působení pravé, skutečné síly. Co jsou to *pravé síly*, jaké jsou jejich vlastnosti a čím se liší od tzv. *zdánlivých* sil, to vše si objasníme v následujícím odstavci. Zde se zatím budeme zajímat jen o formální stránku zákona setrvačnosti.

Z uvedené jeho formulace je zřejmé, že je to vlastně existenční teorém nebo postulát. Postuluje existenci systému S s jistou, z fyzikálního hlediska význačnou vlastností. Uvedená formulace zákona setrvačnosti zřejmě také předpokládá, že volný hmotný bod je pojem absolutní, nezávislý na volbě systému souřadnic. Z toho ovšem plynou jisté požadavky na vlastnosti pravých sil (na transformační vzorce pro jejich složky, viz odst. 3,1). Až pojednáme o zákonech, jimiž se řídí pravé síly v Newtonově

mechanice, seznámíme se také s vhodným praktickým kritériem, které nám nezávisle na volbě systému souřadnic umožní poznat, že hmotný bod M je vskutku volný. Uvidíme také, jakým způsobem, je možné realizovat volné hmotné body a nalézt konkrétní inerciální systém S . Nyní si všimneme jiné důležité otázky, totiž jak dalece je inerciální systém S vůbec teoreticky určen.

Je snadné přesvědčit se o tom, že systém S není jediným inerciálním systémem, stejně jako o tom, že každý systém kartézských souřadnic nemusí být inerciální. Tak např. z transformačních vzorců (9) nebo (13) a z rovnic (18) plyne $a'_j(M) = 0$, kdežto z (15) nebo (16) a (18) dostáváme obecně $a'_j(M) \neq 0$. Transformace souřadnic, k nimž přísluší vzorce (9) a (13), tedy vedou k novým inerciálním systémům, kdežto transformace, k nimž přísluší vzorce (15) a (16), vedou obecně k systémům neinerciálním. V neinerciálním systému se volný hmotný bod může pohybovat např. po kružnici.

Transformace souřadnic vedoucí od jednoho inerciálního systému k jinému se nazývá transformace Galileiho. Ukážeme, že obecná Galileiho transformace má tvar

$$x'_j = C_{jk}[x_k - (v_k t + x_k^0(O'))]. \quad (19)$$

Veličiny C_{jk} , v_k a $x_k^0(O')$ jsou konstanty. Rovnice (19) lze podle (3) nahradit též rovnicemi

$$x'_j - (v'_j t + x_j^0(O)) = C_{jk} x_k. \quad (20)$$

Jsou-li x_k a x'_j souřadnice hmotného bodu M , pak mezi složkami jeho rychlosti v systémech S a S' platí podle (19), popř. (20) vztahy

$$u'_j = C_{jk}(u_k - v_k),$$

popř.

$$u'_j - v'_j = C_{jk} u_k.$$

Složky zrychlení bodu M se tedy při (19) i (20) transformují podle vzorců

$$a'_j = C_{jk} a_k, \quad (21)$$

takže z rovnic (18) plynou rovnice

$$a'_j = 0, \quad (18')$$

kteří mají přesně též tvar jako (18). Vzorce (21) lze užitím vztahů (2a) obrátit na tvar $a_i = C_{ji} a'_j$, takže z rovnic (18') plynou zpětně rovnice (18).

Je-li tedy systém S inerciální, je inerciální i systém S' určený transformací (19) popř. (20), neboť zjištění, že na hmotný bod M nepůsobí pravá síla, je podle předpokladu absolutní, nezávislé na systému souřadnic. Z toho vidíme, že transformace (19) nebo (20) jsou vskutku transformacemi Galileiho. Obráceně lze snadno

seznat, že dva inerciální systémy S , S' nemohou spolu souviset jinou transformací než (19) nebo (20). Má-li každý hmotný bod, který má zrychlení $a_k = 0$, mít také $a'_j = 0$, pak se z rovnic (16) snadno odvodí, že musí být $\ddot{C}_{ik} = 0$, $\dot{C}_{ik} = 0$, $a_k(O') = 0$, takže rovnice (4) musí mít tvar (20). Dokonce se dá dokázat, že i kartézský systém S , vůči němuž se tři vhodně vybrané volné hmotné body pohybují bez zrychlení, je už určen až na transformaci ve tvaru (20) a je inerciální (Langeova věta). Úplnější formulace a důkaz této věty se najde v Ú 3.

Transformace ve tvaru (19) nebo (20) tvoří tzv. grupu Galileiho, která je podgrupou grupy obecných ortogonálních transformací ve tvaru (1). Tvar rovnic (18) popisujících pohyb volného hmotného bodu v inerciálním systému se při Galileiho transformacích nemění. Říkáme též, že tyto rovnice jsou invariantní vůči grupě Galileiho.

Celkem tedy vidíme, že zákon setrvačnosti diskriminuje (vyřazuje) některé systémy souřadnic a jiné (inerciální) činí fyzikálně privilegovanými (přednostními, význačnými). Na druhé straně všechny inerciální systémy jsou z hlediska toho zákona rovnocenné. Tím není řečeno, že by některé z inerciálních systémů nemohly být privilegovanými z hlediska jiných obecných fyzikálních zákonů, např. zákonů pravých sil. (Nemáme tedy na mysli systémy význačné jen z hlediska určité konkrétní hmotné soustavy, jako je např. těžiškový systém, v němž je těžiště dané hmotné soustavy v klidu a její hybnost je nulová. Numerické hodnoty složek hybnosti totiž žádný obecný fyzikální zákon neurčuje.)

V dalších odstavcích a kapitolách uvidíme, že otázka existence privilegovaného inerciálního systému popř. jeho praktického určení sehrála ve vývoji novodobé fyziky mimořádně důležitou úlohu. Právě její zkoumání vedlo totiž k nalezení některých překvapujících experimentálních výsledků, které mohla zcela uspokojivě vyložit teprve Einsteinova teorie relativity.

Dříve než přistoupíme k zbývajícím zákonům Newtonovy mechaniky, bude užitečné připojit ještě jednu poznámku; týká se vyjádření pohybových rovnic volného hmotného bodu v neinerciálních systémech. Rovnice (16) nebo (16a) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathcal{A}'_j(M) = C_{jk} a_k(M). \quad (21a)$$

Výraz $\mathcal{A}'_j$ se zjednoduší na a'_j , je-li vztah systému S' k systému S dán Galileiho transformací. Je-li systém S inerciální a hmotný bod M volný, takže platí rovnice (18), platí v libovolném systému S' rovnice

$$\mathcal{A}'_j(M) \equiv a'_j(M) + C_{jk}[a_k(O') + \ddot{C}_{ik} x'_i(M) + 2\dot{C}_{ik} u'_i(M)] = 0, \quad (18'a)$$

kteří se zjednoduší na (18'), je-li inerciální i systém S' .

Rovnice (18'a) umožňují popsat pohyb volného hmotného bodu formálně stejným způsobem ve všech kartézských systémech souřadnic (inerciálních i neinerciálních). Nicméně je zřejmé, že tato možnost ještě nečiní neinerciální systémy rovno-

právnými se systémy inerciálními. Ve výrazech $\mathcal{A}'_j$ totiž obecně vystupují, kromě „nezávadných“ veličin $x'_i(M)$, $u'_i(M)$, $a'_i(M)$, které určují polohu a pohyb uvažovaného hmotného bodu vůči zvolenému systému S' , také ještě veličiny „závadné“, které určují vztah systému S' vůči nějakému inerciálnímu systému. (O významu veličin $\mathcal{A}'_j(M)$ viz též Ú 4.)

K otázce formulace zákona setrvačnosti a podstaty fyzikální význačnosti inerciálních systémů se však ještě jednou vrátíme v posledním odstavci této kapitoly, kde se budeme zabývat jednak úlohou, jak prakticky realizovat inerciální systém, jednak různými možnostmi, které se nabízejí při výkladu zákona setrvačnosti i jiných zákonů Newtonovy mechaniky.

3. SÍLY V NEWTONOVĚ MECHANICE A PROBLÉM VÝZNAČNÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC

3.1. NEWTONOVY POHYBOVÉ ROVNICE

Z logického obrácení zákona setrvačnosti plyne, že hmotný bod, který se vůči inerciálnímu systému S pohybuje zrychleně, je podroben působení pravé síly. Kvantitativní vztah mezi složkami zrychlení a síly udává tzv. druhý Newtonův pohybový zákon:

$$m(M) a_j(M) = f_j(M). \quad (22)$$

Veličina $m(M) > 0$, tzv. setrvačná hmota, je podle Newtonovy mechaniky pro každý hmotný bod M charakteristická, absolutní konstanta, která nezávisí ani na čase, ani na poloze a pohybovém stavu nebo jiných vnějších podmínkách, v nichž se ten hmotný bod ocitá.

Rovnice ve tvaru (22) můžeme pak stejným právem psát i v každém jiném inerciálním systému. V systému S' , který souvisí s S vztahy (19), platí tedy rovnice

$$m(M) a'_j(M) = f'_j(M), \quad (22')$$

v nichž $m(M)$ je tatáž konstanta jako v (22) a $f'_j(M)$ jsou složky pravé síly v systému S' . Z (22), (22') a (21) nyní plynou pro složky pravé síly transformační vzorce

$$f'_j(M) = C_{jk} f_k(M). \quad (23)$$

Tyto vzorce, které zatím platí při Galileiho transformacích (19) nebo (20), vyhovují požadavku, aby zjištění, že na hmotný bod M nepůsobí pravá síla, bylo nezávislé na volbě systému souřadnic, neboť z $f_j(M) = 0$ ($j = 1, 2, 3$) plyne $f'_j(M) = 0$ a obráceně. Je proto přirozené a účelné rozšířit jejich platnost i na obecné ortogonální transformace souřadnic (1) s časově proměnnými C_{jk} i s $\ddot{x}_k(O') \neq 0$. To nám umožňuje

udat tvar pohybových rovnic platný i v neinerciálních kartézských systémech. Z rovnic (22) a (23) a (21a) plynou totiž ihned rovnice

$$m \mathcal{A}'_j = f'_j, \quad (22'a)$$

v nichž pro jednoduchost vynecháváme označení hmotného bodu M . K těmto rovnicím je možno připojit podobný komentář jako k rovnicím (18'a). Vráťme se k nim ještě v odst. 4,1 při výkladu o tzv. Machově principu.

Rovnice (22'a) se dají zapsat také ve tvaru

$$m a'_j = f'_j + K'_j. \quad (22'b)$$

Veličiny $K'_j \equiv m(a'_j - \mathcal{A}'_j)$, které užitím rovnic (21a) a (16a) vyjádříme v podobě

$$K'_j = m[\omega'_{jk} \omega'_{ik} x'_i + 2\omega'_{ji} u'_i + \dot{\omega}'_{ji} x'_i - C_{jk} a_k(O')], \quad (24)$$

představují složky *zdánlivé síly*. Tato síla vymizí, je-li systém S' také inerciální (jako S). Členy na pravé straně (24) představují postupně sílu odstředivou, Coriolisovu, Eulerovu a zdánlivou sílu vyvolanou zrychleným pohybem počátku O' vůči inerciálnímu systému.

V analytické mechanice (viz např. [1]) se dále ukazuje, že Newtonovy pohybové rovnice lze zapsat též ve tvaru, v němž platí nejenom ve všech kartézských systémech (inerciálních i neinerciálních), ale i v mnohem obecnějších systémech, např. i v systémech libovolných křivočarých souřadnic. Příkladem takového zápisu Newtonových rovnic jsou Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Ani tato možnost nijak ovšem neruší význačnost inerciálních systémů, neboť k vyjádření potřebné Lagrangeovy funkce v obecných souřadnicích musíme zase explicitně znát jisté veličiny určující vztah zvoleného obecného systému souřadnic k nějakému systému inerciálnímu.

3.2. ZÁKONY PRAVÝCH SIL A GALILEIHO PRINCIP RELATIVITY

Přistupme nyní k otázce, zda i z hlediska Newtonových pohybových rovnic (22) zůstanou všechny inerciální systémy rovnoprávnými, tak jako byly z hlediska rovnic (18) popisujících pohyb volných hmotných bodů. Víme již, že rovnice (22) jsou na základě transformačních vzorců (21) a (23) formálně invariantní vůči grupě Galileiho transformací (19), tj. jejich vnější tvar je ve všech inerciálních systémech stejný. Bylo by tedy nasnadě odpovědět na naši otázku kladně zcela bez výhrad.

Musíme si však uvědomit, že rovnice (22) nabývají významu pohybového zákona, teprve když jsou dány též nezávislé zákony pravých sil, tj. vztahy určující nezávisle na rovnicích (22) složky síly f_j . Není-li přípustný tvar těchto zákonů vymezen, není ani vyloučeno, že např. k vyjádření složek síly f'_j v libovolném inerciálním systému S' je nutno znát některé veličiny určující jeho vztah k jistému „základnímu“

inerciálnímu systému. (Příklad na takový myslitelný „zákon síly“ viz v Ú 5.) Proto otázku rovnoprávnosti inerciálních systémů z hlediska Newtonova pohybového zákona nelze vlastně oddělovat od otázky jejich rovnoprávnosti z hlediska silových zákonů. V předcházejícím odstavci, při rozboru zákona setrvačnosti a jeho důsledků, jsme se o explicitní tvar zákonů pravých sil ještě nemusili starat. Stačilo nám vědět, že pojem volného hmotného bodu je absolutní.

Všimněme si proto nejprve silových zákonů v Newtonově mechanice. Pravé, skutečné síly působící na hmotné body mají podle Newtona *původ ve vzájemném působení* (interakci) *hmotných bodů*. Hmotné body působí na sebe vzájemně a bezprostředně, přímo do dálky (okamžitě), centrálními silami, které se řídí zákonem o rovnosti akce a reakce, a principem superpozice. Ve zvoleném systému S lze tedy složky síly $f_j(M)$ vyjádřit vzorcem

$$f_j(M) = \sum_N f_j(M, N), \quad (25)$$

v němž

$$f_j(M, N) = [x_j(N) - x_j(M)] r_{MN}^{-1} f_{MN} \quad (25a)$$

a $f_{MN} = f_{NM}$, takže $f_j(M, N) = -f_j(N, M)$.

Vzorec (25a) zřejmě udává složky síly, již na vybraný hmotný bod M působí bod N , a vzorec (25) říká, že se příspěvky od různých bodů N sčítají (superponují) na složky výsledné síly $f_j(M)$. Rozumí se, že vzorce (25) a (25a) určují síly v jistém čase t a že $x_j(M)$ a $x_j(N)$ jsou souřadnice bodů M a N v témž čase t .

Prototypem takové pravé síly je Newtonova *síla gravitační*. Velikost této *přitažlivé* síly mezi hmotnými body M a N je určena vzorcem

$$f_{MN}^{(G)} = k m(N) m(M) r_{MN}^{-2}. \quad (26)$$

Ve vzorci (25a) i (26) značí r_{MN} vzdálenost bodů M a N v čase t , $k = 6,6607 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ je univerzální gravitační konstanta, $m(M)$ je tzv. *tíhová hmotnost* hmotného bodu M . Oprávnění k tomu, abychom pro ni použili téhož označení jako pro hmotu setrvačnou nám dává zkušenost, která učí, že *poměr tíhové a setrvačné hmoty je u všech hmotných těles tentýž*. Rovnosti obou hmot u každého hmotného tělesa lze tedy snadno docílit vhodnou volbou velikosti univerzální konstanty k .

Nejstarší, ovšem jen zcela hrubý experimentální náznak, že se setrvačná hmotnost rovná tíhové, je vlastně obsažen již v Galileiho pozorování, že všechna tělesa padají k zemi se stejným zrychlením. Velmi známé jsou též Newtonovy pokusy s kyvadélky. Nejpřesnějším způsobem ověřila rovnost obou hmot Eötvösova měření na torzních vahách. (Viz též odst. IX 1,2.)

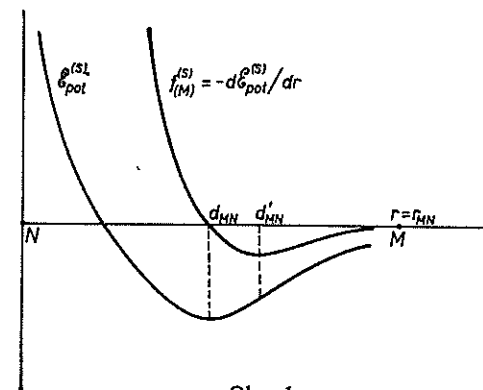
Newtonova mechanika a gravitační teorie nemůže tento pozoruhodný empirický fakt nijak vysvětlit a zdůvodnit. Z jejího hlediska určuje totiž tíhová hmotnost zcela jinou vlastnost hmotného tělesa (nebo hmotného bodu) než hmotnost setrvačná. Tíhová hmotnost charakterizuje jeho schopnost přitahovat se gravitační silou k jiným hmotným

tělesům, kdežto setrvačná hmotnost jeho odolnost proti zrychlení vůči inerciálnímu systému. Pro Newtona by tedy nebylo překvapením (a pro jeho gravitační teorii pohromou), kdyby se při jeho pokusech s kyvadly bylo ukázalo, že poměr setrvačné a tíhové hmoty není např. u železné kuličky přesně stejný jako u kuličky skleněné. Z jeho teorie taková rovnost prostě nevyplyvá. Je to však empirický fakt, který teorie nedovede vysvětlit, a to je ovšem nutno pokládat za její nedostatek. Rovnost setrvačné a tíhové hmoty *vysvětlila* teprve Einsteinova teorie gravitace.

O rozvoj mechaniky soustav hmotných bodů, které na sebe vzájemně působí silami podle Newtonova gravitačního zákona, a o prozkoumání důsledků tohoto zákona se v rané době newtonovské zasloužil hlavně Laplace, zakladatel tzv. nebeské mechaniky. Pod jeho vlivem se teorie tohoto typu dokonce stala dočasným ideálem fyzikální teorie, vzorným modelem deterministické teorie materiálního světa a východiskem filosofického směru mechanistického materialismu.

Rozměrná, pevná hmotná tělesa si v laplaceovské teorii představujeme jako statické soustavy velkého počtu hmotných bodů ve stabilní rovnováze. Takové útvary by však nebyly možné, kdyby hmotné body (atomy), z nichž se skládají, na sebe působily pouze silami gravitačními, které podle (25a) a (26) jsou vždy přitažlivé. Předpokládá se proto, že kromě sil gravitačních existují ještě zvláštní „soudržné“ (kohezí) síly, které se sice také řídí vzorcem (25), (25a), ale s faktorem $f_{MN}^{(G)}(r_{MN})$ jiným než je $f_{MN}^{(G)}(r_{MN})$.

Obecně a zhruba (kvalitativně) lze soudržné síly, jimiž na sebe vzájemně působí dva dané atomy M a N z pevného tělesa, charakterizovat takto: Je-li $r_{MN} < d_{MN}$, jsou to síly *odpudivé*, které velmi rychle *vzrůstají*, *klesá-li* vzdálenost r_{MN} . Je-li $r_{MN} = d_{MN}$, tyto síly vymizí. Je-li $r_{MN} > d_{MN}$, jsou to síly *přitažlivé*, které nejprve rychle *vzrůstají*, *roste-li* r_{MN} až do jisté velikosti d'_{MN} , ale s dále rostoucí vzdáleností r_{MN} opět rychle *klesají* k nule (mají jen krátký dosah). Na obrázku 1 je graficky znázorněna možná závislost radiální složky soudržné síly $f^{(S)}(M)$ a potenciální energie $\mathcal{E}_{\text{pot}}^{(S)}$ na vzdálenosti $r = r_{MN}$. Kladné $f^{(S)}(M)$ značí sílu odpudivou, záporné přitažlivou.



Obr. 1.

Atomy v pevném tělese jsou vůči sobě navzájem v klidu (ve stabilních rovnovážných polohách) pouze při nulové absolutní teplotě. Při vyšší teplotě kolem rovnovážných poloh kmitají. O výklad „mechanických vlastností“ pevných hmotných těles založený na těchto představách se zasloužili zvláště Navier a Poisson (zakladatelé teorie pružnosti) a Boltzmann (zakladatel mechanické teorie tepla).

Kvantitativní údaje o kohézích silách mezi různými atomy, tj. konkrétní vzorce pro funkce $f_{MN}^{(S)}(r_{MN})$, lze získat rozбором pokusů, při nichž se zkoumá např. objemová stlačitelnost, pružnost a pevnost těles z různých látek. Přitom se též ukazuje, že pro výklad těchto mechanických vlastností hmotných těles jsou gravitační síly mezi atomy zcela nepodstatné (zanedbatelné proti silám kohézním). Nás však kvantitativní údaje o soudržných silách blíže nezajímají. Pro platnost dalších vývodů je podstatné pouze to, že v uvažovaném jednoduchém modelu pevného tělesa veličiny $f_{MN}^{(S)}$ závisí pouze na vzdálenosti r_{MN} , podobně jako $f_{MN}^{(G)}$.

Nyní se již snadno sezná, že uvedené zákony pravých sil jsou invariantní vůči grupě všech ortogonálních transformací souřadnic. Dosadíme-li totiž do transformačních vzorců (23) ze vzorců (25), (25a) a použijeme vztahů (17), (17a), vidíme ihned, že složky $f_j(M)$ v libovolném kartézském systému S' jsou určeny přesně stejnými vzorci jako ve zvoleném výchozím systému S . Můžeme tedy říci, že z hlediska zmíněných zákonů pravých sil jsou všechny ortogonální systémy souřadnic a tím spíše pak i všechny inerciální systémy rovnocenné. Z toho však ve spojení s předchozími úvahami o pohybových rovnicích vyplývá, že všechny inerciální systémy jsou plně rovnoprávné z hlediska všech zákonů Newtonovy mechaniky. Tento poznatek se nazývá Galileiho principem relativity.

K platnosti tohoto důležitého principu by zřejmě stačilo, aby zákony pravých sil byly invariantní jen při Galileiho grupě transformací souřadnic, a jsou-li ve skutečnosti invariantní i při širší grupě všech ortogonálních transformací typu (1), je to tedy platností Galileiho principu relativity jaksi nadbytečně příznivé. V dalším výkladu uvidíme, že to vskutku dovoluje formulovat obecnější princip Machův. Na druhé straně není obtížné uměle sestavit „myslitelný zákon pravých sil“, který není invariantní ani vůči celé grupě Galileiho a při němž by tedy ani Galileiho princip relativity neplatil. Příklad takového zákona viz v Ú 5.

Na závěr tohoto odstavce si pouze ještě připomeneme tři důležité zákony Newtonovy mechaniky, které rovněž mají původ ve speciálních vlastnostech pravých sil. Jsou to známé zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti a energie izolované soustavy hmotných bodů.

První zákon je důsledkem toho, že u sil, jimiž na sebe působí kterékoliv dva hmotné body, platí princip (rovnosti) akce a reakce, tj. $f_j(M, N) = -f_j(N, M)$.

Pak totiž platí rovnice

$$dp_j/dt = 0; \quad p_j = \sum_M p_j(M), \quad p_j(M) = m(M) u_j(M). \quad (27)$$

Složky úhrnné hybnosti p_j jsou tedy konstantní, zachovávají se.

Druhý zákon zachování plyne z toho, že síly jsou nadto centrální. Lze jej zapsat ve tvaru

$$dL_j/dt = 0; \quad L_j = \sum_M L_j(M), \quad L_j(M) = \varepsilon_{jkl} x_k(M) p_l(M). \quad (28)$$

Koeficienty ε_{jkl} mají v každém kartézském systému tyto vlastnosti: $\varepsilon_{123} = 1$ a ε_{jkl} mění znaménko při výměně kterýchkoliv dvou indexů. (Je tedy např. $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123} = -1$, $\varepsilon_{113} = 0$, $\varepsilon_{111} = 0$, atd. O dalších užitečných vlastnostech koeficientů ε_{jkl} pojednáme podrobně v odst. II 4,1.) Obvyklejší než složkový zápis (27) a (28) je symbolický vektorový zápis

$$dp/dt = 0; \quad p = \sum_M p(M), \quad p(M) = m(M) u(M) \quad (27a)$$

a podobně

$$dL/dt = 0; \quad L = \sum_M L(M), \quad L(M) = x(M) \times p(M). \quad (28a)$$

Vektor $L(M)$ je zřejmě moment hybnosti hmotného bodu M vzhledem k počátku O inerciálního systému S .

Konečně zákon zachování energie platí proto, že faktory f_{MN} ve výrazech (25a) závisí pouze na vzdálenosti r_{MN} . Proto jsou síly konzervativní, tj. jejich složky $f_j(M)$ se dají vyjádřit vzorci

$$f_j(M) = -\partial \mathcal{E}_{\text{pot}} / \partial x_j(M), \quad (29)$$

v nichž $\mathcal{E}_{\text{pot}}$, tzv. potenciální energie soustavy, je funkcí vzájemných vzdáleností hmotných bodů. Výraz $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ lze psát ve tvaru součtu

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \sum_{(MN)} \mathcal{E}_{\text{pot}}(M, N) \quad (\text{sčítá se podle dvojic } MN). \quad (30)$$

Člen $\mathcal{E}_{\text{pot}}(M, N)$ závisí jen na vzdálenosti r_{MN} a je určen rovnicí

$$d\mathcal{E}_{\text{pot}}(M, N)/dr_{MN} = f_{MN}(r_{MN}). \quad (31)$$

Zákon zachování energie pak vyjadřují rovnice

$$d\mathcal{E}/dt = 0, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{kin}} + \mathcal{E}_{\text{pot}}, \quad \mathcal{E}_{\text{kin}} = \sum_M \mathcal{E}_{\text{kin}}(M), \quad (32)$$

v nichž

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}(M) = \frac{1}{2} m(M) u_j(M) u_j(M) = \frac{1}{2} m(M) u^2(M)$$

je tzv. kinetická energie hmotného bodu M .

Odvození uvedených zákonů zachování je elementární a dobře známé a nemusí se uvádět. Ani není třeba připomínat, že ty zákony platí v každém inerciálním systému. Veličiny $\mathcal{E}'_{\text{kin}}$, p' a L' v inerciálním systému S' se ovšem liší od veličin $\mathcal{E}_{\text{kin}}$, p , L v systému S o aditivní konstanty. Veličina $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ (a tedy i $\mathcal{E}$) je v Newtonově mechanice zásadně určena až na aditivní konstantu.

4. REALIZACE INERCIÁLNÍHO SYSTÉMU. MACHŮV PRINCIP

4.1. ASTRONOMICKÁ REALIZACE INERCIÁLNÍHO SYSTÉMU

K praktickému vytvoření konkrétního inerciálního systému potřebujeme volné hmotné body. Podle zákonů pravých sil lze za prakticky volné pokládat hmotné body velmi vzdálené od jiných hmotných bodů nebo těles. Takovými od sebe velmi vzdálenými „hmotnými body“ jsou bezpochyby hvězdy. Vzhledem k obrovským vzájemným vzdálenostem a poměrně pomalému pohybu tvoří hvězdy dokonce prakticky statickou soustavu. Proto *velmi dokonalým inerciálním systémem* je např. systém, jehož počátek je ve středu Slunce a jehož osový trojhran je *v klidu vůči okolním hvězdám*. Přihlédne-li se i k nepatrným vzájemným pohybům hvězd, můžeme zajistit, aby se osový trojhran takového astronomicky sestrojeného inerciálního systému neotáčel vzhledem k „ideálnímu“ inerciálnímu systému rychleji než o 0,1" (obloukové sekundy) za století [2].

Pohyb Země a ostatních planet kolem Slunce probíhá v tomto slunečním inerciálním systému prakticky přesně podle Newtonových pohybových rovnic a gravitačního zákona. Jedinou v dřívějších dobách bezpečně známou výjimkou byl Merkur, jehož perihel se stáčí v rovině jeho dráhy přibližně o 43" za století více, než by měl (tj. po odečtení všech poruch způsobených ostatními planetami). Uspokojivě vysvětlila tuto odchylku teprve Einsteinova gravitační teorie.

Pohyb středu Země vůči slunečnímu inerciálnímu systému se málo liší od rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí 30 km s^{-1} . (Zrychlení činí pouze asi $0,6 \text{ cm s}^{-2}$, změna směru pohybu přibližně 1° za den.) Proto je často přípustné přemístit počátek astronomického inerciálního systému do středu Země. Někdy lze dokonce i systém pevně spojený se Zemí, který se vůči inerciálnímu otáčí s periodou jednoho dne, pokládat za dostatečně přesně inerciální.

Na druhé straně však podstatné zpřesnění astronomického (slunečního) inerciálního systému je již sotva možné. Astronomie učí, že Slunce a okolní hvězdy patří k soustavě galaxie, jejíž střed leží ve vzdálenosti $23 \cdot 10^{16} \text{ km}$ ve směru k souhvězdí Střelce. Galaxií podobných naší (spirálních mlhovin) jsou ve vesmíru miliony. Podobně jako jsme si definovali systém souřadnic, který má počátek ve středu Slunce a je „prakticky v klidu“ vůči hvězdám v jeho okolí, můžeme si definovat systém souřadnic, který má počátek ve středu naší galaxie a je „prakticky v klidu“ vůči okolním spirálním mlhovinám. V tomto novém systému obíhá Slunce spolu se sousedními hvězdami kolem středu galaxie s dobou oběhu asi 190 milionů let, tj. s úhlovou rychlostí asi půl obloukové sekundy za století. Lineární rychlost tohoto oběžného pohybu Slunce činí asi 290 km s^{-1} a míří v současné době směrem k souhvězdí Labutě.

4.2. NEWTONŮV ABSOLUTNÍ PROSTOR. MACHOVA MECHANIKA

Obraťme se nyní k otázkám, které se objevují při výkladu zákonů Newtonovy mechaniky. Jde nám především o vysvětlení povahy a původu „odporu“ hmotných těles k zrychlení vůči inerciálním systémům a tím také o objasnění podstaty fyzikální významnosti těchto systémů.

Je dobře známo, že Newton zavedl pojem tzv. „absolutního prostoru“ a setrvačnost vykládal jako „snahu“ hmotných bodů zachovat si v absolutním prostoru „pohybový stav“, tj. rychlost či hybnost. Inerciální systémy jsou pak definovány jako systémy, jejichž osový trojhran jsou vůči „absolutnímu prostoru“ v rovnoměrném translačním pohybu nebo v klidu. Je však zřejmé, že vzhledem k platnosti Galileiho principu relativity v Newtonově mechanice je zavádění pojmu absolutního prostoru v této teorii zcela ilusorní, neboť experimentálním zkoumáním mechanických jevů se nedá zjistit, který hmotný bod nebo těleso (a systém souřadnic) je v „absolutním klidu“. Newtonův výklad setrvačnosti a „odporu proti zrychlení“ (inerciální síly) pomocí absolutního prostoru je tedy výkladem pozorovatelných účinků pomocí nepozorovatelných příčin.

Pojem absolutního prostoru by mohl mít smysl a fyzikální význam pouze v rámci mechaniky nebo nějaké fyzikální teorie, jejíž zákony by nebyly vesměs invariantní vůči Galileiho grupě transformací. O této možnosti ještě podrobně pojednáme. Dříve však uvedeme významný, zcela protichůdný návrh Machův [3].

Podle Machova názoru je nutno příčinu jakéhokoliv zvláštního chování hmotného tělesa hledat ve vlastnostech tělesa samotného a v jeho vztahu k jiným hmotným tělesům. To se týká i zvláštního chování volných hmotných bodů, které je popsáno Galileiho zákonem setrvačnosti. Při své nové, originální formulaci zákona setrvačnosti vychází Mach výslovně z toho, že volnými hmotnými body jsou (podle zákonů pravých sil) fakticky hmotné body velmi vzdálené od všech ostatních.

Machův zákon setrvačnosti můžeme formulovat takto: Mějme soustavu hmotných bodů, z nichž každý je velmi vzdálen od ostatních. Pak se hmotné body této soustavy pohybují tak, že mění své vzájemné vzdálenosti podle rovnic

$$\ddot{r}_{MN} = 0, \quad (33)$$

tj. jejich vzájemné vzdálenosti jsou lineárními funkcemi času.

Nejprve si ukažme, že tento Machův zákon plyne ze zákona Galileiho. Vyjádříme-li vzdálenost r_{MN} v libovolném kartézském systému souřadnic x_j , dostáváme

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{MN} = & -r_{MN}^{-3} \{ [x_j(N) - x_j(M)] [u_j(N) - u_j(M)] \}^2 + \\ & + r_{MN}^{-1} [u_j(N) - u_j(M)] [u_j(N) - u_j(M)] + \\ & + r_{MN}^{-1} [x_j(N) - x_j(M)] [a_j(N) - a_j(M)]. \end{aligned}$$

V inerciálním systému je $a_j(M) = a_j(N) = 0$ a s rostoucím r_{MN} , při omezených rychlostech, klesají k nule i první dva členy, takže $\ddot{r}_{MN} \rightarrow 0$. Není obtížné ukázat, že

také obráceně z Machova zákona plyne zákon Galileiho, ovšem jen pro vzájemně velmi vzdálené hmotné body (viz Ú 6).

Zvláště je pozoruhodné, že z hlediska Machových rovnic (33) na rozdíl od Galileiho rovnic (18) jsou vůbec všechny kartézské systémy souřadnic (nejen inerciální) rovnocenné, přesně tak jako z hlediska zákonů pravých sil Newtonovy mechaniky (viz odst. 3). Machovy rovnice (33) nejsou jedinou možnou „náhražkou“ rovnic Galileiho (invariantní vůči celé obecné grupě ortogonálních transformací (1)). Co se týká jiné, která nahrazuje prakticky v plném rozsahu zákon Galileiho, viz Ú 8.

Z Machovy obecné zásady i pojetí zákona setrvačnosti vyplývá dále zcela přirozeně i názor, že také Newtonova inerciální síla musí mít původ ve vztahu uvažovaného hmotného bodu k jiným hmotným tělesům, nikoliv k metafyzickému „absolutnímu prostoru“. Jinými slovy, setrvačnost každého hmotného bodu je podmíněna přítomností (a jeho setrvačná hmota určena uspořádáním) ostatních hmotných bodů (těles) ve vesmíru.

Lépe než slovy lze tento „Machův princip“ objasnit na jednoduchém příkladě jeho matematické formulace. Mějme nejprve *inerciální* systém S a zavedme si označení

$$K_j^{(I)}(M) = -m(M) a_j(M). \quad (34)$$

Newtonův pohybový zákon hmotného bodu M lze pak zapsat ve tvaru

$$K_j^{(I)}(M) + f_j(M) = 0. \quad (35)$$

Tyto rovnice vyjadřují, že se hmotný bod pohybuje tak, aby se výslednice z inerciální síly $K_j^{(I)}(M)$ a pravé síly $f_j(M)$ rovnala nule (tj., aby obě síly byly v rovnováze). Podle Machova principu je však i inerciální síla „pravou silou“, určenou ostatními hmotnými body (podobně jako síla gravitační). Musí tedy být možné nalézt pro veličiny $K_j^{(I)}(M)$ nové vzorce, „podobné“ vzorcům pro veličiny $f_j^{(G)}(M)$. Přitom ty nové vzorce pro složky $K_j^{(I)}(M)$ musí dávat v inerciálním systému a při takovém uspořádání hmotných těles, s jakým se ve vesmíru kolem nás skutečně shledáváme, prakticky totéž, co staré Newtonovo vyjádření (34).

S přihlédnutím k Machově formulaci zákona setrvačnosti je nasnadě zkusit u $K_j^{(I)}(M)$ vzorce (25) a (25a) s

$$f_{MN}^{(I)} = \Gamma m(M) m(N) \ddot{r}_{MN}. \quad (36)$$

Faktor Γ je opět *univerzální* konstanta. Jak dále uvidíme, vychází hodnota $\Gamma \leq 10^{-56} \text{ g}^{-1}$.

Srovnáme nejprve vlastnosti této Machovy síly s vlastnostmi Newtonovy síly gravitační. Ve vzorci (25) pro $f_j^{(G)}(M)$ lze součet omezit na *nejbližší* hmotná tělesa nejen proto, že podle (25a) a (26) složky $f_j^{(G)}(M, N)$ klesají se čtvercem vzdálenosti r_{MN} , ale také proto, že se gravitační síly od velmi vzdálených těles prakticky ruší. (Podle astronomických pozorování jsou hvězdy ve vesmíru až do největších dosud

zjištěných a prozkoumaných vzdáleností rozloženy prakticky rovnoměrně ve všech směrech.) U síly Machovy je tomu zcela jinak. Vzhledem k nepatrné velikosti konstanty Γ lze příspěvky od *blízkých těles* (kterých je málo a mají nepatrnou hmotu ve srovnání s Γ^{-1}) zcela *zanedbat*. Příspěvky od velmi *vzdálených těles* však *nelze zanedbat*, poněvadž se neruší, nýbrž zesilují, takže nakonec mohou být a jsou rozhodující, jak si nyní ukážeme.

Uvážíme-li, že hmotné body N (hvězdy), velmi vzdálené od našeho hmotného bodu M i od všech ostatních, jsou zároveň prakticky volné, takže v *inerciálním systému* S je $a_j(N) = 0$, můžeme za $\ddot{r}_{MN}$ do vzorce (36) dosadit

$$\ddot{r}_{MN} = -r_{MN}^{-1} [x_j(N) - x_j(M)] a_j(M).$$

Zrychlení $a_j(M)$ našeho hmotného bodu M není ovšem nulové, jsou-li v jeho blízkosti jiná hmotná tělesa, která na něj působí silou $f_j(M)$ (např. Newtonovou silou gravitační). Pro složky Machovy síly v takovém systému S tedy platí vzorce

$$K_j^{(I)}(M) = -\Gamma m(M) I_{jk}(M) a_k(M). \quad (37)$$

Jejich koeficienty $I_{jk}(M)$ znamenají součty

$$I_{jk}(M) = \sum_N m(N) \alpha_j(M, N) \alpha_k(M, N), \quad (38)$$

a veličiny

$$\alpha_j(M, N) = [x_j(N) - x_j(M)] r_{MN}^{-1}$$

udávají směrové kosiny spojnice MN.

Výpočet veličin $I_{jk}(M)$, který je snadný za předpokladu, že hmota ve vesmíru je kolem nás rozložena prakticky rovnoměrně ve všech směrech, dává (viz Ú 7)

$$I_{jk} = \frac{1}{3} \delta_{jk} \sum_N m(N). \quad (38a)$$

Je-li tedy $\Gamma^{-1} = \frac{1}{3} \sum m(N)$ (což dává hořejší hodnotu Γ , neboť pozorovatelné hmoty ve vesmíru je asi 10^{56} g), dostáváme konečně

$$K_j^{(I)}(M) = -m(M) a_j(M),$$

v soulase s Newtonovým výrazem (34).

Předpokládáme-li, jak je nyní zcela přirozené, že se složky Machovy síly při změně systému souřadnic transformují stejně jako složky každé jiné pravé síly, tj. podle vzorců (23), snadno zjistíme, že *vzorce* (25), (25a) a (36) *platí v každém kartézském systému souřadnic*. Také Machovy pohybové rovnice ve tvaru (35) jsou pak invariantní vůči celé obecné grupě ortogonálních transformací (1). Místo Galileiho principu relativity platí tedy v Machově mechanice obecnější Machův princip relativity, podle něhož všechny kartézské systémy souřadnic (inerciální i neinerciální) jsou z hlediska všech zákonů mechaniky rovnocenné. (Viz též Ú 8.)

V Newtonově mechanice měly inerciální systémy zásadní význam pro samotnou formulaci pohybových zákonů. V Machově mechanice je na to vůbec nepotřebujeme, v ní mají již jen čistě praktický význam; jsou to systémy, v nichž lze se zřetelem na příznivé rozložení a pohyb hmot ve vesmíru kolem nás nahradit složité Machovy pohybové rovnice prakticky výhodnějšími rovnicemi Newtonovými. „Význačnost“ inerciálního systému je v Machově mechanice podobná jako je význačnost těžišťového systému hmotné soustavy v Newtonově mechanice.

Kdyby rozložení vzdálených hmot ve vesmíru kolem nás nebylo izotropní, nebyly by veličiny $I_{jk}(M)$ úměrné δ_{jk} a místo Newtonových rovnic (22) by v inerciálním systému platily rovnice ve tvaru

$$m_{jk}(M) a_k(M) = f_j(M), \quad (39)$$

v nichž

$$m_{jk}(M) = m(M) \Gamma I_{jk}(M).$$

Vhodnou volbou směru os inerciálního systému S° lze vždy zařídit, aby „koeficienty setrvačnosti“ měly hodnoty $m_{jk}^\circ = m_j \delta_{jk}$. Rovnice (39) pak v S° nabývají tvaru

$$m_j(M) a_j^\circ(M) = f_j^\circ(M). \quad (39^\circ)$$

(Podle indexu j se nyní nesčítá.)

Vidíme, že setrvačná hmota hmotného bodu by závisela na směru zrychlení a směr zrychlení by obecně nesouhlasil se směrem síly. Experimentální prostředky moderní atomové a jaderné fyziky již umožnily přezkoumat tento jev „anizotropie setrvačnosti“ s velikou přesností [4]. Měření však ukázala, že poměrná odchylka

$$\frac{\Delta m}{m} \equiv 3 \frac{\max(m_j - m_k)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

nepřevyšuje hodnotu 10^{-20} , tj., že setrvačná hmota je s uvedenou přesností skutečně na směr zrychlení nezávislá.

Tyto zajímavé myšlenky Machovy pocházejí z osmdesátých let minulého století a to již nebyla právě nejvýhodnější doba, aby se mohly širě uplatnit. Jejich forma je těsně spojena s představami o přímém, bezprostředním působení do dálky a vůbec s mechanistickým světovým názorem. Koncem minulého století nebyla však již mechanika jedinou, vše ovládající a vysvětlující fyzikální teorií. Existovala již a rychle se rozvíjela i Faradayova-Maxwellova-Lorentzova teorie jevů elektromagnetických i optických; formální dokonalostí a širší oboru, v němž platí její základní zákony, nijak nezůstávala pozadu za mechanikou. Naopak se zdálo, že se stane sama všeobšáhlovou teorií, v jejímž rámci mohly nalézt svůj přirozený a přijatelný výklad i zákony samotné mechaniky. Poněvadž Lorentzův výklad inerciální síly byl v jistém smyslu blíže pojetí Newtonovu než Machovu, musely Machovy ideje ustoupit do pozadí. Fyzika se *dočasně* dala nikoliv cestou, která by vedla k rozšíření a zobecnění

Galileiho principu relativity, ale cestou, která vedla k opuštění principu relativity vůbec, a experimentátoři horlivě hledali absolutně klidný systém souřadnic, ovšem v novém, Lorentzově pojetí. S jejich metodami se podrobně seznámíme v kap. III. Uvidíme, že výsledkem toho nebylo určení absolutně klidného systému, ale formulace *Einsteinova speciálního principu relativity*, jímž se řídí celá fyzika, na rozdíl od starého Galileiho principu relativity, který platil pouze v rámci Newtonovy mechaniky. Tím byla znovu uvolněna cesta Machově snaze o zobecnění principu relativity. Teorie pole sice zásadně změnila současný názor na logickou povahu a funkci principu relativity, ale Machovy ideje přesto sehrály důležitou úlohu i při budování Einsteinovy obecné teorie relativity.

Dodatek o měření délek a času

Zákony Newtonovy mechaniky jsou teoretickým základem i k sestrojení mechanických měřitek délek a času a k předpovědi jejich vlastností popř. chování za různých okolností. Některé ty předpovědi budeme v dalším výkladu srovnávat s výsledky experimentů a proto bude užitečné si je výslovně připomenout, i když se na první pohled budou zdát triviální.

Mechanickým délkovým měřítkem může být vhodná pevná hmotná tyč za jistých normálních podmínek týkajících se vnějších sil a teploty. V našich úvahách budeme pro jednoduchost požadovat tu „normální“ podmínku (pokud se týká sil), aby měrná tyč nebyla vydána působení žádných vnějších sil (ani pravých ani zdánlivých) a tedy aby byla také v klidu vůči inerciálnímu systému.

Při délkových měřeních jsou důležité tyto zásady plynoucí ze zákonů mechaniky: Za prvé lze takové měřítko (tyč) přenést (opatrně, aby se přitom nepřekročila mez pružnosti materiálu) na jiné místo, nebo do jiné pevné polohy vůči danému inerciálnímu systému. Lze-li po přemístění obnovit normální podmínky, má měřítko v nové poloze opět stejnou délku jako v původní. Nejde-li to, stačí, známe-li vlastnosti materiálu měřítka (např. jeho moduly pružnosti a koeficient tepelné roztažnosti). Pak totiž můžeme, nejsou-li odchylky skutečných podmínek od normálních velké, vypočítat skutečnou délku měřítka a příslušně opravit hodnoty naměřené tím měřítkem v daných (nenormálních) podmínkách. V našich úvahách (rozborech experimentů) budeme vždy předpokládat, že takové korekce na nenormální podmínky, nelze-li je zanedbat, byly již vykonány.

Měřítka můžeme také uvést (opatrně) do rovnoměrného translačního pohybu, tj. „přenést do jiného inerciálního systému“. Lze-li po skončení té operace obnovit normální podmínky, má měřítko opět stejnou délku jako dříve. Je-li nutno měřítko „přenést“ (v podobném smyslu) do neinerciálního systému, kde obecně nebude možné obnovit normální podmínky, musíme si zase pomoci výpočtem délky měřítka a potřebnými „korekcemi na nenormální podmínky“ (nelze-li je zanedbat, jako např. když je měrná tyč velice tuhá).

Délky na hmotných předmětech (nebo souřadnice v libovolném systému) můžeme tedy zásadně měřit přiřkládáním měřitek přímo k měřenému předmětu (ose souřadnic). Uvedme však nakonec i příklad ještě jednoho možného způsobu, s nímž se při délkovém měření později setkáme. Nechť např. jde o změření délky jedoucího vlaku. To sice může vykonat podle předchozího návodu pozorovatel ve vlaku (přiřkládáním měřítka vedeného ve vlaku), ale může to udělat též pozorovatel na zemi tak, že si na trati poznačí současně polohu začátku i konce vlaku a pak změří vzdálenost obou značek (přiřkládáním měřítka k trati). Podle zákonů Galileovy-Newtonovy mechaniky má být výsledek obou měření tentýž.

Druhý způsob měření předpokládá, že umíme prakticky zajistit současnost obou záznamů na trati a tu možnost nám musí poskytnout přístroje k měření času, kterým obecně říkáme hodiny nebo chronometry. Mechanickými hodinami může být libovolná hmotná soustava, která kon-

(nebo v níž podle zákonů mechaniky probíhá) nějaký periodický pohyb. Může to být např. soustava Slunce a jeho planet, soustava Jupitera a jeho satelitů, nebo samotná Země, která se otáčí vůči inerciálnímu systému kolem své vlastní osy s periodou jednoho hvězdného dne. Takovou soustavou dále jsou např. obyčejné hodinky s kmitajícím nepokojem a ručičkami obíhajícími po kruhovém ciferníku. Mohou to však být také kmitající ladička, křemenná destička, molekula čpavku nebo konečně atomové jádro. V místech kde je neproměnné gravitační pole, lze k měření času používat i hodin kyvadlových.

Neproměnnost periody toho pohybu (normální „chod“ hodin) zase obecně vyžaduje, aby hodiny byly v jistých normálních podmínkách, které jsou různé a různě přísné podle konstrukce hodin. Obecně k těm podmínkám zase patří, aby hodiny (jako celek) byly v klidu vůči nějakému inerciálnímu systému. Správný chod obyčejných hodinek např. nejvíce ruší právě vnější síly, které působí „otřesy“, tj. velká zrychlení, hlavně rotační. Ještě „citlivější“ jsou v tom ohledu hodiny kyvadlové, jejichž správný chod ruší např. již mírné houpání lodi na moři. (Jiné vlivy, např. změny teploty, lze poměrně snadno vykompenzovat nebo vyloučit.) Ale ani otřesy zde nejsou nutně nepřekonatelnou překážkou, neboť např. i takové otřesy, které již zcela znemožňují chod obyčejných hodinek, neškodí ještě „hodinám“-atomovému jádru. Vidíme tedy, že vhodnou „konstrukcí“ lze hodiny učinit prakticky „necitlivými“ na přiměřené odchylky od normálních podmínek, podobně jako u délkových měřitek vhodnou volbou materiálu a průřezu tyče. V mimořádných případech, kdy se rušivému vlivu nelze vyhnout, je zase nutné vypočítat změnu chodu hodin a opravit výsledky měření. V našich dalších úvahách budeme pro jednoduchost předpokládat, že máme hodiny prakticky necitlivé na porušení normálních podmínek, zejména necitlivé na zrychlení vůči inerciálnímu systému. Poznamenejme však, že rozbor způsobů, jakými lze odstranit vliv vnějších faktorů na délku měřících tyčí a chod hodin, je klíčový, chceme-li pochopit obecnou teorii relativity.

Nyní je už jasné, jak můžeme zjišťovat současnost událostí na různých místech. Stačí k tomu vzít potřebný počet vhodných hodin, synchronizovat je na jednom určitém místě a pak je (přiměřeně opatrně) roznést na potřebná místa. Je známo, že právě tohoto způsobu používali ve starších dobách např. mořeplavci; vozili s sebou chronometry, aby mohli kdykoliv zjistit, kolik právě ukazují hodiny na nultém poledníku, a na základě astronomických měření pak určit zeměpisnou délku své polohy na moři.

Nakonec ještě jednou výslovně uvedme, že podle zákonů Newtonovy mechaniky (Galileiho principu relativity) *rovnoměrný translační pohyb vůči inerciálnímu systému, ať je jakkoliv rychlý, zásadně nemá ani na rozměry hmotných těles ani na chod hodin žádného vlivu.* Později (v kap. III) se seznámíme s výsledky zvláště přesných experimentů, které umožnily srovnat tyto teoretické předpovědi se skutečností.

ÚLOHY

1. Ukažte, že transformace typu (1) tvoří grupu. Udejte některé její podgrupy. Jak je matematicky charakterizována podgrupa, kterou tvoří transformace odpovídající otočení trojhranu os (bez zrcadlení)? Udejte obecný tvar transformace odpovídající *infinitesimálnímu* otočení trojhranu os kolem $O \equiv O'$.

2. Ukažte, že také Galileiho transformace (19) popř. (20) tvoří grupu, která je podgrupou grupy (1).

3. Mějme nějaký systém S kartézských souřadnic x_j a tři volné hmotné body $M^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3$), které se vůči systému S pohybují podle rovnic $x_j^{(n)} = u_j^{(n)} t$, v nichž

$u_j^{(n)}$ jsou konstanty. Předpokládáme, že hmotné body $M^{(n)}$ *neleží* na jedné přímce. Dokažte nejprve, že každý jiný kartézský systém S' , vůči němuž se naše tři hmotné body pohybují bez zrychlení, je se systémem S spojen transformací ve tvaru (20). Ukažte dále, že z toho a ze zákona setrvačnosti plyne, že systém S je inerciální.

4. Odvoďte rovnice (16) a (16a). Udejte význam členů $C_{jk} a_k$ a $-C_{jk} a_k(O')$ v systému S' .

5. Předpokládejme, že existují „pravé síly“, jejichž složky v určitém, konkrétním inerciálním systému S by byly dány vzorci (25), (25a) s faktorem

$$f_{MN} = e_M e_N u_k(M) u_k(N) r_{MN}^{-2},$$

v němž je veličina e_M konstantou charakteristickou pro hmotný bod M (náboj bodu M). Vyjádřete složky těchto sil v libovolném kartézském systému S' . Naleznete a charakterizujte ty systémy S' , které by z hlediska tohoto silového zákona byly rovnocenné se systémem S.

Podobně to vyšetřujte také při silách, u nichž je

$$f_{MN} = g_M g_N a_k(M) a_k(N) \varphi(r_{MN}),$$

$$f_{MN} = e_M e_N [u_k(N) - u_k(M)] [u_k(N) - u_k(M)] \chi(r_{MN}),$$

$$f_{MN} = \eta_M \eta_N [x_k(N) - x_k(M)] [u_k(N) - u_k(M)] \psi(r_{MN}).$$

6. Soustava hmotných bodů předpokládána v Machově zákoně setrvačnosti (33) nechť obsahuje alespoň tři hmotné body neležící trvale v jedné přímce. Ukažte, že pak lze udat (inerciální) systém souřadnic, v němž všechny hmotné body té soustavy mají nulová zrychlení.

7. Odvoďte ze vzorců (38) vzorce (38a) za předpokladu že vzdálená hmota je ve vesmíru kolem nás rozložena izotropně s makroskopickou hustotou $\mu(r)$.

8. Ukažte, že Machova síla popisuje správně i zdánlivé síly Newtonovy (v neinerciálních systémech). Na základě toho vyjádřete zákon setrvačnosti v Machově mechanice jinak, vhodněji než ve tvaru (33).