KAPITOLA II

LORENTZOVA ELEKTRONOVÁ TEORIE

První pokusy o výklad optických, elektrických a magnetických jevů si ovšem braly vzor z Newtonovy mechaniky (Newtonova korpuskulární teorie světla, Coulombův zákon v nauce o elektřině a magnetismu). Brzy se však ukázalo, že se s těmito představami daleko nedojde.

V optice si jevy interference, ohybu i polarizace světla a zvláště jevy podmíněné způsobem šíření světla v průhledných hmotných prostředcích (izotropních i neizotropních), vynutily přijetí a uznání vlnové teorie Fresnelovy. S touto teorií vstoupila do fyziky představa tzv. světelného éteru jakožto nehybného, nehmotného prostředí, které vyplňuje celý světový prostor.

V oboru elektřiny a magnetismu nové jevy, zvláště Ampèrovy jevy elektrodynamické a Faradayův jev elektromagnetické indukce, přinutily teorii, aby především zavedla síly závislé nejen na vzdálenosti, ale i na rychlostech pohybujících se elektrických nábojů. Úplný a jednotný výklad elektromagnetických jevů podala nakonec teorie Faradayova-Maxwellova, založená na představě o působení „do blízka" přenášeného jakýmsi prostředím (elektromagnetickým éterem) z jednoho místa na druhé, a to konečnou rychlostí. Faradayova-Maxwellova *představa* samostatně existujícího a vlastními zákony se řídícího *elektromagnetického pole* byla skvěle potvrzena Hertzovým objevem elektromagnetických vln. A to pak byl empirický základ, na kterém splynula optika s naukou o elektřině a magnetismu v jediný fyzikální obor. Toto spojení, Maxwellem předvídané, bylo dovršeno Lorentzem v jeho elektronové teorii.

Maxwellova-Lorentzova teorie je založena, podobně jako byla Fresnelova teorie světla, *na představě nehybného éteru* vyplňujícího celý světový prostor. Předpokládá se samozřejmě, že systémy souřadnic, jejichž osové trojhrany jsou v klidu, nebo v rovnoměrném translačním pohybu vůči éteru, jsou zároveň inerciální ve smyslu Newtonovy mechaniky. Vzhledem k tomu, že základní *zákony Maxwellovy-Lorentzovy teorie nejsou invariantní vůči Galileiho grupě transformací souřadnic*, zcela přirozeně se očekávalo, že se zkoumáním elektromagnetických (optických) jevů podaří zjistit a určit pohyb zvoleného systému vůči éteru, a to i rovnoměrný pohyb translační. Je zřejmé, že tím by dostal nový, skutečně fyzikální obsah a význam i Newtonův pojem absolutního prostoru. Proto měla Lorentzova teorie hluboký vliv i na bádání o základech mechaniky a dala mu nový směr a cíl.

Představa o elektromagnetických silách přenášených éterem byla (ve srovnání se starší představou o bezprostředním a okamžitém působení přímo do dálky) značným pokrokem a proto se stala na přelomu 19. a 20. století moderní a zcela ovládla fyzikální myšlení té doby; nalezla ovšem použití i v teorii gravitace. Na základě představy, že i gravitační vzájemné působení hmotných bodů je zprostředkováno světovým éterem, byla navržena řada rozličných gravitačních zákonů opravujících zákon Newtonův s ohledem na to, že se gravitační působení přenáší konečnou rychlostí, a zkoumalo se zda by se tím způsobem nedal vysvětlit anomální pohyb perihelu Merkurova. Přehled a kritické hodnocení těchto gravitačních teorií lze nalézt v referátě [5]. (K jedné z nich se vrátíme v odst. IX 1.) Skutečně uspokojivou teorii gravitace založenou na

představě o působení „do blízka" a vysvětlující také rovnost setrvačné a tíhové hmoty podal teprve Einstein v roce 1916.

V této kapitole podáme přehled základních zákonů Lorentzovy elektronové teorie a těch jejich důsledků, které budeme potřebovat v dalších výkladech.

1. ZÁKLADNÍ ROVNICE, JEJICH INTERPRETACE A OBECNÉ DŮSLEDKY

1,1. MAXWELLOVY-LORENTZOVY ROVNICE A LORENTZOVA POHYBOVÁ ROVNICE

Lorentz předpokládá, jak jsme již uvedli, existenci zvláštního nehmotného prostředí, které vyplňuje spojitě celý prostor a nazývá se éter (též elektromagnetický, světelný nebo světový éter). O éteru Lorentz předpokládá, že je zcela nehybný (tj. že části éteru na různých místech v prostoru jsou navzájem v klidu), ale může být ve zvláštním vnitřním stavu, který nazýváme elektromagnetickým polem. Ve starších dobách byly vymýšleny různé mechanické modely éteru a elektromagnetické pole bylo popisováno jako stav jakéhosi napětí v éteru. V Lorentzově teorii se takových představ nepoužívá.

Abychom mohli popsat elektromagnetické pole a zapsat zákony (rovnice), jimiž se řídí, *zvolíme si jistý kartézský systém* S *souřadnic* x_j, *jehož osový trojhran je vůči éteru v klidu.* (Možnostmi praktického zjištění této skutečnosti se budeme zabývat později, v kap. III). O jiné systémy souřadnic se zatím nebudeme zajímat. Místo tří souřadnic x_j budeme užívat též obvyklého symbolu $\boldsymbol{x}$ (průvodič o složkách x_j v systému S). Také při popisu elektromagnetického pole a matematické formulaci jeho zákonů budeme v této kapitole užívat převážně obyčejného vektorového počtu. Jenom v odst. 4 zavedeme důsledné označení složkové (tenzorový zápis základních rovnic), kterého budeme s výhodou používat později v teorii relativity.

Elektromagnetické pole je popsáno dvěma vektory $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$ (o složkách E_j, H_j) určenými v každém bodě $\boldsymbol{x}$ v každém čase t. Vektoru $\boldsymbol{E}$ se obvykle říká intenzita elektrického pole a vektoru $\boldsymbol{H}$ intenzita magnetického pole. Později uvidíme, že by bylo lépe nazývat je stručněji elektrická a magnetická intenzita (elektromagnetického) pole, neboť v teorii relativity ani pojem čistě elektrického pole ($\boldsymbol{E} \neq 0$, $\boldsymbol{H} \equiv 0$), ani pojem čistě magnetického pole ($\boldsymbol{H} \neq 0$, $\boldsymbol{E} \equiv 0$) není absolutní. Budeme proto většinou užívat těch stručnějších názvů, neboť také lépe vystihují skutečnou jednotu a nerozlučnost elektrických a magnetických jevů.

Příčinou budící elektromagnetické pole jsou podle Lorentze elektrické náboje součástí, z nichž jsou složeny atomy. Experimentální objevy z konce 19. století definitivně potvrdily názor, že molekuly a atomy všech látek, i když jsou v celku elektricky neutrální, obsahují části, které mají trvale elektrické náboje. Hertzovy pokusy o buzení elektromagnetických vln pak názorně ukázaly, že se zdroje světla a tepelného (infračerveného) záření vysílaného hmotnými tělesy musí hledat v oscilačních pohybech těch intramolekulárních elektrických nábojů. Tyto elektrické náboje jsou obecně po prostoru (v éteru) rozloženy s jistou prostorovou hustotou $\varrho(\boldsymbol{x}, t)$ a pohybují se v něm rychlostí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. Součin $\boldsymbol{J} = \varrho \boldsymbol{u}$ pak definuje hustotu (mikroskopického) elektrického proudu (v místě $\boldsymbol{x}$ v čase t).

Elektrická a magnetická intenzita pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ splňují Maxwellovy-Lorentzovy rovnice

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - c^{-1}\, \partial \boldsymbol{E}/\partial t = 4\pi c^{-1} \boldsymbol{J}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\varrho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + c^{-1}\, \partial \boldsymbol{H}/\partial t = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4) zaručují, že intenzity $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ lze vždy vyjádřit vektorovým potenciálem $\boldsymbol{A}$ a skalárním potenciálem φ ve tvaru

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - c^{-1}\, \partial \boldsymbol{A}/\partial t, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{6}$$

Přitom potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ je možno zvolit tak, aby splňovaly Lorentzovu podmínku

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + c^{-1}\, \partial \varphi/\partial t = 0. \tag{7}$$

Rovnice (1) a (2) pak nabývají tvaru

$$\Delta \boldsymbol{A} - c^{-2}\, \partial^2 \boldsymbol{A}/\partial t^2 = -4\pi c^{-1} \boldsymbol{J}, \tag{1a}$$

$$\Delta \varphi - c^{-2}\, \partial^2 \varphi/\partial t^2 = -4\pi\varrho. \tag{2a}$$

Z nich lze potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ vypočítat při daných ϱ a $\boldsymbol{J} \equiv \varrho \boldsymbol{u}$ (viz odst. 2).

Je třeba poznamenat, že při daných intenzitách pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ (určených rovnicemi (1) až (4)) nejsou ještě potenciály $\boldsymbol{A}$, φ úplně určeny rovnicemi (5) a (6), ani dodatečnou podmínkou (7). Nahradíme-li potenciály $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ novými potenciály

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad \overline{\varphi} = \varphi - c^{-1}\, \partial \chi/\partial t$$

(s libovolnou funkcí $\chi(\boldsymbol{x}, t)$ mající všecky potřebné derivace), a vypočteme-li z nich podle vzorců (5) a (6) intenzity pole, zjistíme, že se nezměnily. Z hlediska rovnic (1) až (6) jsou tedy nové potenciály $\overline{\boldsymbol{A}}$ a $\overline{\varphi}$ stejně přípustné jako původní $\boldsymbol{A}$ a φ. Říkáme, že intenzity $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ a rovnice (1) až (6) jsou *invariantní vůči kalibrační transformaci* $\boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{A}}$, $\varphi \to \overline{\varphi}$. Z hlediska rovnice (7) a vlnových rovnic (1a), (2a) jsou potenciály $\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\varphi}$ rovnocenné původním $\boldsymbol{A}$, φ jen tehdy, splňuje-li funkce χ sama vlnovou rovnici

$$\Delta\chi - c^{-2}\, \partial^2 \chi/\partial t^2 = 0.$$

Tato podmínka pro χ (a podmínka (7) pro $\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\varphi}$) není ovšem nutná. Není-li splněna, pak pro potenciály platí místo vlnových rovnic (1a), (2a) složitější rovnice

$$\Delta\overline{\boldsymbol{A}} - c^{-2}\, \partial^2 \overline{\boldsymbol{A}}/\partial t^2 - \operatorname{grad}(\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{A}} + c^{-1}\, \partial\overline{\varphi}/\partial t) = -4\pi c^{-1} \boldsymbol{J},$$

$$\Delta\overline{\varphi} - c^{-2}\, \partial^2 \overline{\varphi}/\partial t^2 + c^{-1} \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{A}} + c^{-1}\, \partial\overline{\varphi}/\partial t) = -4\pi\varrho.$$

Tyto obecné rovnice jsou k výpočtu potenciálů méně vhodné než vlnové rovnice (1a), (2a). (Ale potenciály $\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\varphi}$ splňující *jinou podmínku* než (7), např. $\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{A}} = 0$, mohou být, podle povahy problému, někdy prakticky výhodnější než potenciály $\boldsymbol{A}$, φ.) Potenciály jsou pouze pomocné veličiny. Měřitelnými fyzikálními veličinami jsou intenzity pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$.

Rovnice (3) a (4) v jistém smyslu představují „vnitřní zákony“ elektromagnetického pole samotného, kdežto rovnice (1) a (2) určují působení elektrických nábojů a proudů na elektromagnetické pole. Rovnice (1) až (4) však ještě netvoří úplnou soustavu základních zákonů Lorentzovy teorie. Chybějí nám jednak „vnitřní zákony“ samotného elektrického náboje (protějšek k rovnicím (3), (4)), jednak zákony, podle nichž elektromagnetické pole působí zpětně na elektrické náboje (protějšek k rovnicím (1), (2)). Z rovnic (1) a (2) sice plyne pro veličiny $\boldsymbol{J}$ a ϱ známá rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \partial\varrho/\partial t = 0, \tag{8}$$

ale ta omezuje funkce ϱ a $\boldsymbol{J}$ (popř. ϱ a $\boldsymbol{u}$) příliš málo. Vyjadřuje pouze zákon zachování elektrického náboje izolované soustavy.

Základním „vnitřním zákonem“ elektrického náboje v Lorentzově teorii je jeho atomismus: Elektrický náboj je seskupen do oddělených částic, které Lorentz nazývá obecně „elektrony“. Tyto elektrony jsou trvalé, stabilní útvary. Jejich rozměry jsou i ve srovnání s rozměry atomů tak malé, že při mnohých příležitostech lze tyto částice pokládat za prakticky bodové. Lorentz proto ani neuvažuje o rotaci elektronu kolem jeho středu a zajímá se jen o jeho translační pohyb. Rovněž lze předpokládat, že elektrony zůstávají vždy odděleny jeden od druhého a vzájemně se při svých pohybech nepronikají. (Jen v tom případě se vystačí s jednoduchým výrazem $\varrho\boldsymbol{u}$ pro hustotu elektrického proudu.) Podrobněji pojednáme o možných rozměrech, struktuře a jiných vlastnostech elektronů v dalších odstavcích i kapitolách. Prozatím vystačíme s uvedenými předpoklady.

Nyní nám chybí již jen zákon, podle něhož elektromagnetické pole působí na náboje. Takový zákon stanovil Lorentz tím, že udal obecný výraz pro sílu, kterou elektromagnetické pole působí na náboj $\varrho\, \mathrm{d}V$ obsažený v okamžiku t v objemovém elementu $\mathrm{d}V$ na místě $\boldsymbol{x}$. Je to síla rovná $\boldsymbol{\phi}\, \mathrm{d}V$, při čemž *silová hustota* $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$ je určena vzorcem

$$\boldsymbol{\phi} = \varrho\boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{H} = \varrho(\boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}). \tag{9}$$

Výsledná *Lorentzova síla* působící na elektron je dána integrálem

$$f = \int_V \phi \, dV ; \tag{10}$$

v něm se integrace vztahuje na objem, který elektron zaujímá v daném okamžiku t. Pohyb elektronu pod vlivem síly $\boldsymbol{f}$ je určen *Lorentzovou pohybovou rovnicí*

$$m^* . \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} , \tag{11}$$

v níž $\boldsymbol{a}$ je zrychlení středu elektronu. Lorentz pokládal veličinu m^* za konstantu charakteristickou pro elektron a nezávislou na jeho pohybovém stavu. Je to jakási obdoba Newtonovy *setrvačné hmoty*. Analogie mezi Lorentzovou rovnicí (11) a Newtonovou rovnicí (I 22) je však dosti povrchní, neboť fyzikálním obsahem se obě rovnice značně liší. V Lorentzově vzorci (10) pro sílu $\boldsymbol{f}$ působící na elektron jsou totiž zahrnuty nejen příspěvky od vnějšího pole, ale i od vlastního elektromagnetického pole elektronu (tzv. vlastní síla, která obecně není rovna nule). Naproti tomu v mechanice udávané vzorce (I 25, 25a) pro sílu $\boldsymbol{f}(M)$ vyjadřovaly pouze *sílu vnější*. Kromě toho i ta část Lorentzovy síly $\boldsymbol{f}$, jež pochází od vnějšího pole, závisí na rychlosti elektronu vůči éteru. Podrobně rozebereme Lorentzovu pohybovou rovnici (11) v odst. 3.

Vlastní elektromagnetické pole elektronu působí na náboje $\varrho \, dV$ obsažené v jednotlivých jeho objemových elementech tak, že Lorentzův elektron by nemohl trvale existovat (naopak musil by se roztrhnout), kdyby uvnitř elektronu nepůsobily kromě Lorentzovy síly (9) také ještě síly jiného druhu, které drží elektron pohromadě. V dalším výkladu o těchto silách a jejich vlastnostech pojednáme podrobněji.

1,2. ZÁKONY ZACHOVÁNÍ V LORENTZOVĚ TEORII

Nyní si jenom ještě připomeňme tři důležité zákony zachování, které jsou obecnými důsledky rovnic (1) až (4) a (9) až (11). První je zmíněný již *zákon zachování elektrického náboje*, vyjádřený v diferenciálním tvaru rovnicí kontinuity (8). Abychom dostali jeho integrální tvar, zvolíme si nepohyblivou uzavřenou plochu σ ohraničující objem V. Z rovnice (8) pak podle Gaussovy věty integrálního počtu dostáváme

$$-de/dt = \int_\sigma J_\perp \, d\sigma , \quad e = \int_V \varrho \, dV . \tag{8a}$$

Přitom $J_\perp$ je složka hustoty proudu $\boldsymbol{J}$ ve směru vnější normály k plošnému elementu $d\sigma$. Interpretace rovnice (8a) je zřejmá a známá. Při izolované soustavě nábojů lze plochu σ volit tak, aby na ní bylo $\varrho = 0$, $\boldsymbol{J} = 0$. Pak je úhrnný náboj e uvnitř σ časově konstantní.

K odvození *zákona zachování energie* násobme rovnici (3) skalárně vektorem $\boldsymbol{H}$ a odečtěme od vzniklé rovnice rovnici (1) násobenou skalárně vektorem $\boldsymbol{E}$. Užijeme-li pak známé identity

$$\boldsymbol{H} . \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} . \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{div} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) ,$$

dostaneme rovnici

$$-\partial h/\partial t = \operatorname{div} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{E} . \boldsymbol{J} , \tag{12}$$

v níž

$$h = (8\pi)^{-1} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2) , \quad \boldsymbol{S} = (4\pi)^{-1} c\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} . \tag{13a,b}$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (12) lze upravit:

$$\boldsymbol{E} . \boldsymbol{J} = \boldsymbol{E} . \varrho \boldsymbol{u} = \phi . \boldsymbol{u} ,$$

neboť $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) . \boldsymbol{u} \equiv 0$. Jelikož ϕ je prostorová hustota síly, je $\phi . \boldsymbol{u}$ prostorová hustota jejího výkonu.

Zvolíme-li si opět uzavřenou plochu σ, která je v klidu vůči éteru a ohraničuje objem V, plyne z (12) rovnice

$$-\frac{d}{dt} \int_V h \, dV = \int_\sigma S_\perp \, d\sigma + \int_V \phi . \boldsymbol{u} \, dV . \tag{12a}$$

Druhý integrál na pravé straně lze psát takto:

$$\int_V \phi . \boldsymbol{u} \, dV = \sum_n \int_{V^{(n)}} \phi . \boldsymbol{u} \, dV .$$

Přitom $V^{(n)}$ je ta část objemu V, kterou zaujímá v okamžiku t n-tý elektron. Nahradíme-li při integraci po $V^{(n)}$ rychlost $\boldsymbol{u}$ rychlostí $\boldsymbol{u}^{(n)}$ středu n-tého elektronu (bez ohledu na jeho možnou rotaci), máme

$$\int_{V^{(n)}} \phi . \boldsymbol{u} \, dV = \boldsymbol{u}^{(n)} . \int_{V^{(n)}} \phi \, dV = \boldsymbol{u}^{(n)} . \boldsymbol{f}^{(n)} = d\mathscr{E}_{\text{kin}}^{(n)}/dt .$$

(Poslední úprava vyplývá z rovnice (11).) Veličina $\mathscr{E}_{\text{kin}}^{(n)}$ je mechanická kinetická energie n-tého elektronu. Zavedeme-li dále označení

$$\mathscr{E}_{\text{kin}} = \sum_n \mathscr{E}_{\text{kin}}^{(n)} , \quad \mathscr{E}^{(E)} = \int_V h \, dV ,$$

můžeme rovnice (12a) zapsat ve tvaru

$$-d(\mathscr{E}^{(E)} + \mathscr{E}_{\text{kin}})/dt = \int_\sigma S_\perp \, d\sigma . \tag{12b}$$

Je-li h hustota energie elektromagnetického pole (a tedy $\mathscr{E}^{(E)}$ energie elektromagnetického pole v objemu V) a $\boldsymbol{S}$ hustota proudu energie elektromagnetického pole, pak rovnice (12b) vyjadřuje zákon zachování úhrnné energie pole a kinetické energie elektronů, jestliže žádné elektrony neopouštějí objem ohraničený plochou σ, a energie tedy proudí z objemu V pouze ve formě energie elektromagnetického pole. (Toho lze dosáhnout vhodnou volbou plochy σ.) Úplnější rovnici si uvedeme později, až se budeme zabývat relativistickou mechanikou.

Abychom dostali *zákon zachování hybnosti*, násobíme rovnici (1) popř. (3) vektorově zprava vektorem $\boldsymbol{H}$ popř. $\boldsymbol{E}$ a sečteme. K vzniklé rovnici přičteme rovnici (2) násobenou $\boldsymbol{E}$ a rovnici (4) násobenou $\boldsymbol{H}$. Dostaneme tak vektorovou rovnici, jejíž j-tou složku lze psát ve tvaru

$$-\partial w_j/\partial t = \partial T_{jk}/\partial x_k + \phi_j\,. \tag{14}$$

Veličiny w_j ($j = 1, 2, 3$) jsou složky vektoru

$$\boldsymbol{w} = (4\pi c)^{-1}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = c^{-2}\boldsymbol{S}, \tag{15a}$$

veličiny ϕ_j jsou složky Lorentzovy silové hustoty ϕ, a veličiny T_{jk}, složky tzv. Maxwellova tenzoru, jsou dány výrazy

$$T_{jk} = (4\pi)^{-1}\,\{\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\,\delta_{jk} - E_jE_k - H_jH_k\}\,. \tag{15b}$$

Z rovnic (14) plynou rovnice

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w_j\,\mathrm{d}V = \int_\sigma T_{jk}N_k\,\mathrm{d}\sigma + \int_V \phi_j\,\mathrm{d}V, \tag{14a}$$

v nichž N_k jsou složky jednotkového vektoru $\boldsymbol{N}$ ve směru vnější normály elementu $\mathrm{d}\sigma$ uzavřené nehybné plochy σ. Druhý integrál na pravé straně (14a) můžeme s použitím rovnice (11) upravit takto:

$$\int_V \phi_j\,\mathrm{d}V = \sum_n \int_{V^{(n)}} \phi_j\,\mathrm{d}V = \sum_n f_j^{(n)} = \sum_n \mathrm{d}p_j^{(n)}/\mathrm{d}t\,.$$

Veličina $p_j^{(n)}$ je j-tá složka mechanické hybnosti n-tého elektronu. Zavedeme-li ještě označení

$$p_j = \sum_n p_j^{(n)}\,,\quad p_j^{(\mathrm{E})} = \int_V w_j\,\mathrm{d}V,$$

můžeme rovnice (14a) zapsat ve tvaru

$$-\mathrm{d}(p_j^{(\mathrm{E})} + p_j)/\mathrm{d}t = \int_\sigma T_{jk}N_k\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{14b}$$

Pokládáme-li vektor $\boldsymbol{w}$ za hustotu hybnosti elektromagnetického pole (a tedy $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{E})}$ za hybnost elektromagnetického pole v objemu V) a veličiny T_{j1}, T_{j2}, T_{j3} za složky

hustoty proudu j-té složky hybnosti elektromagnetického pole, pak rovnice (14b) vyjadřují zákon zachování úhrnné hybnosti pole a mechanické hybnosti elektronů, jestliže žádné elektrony neopouštějí objem V ohraničený plochou σ. Úplnější formulaci zákona zachování hybnosti si uvedeme až v kapitole o relativistické mechanice.

2. DŮLEŽITÁ ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH-LORENTZOVÝCH ROVNIC

2,1. LIÉNARDOVY-WIECHERTOVY POTENCIÁLY

V předcházejícím odstavci jsme si zvolili jistý systém kartézských souřadnic, o jehož osovém trojhranu předpokládáme, že je v klidu vůči éteru. *Pro Lorentzovu teorii má zcela základní význam otázka, jak prakticky zjistit, zda je používaný systém vskutku v klidu vůči éteru*, a není-li, jak tedy určit jeho pohyb, K tomu cíli byla navržena i vykonána celá řada různých pokusů a měření optických i elektrodynamických (v užším smyslu). Pojednáme o nich podrobně v další kapitole.

Abychom však mohli porozumět problematice těchto pokusů i jejich teoretickému rozboru, abychom mohli pochopit výklad jejich pozoruhodných výsledků a posoudit i ocenit jejich dosah, musíme se nejprve seznámit s těmi konkrétními důsledky Lorentzovy teorie, na něž se budeme odvolávat. Jednak jde o vlastnosti nejdůležitějších řešení Maxwellových-Lorentzových rovnic pole, jednak o hlavní důsledky Lorentzovy dynamiky elektronu. V tomto odstavci se omezíme na bod první, tj. na vlastnosti polí vzbuzených elektrickými náboji, jejichž prostorové rozložení i pohyb jsou dány.

Víme, že Maxwellovy-Lorentzovy rovnice (1) až (4) lze plně nahradit jednoduššími vlnovými rovnicemi (1a), (2a) a vedlejší Lorentzovou podmínkou (7) pro potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ. Z těchto rovnic je výhodné vycházet při hledání pole odpovídajícího dané hustotě náboje ϱ a hustotě proudu $\boldsymbol{J} = \varrho\boldsymbol{u}$, které ovšem musí splňovat rovnici kontinuity (8).

Předpokládejme tedy, že máme elektrický náboj popsaný hustotou $\varrho(\boldsymbol{x}, t)$ a rychlostí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ jeho proudění. Budeme také předpokládat, že naše hustota ϱ je v každém čase t od nuly různá pouze v nějaké konečné prostorové oblasti V. Existují-li vně V jiné podobné oblasti obsahující elektrické náboje, pak se pole jimi vzbuzené (vnější pole) bude v každém bodě a čase prostě vektorově skládat s polem vzbuzeným našimi náboji (vlastním polem). Toto pravidlo nyní vyplývá z linearity rovnic pole. Proto si úlohu můžeme zjednodušit uvedenými předpoklady.

Řešení rovnic (1a), (2a) a (7) lze odvodit matematickým postupem, který je sice elementární, ale dosti zdlouhavý. (Viz např. kap. V, odst. 2,3 v učebnici [6].) Zde uvedeme pouze výsledné vzorce a jejich fyzikální obsah.

Potenciály $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, tzv. zpožděné (retardované) potenciály, jsou dány vzorci

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int_V (R^+)^{-1}\, \varrho(\mathbf{x}^+, t^+)\, \mathrm{d}V^+ \tag{16a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_V (cR^+)^{-1}\, \varrho(\mathbf{x}^+, t^+)\, \mathbf{u}(\mathbf{x}^+, t^+)\, \mathrm{d}V^+ , \tag{16b}$$

v nichž $R^+ = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^+|$ a $t^+ = t - R^+/c$. Vzorce (16a, b) již vyjadřují skutečnost, že se změny (rozruchy) v elektromagnetickém poli šíří éterem rychlostí c. Ze vzorce (16a) je např. patrné, že časově proměnný náboj $\varrho(\mathbf{x}^+, t^+)\, \mathrm{d}V^+$ v objemovém elementu $\mathrm{d}V^+ = \mathrm{d}x_1^+\, \mathrm{d}x_2^+\, \mathrm{d}x_3^+$ budí v místě $\mathbf{x}$ ve vzdálenosti R^+ potenciál $\varphi(\mathbf{x}, t)$ *podle obyčejného zákona Coulombova, ale teprve v pozdějším čase* $t = t^+ + R^+/c$. Odtud i název zpožděné potenciály.

Nyní vzorců (16a, b) použijeme v případě časově konstantního *bodového náboje* e, který koná libovolný pohyb. Potenciály $\varphi(\mathbf{x}, t)$ a $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ pro tento zvláštní případ odvodili poprvé Liénard a Wiechert, po nichž se také nazývají. Jsou to vzorce velmi důležité (i v teorii relativity) a byly proto v literatuře mnohokrát odvozovány různými způsoby.

Poloha našeho bodového náboje e v čase t nechť je určena polohovým vektorem $\mathbf{x}^\star(t)$. Jeho rychlost $\mathbf{u}^\star(t) = \mathrm{d}\mathbf{x}^\star/\mathrm{d}t$ nechť je v každém čase t menší než c, tj. $u^\star(t) \equiv |\mathbf{u}^\star(t)| < c$. Jinak může být $\mathbf{x}^\star$ libovolnou funkcí t, ovšem se všemi potřebnými derivacemi. Hustota $\varrho(\mathbf{x}, t)$ odpovídající našemu bodovému náboji je zřejmě dána výrazem

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = e\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t)) ,$$

kde δ je „trojrozměrná“ funkce Diracova. Připomeňme si, že funkce δ má podle své definice tuto vlastnost:

$$\int_V g(\mathbf{x})\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star)\, \mathrm{d}V = \begin{cases} g(\mathbf{x}^\star), & \text{je-li } \mathbf{x}^\star \text{ uvnitř } V, \\ 0, & \text{je-li } \mathbf{x}^\star \text{ vně } V, \end{cases} \tag{17}$$

při libovolné spojité funkci $g(\mathbf{x})$ a libovolné prostorové oblasti V. Hustota proudu $\mathbf{J}$ odpovídající našemu případu je dána výrazem

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \varrho(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{u}^\star(t) = e\, \mathbf{u}^\star(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t)) .$$

Veličiny ϱ a $\mathbf{J}$ takto definované formálně splňují rovnici kontinuity (8), a to identicky (při libovolné $\mathbf{u}^\star(t)$), neboť

$$\partial\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t))/\partial t \equiv -\mathbf{u}^\star(t) \,.\, \operatorname{grad} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t)) \equiv$$
$$\equiv -\operatorname{div} \{\mathbf{u}^\star(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t))\} .$$

Vzorce (16a, b) tedy v našem případě dostanou zvláštní tvar

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = e \int_V (R^+)^{-1}\, \delta(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^\star(t^+))\, \mathrm{d}V^+ , \tag{18a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = ec^{-1} \int_V (R^+)^{-1}\, \mathbf{u}^\star(t^+)\, \delta(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^\star(t^+))\, \mathrm{d}V^+ , \tag{18b}$$

a integrály lze nyní vypočítat podle vzorce (17). Tato jednoduchá formule ovšem platí pouze za předpokladu, že $\mathbf{x}^\star$ nezávisí na integračních proměnných. Ve vzorcích (18a, b) však $\mathbf{x}^\star$ závisí na $\mathbf{x}^+$ prostřednictvím t^+. Tuto překážku snadno překonáme, zavedeme-li v (18a, b) za integrační proměnné místo složek vektoru $\mathbf{x}^+$ složky vektoru $\xi = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^\star(t^+)$. Přímý výpočet funkcionálního determinantu této substituce dává výraz

$$\frac{\mathrm{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\mathrm{D}(x_1^+, x_2^+, x_3^+)} = 1 - (cR^+)^{-1}\, \mathbf{R}^+ \,.\, \mathbf{u}^\star(t^+) ,$$

v němž samozřejmě $\mathbf{R}^+ \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}^+$. Ze vzorce (18a) tedy dostáváme

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = e \int \{R^+ - c^{-1}\mathbf{R}^+ \,.\, \mathbf{u}^\star(t^+)\}^{-1}\, \delta(\xi)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 = e\{\ldots\}^{-1}_{(\xi=0)} .$$

Podmínka $\xi = 0$ znamená, že do výrazu ve svorce máme za $\mathbf{x}^+$ dosadit $\mathbf{x}^\star(t^\star)$, kde čas $t^\star$ je určen rovnicí

$$t^\star = t^+_{(\xi=0)} = t - c^{-1}|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t^\star)| ,$$

čili

$$c(t - t^\star) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t^\star)| . \tag{19}$$

Je zřejmé, že $t^\star$ určuje okamžik, v němž signál postupující éterem rychlostí c musí vyjít z místa $\mathbf{x}^\star(t^\star)$, má-li dospět do bodu $\mathbf{x}$ v čase t. Snadno se pozná, že čas $t^\star$ je rovnicí (19) jednoznačně určen (při libovolně zvolených $\mathbf{x}$ a t), je-li $\mathbf{x}^\star$ dáno jako funkce času tak, aby bylo stále $u^\star < c$.

V dalším postupu budou mít vektory $\mathbf{R}$ a $\mathbf{u}$ tento význam:

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}^\star(t^\star) , \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^\star(t^\star) . \tag{20}$$

Jimi můžeme Liénardovy-Wiechertovy potenciály vyjádřit ve tvaru

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = e(R - c^{-1}\mathbf{R} \,.\, \mathbf{u})^{-1} \tag{21a}$$

a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = c^{-1}\varphi\mathbf{u} . \tag{21b}$$

Výpočet intenzit pole $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ a $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ podle definičních vzorců (5) a (6) je opět elementární, ale dosti zdlouhavý, poněvadž potenciály (21a, b) závisí na $\mathbf{x}$ a t též prostřednictvím veličiny $t^*(\mathbf{x}, t)$, která je určena pouze implicitně rovnicí (19). Proto jej zde nebudeme uvádět (viz Ú 1), nýbrž napíšeme rovnou výsledek:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e(R - c^{-1}\mathbf{R}\,.\,\mathbf{u})^{-3}\,\{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - c^{-1}R\mathbf{u}) + $$
$$+ c^{-2}\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - c^{-1}R\mathbf{u}) \times \mathbf{a}]\}\,, \tag{22a}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = R^{-1}\mathbf{R} \times \mathbf{E}\,. \tag{22b}$$

Kromě označení (20) jsme zavedli ještě $\beta \equiv u/c$, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^*(t^*) = \mathrm{d}\mathbf{u}^*(t^*)/\mathrm{d}t^*$.

2,2. ROVNOMĚRNÝ PŘÍMOČARÝ POHYB BODOVÉHO NÁBOJE

Všimněme si nyní vlastností tohoto pole v několika speciálních případech pohybu náboje e. Nejprve vezměme rovnoměrný přímočarý pohyb, $\mathbf{u}$ = konst, $\mathbf{a} = 0$. V tomto případě odpadá druhý člen ve svorce ve vzorci (22a). Kromě toho vektor $\mathbf{R} - c^{-1}R\mathbf{u}$ má nyní (při konstantním $\mathbf{u}$) velmi jednoduchý význam. Je totiž (viz obr. 2)

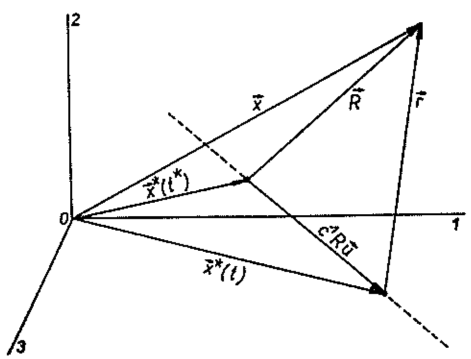
$$\mathbf{R} - c^{-1}R\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{r}\,. \tag{23}$$

Z rovnice (23) plyne dále

$$r^2 = R^2 - 2c^{-1}R\mathbf{R}\,.\,\mathbf{u} + c^{-2}R^2u^2$$

a

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{u})^2 = (\mathbf{R} \times \mathbf{u})^2 = R^2u^2 - (\mathbf{R}\,.\,\mathbf{u})^2\,.$$



Obr. 2.

Z obou těchto rovnic pak máme

$$r^2 - c^{-2}(\mathbf{r} \times \mathbf{u})^2 = (R - c^{-1}\mathbf{R}\,.\,\mathbf{u})^2\,,$$

čili

$$R - c^{-1}\mathbf{R}\,.\,\mathbf{u} =$$
$$= [r^2 - c^{-2}(\mathbf{r} \times \mathbf{u})^2]^{\frac{1}{2}} \equiv \mathrm{q}(\mathbf{r})\,. \tag{24}$$

Při konstantním $\mathbf{u}$ můžeme tedy potenciály a intenzity pole (21a, b), (22a, b) vzbuzené v libovolném místě $\mathbf{x}$ v libovolném čase t vyjádřit *vektorem* $\mathbf{r}$, *který vychází ze současné polohy* $\mathbf{x}^*(t)$ (nikoliv z dřívější polohy $\mathbf{x}^*(t^*)$) *náboje* e:

$$\varphi = e\,\mathrm{q}^{-1}(\mathbf{r})\,,\quad \mathbf{A} = c^{-1}\varphi\mathbf{u}\,, \tag{25a,b}$$

$$\mathbf{E} = e(1 - \beta^2)\,\mathrm{q}^{-3}(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\,,\quad \mathbf{H} = c^{-1}\mathbf{u} \times \mathbf{E}\,. \tag{26a,b}$$

Vzorec (26b) vyplývá z (22b), použije-li se (23) a vztahu $\mathbf{r} \times \mathbf{E} = 0$, podle (26a). Vzorce (26a, b) lze odvodit též přímo z (25a, b) užije-li se definičních vztahů (5) a (6), což je nyní snadnější (viz Ú 2).

Je-li $\mathbf{u} = 0$ je $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{H} = 0$, $\beta = 0$, $\mathrm{q}(\mathbf{r}) = r$ a vzorce (25a), (26a) se redukují na známé vzorce Coulombovy $\varphi = e/r$, $\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3$.

Při pohybu náboje po ose 1 ($x_1^*(t) = u(t)$, $x_2^* = x_3^* = 0$) máme

$$\mathrm{q}(\mathbf{r}) = \{(x_1 - x_1^*(t))^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)\}^{\frac{1}{2}}\,. \tag{24a}$$

Z (25a) pak vidíme, že plochy, na nichž má v čase t potenciál φ stejnou hodnotu, nejsou koule se středem v bodě $\mathbf{x}^*(t) \equiv (ut, 0, 0)$, nýbrž zploštělé rotační elipsoidy. Jejich osa mířící ve směru $\mathbf{u}$ je zkrácena proti osám kolmým k $\mathbf{u}$ v poměru $(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} : 1$. Z (26a) dále vidíme, že intenzita $\mathbf{E}$ má stále směr radiální, jako v poli Coulombově, ale je ve stejných vzdálenostech od náboje větší v rovině kolmé k $\mathbf{u}$ než ve směru $\mathbf{u}$. Z (26a) plyne:

$$E = |\mathbf{E}| = e(1 - \beta^2)\,r^{-2}(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{-\frac{3}{2}}\,,$$

kde ϑ je úhel mezi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{u}$.

Je-li $u \ll c$, je $\beta \ll 1$ a lze psát

$$\varphi = er^{-1}(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 \sin^2 \vartheta + \ldots)\,,$$

$$\mathbf{E} = er^{-3}[1 + \beta^2(\tfrac{3}{2}\sin^2 \vartheta - 1) + \ldots]\,\mathbf{r}\,.$$

Elektrické pole tedy v tomto případě zůstává, až na malé odchylky řádu β^2, polem Coulombovým, které se stále posunuje zároveň s nábojem. Přistupuje však k němu také slabé pole magnetické podle (26b).

Je-li naopak u blízké c ($\beta \lesssim 1$), je elektromagnetické pole bodového náboje tak silně zploštělé, že je prakticky soustředěno v okolí roviny procházející nábojem kolmo na směr jeho pohybu. Zploštění pole je důsledek toho, že se změny (rozruchy) v elektromagnetickém poli šíří éterem konečnou rychlostí.

2,3. KLIDNÝ ZDROJ SVĚTLA

Druhým případem, který je pro naše další úvahy důležitý, je pole elektromagnetických vln (záření, světla) vysílaných bodovým nábojem e, který koná kmitavý pohyb. Nechť bodový náboj e kmitá kolem pevné rovnovážné polohy $\mathbf{x}_0$ s malou konstantní amplitudou $\mathbf{l}$ a frekvencí ν_0^*, takže jeho polohový vektor $\mathbf{x}^*(t)$ je dán výrazem

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}\sin(2\pi\nu_0^* t)\,. \tag{27}$$

Budeme se zajímat o $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$ v tak veliké vzdálenosti od bodu $\boldsymbol{x}_0$, že platí $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \equiv R_0 \gg l$. Dále budeme předpokládat, že $2\pi\nu_0^\star l \ll c$, takže maximální hodnota rychlosti náboje je malá proti c. Pak můžeme ve vzorcích (22a, b) položit

$$\beta = u/c \doteq 0\,, \quad \boldsymbol{R} \doteq \boldsymbol{R}_0 \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\,, \quad R \doteq R_0\,,$$

dále také

$$\boldsymbol{R} - c^{-1}R\boldsymbol{u} \doteq \boldsymbol{R}_0\,,$$

$$R - c^{-1}\boldsymbol{R}\,.\,\boldsymbol{u} \doteq R_0$$

a

$$t^\star \doteq t - c^{-1}R_0\,.$$

Tím dostaneme

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \doteq eR_0^{-3}\boldsymbol{R}_0 -$$

$$-4\pi^2 e\nu_0^{\star 2}c^{-2}R_0^{-3}\boldsymbol{R}_0 \times (\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{l}) \sin\{2\pi\nu_0^\star(t - c^{-1}R_0)\}\,, \tag{28a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) \doteq R_0^{-1}\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{E}\,. \tag{28b}$$

Je-li R_0 dostatečně velké, můžeme ve výraze pro $\boldsymbol{E}$ zanedbat první, coulombovský člen $(\approx R_0^{-2})$ proti druhému, dipólovému členu $(\approx R_0^{-1})$, který popisuje pole záření. V tomto poli je $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{E}$, $H = E$, takže hustota proudu elektromagnetické energie $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \parallel \boldsymbol{R}_0$. Snadný výpočet ukazuje, že $S = hc$, kde h je hustota elektromagnetické energie.

Ve velké vzdálenosti od zdroje tedy máme rozbíhavé kulové elektromagnetické vlny šířící se ve směru $\boldsymbol{R}_0$ rychlostí c. Sledujme např. plochy, na nichž je $\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{H} = 0$, tj. fáze vlny (argument sinu v (28a)) má hodnotu $n\pi$, kde n je celé číslo. Vidíme, že jsou to plochy určené rovnicemi

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = c(t - \tfrac{1}{2}n/\nu_0^\star) \equiv R_0^{(n)}(t)\,,$$

tedy kulové plochy se středem v pevném bodě $\boldsymbol{x}_0$, jejichž poloměry $R_0^{(n)}$ vzrůstají s časem rychlostí c.

Plochy konstantní fáze se, jak známo, nazývají vlnoplochy. Podle předcházející rovnice vlnoplochy s fází $n\pi$ existují v čase t pouze při $n < 2\nu_0^\star t$, neboť jen tehdy je $R_0^{(n)}(t) > 0$. Čas

$$t_{(n)}^\star = \tfrac{1}{2}n/\nu_0^\star = t - c^{-1}R_0^{(n)}(t)$$

zřejmě udává okamžik, kdy vlnoplocha fáze $n\pi$ vznikla.

V uvažovaném případě, kdy je „zdroj světla“ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ pevném vůči éteru, je *frekvence v světelné vlny* v libovolném pevném místě v éteru shodná s *frekvencí* $\nu_0^\star$ *oscilací ve zdroji*, a vlnová délka světla

$$\lambda = c/\nu = c/\nu_0^\star = cT_0^\star\,.$$

2,4. ZDROJ SVĚTLA V ROVNOMĚRNÉM PŘÍMOČARÉM POHYBU

Zajímavější a důležitější je případ světelného zdroje, který se vůči éteru pohybuje. V tomto případě nahradíme rovnici (27) rovnicí

$$\boldsymbol{x}^\star(t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{l}\sin(2\pi\nu^\star t)\,. \tag{29}$$

Rychlost „zdroje“ $\boldsymbol{u}_0 = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0/\mathrm{d}t$ budeme pokládat za prakticky konstantní i během doby, která je dlouhá proti periodě $T^\star = 1/\nu^\star$ kmitů náboje ve zdroji. Pro jednoduchost budeme $\boldsymbol{x}_0(t)$ předpokládat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{u}_0 t\,, \quad \boldsymbol{u}_0 = (u_0, 0, 0)\,. \tag{29a}$$

(Speciální volby směru $\boldsymbol{u}_0$ však výslovně použijeme teprve na obrázku 3.) O konstantní rychlosti zdroje $\boldsymbol{u}_0$ i výsledné rychlosti náboje $\boldsymbol{u}^\star$ budeme dále předpokládat, že jsou obě menší než c, ale mohou být téhož řádu jako c. Naproti tomu *rychlost kmitavého pohybu náboje budeme pokládat za malou proti* c, tj.

$$|\boldsymbol{u}^\star - \boldsymbol{u}_0| \leqq 2\pi\nu^\star l \ll c\,. \tag{29b}$$

Frekvenci kmitů ve zdroji označujeme nyní symbolem $\nu^\star$. Zatím nevíme, zda nezávisí na rychlosti zdroje $\boldsymbol{u}_0$. Touto otázkou se budeme zabývat později (v odst. III 3 i dalších).

Přistupme opět k úpravě vzorců (22a, b). Podle (29b) můžeme v nich především rychlost $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}^\star(t^\star)$ všude nahradit konstantní rychlostí $\boldsymbol{u}_0$. Dále za $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}^\star(t^\star)$ můžeme dosadit zrychlení kmitavého pohybu. Omezíme-li se na vzdálenosti

$$R_0 \equiv |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t^\star)| \gg l\,,$$

můžeme také všude psát

$$t^\star \doteq t - c^{-1}R_0$$

a

$$\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\star(t^\star) \doteq \boldsymbol{R}_0 \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t^\star)\,.$$

Vektor

$$\boldsymbol{R}_0 - c^{-1}R_0\boldsymbol{u}_0 \equiv \boldsymbol{r}_0$$

pak bude opět mít jednoduchý význam, totiž

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t)$$

(podle obr. 2, s $\boldsymbol{x}_0$ místo $\boldsymbol{x}^\star$ a $\boldsymbol{u}_0$ místo $\boldsymbol{u}$). Konečně bude

$$R_0 - c^{-1}\boldsymbol{R}_0\,.\,\boldsymbol{u}_0 = \mathrm{q}(\boldsymbol{r}_0)\,.$$

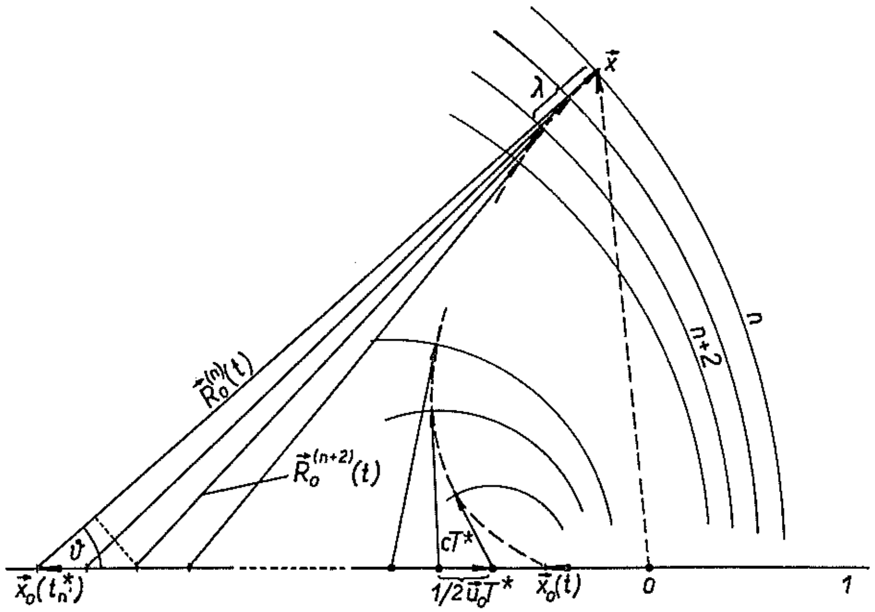
Při dostatečně velikém R_0 budou v (22a, b) členy nezávislé na zrychlení $\boldsymbol{a}$ opět zanedbatelné a *intenzity pole záření* dostaneme v podobě

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -4\pi^2 e v^{\star 2} c^{-2}\, \mathrm{q}^{-3}(\boldsymbol{r}_0)\, \boldsymbol{R}_0 \times (\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{l}) \sin F\,, \tag{30a}$$

$$F = 2\pi v^\star (t - c^{-1} R_0)\,,$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = R_0^{-1} \boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{E}\,. \tag{30b}$$

Vidíme, že je opět $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{E}$, $H = E$, takže i nyní je $\boldsymbol{S} \parallel \boldsymbol{R}_0$ a $S = hc$. *Směru vektoru* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)$ budeme říkat *absolutní paprsek* uvažované světelné vlny (světla) v daném místě $\boldsymbol{x}$ v čase t. Šíří-li se světlo ve vakuu (volným éterem), je *absolutní paprsek kolmý k vlnoploše* (v daném místě a čase).



Obr. 3.

Abychom názorně popsali, jak se éterem šíří světlo vysílané zdrojem, který je v pohybu vůči éteru, znova si všimněme vlnoploch fáze $n\pi$, které jsou nyní určeny rovnicemi

$$t^\star_{(n)} = t - c^{-1} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t^\star_{(n)})| = \tfrac{1}{2} n / v^\star = \tfrac{1}{2} n T^\star\,,$$

čili

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t^\star_{(n)})| = c(t - t^\star_{(n)}) \equiv R_0^{(n)}(t)\,. \tag{31}$$

Vidíme, že jsou to opět plochy kulové, ale se středy v různých pevných bodech $\boldsymbol{x}_0(t^\star_{(n)}) = \frac{1}{2} n T^\star \boldsymbol{u}_0$. Jejich poloměry opět vzrůstají s časem t rychlostí c. (Viz obr. 3.)

Obrázek 3 ukazuje momentní snímek vlnoploch (31) v jistém čase $t < 0$ (zdroj postupující po vodorovné přímce vpravo ještě nedospěl do počátku souřadnic). Body na ose jsou polohy zdroje světla v různých dobách $t^\star_{(n)} = \frac{1}{2} n T^\star < t$. Tečkovaně je naznačena jedna (zakřivená) *okamžitá proudočára světelné energie*. Je to ortogonální trajektorie vlnoploch. *Absolutní paprsek* má v každém bodě $\boldsymbol{x}$ v čase t *směr příslušného vektoru* $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t^\star)$, tj. směr tečny k okamžité proudočáře energie v tom bodě. *Pozorovatel, který je v klidu vůči éteru*, vidí zdroj světla ve směru opačném než udává směr absolutního paprsku v místě pozorování. Můžeme tedy názorně říci, že takový pozorovatel vidí zdroj světla tam, kde ten zdroj byl v době, kdy vyslal „světlo" (světelnou energii), které pozorovatel právě přijímá. Toto „světlo" postupovalo éterem přímočaře rychlostí c z místa svého vzniku až do místa pozorovatelova.

Souhrnně můžeme říci, že *pohyb světelného zdroje se uplatňuje pouze při vzniku světla, tj. vzniku vlnoploch (umístění jejich středů), ale nezanechává následky v dalším vývoji vlnoploch již vytvořených*. Říkáme též, že *rychlost světla v éteru* je *nezávislá na pohybu zdroje* a je dána pouze vlastnostmi éteru samotného. Lorentzův *éter je izotropní*, tj. *světlo se jím šíří všemi směry stejnou rychlostí c*.

Vypočteme si ještě vlnovou délku λ, kterou má v okolí bodu $\boldsymbol{x}$ v čase t světlo vysílané naším pohybujícím se zdrojem. Za předpokladu, že $R_0^{(n)} \gg u_0 T^\star$, jsou vektory $\boldsymbol{R}_0^{(n)}$ a $\boldsymbol{R}_0^{(n+2)}$ prakticky rovnoběžné. Z obr. 3 a rovnice (31) je pak ihned patrné, že

$$R_0^{(n)} - R_0^{(n+2)} = cT^\star = u_0 T^\star \cos\vartheta + \lambda$$

a tedy

$$\lambda = cT^\star (1 - c^{-1} u_0 \cos\vartheta)\,. \tag{32a}$$

Jelikož vlnoplochy postupují éterem rychlostí c, je *frekvence vlny měřená v pevném bodě* $\boldsymbol{x}$ dána vzorcem

$$v = c/\lambda = v^\star (1 - c^{-1} u_0 \cos\vartheta)^{-1} = v^\star (1 - \boldsymbol{u}_0 \,.\, \boldsymbol{N}/c)^{-1}\,, \tag{32b}$$

v němž $\boldsymbol{N} = R_0^{-1} \boldsymbol{R}_0$ je jednotkový vektor ve směru absolutního paprsku v místě $\boldsymbol{x}$. Elegantnější odvození tohoto vzorce viz v Ú 3.

Je-li R_0 tak v liké proti λ, že *jednotkový vektor* $\boldsymbol{N}$ *je prakticky konstantní v prostorové oblasti, jejíž rozměry jsou velké proti* λ, můžeme naši světelnou vlnu (30a, b) nahradit (v té oblasti) vlnou rovinnou, v níž jsou intenzity pole dány známými jednoduchými výrazy

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin\left[2\pi v (t - c^{-1} \boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{x})\right] \tag{33a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E}\,. \tag{33b}$$

V nich $\boldsymbol{E}_0$ je konstantní vektor, $\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{N}$. (Viz též Ú 4.) Takových rovinných vln použijeme v našich dalších úvahách nejčastěji.

Nakonec ještě několik slov o principu Huygensově. Z předcházejících výkladů je zcela jasné, že tohoto známého a ve vlnové (fyzikální) optice běžně používaného principu lze používat při konstrukci časového vývoje vlnoploch i ve světelných vlnách vysílaných zdroji v pohybu, ve vlnách odražených na pohybujících se zrcadlech, procházejících pohybujícími se clonkami atd. Huygensův princip bude proto i nám velmi užitečný a s jeho praktickým použitím se ještě setkáme při rozboru experimentů v kap. III.

3. DYNAMIKA LORENTZOVA ELEKTRONU

3,1. VNĚJŠÍ A VLASTNÍ SÍLA

Při Lorentzově pohybové rovnici (11) jsme již uvedli, že Lorentzova síla $\boldsymbol{f}$ zahrnuje nejenom vnější sílu, ale i tzv. sílu vlastní. Nyní si rozdělíme sílu $\boldsymbol{f}$ na obě ty části,

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{(\mathrm{vn})} + \boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})},$$

a vyjádříme každou z nich samostatně.

K tomu cíli si intenzity pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$ v bodech $\boldsymbol{x}$ uvnitř a v okolí uvažovaného elektronu rozložíme rovněž na dvě části:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})} + \boldsymbol{E}^{(\mathrm{vl})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})} + \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vl})}.$$

Intenzity $\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})}$ a $\boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})}$ popisují *vnější pole*, tj. pole vzbuzené jinými elektrony, a určují *vnější sílu* působící na náš elektron podle vzorce

$$\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vn})} = \int_V \varrho(\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})} + c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})})\,\mathrm{d}V. \tag{34}$$

Integrace se zde vztahuje na část prostoru vyplněnou v daném čase t nábojem našeho elektronu. Protože rozměry elektronu jsou nepatrné, lze veličiny $\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})}$ a $\boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})}$ pokládat uvnitř objemu V za prakticky konstantní a dosadit za ně *intenzity vnějšího pole ve středu našeho elektronu*. Předpokládáme-li dále s Lorentzem translační pohyb, můžeme *za rychlost* $\boldsymbol{u}$ dosadit *rychlost středu elektronu*. Pak je výraz v závorce v integrálu (34) nezávislý na integračních proměnných, a proto dostáváme známé jednoduché vyjádření

$$\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vn})} = e(\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})} + c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})}), \tag{34a}$$

v němž $e = \int \varrho\,\mathrm{d}V$ je náboj elektronu.

V tomto vzorci jsou intenzity vnějšího pole v nejjednodušších a nejdůležitějších případech explicite dány jako funkce místa a času. (Tak tomu bývá, když je vnější pole buzeno makroskopickými elektricky nabitými tělesy nebo proudy, na které náš elektron sám nemá prakticky žádný vliv.) Jde-li o vzájemné působení dvou nebo několika

elektronů, lze při výpočtu vnějšího pole ve středu každého elektronu pokládat druhé elektrony za bodové a pole jimi vzbuzené vyjádřit vzorci (22a, b), nebo, jsou-li zrychlení elektronů malá, jednoduššími vzorci (26a, b). (Viz Ú 5.)

Původní Lorentzův výraz pro *vlastní sílu*, tj.

$$\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})} = \int_V \varrho(\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vl})} + c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vl})})\,\mathrm{d}V, \tag{35}$$

lze také převést na výhodnější a jednodušší tvar, ale jiným způsobem, než jsme to udělali ve vzorci (34). Užijeme především toho, že integrační obor ve vzorci (35) lze rozšířit na blízké i daleké okolí našeho elektronu (kde už je $\varrho = 0$, rozumíme-li hustotou ϱ pouze hustotu náboje v našem elektronu). Dále si všimneme toho, že intenzity vlastního pole ve vzorci (35) souvisí s hustotou náboje ϱ a proudu $\varrho\boldsymbol{u}$ Maxwellovými rovnicemi (1) až (4) a že se tedy smí použít postupu, který vedl k rovnicím (14a). Tímto způsobem dostaneme j-tou složku vlastní síly vyjádřenou novým způsobem:

$$f_j^{(\mathrm{vl})} = -\mathrm{d}p_j^{(\mathrm{vl})}/\mathrm{d}t - \int_\sigma T_{jk}^{(\mathrm{vl})} N_k\,\mathrm{d}\sigma\,; \tag{35a}$$

v něm $p_j^{(\mathrm{vl})}$ je j-tá složka *hybnosti vlastního elektromagnetického pole našeho elektronu*, $T_{jk}^{(\mathrm{vl})}$ jsou veličiny (15b) utvořené z intenzit tohoto pole a σ je pevná uzavřená plocha ležící ve všech směrech velmi daleko od středu našeho elektronu (prakticky v nekonečnu).

Prozkoumejme nyní vlastnosti síly $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})}$ plynoucí ze vzorce (35a).

Nejprve nechť je pohyb elektronu přesně rovnoměrnou translací, $\boldsymbol{u}$ = konst. V tom případě je ovšem $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ = konst a první člen na pravé straně (35a) je tedy nulový. Plošný integrál však rovněž vymizí. K výpočtu veličin $T_{jk}^{(\mathrm{vl})}$ v bodech vzdálené plochy σ lze totiž intenzity pole vyjádřit vzorci (26a, b) platnými pro *bodový* elektron v rovnoměrné translaci. Podle těchto vzorců však intenzity pole klesají se čtvercem vzdálenosti r a veličiny $T_{jk}^{(\mathrm{vl})}$ tedy klesají úměrně r^{-4}, tj. rychleji, než vzrůstá velikost plochy σ. Při rovnoměrné translaci elektronu tedy máme $\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})} = 0$, jak se mohlo očekávat.

Uvažujme dále *zrychlený translační pohyb elektronu*, ale omezme se na případ, že jeho zrychlení je již po dlouhou dobu velmi malé a že jeho rychlost není a nebyla ani v dřívějších dobách příliš blízko rychlosti světla c. *Pohybu vyhovujícímu těmto podmínkám* (jejichž přesnější, kvantitativní formulaci podal např. Abraham [7]) *budeme říkat kvazistacionární.* Ve vzorci (35a) pak opět můžeme zanedbat plošný integrál po vzdálené ploše σ. To snadno seznáme, vyjádříme-li intenzity vlastního pole v bodech plochy σ vzorci (22a, b). Ve výrazech $T_{jk}^{(\mathrm{vl})}$ nyní dostáváme členy, které s rostoucím $R \approx r$ buď klesají rychleji než r^{-2}, nebo sice klesají jen úměrně r^{-2}, ale pak jsou úměrné také čtverci zrychlení. Při kvazistacionárním pohybu se tedy dá vzorec (35a) nahradit jednodušším vzorcem

$$\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})} = -\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}/\mathrm{d}t\,. \tag{35b}$$

Ale to není vše. Do vzorce (35b) můžeme dosadit za $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ výraz udávající hybnost elektromagnetického pole elektronu v *rovnoměrné* translaci a teprve při výkonu naznačené časové derivace pokládat rychlost $\boldsymbol{u}$ za proměnnou s časem t. Přípustnost tohoto postupu spočívá na tom, že k hybnosti $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ přispívá podstatně jen pole v nejbližším okolí elektronu a tam zase v intenzitách pole zcela převládají členy nezávislé na zrychlení $\boldsymbol{a}$.

3,2. ELEKTROMAGNETICKÁ HYBNOST A ENERGIE ELEKTRONU V ROVNOMĚRNÉM TRANSLAČNÍM POHYBU

Vidíme tedy, že nejdůležitějším krokem je výpočet hybnosti vlastního elektromagnetického pole elektronu v rovnoměrném translačním pohybu rychlostí $\boldsymbol{u}$. Přitom ovšem nelze elektron pokládat za bodový náboj, tj. nelze intenzity pole psát podle vzorců (26a, b), neboť v tom případě integrály $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ a $\mathscr{E}^{(\mathrm{vl})}$ divergují. Z toho důvodu Lorentz přisuzuje elektronu konečné rozměry.

Elektron, který je v klidu vůči éteru, je podle Lorentze statický, kulově souměrný útvar, obvykle kulička poloměru $r_{(e)}$ vyplněná nábojem *konstantní* hustoty $\varrho_0 = 3e/(4\pi r_{(e)}^3)$. Rovnoměrné rozložení náboje v elektronu však nelze hlouběji teoreticky zdůvodnit. Některé novější verze klasické teorie elektronu vedou na jiná kulově souměrná rozložení náboje. O tom podrobněji pojednáme v kap. VI a VII. Nám nyní na skutečné závislosti hustoty ϱ_0 na vzdálenosti od středu elektronu nezáleží.

Potenciál $\varphi_0(\boldsymbol{x})$ a intenzita $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})$ vlastního pole elektronu v klidu jsou dány vzorci

$$\varphi_0(\boldsymbol{x}) = \int (r^+)^{-1} \varrho_0(\boldsymbol{x}^+) \, \mathrm{d}V^+ , \tag{36}$$

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}) = \int (r^+)^{-3} \varrho_0(\boldsymbol{x}^+) \, \boldsymbol{r}^+ \, \mathrm{d}V^+ , \tag{37}$$

v nichž $\boldsymbol{r}^+ = \boldsymbol{R}^+ = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^+$, a které tedy vyjadřují prosté skládání Coulombových polí „bodových nábojů" $\mathrm{d}e^+ = \varrho_0(\boldsymbol{x}^+) \, \mathrm{d}V^+$. Má-li elektron střed v počátku souřadnic, závisí podle předpokladu $\varrho_0(\boldsymbol{x}^+)$ pouze na $|\boldsymbol{x}^+|$. Pak také $\varphi_0(\boldsymbol{x})$ závisí pouze na $|\boldsymbol{x}|$. Úhrnná energie pole

$$\mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})} = (8\pi)^{-1} \int \boldsymbol{E}_0^2 \, \mathrm{d}V \tag{38}$$

nyní může mít konečnou hodnotu. Je známo, že u homogenně nabité kuličky je např. $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})} = \frac{3}{5} e^2 / r_{(e)}$. Hybnost pole $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ se ovšem rovná nule.

Při rovnoměrné translaci má elektron i jeho vlastní pole v libovolném čase t stejný „tvar" jako v čase $t = 0$, pouze je všecko posunuto o $\boldsymbol{u}t$, tj. platí $\varrho(\boldsymbol{x}, t) =$

$= \varrho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}t, 0)$ a podobně pro $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ atd. Integrální veličiny např. $\mathscr{E}^{(\mathrm{vl})}$ a $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ pak závisí sice na $\boldsymbol{u}$, ale nikoliv na čase t. Postačí tedy vypočítat je např. v čase $t = 0$.

Pro zjednodušení zápisu budeme místo $\varrho(\boldsymbol{x}, 0)$, $\varphi(\boldsymbol{x}, 0)$ atd. psát prostě $\varrho(\boldsymbol{x})$, $\varphi(\boldsymbol{x})$ atd. Nebudeme ani zvláště vyznačovat, že jde o vlastní pole elektronu. Toto pole je zase superpozicí polí „bodových nábojů" $\varrho(\boldsymbol{x}^+) \, \mathrm{d}V^+$, která ovšem nyní nejsou Coulombova, nýbrž jsou určena vzorci (25a, b), (26a, b). Platí tedy vyjádření

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{q}^{-1}(\boldsymbol{r}^+) \, \varrho(\boldsymbol{x}^+) \, \mathrm{d}V^+ , \tag{39a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = c^{-1} \, \varphi(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{u} , \tag{39b}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = (1 - \beta^2) \int \mathrm{q}^{-3}(\boldsymbol{r}^+) \, \varrho(\boldsymbol{x}^+) \, \boldsymbol{r}^+ \, \mathrm{d}V^+ , \tag{40a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = c^{-1} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) , \tag{40b}$$

v nichž $\mathrm{q}(\boldsymbol{r}^+)$ je určeno podle (24). Intenzitu $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ i nyní můžeme odvodit přímo z $\varphi(\boldsymbol{x})$, stejně jako při bodovém náboji (viz Ú 2). Pro Lorentzovu silovou hustotu platí proto vyjádření

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = -(1 - \beta^2) \, \varrho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{grad} \, \varphi(\boldsymbol{x}) , \tag{41}$$

z něhož je patrné, že $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ stojí kolmo na plochách $\varphi(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$ (jako při elektronu v klidu). Zatím však nevíme, zdali tyto plochy jsou shodné s plochami $\varrho(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$. To závisí na tvaru funkce $\varrho(\boldsymbol{x})$, ale o něm lze činit různé předpoklady.

Abraham předpokládal, že elektron je „tuhý" a že proto $\varrho(\boldsymbol{x}) = \varrho_0(\boldsymbol{x})$. Ukázalo se však, že Abrahamův předpoklad nevyhovuje, neboť vede na závislost hybnosti $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ na rychlosti $\boldsymbol{u}$, která nesouhlasí s výsledky měření. Proto jeho vzorce ani neuvádíme. (Viz např. [7], vzorce (15a, b).) Nezbylo tedy než nahradit Abrahamův předpoklad o $\varrho(\boldsymbol{x})$ nějakým jiným přijatelným předpokladem a zkoušet, jak se osvědčí. K vhodnému předpokladu vede právě „přirozený" požadavek, aby i při elektronu v rovnoměrné translaci splývaly plochy $\varrho(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$ (resp. povrch elektronu) s plochami $\varphi(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$, k nimž je podle (41) kolmá hustota $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ síly Lorentzovy. Při Abrahamově volbě $\varrho(\boldsymbol{x})$ tento požadavek není splněn. Lze však snadno ukázat, že je splněn, mají-li plochy $\varrho(\boldsymbol{x}) = \text{konst}$ tvar elipsoidů zploštělých ve směru pohybu elektronu v poměru $(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ (viz Ú 6). Zbývá ještě otázka, jakým způsobem $\varrho_0(\boldsymbol{x})$ přechází v $\varrho(\boldsymbol{x})$, neboť to je možné nekonečně mnoha způsoby. (Viz např. Ú 7.) Lorentz sám předpokládá, že se zkrátí pouze podélné rozměry elektronu, kdežto příčné zůstanou beze změny.

Pro zjednodušení dalších výpočtů si zvolíme pohyb elektronu tak, že se jeho střed pohybuje po ose *1* a prochází počátkem souřadnic v čase $t = 0$. Lorentzovu hypotézu pak můžeme vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \gamma \, \varrho_0(\boldsymbol{y}) , \tag{42}$$

v němž

$$\boldsymbol{y} \equiv (\gamma x_1, x_2, x_3)\,,$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}\,, \quad \beta = u/c\,.$$

Faktor γ, jímž je násobeno ϱ_0 v rovnici (42), souvisí se zmenšením „objemu elektronu" při zachování jeho náboje.

Dosadíme-li nyní z (42) od vzórců (39a), (40a, b) a přihlédneme k tomu, že $\boldsymbol{u} \equiv (\beta c, 0, 0)$, dostaneme podobnou úpravou jako v Ú 6 vyjádření

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \gamma\,\varphi_0(\boldsymbol{y})\,,$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \equiv (E_{01}(\boldsymbol{y}), \gamma\, E_{02}(\boldsymbol{y}), \gamma\, E_{03}(\boldsymbol{y}))\,,$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \equiv (0, -\beta\, E_3(\boldsymbol{x}), \beta\, E_2(\boldsymbol{x}))\,.$$

Nyní je již snadné vyjádřit i veličiny $\mathscr{E}^{(\mathrm{vl})}$ a $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ pomocí $\mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})}$. Platí např.

$$\mathscr{E}^{(\mathrm{vl})} = (8\pi)^{-1} \int (\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 =$$

$$= (8\pi)^{-1} \int \{E_{01}^2(\boldsymbol{y}) + (1 + \beta^2)\,\gamma^2[E_{02}^2(\boldsymbol{y}) + E_{03}^2(\boldsymbol{y})]\}\, \gamma^{-1}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, \mathrm{d}y_3 =$$

$$= \gamma(1 + \tfrac{1}{3}\beta^2)\, \mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})}\,, \tag{43}$$

neboť

$$\int E_{01}^2\, \mathrm{d}V = \int E_{02}^2\, \mathrm{d}V = \int E_{03}^2\, \mathrm{d}V = \tfrac{1}{3}\, 8\pi \mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})}\,.$$

Podobně se nalezne, že

$$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})} = (4\pi c)^{-1} \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 = \tfrac{4}{3}\gamma c^{-2} \mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})} \boldsymbol{u} = m^{(\mathrm{E})} \boldsymbol{u}\,. \tag{44}$$

Poslední tvar $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ připomíná výraz $m(M)\, \boldsymbol{u}(M)$ pro hybnost $\boldsymbol{p}(M)$ hmotného bodu M v Newtonově mechanice. Faktor $m^{(\mathrm{E})}$ se proto nazývá *„elektromagnetickou hmotou"* elektronu. Tato hmota závisí na absolutní rychlosti elektronu podle vzorce

$$m^{(\mathrm{E})} = \gamma m_0^{(\mathrm{E})} = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\, m_0^{(\mathrm{E})}\,, \tag{45}$$

v němž

$$m_0^{(\mathrm{E})} = \tfrac{4}{3} c^{-2} \mathscr{E}_0^{(\mathrm{vl})} = (6\pi c^2)^{-1} \int \boldsymbol{E}_0^2\, \mathrm{d}V$$

je konstanta určující *klidovou elektromagnetickou hmotu elektronu.*

Dosadíme-li ze (44) do (35b), dostaneme při kvazistacionárním pohybu elektronu

$$\boldsymbol{f}^{(\mathrm{vl})} = -\mathrm{d}(m^{(\mathrm{E})}\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t\,. \tag{35c}$$

Rychlost $\boldsymbol{u}$ nyní pokládáme za proměnnou s časem t. *Porovnáme-li* (35c) *s historicky původním Newtonovým výrazem pro inerciální sílu*

$$\boldsymbol{K}_{(M)}^{(I)} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, [m(M)\, \boldsymbol{u}(M)]\,,$$

vidíme, že Lorentzova vlastní síla má povahu „odporu proti zrychlení" vůči éteru. Proto v Lorentzově pohybové rovnici (11) převádíme vlastní sílu (35c) na levou stranu a rovnici píšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}^{(\mathrm{vn})} = e(\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vn})} + c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}^{(\mathrm{vn})})\,. \tag{46}$$

Veličina

$$m = m^{\star} + m^{(\mathrm{E})}$$

se nazývá *celková setrvačná hmota* (nebo prostě hmota) elektronu a vektor

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = (m^{\star} + m^{(\mathrm{E})})\, \boldsymbol{u} \tag{47}$$

celková hybnost (nebo prostě hybnost) elektronu. Vzhledem k tomu, že v rovnici (46) vystupuje na pravé straně již jen vnější síla, tak jako v Newtonově rovnici (I 22), je veličina m zřejmě vhodnější definicí setrvačné hmoty elektronu než $m^{\star}$ (tzv. „mechanická", podle Lorentze „materiální" hmota elektronu).

O vzájemném vztahu obou příspěvků $m^{\star}$ a $m^{(\mathrm{E})}$ k setrvačné hmotě elektronu m nelze ovšem z Lorentzovy teorie nic vyvodit. Experimenty, o nichž pojednáme v odst. III 5,2 ukázaly, že celková hmota m závisí na rychlosti právě tím způsobem, který Lorentzova teorie předpovídá pro hmotu elektromagnetickou $m^{(\mathrm{E})}$. Z toho se vyvozovalo, že u elektronu je „materiální hmota" $m^{\star}$ rovná nule a že jeho setrvačná hmota je „čistě elektromagnetického původu".

Tento úsudek se zakládal na předpokladu Newtonovy mechaniky, zdánlivě potvrzeném zkušeností v oboru mechaniky makroskopických těles, že mechanická hmota $m(M)$ tělesa M je konstantní. Pozdější rozvoj teorie i zkušenost však přivedly k poznatku, že ve skutečnosti i mechanická hmota všech těles závisí na rychlosti podle Lorentzova vzorce (45), tj., že vztah

$$m = \gamma m_0 \tag{45a}$$

je obecným zákonem pro každou setrvačnou hmotu. Proto byla znova otevřena i otázka „původu" setrvačné hmoty elektronu. Vrátíme se k ní v kapitole o relativistické mechanice. Poněvadž zkoumáním pohybu elektronu nelze odlišit části m^* a $m^{(E)}$ jeho hmoty m, ani odpovídající části jeho hybnosti $\boldsymbol{p}$, budeme nadále užívat pouze hmoty m a pouze hybnosti $\boldsymbol{p}$.

Při rychlosti $u \ll c$ můžeme hmotu m nahradit tzv. „klidovou hmotou" m_0 a pohybovou rovnici Lorentzovu psát ve tvaru

$$m_0 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}^{(\text{vn})}\,, \tag{46a}$$

kterého se používá v Newtonově mechanice. K podrobnějšímu zdůvodnění praktické použitelnosti této přibližné rovnice se vrátíme v odst. III 5,2.

Uveďme ještě jednu při některých úvahách vhodnou úpravu Lorentzovy pohybové rovnice (46). Vyjádříme-li hmotu m elektronu (ve shodě se zkušeností) podle (45a) a vypočteme-li na levé straně (46) naznačenou derivaci podle t, dostaneme

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t = m_0[\gamma \boldsymbol{a} + c^{-2}\,\gamma^3(\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u}]\,.$$

Rozložme dále zrychlení $\boldsymbol{a}$ na vektor $\boldsymbol{a}_\parallel$ rovnoběžný s $\boldsymbol{u}$ a na vektor $\boldsymbol{a}_\perp$ kolmý k $\boldsymbol{u}$, takže

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\parallel + \boldsymbol{a}_\perp\,, \quad \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a}_\parallel = u a_\parallel\,, \quad \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a}_\perp = 0\,.$$

Pak lze psát $(\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} = u^2 \boldsymbol{a}_\parallel$ a tedy

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t = m_\parallel \boldsymbol{a}_\parallel + m_\perp \boldsymbol{a}_\perp\,,$$

přičemž

$$\begin{aligned} m_\parallel &= m_0\,\gamma^3(\gamma^{-2} + u^2/c^2) = m_0\gamma^3 = m\gamma^2\,, \\ m_\perp &= m_0\gamma = m\,. \end{aligned} \tag{45b}$$

Rovnici (46) můžeme tedy nahradit dvěma rovnicemi běžného tvaru

$$m_\parallel \boldsymbol{a}_\parallel = \boldsymbol{f}_\parallel^{(\text{vn})}\,, \quad m_\perp \boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{f}_\perp^{(\text{vn})}\,. \tag{46b}$$

Koeficienty $m_\parallel$ a $m_\perp$ jsou různé a závisí na rychlosti u. Vidíme, že elektron klade jiný odpor zrychlení ve směru $\boldsymbol{u}$ než ve směru kolmém k $\boldsymbol{u}$. Mluví se proto někdy o podélné (longitudinální) a příčné (transverzální) setrvačné hmotě elektronu. Nicméně veličina m vystupující v definici (47) celkové hybnosti je nejvhodnější a fyzikálně nejvýznamnější definicí hmoty elektronu. Je-li $u \ll c$, je ovšem $m_\parallel \doteq m_\perp \doteq m \doteq m_0$ (až na veličiny řádu u^2/c^2).

Nakonec je třeba znovu připomenout, že vzorec (35c) pro vlastní sílu je jen přibližný a platí jen za uvedených omezujících podmínek kvazistacionárního pohybu. Nejsou-li ty podmínky splněny, nelze obecně ani zanedbat plošný integrál v rovnici (35a) ani vyjádřit elektromagnetickou hybnost $\boldsymbol{p}^{(\text{vl})}$ výrazem (44). To má za následek,

že ve vzorci (35c) pro vlastní sílu i v rovnici (46) přibude na pravé straně korekční člen, který je při malé rychlosti elektronu, jak ukázal Lorentz, dán výrazem

$$\tfrac{2}{3}(e^2/c^3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t\,. \tag{48}$$

Původ této části vlastní síly, která už *nemá povahu síly inerciální*, je v tom, že elektron obecně při zrychleném pohybu vysílá záření, jehož energii a hybnost ztrácí. Tato část vlastní síly má sice zásadní význam pro dynamickou teorii emise záření, ale při našich úvahách zatím není důležitá. Proto se jí nyní nebudeme blíže zabývat.

4. TENZORY A PSEUDOTENZORY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

4,1. TRANSFORMAČNÍ VZORCE PRO SLOŽKY TENZORŮ A PSEUDOTENZORŮ

Dosud jsme při zápisu základních rovnic Lorentzovy teorie i jejich řešení užívali jen *jednoho systému* kartézských souřadnic s osovým trojhranem *v klidu vůči éteru*. Způsob zápisu těch rovnic (v symbolickém vektorovém tvaru) však již naznačuje, že jich lze beze změny použít ve všech klidných kartézských systémech. V dalším výkladu to prokážeme na základě pojmu tenzoru v trojrozměrném prostoru, a nového zápisu rovnic (ve složkovém tenzorovém tvaru). Získáme tím zároveň důležité transformační vzorce pro elektromagnetické veličiny. Tyto vzorce umožňují transformovat z jednoho systému do druhého nejen základní rovnice Lorentzovy teorie, ale i jejich speciální řešení, tj. „přeložit" ze systému S do S′ i popis libovolného konkrétního elektromagnetického jevu.

Zatím se to bude týkat jen systémů, které jsou vesměs v klidu vůči éteru. Závěrem si sice všimneme také otázek, které se týkají popisu elektromagnetických jevů z hlediska systému, který je vůči éteru v rovnoměrném translačním pohybu, ale úplné řešení tohoto podstatně obtížnějšího problému v tomto odstavci ještě nepodáme. Chybí nám k tomu důležité informace, které získáme teprve v kap. III rozborem rozličných experimentů a jejich výsledků. Tam také uvidíme, že uspokojivé řešení právě tohoto problému vede k Einsteinově teorii relativity a je možné teprve v jejím rámci.

Elektromagnetické i jiné fyzikální veličiny tvoří tzv. tenzory. Pojem tenzoru je jistým zobecněním pojmu vektoru. Vlastnosti tenzorů a základy tenzorového počtu jsou jednoduché a dosti známé. (Podrobné poučení o tenzorech v trojrozměrném prostoru podává např. učebnice [8].) Přesto si je stručně připomeneme, hlavně proto, že si musíme zavést označení.

Budeme používat systémů S, S′, ..., *kartézských* prostorových souřadnic x_j, x'_j, ... Trojhrany jejich os budou (prozatím) vůči sobě navzájem v klidu — a použije-li se jich v Lorentzově teorii (v odst. 4,3), také v klidu vůči éteru. (Systémy v pohybu vůči éteru zavedeme až v odst. 4,4.) Nejobecnější transformace souřadnic $(x) \to (x')$ vedoucí od systému S k S' je tedy nyní dána transformačními vzorci

$$x'_j = C_{jk}(x_k - x_k(O')) , \tag{49}$$

v nichž C_{jk} a $x_k(O')$ jsou *konstanty*. Ze vztahů ortogonality (I 2) plyne, že $C \equiv \equiv \det(C_{jk}) = \pm 1$. Všechny transformace (49) tvoří grupu a transformace s $C = +1$ tvoří její podgrupu (podgrupa prostých otočení a posunutí osového trojhranu). Transformace (49) s $C = -1$ netvoří grupu, ale každou takovou transformaci $(x) \to (x')$ lze složit z jisté transformace $(x) \to (x'')$ s $C = +1$ a ze zrcadlení $x'_j = -x''_j$. Zrcadlení obrací smysl všech tří os. Změna smyslu jen dvou os je otočením o 180° kolem třetí osy.

Nejjednodušším netriviálním případem tenzoru je vektor. V odst. 1 jsme zavedli především tzv. radius-vektor nebo průvodič $\boldsymbol{x}$, který si představujeme jako orientovanou úsečku $\overrightarrow{OP}$ spojující počátek O systému S s bodem P o souřadnicích x_j. Veličiny x_j jsou složkami průvodiče $\boldsymbol{x}$ v systému S. Soubor (tří) složek vektoru určuje (nebo tvoří) vektor. Vektor lze ovšem určit jeho složkami v libovolném z uvažovaných systémů. Obecně budeme složky libovolného vektoru $\boldsymbol{E}$ v systému S označovat E_j, v systému S' pak E'_j atd. Pouze průvodič $\boldsymbol{x}$ je výjimkou z této úmluvy. Jeho složky v systému S' musíme označovat jinak, neboť *symboly x'_j jsou už zadány pro souřadnice* bodu P *v systému* S', *které jsou složkami průvodiče* $\boldsymbol{x}' \equiv \overrightarrow{O'P}$ *v systému* S'. *Pouze když je* $O' \equiv O$ a tedy $x_k(O') = 0$, takže podle (49) platí speciální transformační vzorce $x'_j = C_{jk}x_k$, *jsou veličiny x'_j složkami téhož vektoru jako* x_j. V obecném případě jsou složky průvodiče $\boldsymbol{x} \equiv \overrightarrow{OP}$ v systému S' dány výrazy

$$\Delta^{(OP)}x'_j \equiv x'_j - x'_j(O) = C_{jk}x_k . \tag{49a}$$

Vidíme, že *tyto veličiny nezávisí na vzájemné poloze počátků* O a O' nýbrž jen na směrech os systému S' (určených koeficienty C_{jk}). Výrazy na pravé straně rovnic (49a) udávají obecný předpis, podle kterého se složky libovolného vektoru v systému S' počítají z jeho složek v systému S.

Obecné transformační vzorce pro složky libovolného vektoru $\boldsymbol{E}$ mají tedy tvar

$$E'_j = C_{jk}E_k . \tag{50}$$

Také rovnice (49a) mají tvar (50), neboť $x_k = \Delta^{(OP)}x_k$, poněvadž $x_k(O) = 0$. Z matematického hlediska stačí požadavek transformačních vzorců (50) k definici pojmu vektoru. Fyzikální pojem vektoru nadto předpokládá, že obě trojice veličin E_j i E'_j se vztahují k témuž fyzikálnímu objektu, popisují jednu a tutéž fyzikální skutečnost a jsou v obou systémech určeny stejným způsobem měření. Trojicemi fyzikálních veličin tvořícími vektory jsou např. $\Delta^{(MN)}x_j \equiv x_j(N) - x_j(M)$, nebo $u_j \equiv \mathrm{d}x_j(M)/\mathrm{d}t$, $a_j \equiv \mathrm{d}u_j/\mathrm{d}t$, i složky Newtonovy síly $f_j(M)$ (viz transformační vzorce (I 17), (I 8), (I 9) a (I 23)).

Pojem vektoru lze snadno zobecnit na pojem tenzoru libovolného řádu n. *Vektor* je tenzor *prvního řádu*. Tenzor *nultého řádu* se nazývá *skalár* a je určen jediným číslem, které se při transformaci souřadnic (49) nemění. Příkladem skaláru je čas t (viz (I 16)), dále setrvačná hmota m, hustota náboje $\varrho(\boldsymbol{x}, t)$ apod. Tenzor *druhého řádu* (v trojrozměrném prostoru) má obecně 3^2 nezávislých složek, např. T_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$), které se při transformaci (49) transformují podle vzorců

$$T'_{jk} = C_{jl}C_{km}T_{lm} . \tag{50a}$$

Z toho je již zřejmé obecné pravidlo, podle kterého se transformují složky tenzoru libovolného vyššího řádu:

$$T'_{jkl\ldots} = C_{jq}C_{kr}C_{ls} \ldots T_{qrs\ldots} . \tag{50b}$$

Vidíme, že z rovnic $T_{qrs\ldots} = 0$ plynou vždy rovnice $T'_{jkl\ldots} = 0$. Závisí-li *složky tenzoru* na bodě P v prostoru (místě v éteru), *vyjadřujeme je vždy jako funkce souřadnic bodu P v tom systému, k jehož osám se složky vztahují.* Úplný postup při výpočtu složek $T'_{jkl\ldots}(x'_1, x'_2, x'_3, t)$ ze složek $T_{qrs\ldots}(x_1, x_2, x_3, t)$ je tedy tento: Nejprve utvoříme výrazy na pravých stranách rovnic (50b) a potom za souřadnice x_j dosadíme z transformace inverzní k (49), tj.

$$x_j = C_{kj}x'_k + x_j(O') .$$

Tenzory řádu $\geqq 2$ mohou mít různé symetrie. Platí-li např. $T_{jk} = T_{kj}$ (nebo $F_{jk} = -F_{kj}$), platí totéž i o čárkovaných složkách a říkáme, že tenzor je *symetrický* (nebo *antisymetrický*). Důležitý, speciální symetrický tenzor 2. řádu určují veličiny

$$\delta_{jk} = \delta'_{jk} = \begin{cases} 1, (j = k) , \\ 0, (j \neq k) . \end{cases}$$

Že čísla δ_{jk} jsou vskutku složkami tensoru (Kroneckerova), dosvědčují vztahy

$$\delta'_{jk} = C_{jl}C_{km}\delta_{lm} = C_{jl}C_{kl} = \delta_{jk} .$$

Příklady fyzikálních tenzorů druhého a třetího řádu, symetrických i antisymetrických, poznáme v dalším výkladu.

Stejně jako vektory, lze i tenzory téhož libovolného řádu sčítat (sčítají se stejnojmenné složky) nebo násobit číslem (násobí se jím všecky složky). Tím vznikne opět tenzor téhož řádu. Tenzory vyššího (nižšího) řádu lze tvořit z tenzorů nižšího (vyššího) řádu násobením, derivováním podle souřadnic a úžením. Jsou-li např. A_j a B_k složky dvou vektorů, pak soubor devíti součinů A_jB_k je tenzorem druhého řádu, neboť součiny $A'_jB'_k$ souvisí s A_lB_m právě vztahy tvaru (50a). Jsou-li T_{jk} složky tenzoru druhého řádu, pak zřejmě platí

$$\partial'_l T'_{jk} = C_{jq}C_{kr}(\partial_s T_{qr}) \, . \, \partial'_l x_s = C_{jq}C_{kr}C_{ls}\,\partial_s T_{qr} ,$$

znamená-li ∂'_l (popř. ∂_s) *parciální derivaci podle souřadnice* x'_l (popř. x_s) při konstantních x'_m $(m \neq l)$ (popř. konstantních x_p $(p \neq s)$) a ovšem v tomtéž čase t. Veličiny $\partial_s T_{qr}$ jsou tedy složkami tenzoru 3. řádu a derivace ∂_s jsou (z hlediska transformačního zákona) ekvivalentní násobení vektorem. Dále je zřejmé, že veličiny

$$A_j B_k \delta_{jk} = A_j B_j = A'_j B'_j \equiv \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} \,,$$

nebo

$$\partial_j E_k \, \delta_{jk} = \partial_j E_j = \partial'_j E'_j \equiv \operatorname{div} \mathbf{E}$$

jsou skaláry a veličiny $\phi_j = \partial_k T_{jk}$ jsou složkami vektoru.

Z toho je již vidět *obecné pravidlo* o tvoření tenzorů vyššího řádu násobením tenzorů nebo jejich derivováním podle souřadnic a pravidlo o tvoření tenzorů nižšího řádu úžením tenzorů řádu $\geqq 2$. (Viz též Ú 8.)

Kromě tenzorů se setkáme s tzv. *pseudotenzory*. Transformační pravidlo o složkách pseudotenzoru zní obecně takto:

$$Z_{jkl\ldots} = C \,.\, C_{jq} C_{kr} C_{ls} \ldots Z_{qrs\ldots} \,. \tag{51}$$

Vidíme, že se liší od transformačního pravidla (50b) o složkách tenzorů jen faktorem C, tj. liší se pouze při transformacích (49) s $C = -1$ (obsahujících zrcadlení). Pro pseudotenzory nemáme zvláštního označení. U odvozených veličin se jejich tenzorová nebo pseudotenzorová povaha pozná z jejich vyjádření podle zřejmých pravidel, že *součin tenzoru a pseudotenzoru je pseudotenzor, součin dvou tenzorů (pseudotenzorů) je tenzor. Operace* ∂_j je přitom opět *ekvivalentní násobení vektorem (tenzorem* 1. řádu).

Pseudotenzor nultého řádu se nazývá též *pseudoskalár* a pseudotenzor prvního řádu *pseudovektor* nebo *axiální vektor*. Při transformaci zrcadlení $x'_j = -x_j$, při němž se smysl všech tří os obrátí, se složky pseudovektoru nemění, kdežto u složek pravého vektoru (polárního) se vesměs změní znaménka. Z toho je např. zřejmé, že k určení směru i smyslu *vnější* normály dané uzavřené plochy musíme použít vektoru (nikoliv pseudovektoru), má-li toto ustanovení být nezávislé na volbě systému souřadnic. (Pseudovektor by po takovém zrcadlení mířil dovnitř plochy místo vně.)

Důležitým pseudotenzorem 3. řádu je úplně antisymetrický pseudotenzor Levi-Civitův, jehož složkami v kartézském systému S jsou čísla ε_{jkl}, použitá již v rovnicích (I 28). Jeho složky v systému S' určeném transformací (49) vyjádříme podle obecného vzorce (51) takto:

$$\varepsilon'_{jkl} = C C_{jm} C_{kn} C_{lp} \varepsilon_{mnp} \,. \tag{51a}$$

Jak ihned ukážeme, $\varepsilon'_{jkl} = \varepsilon_{jkl}$, tj. složky Levi-Civitova pseudotenzoru se při transformaci (51a) reprodukují. Pseudotenzor ε_{jkl} je tedy izotropní, podobně jako Kroneckerův tenzor δ_{jk}. Snadno se dokáže, že $\psi \delta_{jk}$ je jediným izotropním tenzorem a $\psi \varepsilon_{jkl}$ jediným izotropním pseudotenzorem (ψ je libovolný skalár).

K důkazu rovnic $\varepsilon'_{jkl} = \varepsilon_{jkl}$ nám poslouží několik (i jinak užitečných) algebraických vztahů. Především platí

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{qrs} = \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lq} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\sum_{P_+(qrs)} - \sum_{P_-(qrs)} \Big) \delta_{jq} \delta_{kr} \delta_{ls} \,, \tag{52a}$$

neboť determinant mění znaménko při výměně kterýchkoliv dvou řádků nebo sloupců a při $j = q = 1$, $k = r = 2$, $l = s = 3$ má hodnotu $+1$. Z (52a) plynou postupným úžením další užitečné vztahy

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{jrs} = \delta_{kr} \delta_{ls} - \delta_{ks} \delta_{lr} \,, \tag{52b}$$

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{jks} = 2 \delta_{ls} \,, \tag{52c}$$

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{jkl} = 6 \,. \tag{52d}$$

Pro determinant C transformace (49) zřejmě platí vzorec

$$C = \varepsilon_{mnp} C_{1m} C_{2n} C_{3p}$$

i obecnější vyjádření

$$C = \tfrac{1}{6} \varepsilon_{qrs} \varepsilon_{mnp} C_{qm} C_{rn} C_{sp} \,. \tag{53}$$

Rovnici (53) nyní násobme ε_{jkl} a na pravé straně dosaďme z (52a) za součin $\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{qrs}$. Sčítání podle indexů q, r, s je pak snadné, použije-li se vztahů $\delta_{jq} C_{qm} = C_{jm}$, atd. Tím dostaneme rovnici

$$C \varepsilon_{jkl} = C_{jm} C_{kn} C_{lp} \varepsilon_{mnp} \,.$$

Násobíme-li ji ještě C, a pak ji porovnáme s (51a), shledáme, že $\varepsilon'_{jkl} = C^2 \varepsilon_{jkl} = \varepsilon_{jkl}$.

Pseudotenzor ε_{jkl} má pro tenzorový počet podobný význam jako tenzor δ_{jk}. Nechť je např. $\hat{\psi}$ pseudoskalár a $\hat{\xi}_j$ pseudovektor. (Stručné „$\hat{\xi}_j$ je pseudovektor" nahrazuje dosud používaná obšírná vyjádření „soubor veličin $\hat{\xi}_j$ je pseudovektorem", nebo „veličiny $\hat{\xi}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ jsou složkami pseudovektoru".) Utvoříme-li výrazy

$$\psi_{jkl} = \varepsilon_{jkl} \hat{\psi} \,; \tag{54}$$

$$\xi_{jk} = \varepsilon_{jkl} \hat{\xi}_l \,, \tag{55}$$

dostáváme zřejmě antisymetrické tenzory. Invariantní vztahy (54) a (55) lze užitím (52d, c) snadno obrátit a zapsat ve tvaru

$$\hat{\psi} = \tfrac{1}{6} \varepsilon_{jkl} \psi_{jkl} \,, \tag{54a}$$

$$\hat{\xi}_m = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{jkm} \xi_{jk} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{mjk} \xi_{jk} \,. \tag{55a}$$

Jsou to tzv. vztahy duality. Tenzor (pseudotenzor) a jemu duálně přidružený pseudotenzor (tenzor) jsou ekvivalentní v tomto smylu: Úplně antisymetrický tenzor 3. řádu ψ_{jkl} je určen svou jedinou nezávislou složkou ψ_{123}, tj. jediným číslem, právě tak jako pseudoskalár $\hat{\psi}$. Podobně antisymetrický tenzor 2. řádu ξ_{jk} je určen svými třemi nezávislými složkami $\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$, tj. třemi čísly, právě tak jako pseudovektor $\hat{\xi}_j$. Rovnice (54) a (55) dávají $\psi_{123} = \hat{\psi}$ a $\xi_{23} = \hat{\xi}_1$, $\xi_{31} = \hat{\xi}_2$, $\xi_{12} = \hat{\xi}_3$. Stejné rovnice ovšem platí i pro čárkované veličiny, neboť $\varepsilon'_{jkl} = \varepsilon_{jkl}$. Veličina ψ'_{123} tedy souvisí s ψ_{123} stejným vztahem jako $\hat{\psi}'$ s $\hat{\psi}$ a trojice složek $\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$ se při transformaci (49) transformuje stejně jako trojice složek $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$.

4,2. TENZOROVÉ INTEGRÁLY

Buďtež $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ a $\delta\boldsymbol{x}$ dvě infinitezimální orientované úsečky vycházející z bodu $\boldsymbol{x}$. Jejich složky $\mathrm{d}x_j$ a δx_j se transformují podle (20). Utvořme dále antisymetrický tenzor 2. řádu

$$\mathrm{d}\sigma_{jk} = \mathrm{d}x_j\,\delta x_k - \mathrm{d}x_k\,\delta x_j \tag{56}$$

a z něho pseudovektor

$$\mathrm{d}\hat{\sigma}_j = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\,\mathrm{d}\sigma_{kl} = \varepsilon_{jkl}\,\mathrm{d}x_k\,\delta x_l\,, \tag{57}$$

který je identický s obvyklým vektorovým součinem $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \delta\boldsymbol{x}$.

Veličina

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\hat{\sigma}| = (\mathrm{d}\hat{\sigma}_j\,\mathrm{d}\hat{\sigma}_j)^{\frac{1}{2}} = (\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\sigma_{jk}\,\mathrm{d}\sigma_{jk})^{\frac{1}{2}} \geqq 0 \tag{58}$$

je skalár udávající plošný obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ a $\delta\boldsymbol{x}$. Pseudovektor $\mathrm{d}\hat{\sigma}$ je kolmý k oběma vektorům $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ i $\delta\boldsymbol{x}$, neboť podle (57) $\mathrm{d}\hat{\sigma}_j\,\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}\hat{\sigma}_j\,\delta x_j = 0$. Můžeme tedy vždy udat *jednotkový vektor* $\boldsymbol{N}$, kolmý k rovině zmíněného rovnoběžníka, tak aby v systému S platily vztahy $\mathrm{d}\hat{\sigma}_j = N_j\,\mathrm{d}\sigma$, a v systémech S' určených transformacemi (49) s $C = \pm 1$ vztahy $\mathrm{d}\hat{\sigma}'_j = \pm N'_j\,\mathrm{d}\sigma$.

Mějme nakonec tři infinitezimální orientované úsečky (vektory) $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\delta\boldsymbol{x}$ a $\Delta\boldsymbol{x}$ vycházející z bodu $\boldsymbol{x}$. Utvořme antisymetrický tenzor 3. řádu

$$\mathrm{d}V_{jkl} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x_j & \delta x_j & \Delta x_j \\ \mathrm{d}x_k & \delta x_k & \Delta x_k \\ \mathrm{d}x_l & \delta x_l & \Delta x_l \end{vmatrix} \tag{59}$$

a z něho pseudoskalár

$$\mathrm{d}\hat{V} = \tfrac{1}{6}\varepsilon_{jkl}\,\mathrm{d}V_{jkl} = \mathrm{d}V_{123} = \varepsilon_{jkl}\,\mathrm{d}x_j\,\delta x_k\,\Delta x_l = \mathrm{d}\hat{\sigma}_l\,\Delta x_l\,. \tag{60}$$

V obyčejném vektorovém označení je pseudoskalár $\mathrm{d}\hat{V}$ vyjádřen známým trojným součinem

$$\mathrm{d}\hat{V} = (\mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \delta\boldsymbol{x})\,.\,\Delta\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,.\,\Delta\boldsymbol{x}\,.$$

Potom veličina

$$\mathrm{d}V = |\mathrm{d}\hat{V}| \geqq 0 \tag{61}$$

udává objem rovnoběžnostěnu, jehož hranami jsou vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{x}$. Tvoří-li tyto vektory (v uvedeném pořadí) trojhran stejně orientovaný jako osy souřadnic (oba pravotočivé nebo oba levotočivé), je pseudoskalár $\mathrm{d}\hat{V} = +\mathrm{d}V$. Tak je tomu např. při volbě

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv (\mathrm{d}x_1 > 0, 0, 0)\,, \quad \delta\boldsymbol{x} \equiv (0, \delta x_2 > 0, 0)\,, \quad \Delta\boldsymbol{x} \equiv (0, 0, \Delta x_3 > 0)\,,$$

kdy

$$\mathrm{d}\hat{V} = \mathrm{d}V_{123} = \mathrm{d}x_1\,\delta x_2\,\Delta x_3 = \mathrm{d}V\,.$$

Obsah objemového elementu $\mathrm{d}V$, definovaný obecně jako absolutní hodnota pseudoskaláru $\mathrm{d}\hat{V}$, je ovšem *skalár* a proto jsou objemové integrály

$$\int_V T_{jkl\ldots}\,\mathrm{d}V$$

vztažené na část prostoru V, která je ohraničena pevnou uzavřenou plochou σ, tenzorem téhož typu jako $T_{jkl\ldots}$. K témuž výsledku vede i obvyklý postup, jímž se zavádějí nové integrační proměnné x'_j do trojného integrálu

$$\iiint_{(V)} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,.$$

(Viz např. učebnici [9].)

Z toho, co jsme uvedli je již zřejmé, že Gaussova věta

$$\int_V \partial_j E_j\,\mathrm{d}V = \int_\sigma E_j N_j\,\mathrm{d}\sigma \tag{62}$$

platí ve stejném tvaru ve všech systémech, které jsou navzájem spojeny transformacemi typu (49), neboť oba integrály jsou skaláry (pseudoskaláry), je-li E_j vektor (pseudovektor). Přitom N_j určují jednotkový vektor ve směru *vnější* normály k plošnému elementu $\mathrm{d}\sigma$. Také pro libovolný tenzor $T_{jkl\ldots}$ platí vztahy

$$\int_V \partial_s T_{jkl\ldots s}\,\mathrm{d}V = \int_\sigma T_{jkl\ldots s} N_s\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{63}$$

které jsou zřejmě invariantní vůči transformacím (49). Místo (62) a (63) můžeme psát také rovnice

$$\int_V \partial_j E_j \, d\hat{V} = \int_\sigma E_j \, d\hat{\sigma}_j \,, \tag{62a}$$

$$\int_V \partial_s T_{jkl\ldots s} \, d\hat{V} = \int_\sigma T_{jkl\ldots s} \, d\hat{\sigma}_s \,, \tag{63a}$$

které jsou invariantní ve stejném rozsahu, neboť při transformaci zrcadlení $x'_j = -x_j$ máme $d\hat{V}' = -d\hat{V}$ a $\partial'_j = -\partial_j$, ale $d\hat{\sigma}'_j = +d\hat{\sigma}_j$.

4,3. SLOŽKOVÝ TENZOROVÝ ZÁPIS MAXWELLOVÝCH-LORENTZOVÝCH ROVNIC

Přistupme nyní k tenzorovému zápisu základních rovnic Lorentzovy teorie. Invariance jejich tvaru při transformacích (49), která bude z jejich tenzorového zápisu zřejmá, vyjadřuje z fyzikálního hlediska důležitou vlastnost *izotropie a homogenity prostoru* (nebo éteru).

Vyjdeme z přirozeného požadavku, aby setrvačná hmota m_0 a náboj e elektronu v klidu byly nezávislé na volbě trojhranu os systému souřadnic, tj. aby to byly skaláry při transformacích (49). Poněvadž v případě $\boldsymbol{u}(t) = 0$ pohybová rovnice (46a) zní $m_0 \boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}^{(vn)}$ a poněvadž $\boldsymbol{a}$ je vektor (pravý), musí i elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ být pravým vektorem, má-li být pohybová rovnice invariantní vůči grupě transformací (49). Z rovnice (2), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\partial_j E_j = 4\pi\varrho \,, \tag{$\overline{2}$}$$

pak vidíme, že ϱ musí být skalár, neboť levá strana je skalár. Skalární povaha ϱ plyne též ze vztahu

$$e = \int \varrho \, dV \,.$$

Ze vzorce $\boldsymbol{J} = \varrho \boldsymbol{u}$ dále plyne, že $\boldsymbol{J}$ je pravý vektor a rovnice kontinuity

$$\partial_j J_j + c^{-1} \, \partial\varrho/\partial t = 0 \tag{$\overline{8}$}$$

už je invariantní vůči grupě transformací (49).

Z rovnic (1a), (2a), tj. z rovnic

$$\partial_j \, \partial_j A_k - c^{-2} \, \partial^2 A_k/\partial t^2 = -4\pi c^{-1} J_k \,, \tag{$\overline{1\text{a}}$}$$

$$\partial_j \, \partial_j \varphi - c^{-2} \, \partial^2 \varphi/\partial t^2 = -4\pi\varrho \tag{$\overline{2\text{a}}$}$$

podobně plyne, že $\boldsymbol{A}$ musí být pravý vektor a φ skalár v souhlase s vyjádřením

$$E_j = -\partial_j \varphi - c^{-1} \, \partial A_j/\partial t \tag{$\overline{5}$}$$

složek vektoru $\boldsymbol{E}$. Přitom i Lorentzova podmínka

$$\partial_j A_j + c^{-1} \, \partial\varphi/\partial t = 0 \tag{$\overline{7}$}$$

už je invariantní vůči všem transformacím (49). Z vektorové rovnice (6) i z jejího rozpisu na složkové rovnice ve tvaru

$$H_j = \varepsilon_{jkl} \, \partial_k A_l = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{jkl} (\partial_k A_l - \partial_l A_k) \tag{$\overline{6}$}$$

vidíme, že $\boldsymbol{H}$ je *pseudovektor* a

$$F_{kl} \equiv \partial_k A_l - \partial_l A_k \tag{6*}$$

je *k němu duální antisymetrický tenzor* 2. řádu. Rovnice (6*) jsou ekvivalentní rovnicím ($\overline{6}$). Veličiny F_{kl} jsou však při zápisu těchto rovnic vhodnější než H_j, neboť to dovoluje zbavit se nepohodlného pseudotenzoru ε_{kjl}.

Ukážeme si to i na zbývajících rovnicích (1), (3), (4). Vektorová rovnice (1) rozepsaná ve složkách dává

$$\varepsilon_{jkl} \, \partial_k H_l - c^{-1} \, \partial E_j/\partial t = 4\pi c^{-1} J_j \,. \tag{$\overline{1}$}$$

Dosazením

$$H_l = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{lrs} F_{rs} \tag{$\overline{6\text{a}}$}$$

a užitím (52b) lze rovnice ($\overline{1}$) zjednodušit na tvar

$$\partial_k F_{jk} - c^{-1} \, \partial E_j/\partial t = 4\pi c^{-1} J_j \,, \tag{1*}$$

v němž pseudotenzor ε_{jkl} již nevystupuje. Rovněž rovnice

$$\varepsilon_{jrs} \, \partial_r E_s + c^{-1} \, \partial H_j/\partial t = 0 \,, \tag{$\overline{3}$}$$

které představují složkový zápis Maxwellovy vektorové rovnice (3), přejdou po dosazení za H_j z ($\overline{6}$a), násobení ε_{jkl} a užití (52b) v ekvivalentní *tenzorové rovnice*

$$\partial_k E_l - \partial_l E_k + c^{-1} \, \partial F_{kl}/\partial t = 0 \,. \tag{3*}$$

Poslední Maxwellova rovnice (4) ve složkovém zápisu zní

$$\partial_q H_q = 0 \,. \tag{$\overline{4}$}$$

Její levá strana je pseudoskalár. Vypočteme-li k němu duální antisymetrický tenzor 3. řádu podle (54), dostaneme užitím ($\overline{6}$a) rovnice

$$\varepsilon_{jkl} \, \partial_q H_q = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{qrs} \, \partial_q F_{rs} = 0 \,,$$

a použitím (52a)

$$\partial_j F_{kl} + \partial_l F_{jk} + \partial_k F_{lj} = 0 \,. \tag{4*}$$

Rovnice ($\overline{4}$) je identicky splněna výrazy ($\overline{6}$), a rovnice (4*) jsou splněny výrazy (6*).

Tím jsme prokázali, že transformační vzorce pro elektromagnetické veličiny lze určit tak, aby základní rovnice elektromagnetického pole v Lorentzově teorii byly co do formy invariantní vůči grupě transformací souřadnic (49). Jako důsledek rovnic (4*) např. platí pro složky F'_{jk} rovnice (téhož tvaru):

$$\partial'_j F'_{kl} + \partial'_l F'_{jk} + \partial'_k F'_{lj} = C_{jq} C_{kr} C_{ls} (\partial_q F_{rs} + \partial_s F_{qr} + \partial_r F_{sq}) = 0\,, \tag{4*'}$$

a podobně v ostatních případech. Rovnice (1*), $(\bar{2})$, (3*), (4*) nebo $(\bar{1}a)$, $(\bar{2}a)$, $(\bar{5})$, (6*), $(\bar{7})$ představují hledaný *prostorově tenzorový zápis Maxwellových-Lorentzových rovnic.*

Zbývá udat ještě odpovídající vyjádření veličin ϕ, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{S}$ a T_{jk}. Snadno se potvrdí, že eliminace H_j a ε_{jkl} užitím $(\bar{6}a)$ a (52a, b, c) vede na tyto vzorce (jejich odvození ze vzorců (9), (13a, b) a (15a, b) doporučujeme za cvičení):

$$\phi_j = \varrho(E_j + c^{-1} F_{jk} u_k) = E_j \varrho + c^{-1} F_{jk} J_k\,, \tag{9*}$$

$$h = (8\pi)^{-1} (E_j E_j + \tfrac{1}{2} F_{jk} F_{jk}) \tag{13*a}$$

$$S_j = c^2 w_j = (4\pi)^{-1}\, c F_{jk} E_k\,,$$

$$T_{jk} = (4\pi)^{-1} [F_{jl} F_{kl} - E_j E_k + \tfrac{1}{2}(E_l E_l - \tfrac{1}{2} F_{lm} F_{lm})\, \delta_{jk}]\,. \tag{15*b}$$

Z (15*b) je vidět, že veličiny T_{jk} jsou složkami symetrického tenzoru, dále že hustoty ϕ a $\boldsymbol{w}$ i integrální veličiny $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{p}^{(E)}$ jsou (pravé) *vektory*, kdežto h i $\mathscr{E}^{(E)}$ jsou *skaláry*. Z toho již vyplývá, že i vzorce pro $f_j^{(vn)}$, $f_j^{(vl)}$ a pohybové rovnice probrané v odst. 3 jsou co do formy invariantní vůči transformacím (49).

4,4. MAXWELLOVY-LORENTZOVY ROVNICE V POHYBUJÍCÍM SE INERCIÁLNÍM SYSTÉMU

Nakonec se musíme alespoň krátce zmínit o problému popisu elektromagnetického pole a formulace základních rovnic Lorentzovy teorie v systémech souřadnic, jejichž osové trojhrany jsou vůči éteru v rovnoměrném translačním pohybu.

Z předcházejících úvah je zřejmé, že se nyní můžeme omezit na speciální Galileiho transformace tvaru

$$x'_j = x_j - v_j t\,. \tag{64}$$

Starý systém S souřadnic x_j *pokládáme za klidný vůči éteru.* Při transformaci Maxwellových-Lorentzových rovnic ze systému S do systému S′ musíme *především* místo parciálních derivací ∂_j (při konstantních t a x_k, $k \neq j$) a místo $\partial/\partial t$ (při konstantních x_1, x_2, x_3) zavést parciální derivace ∂'_j (při konstantních t a x'_k, $k \neq j$) a derivaci $\partial'/\partial t$ (při konstantních x'_1, x'_2, x'_3). To je záměna snadná, neboť užitím transformace

inverzní k (64) můžeme každou fyzikální veličinu E závislou na souřadnicích x_j a čase t vyjádřit jako funkci souřadnic x'_j a t. Tak zjistíme, že mezi původními a čárkovanými parciálními derivacemi platí vztahy

$$\partial_j E = (\partial'_k E)\, \partial_j x'_k = \delta_{jk}\, \partial'_k E = \partial'_j E\,, \tag{65a}$$

$$\partial E/\partial t = \partial' E/\partial t + (\partial'_j E)\, \partial x'_j/\partial t = \partial' E/\partial t - v_j\, \partial'_j E\,. \tag{65b}$$

Tímto postupem dostaneme z původních rovnic pole nové rovnice (v jiném tvaru) pro původní veličiny E_j, H_j, atd. Je však třeba ještě uvážit, zda máme těchto veličin užívat k popisu pole i v novém systému S′, neboť veličiny E_j, H_j apod. v něm nemají stejný „fyzikální význam“ jako ve starém. (Nejsou totiž v S′ definovány stejným způsobem měření, ačkoliv jsou osy systému S′ rovnoběžné se stejnojmennými osami systému S).

Není zajisté třeba dlouhých úvah, abychom poznali, že *pro popis* pole a elektronů *v systému* S′ by vskutku bylo prakticky výhodnější užívat a zavést do rovnic *veličiny, které by* tam *byly definovány stejným způsobem měření jako původní veličiny v systému* S. *Pokud jde o veličiny kinematické povahy,* jako jsou např. *rychlosti* a *zrychlení* elektrických nábojů nebo elektronů, je to úloha snadná, neboť pro ně při transformaci souřadnic (64) platí jednoduché transformační formule $u_j = u'_j + v_j$, $a_j = a'_j$. U specificky elektromagnetických veličin (jako jsou např. složky intenzit pole apod.), by to ovšem znamenalo nalézt nové veličiny (např. E'_j, H'_j), které by splňovaly v systému S′ rovnice téhož tvaru, jako původní, nečárkované veličiny v systému S. Způsoby měření elektromagnetických veličin jsou totiž odvozeny právě z rovnic, které splňují. V předchozím odst. 4.3 jsme takové veličiny E'_j, H'_j apod. určili pro transformace (49). K transformacím ve tvaru (64) se podobné veličiny nalézt nepodařilo a hned si ukážeme, že ani neexistují. Je možno nalézt pouze veličiny, s nimiž jen některé ze základních rovnic (např. buď druhá nebo první série Maxwellových-Lorentzových rovnic) mají v systému S′ stejný tvar jako s původními veličinami v systému S. Příklady takových veličin $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{A}'$, φ' viz v Ú 10, 11. K popisu pole v systému S′ by sice mohly být v jistém ohledu výhodnější než původní veličiny $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, ..., ale nějaký zásadní rozdíl by v tom nebyl.

Při důkaze, že nelze nalézt veličiny $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, které by v systému S′ určeném transformací (64) vyhovovaly vesměs stejným rovnicím jako veličiny $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ v systému S, vystačíme s velmi obecným a fyzikálně nutným požadavkem, že hledaná transformace $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}'$ přidružená k (64) musí být taková, aby z podmínky $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 0$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ plynulo $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}', t) = 0$, $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}', t) = 0$ a obráceně. *Anulování obou intenzit pole v určitém místě a čase má tedy být fakt* nebo pojem v podobném smyslu *absolutní*, jako je v mechanice pojem volného hmotného bodu. Vlastně je to v podstatě totéž, neboť v případě $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0$ byl by elektron „vložený“ do místa $\boldsymbol{x}$ v čase t rovněž volný. (Analogický požadavek, co se týká absolutního anulování obou intenzit pole, je splněn i v teorii relativity.)

Mějme nyní rovinnou, lineárně polarizovanou elektromagnetickou vlnu postupující v systému S ve směru absolutního paprsku $\mathbf{N}$. Z rovnic pole v systému S plyne, že se např. vlnoplocha, na níž je $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$, posunuje ve směru své normály $\mathbf{N}$ rychlostí c (viz (33a, b)). Vůči systému S', který se pohybuje rovněž ve směru $\mathbf{N}$, ale rychlostí v, se pak uvažovaná vlnoplocha $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = 0$ posunuje ve směru $\mathbf{N}' \equiv \mathbf{N}$ nutně jen rychlostí $c - v$, jak plyne z (64). To však znamená, že veličiny $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ splňující uvedený obecný požadavek, musí v systému S' vyhovovat jiným rovnicím než $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ v systému S. Musí v nich zřejmě vystupovat členy závislé explicite na rychlosti $\mathbf{v}$ tak, že vymizí jen při $\mathbf{v} = 0$ (kdy je i systém S' v klidu vůči éteru). Můžeme tedy říci, že *základní rovnice Lorentzovy teorie nejsou* (nemohou být) *invariantní vůči Galileiho transformaci souřadnic* při $\mathbf{v} \neq 0$.

Elektromagnetické veličiny použitelné v Lorentzově teorii k popisu pole tedy nutně musí být v systému S' určeném transformací (64) definovány poněkud jiným způsobem měření, než v systému S klidném vůči éteru. Kromě toho k těm měřením a k jejich vyhodnocení je zřejmě nutné předem znát rychlost $\mathbf{v}$ systému S' vůči éteru. Určení rychlosti $\mathbf{v}$, zejména rychlosti naší Země vůči éteru, tedy mělo pro Lorentzovu teorii zcela fundamentální význam a proto mu bylo věnováno mimořádné úsilí.

Vzniká ovšem další otázka, jakým způsobem vůbec můžeme zjišťovat rychlost našeho systému S' vůči éteru, když měření specificky elektromagnetických veličin její znalost již předpokládá. Odpověď naznačuje zmíněný případ elektromagnetické vlny: Musíme se omezit na měření takových veličin (v podstatě kinematické povahy, jako je např. rychlost světla nebo jeho frekvence apod.), k jejichž stanovení není třeba přímo a kvantitativně určovat intenzity pole. K měření rychlosti světla např. stačí, dovedeme-li zjistit či rozeznat zda je v daném místě v určitém čase „světlo" nebo „tma" (což je také zjištění absolutní, nezávislé na systému souřadnic a definici intenzit pole v daném systému).

Obecně lze postupovat takto: Zvolíme si (představíme si, že máme) systém S *klidný* vůči éteru a provedeme *v tomto systému teoretický rozbor* plánovaného pokusu (očekávaného jevu). Rozbor dovedeme až do takových výpovědí, které na základě předpokládané transformace souřadnic (64) lze už jednoznačně „přeložit" do systému S' a které pozorovatel v S' může snadno ověřit (nebo vyvrátit). Takovéto výpovědi se mohou týkat různých optických jevů (např. interferenčních), nebo pohybu hmotných těles apod. S řadou příkladů tohoto metodického postupu se setkáme v kap. III.

Jak jsme již uvedli na začátku tohoto odstavce, konečnou a úplnou odpověď na otázku, jaký je správný popis elektromagnetického pole v libovolném inerciálním systému S', podala teprve teorie relativity, ale v ní se už přechod mezi dvěma systémy, které jsou navzájem v rovnoměrném translačním pohybu, neurčuje transformací Galileiho. S důvody, které vedly k opuštění Galileiho transformace, se také blíže seznámíme v následující kapitole.

5. ROVNICE MAKROSKOPICKÉHO ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

5,1. LÁTKOVÉ PROSTŘEDÍ V KLIDU

Jedním z velkých úspěchů Lorentzovy elektronové teorie bylo odvození Maxwellových fenomenologických rovnic makroskopického elektromagnetického pole v látkovém prostředí. Poněvadž tyto rovnice (i jejich odvození) jsou důležité i pro teorii relativity, musíme o nich stručně pojednat.

Elektromagnetické veličiny $\widehat{E}(\mathbf{x}, t)$ *měřené makroskopickými měřícími přístroji jsou středními hodnotami mikroskopických veličin* $E(\mathbf{x}, t)$ *v jistém okolí bodu* $\mathbf{x}$ *a jistém časovém intervalu kolem okamžiku* t. Takové střední hodnoty libovolné mikroskopické funkce $E(\mathbf{x}, t)$ lze počítat podle obecného vzorce

$$\widehat{E}(\mathbf{x}, t) =$$

$$= (2\tau)^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} \mathrm{d}\Theta \left(\tfrac{4}{3}\pi b^3\right)^{-1} \iiint_{|\xi| \leq b} E(\mathbf{x} + \xi, t + \Theta)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_3 \,. \tag{66}$$

Veličiny b a τ jsou pevně zvolené *konstanty*. Aby se takto počítaných středních hodnot mohlo použít v teorii makroskopického elektromagnetického pole, musí být ovšem poloměr b koule opsané kolem bodu $\mathbf{x}$ tak velký, aby byl v kouli obsažen velký počet atomů. Na druhé straně však musí být délka b dostatečně malá, např. $2b \ll \lambda$, kde λ značí vlnovou délku elektromagnetické vlny, jejíž postup látkovým prostředím chceme z makroskopického hlediska studovat. Tyto podmínky lze splnit i u světelných vln, neboť vlnové délky viditelného světla jsou řádově 10^4-kráte větší než rozměry atomů.

Ze vzorce (66), použije-li se pravidla o derivaci integrálu podle parametru, plynou vztahy

$$\widehat{(\partial_j E)} = \partial_j \widehat{E} \,, \quad \widehat{(\partial E/\partial t)} = \partial \widehat{E}/\partial t \,. \tag{67}$$

Z Maxwellových-Lorentzových rovnic (1) až (4) dostaneme tedy pro střední hodnoty mikroskopických veličin tyto rovnice

$$\operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}} - c^{-1}\, \partial \widehat{\mathbf{E}}/\partial t = 4\pi c^{-1} \widehat{(\varrho \mathbf{u})} \,, \tag{68}$$

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{E}} = 4\pi \widehat{\varrho} \,, \tag{69}$$

$$\operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}} + c^{-1}\, \partial \widehat{\mathbf{H}}/\partial t = 0 \,, \tag{70}$$

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{H}} = 0 \,. \tag{71}$$

Ztotožníme-li veličinu $\hat{\boldsymbol{E}}$ s *makroskopickou elektrickou intenzitou* pole $\mathfrak{E}$ a veličinu $\hat{\boldsymbol{H}}$ s *magnetickou indukcí* $\mathfrak{B}$, pak se rovnice (70), (71) přesně shodují s *druhou sérií Maxwellových rovnic makroskopického elektromagnetického pole*

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + c^{-1}\, \partial\mathfrak{B}/\partial t = 0\,, \tag{70*}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0\,. \tag{71*}$$

Nejdůležitější je při odvozování Maxwellových rovnic makroskopického pole ovšem výpočet středních hodnot $\hat{\varrho}$ a $\widehat{(\varrho \boldsymbol{u})}$. V případě látkového prostředí v klidu lze tyto veličiny vyjádřit pomocí jiných *makroskopických* veličin takto:

$$\hat{\varrho} = \varrho^* - \operatorname{div} \mathfrak{P}\,, \tag{72}$$

$$\widehat{(\varrho \boldsymbol{u})} = \mathfrak{j} + \partial\mathfrak{P}/\partial t + c \operatorname{rot} \mathfrak{M}\,. \tag{73}$$

Výrazy na pravých stranách jsou známy z teorie makroskopického elektromagnetického pole (viz např. [6]). Stačí proto připomenout, jaký fyzikální význam mají makroskopické veličiny a členy na pravých stranách rovnic (72) a (73):

ϱ^* – hustota volného elektrického náboje,
$\mathfrak{j}$ – hustota *vodivého* elektrického proudu,
$\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ – vektory elektrické a magnetické *polarizace* prostředí (makroskopické hustoty dipólových momentů),
$-\operatorname{div} \mathfrak{P}$ – hustota vázaného elektrického náboje (polarizačního),
$\partial\mathfrak{P}/\partial t$ – hustota polarizačního elektrického proudu,
$c \operatorname{rot} \mathfrak{M}$ – hustota vázaného elektrického proudu vytvořeného magnetizací.

Veličiny $\mathfrak{j}$ a ϱ^* jsou vázány rovnicí kontinuity stejně jako mikroskopické veličiny $\boldsymbol{J} = \varrho \boldsymbol{u}$ a ϱ nebo jejich střední hodnoty.

Zavedeme-li ještě obvyklé makroskopické vektory $\mathfrak{D}$ (elektrické indukce) a $\mathfrak{H}$ (magnetické intenzity *makroskopického* pole) definičními rovnicemi

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P} \tag{74}$$

a

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi\mathfrak{M}\,, \tag{75}$$

můžeme rovnice (68), (69) zapsat takto:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - c^{-1}\, \partial\mathfrak{D}/\partial t = 4\pi c^{-1} \mathfrak{j}\,, \tag{68*}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\varrho^*\,. \tag{69*}$$

To je známá *první série Maxwellových rovnic makroskopického elektromagnetického pole v látkovém prostředí v klidu.*

V elektricky a magneticky měkkém izotropním prostředí platí materiálové vztahy

$$\mathfrak{P} = \varkappa\mathfrak{E}\,, \quad \mathfrak{M} = \chi\mathfrak{H}\,, \tag{76a,b}$$

a podle (74), (75) tedy

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}\,, \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}\,. \tag{77a,b}$$

V elektricky vodivém prostředí pak platí Ohmův zákon

$$\mathfrak{j} = \sigma\mathfrak{E}\,. \tag{78}$$

Konstanta $\varkappa$, popř. χ je elektrická, popř. magnetická susceptibilita, ε dielektrická konstanta, μ permeabilita a σ vodivost látkového prostředí.

Maxwell, jak známo, odvodil rovnice (68*), (69*), (70*), (71*), (77a, b) a (78) přímo z experimentálně odpozorovaných zákonitostí makroskopických elektromagnetických jevů. Proto se tato Maxwellova teorie nazývá též *fenomenologická.* Z fenomenologických rovnic pole se také mohou obvyklým postupem odvodit makroskopické hustoty energie a proudu energie:

$$h^* = (8\pi)^{-1} (\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{H})\,, \quad \mathfrak{S} = (4\pi)^{-1}\, c\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}\,. \tag{79}$$

Předpokládejme, že máme nevodivé ($\sigma = 0$) a nenabité ($\varrho^* \equiv 0$) prostředí, v němž se šíří ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{N}$ *rychlostí* W_0 rovinná elektromagnetická vlna. Píšeme-li

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin F\,, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \sin F\,, \tag{80}$$

$$F = 2\pi\nu(t - W_0^{-1}\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{N})\,, \tag{81}$$

dostáváme z Maxwellových fenomenologických rovnic podmínky:

$$\mathfrak{H}_0 \times \boldsymbol{N} = W_0 c^{-1} \mathfrak{D}_0\,, \quad \boldsymbol{N} \,.\, \mathfrak{D}_0 = 0\,, \tag{82a}$$

$$\mathfrak{E}_0 \times \boldsymbol{N} = -W_0 c^{-1} \mathfrak{B}_0\,, \quad \boldsymbol{N} \,.\, \mathfrak{B}_0 = 0\,. \tag{82b}$$

Z nich a ze vztahů

$$\mathfrak{D}_0 = \varepsilon\mathfrak{E}_0\,, \quad \mathfrak{H}_0 = \mu^{-1}\mathfrak{B}_0$$

plyne snadno známý Maxwellův vzorec pro rychlost W_0 a index lomu n:

$$W_0 = c/n\,, \quad n = (\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Také se snadno potvrdí, že v naší vlně je $\boldsymbol{S} = h^* W_0 \boldsymbol{N}$.

Dosud jsme se zabývali pouze rovnicemi makroskopického elektromagnetického pole v látkovém prostředí v klidu (vůči éteru). Ve srovnání s fenomenologickou teorií Maxwellovou dala zde elektronová teorie navíc to, že v zásadě umožnila (na základě různých modelů atomu) skutečně vypočítat materiálové „konstanty" ε, μ, σ (které fenomenologická teorie pokládá za dané u každé látky) i vyložit jejich závislost na frekvenci v případě časově proměnlivého pole (disperze světla).

Z Lorentzovy teorie se však podařilo odvodit také rovnice platné v systému S, klidném vůči éteru, pro makroskopické elektromagnetické pole vytvořené v látkovém prostředí, které se celé vůči éteru pohybuje prakticky konstantní rychlostí $\mathbf{v}$. To byl další významný úspěch, i když byly odvozeny jen přibližné a neúplné rovnice, které platí a lze jich použít jenom při *rychlosti* $\mathbf{v}$ *malé proti c* (takže veličiny řádu v^2/c^2 lze zanedbat) a pro *prostředí magneticky nepolarizovatelné* ($\chi = 0$).

Definice (66) středních hodnot mikroskopických veličin a tedy i vzorce (67) a rovnice (68 až 71) zůstávají beze změny v platnosti bez ohledu na pohyb látkového prostředí. Podržíme-li označení $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{B}$ pro střední hodnoty mikroskopických intensit pole $\hat{\mathbf{E}}$ a $\hat{\mathbf{H}}$, zůstanou tedy beze změny i rovnice (70*) a (71*), tj. druhá série Maxwellových fenomenologických rovnic.

Pro střední hodnoty $\hat{\varrho}$ a $\widehat{(\varrho \mathbf{u})}$ však nyní vycházejí místo výrazů (72), (73) snadno pochopitelné nové výrazy

$$\hat{\varrho} = \varrho^{*\prime} - \operatorname{div} \mathfrak{P}' , \qquad (72')$$

$$\widehat{(\varrho \mathbf{u})} = \mathfrak{j}' + (\varrho^{*\prime} - \operatorname{div} \mathfrak{P}')\, \mathbf{v} + \partial' \mathfrak{P}'/\partial t , \qquad (73')$$

v nichž je čárkami vyznačeno, že příslušné veličiny se vztahují k pohybujícímu se látkovému prostředí. Hustota *vodivého* proudu $\mathfrak{j}'$ popisuje transport volného náboje vůči látkovému prostředí. Člen $\varrho^{*\prime}\mathbf{v}$ se nazývá hustota *konvekčního* proudu *volného* náboje a popisuje transport volného náboje vůči éteru, způsobený pohybem samotného nabitého látkového prostředí. Podobně $(-\operatorname{div} \mathfrak{P}')\, \mathbf{v}$ je hustota analogického *konvekčního* proudu *vázaného* (polarizačního) náboje. Konečně člen $\partial' \mathfrak{P}'/\partial t$, v němž symbol $\partial'/\partial t$ značí parciální derivaci podle t v místě pevném vůči prostředí, představuje hustotu polarizačního proudu v látkovém prostředí. Podrobné matematické odvození hořejších výrazů pro střední hodnoty mikroskopických veličin $\hat{\varrho}$ a $\widehat{\varrho \mathbf{u}}$ nalezne čtenář např. v učebnici [10].

Užijeme-li vztahů

$$\partial' \mathfrak{P}'/\partial t = \partial \mathfrak{P}'/\partial t + (\mathbf{v} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathfrak{P}'$$

a

$$(\mathbf{v} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathfrak{P}' - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathfrak{P}' = \operatorname{rot} (\mathfrak{P}' \times \mathbf{v})$$

(předpokládáme $\mathbf{v}$ = konst) můžeme vzorec (73') upravit takto:

$$\widehat{(\varrho \mathbf{u})} = \mathfrak{j}' + \varrho^{*\prime}\mathbf{v} + \partial \mathfrak{P}'/\partial t + \operatorname{rot} (\mathfrak{P}' \times \mathbf{v}) . \qquad (73'a)$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (68), vidíme, že je nyní vhodné definovat veličiny $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{H}$ takto:

$$\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}' , \qquad (74')$$

$$\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{B} + 4\pi c^{-1} \mathbf{v} \times \mathfrak{P}' ; \qquad (75')$$

použije-li se jich, lze rovnice (68), (69) zapsat opět ve tvaru (68*), (69*), jestliže nově definujeme i veličiny $\mathfrak{j}$ a ϱ^*:

$$\mathfrak{j} \equiv \mathfrak{j}' + \varrho^{*\prime}\mathbf{v} , \qquad (83a)$$

$$\varrho^* \equiv \varrho^{*\prime} . \qquad (83b)$$

Zbývá nám ještě revidovat vztah (76a) a Ohmův zákon (78). Veličina $\mathbf{E}$ má význam *síly na jednotkový náboj v klidu*. Je-li ten náboj v pohybu rychlostí prostředí $\mathbf{v}$, pak ovšem síla na něj působící je $\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ a její střední hodnota je $\mathfrak{E} \times c^{-1}\mathbf{v} \times \times \mathfrak{B}$. Na místo vzorců (76a) a (78) nastupují tedy v prostředí, které je v pohybu, vzorce

$$\mathfrak{P}' = \varkappa(\mathfrak{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{B}) , \qquad (76'a)$$

$$\mathfrak{j}' = \sigma(\mathfrak{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{B}) . \qquad (78')$$

Se všemi těmito výrazy a rovnicemi se znovu setkáme i v relativistické teorii makroskopického elektromagnetického pole v kap. VIII. Tam také uvidíme, jak se liší od vzorců a rovnic úplných a přesných i jaký je jejich pravý fyzikální význam a původ.

Nyní si z nich ještě odvodíme jeden, pro teorii relativity zvláště důležitý důsledek, týkající se tzv. *strhování světla* pohybujícím se látkovým prostředím. Předpokládejme opět, že uvažované látkové prostředí, pohybující se vůči éteru rychlostí $\mathbf{v}$, je nevodivé ($\sigma = 0$) a nenabité ($\varrho^{*\prime} = 0$), takže v rovnicích (68*), (69*) je opět $\mathfrak{j} = 0$, $\varrho^* = 0$. Prostorem vyplněným tímto prostředím nechť se šíří rovinná elektromagnetická vlna. Její vlnoplochy jsou kolmé k jednotkovému vektoru $\mathbf{N}$ a postupují zatím neznámou fázovou rychlostí W. Veličiny $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{B}$ opět vyjádříme vztahy (80), (81) s W místo W_0. Vektory $\mathfrak{E}_0$ a $\mathfrak{B}_0$ splňují opět podmínky tvaru (82a, b). Poněvadž pro $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ platí nyní nové definice (74'), (75') a pro $\mathfrak{P}'$ nové vyjádření (76'a), jsou ovšem také staré vztahy $\mathfrak{D}_0 = \varepsilon \mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0 = \mu^{-1}\mathfrak{B}_0$ nahrazeny novými, poněkud složitějšími:

$$\mathfrak{D}_0 = \varepsilon \mathfrak{E}_0 + (\varepsilon - 1)\, c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{B}_0 ,$$

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 + (\varepsilon - 1)\, c^{-1}\mathbf{v} \times \mathfrak{E}_0 .$$

V poslední rovnici jsme na pravé straně zanedbali malé veličiny řádu v^2/c^2. K dalšímu použití si oba vztahy ještě upravíme. Vektory $\mathfrak{D}_0$ a $\mathfrak{B}_0$ splňují jednoduché podmínky $\boldsymbol{N} . \mathfrak{D}_0 = \boldsymbol{N} . \mathfrak{B}_0 = 0$. Proto je výhodnější vyjádřit $\mathfrak{E}_0$ a $\mathfrak{H}_0$ pomocí $\mathfrak{D}_0$ a $\mathfrak{B}_0$. S přesností do veličin řádu v/c platí

$$\mathfrak{E}_0 = \varepsilon^{-1}\mathfrak{D}_0 - (\varepsilon - 1)(\varepsilon c)^{-1} \boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}_0 , \tag{84a}$$

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 + (\varepsilon - 1)(\varepsilon c)^{-1} \boldsymbol{v} \times \mathfrak{D}_0 . \tag{84b}$$

Po dosazení za $\mathfrak{H}_0$ a $\mathfrak{E}_0$ do podmínek (82a, b) a úpravě trojného vektorového součinu

$$\boldsymbol{N} \times (\boldsymbol{v} \times \mathfrak{D}_0) = (\boldsymbol{N} . \mathfrak{D}_0)\, \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{N} . \boldsymbol{v})\, \mathfrak{D}_0 = -(\boldsymbol{N} . \boldsymbol{v})\, \mathfrak{D}_0$$

(a podobného s $\mathfrak{B}_0$) dostaneme vztahy

$$\mathfrak{B}_0 \times \boldsymbol{N} = \alpha \mathfrak{D}_0 , \tag{85a}$$

$$\mathfrak{D}_0 \times \boldsymbol{N} = -\varepsilon\alpha \mathfrak{B}_0 , \tag{85b}$$

v nichž

$$\alpha = (\varepsilon c)^{-1} [\varepsilon W - (\varepsilon - 1)\, \boldsymbol{N} . \boldsymbol{v}] .$$

Dosazení $\mathfrak{D}_0$ z (85a) do (85b) a stejná úprava trojného součinu jako nahoře vede k podmínce

$$(\alpha^2 \varepsilon - 1)\, \mathfrak{B}_0 = 0 ,$$

čili

$$\alpha^2 \varepsilon = 1 .$$

Rychlost W pak odtud vyplývá v podobě

$$W \doteq W_0 + \eta \boldsymbol{N} . \boldsymbol{v} , \tag{86}$$

přičemž $W_0 = c/n$, $n = \sqrt{\varepsilon}$, $\eta = 1 - n^{-2}$. Je to vzorec přibližný, platný jen při $v \ll c$ a do veličin řádu v/c. Lze jej vyložit tak, že světlo je v systému S poněkud unášeno (částečně strhováno) pohybujícím se prostředím (viz obr. 4). Kromě výrazu (86) pro fázovou rychlost W můžeme z obrázku snadno vyčíst i výraz pro paprskovou rychlost $\boldsymbol{V}$ a směr paprsku $\boldsymbol{e}$:

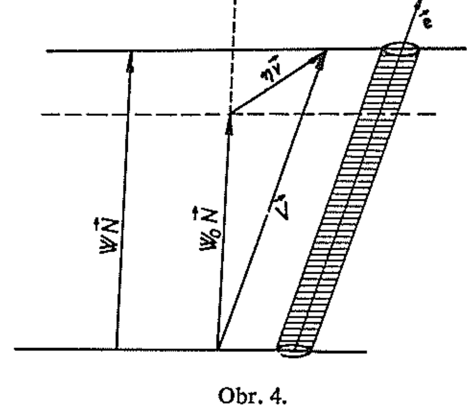
$$\boldsymbol{V} = W_0 \boldsymbol{N} + \eta \boldsymbol{v} , \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{V}/V . \tag{87}$$

Vektory $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{V}$ udávají vskutku směr a rychlost, jimiž vůči systému S postupuje energie naší elektormagnetické vlny, neboť platí vztah $\mathfrak{S} = h^* \boldsymbol{V}$ (viz Ú 12). Směr $\boldsymbol{e}$ světelného paprsku se liší od směru $\boldsymbol{N}$ normály k vlnoploše. Tak je tomu vždycky, když je šíření

světla v daném systému neizotropní. Úhel obou směrů $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{e}$ je však veličina malá prvního řádu ($\approx v/c$) a proto jeho kosinus $\boldsymbol{N} . \boldsymbol{e} \doteq \boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{N}^2 = 1$. Velikosti obou rychlostí, paprskové a fázové, jsou v mezích přesnosti našich vzorců stejné:

$$V = \boldsymbol{V} . \boldsymbol{e} \doteq \boldsymbol{V} . \boldsymbol{N} = W_0 + \eta \boldsymbol{v} . \boldsymbol{N} = W .$$

Vzorec pro „strhovací koeficient" $\eta = 1 - n^{-2}$ odvodil (jiným způsobem) již Fresnel. Se vzorcem vyjadřujícím „strhování světla" pohybem prostředí se setkáme i v relativistické teorii. Tam také uvidíme, jak se Fresnelův přibližný vzorec liší od přesného vzorce Einsteinova i jaký je jeho skutečný fyzikální původ a význam. Fresnelův vzorec nám bude užitečný v následující kapitole při rozboru některých experimentů a výkladu jejich výsledků.



Obr. 4.

ÚLOHY

1. Vypočtěte intenzity pole (22a, b) z potenciálů (21a, b).

2. Odvoďte intenzity pole (26a, b) z potenciálů (25a, b). Ukažte také, že potenciály (25a, b) splňují Lorentzovu podmínku (7).

3. Frekvenci ryze periodických kmitů lze počítat podle vzorce $\nu = (2\pi)^{-1} . \partial F/\partial t$, kde F je fáze. Vypočtěte podle tohoto vzorce frekvence vln (28a, b) a (30a, b) v pevném místě $\boldsymbol{x}$.

4. Odvoďte ze vzorců (30a, b) vzorce (33a, b) za předpokladů uvedených před posledními vzorci.

5. Vypočtěte vnější síly, jimiž na sebe působí dva elektrony, za předpokladu, že jejich zrychlení jsou velmi malá, takže pole vzbuzená těmi elektrony lze vyjádřit vzorci (26a, b). Za předpokladu, že také rychlosti jsou malé (proti c), udejte ty síly s přesností do členů u^2/c^2.

6. Budiž $u_1 = \beta c$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ a $\varrho(\boldsymbol{x}, 0)$ konstantní na elipsoidech $x_1^2(1 - \beta^2)^{-1} + x_2^2 + x_3^2 = b^2$, kde b je libovolné reálné číslo. Ukažte, že ze vzorce (39a) plyne, že na těchto elipsoidech je konstantní také $\varphi(\boldsymbol{x}, 0)$.

7. Bucherer a Langevin zavedli hypotézu, že deformace elektronu na zploštělý elipsoid probíhá se zachováním *objemu elektronu*. Předpokládejte, jako v předcházející úloze, $\boldsymbol{u} \equiv (\beta c, 0, 0)$ a střed elektronu v čase $t = 0$ v počátku souřadnic. Vyjádřete $\varrho(\boldsymbol{x}, 0)$ pomocí $\varrho_0(\boldsymbol{x}, 0)$ a vypočtěte $\mathscr{E}^{(\mathrm{vl})}$ a $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{vl})}$ takového *objemově nestlačitelného* elektronu.

8. Budiž A_j libovolný *vektor* a $B_{kl,,,} = A_j Q_{jkl,,,}$ *tenzor*. Pak také veličiny $Q_{jkl,,,}$ tvoří *tenzor*. Dokažte toto pravidlo!

9. Zapište také známý integrální vztah Stokesův ve tvaru zřejmě invariantním vůči transformacím souřadnic (49).

10. Ukažte, že si při transformaci (64) zachová *první* série Maxwellových-Lorentzových rovnic původní tvar, použijeme-li v systému S' „intenzit pole"

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} - c^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}\,,$$

a položíme-li $\varrho' = \varrho$, $\boldsymbol{J}' = \varrho'\boldsymbol{u}'$.

11. Ukažte, že si při transformaci (64) zachová *druhá* série Maxwellových-Lorentzových rovnic původní tvar, použijeme-li v systému S' „intenzit pole"

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}\,, \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}\,.$$

Udejte též potenciály $\boldsymbol{A}'$, φ', z nichž lze v systému S' odvodit veličiny $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ podle vzorců shodných s (5) a (6). Ukažte také, že si při $u \ll c$ zachová v systému S' tvar i pohybová rovnice elektronu (až na veličiny řádu u^2/c^2, tj. v aproximaci (46a)).

12. Užitím vzorců (79), vztahů (84a, b) a podmínek (85a, b) ukažte, že ve světelné vlně strhované pohybem prostředí platí vztah $\mathfrak{S} = h^*\boldsymbol{V}$, v němž $\boldsymbol{V}$ je dáno formulí (87). (Veličiny úměrné v^2 se zanedbávají.)

KAPITOLA III

POKUSY O URČENÍ POHYBU ZEMĚ VŮČI ÉTERU

Lorentzova teorie postavila experimentální fyziku před důležitý úkol: *Určit pohyb Země* zvláště pak rychlost jejího translačního pohybu, *přímo vůči éteru*. Experimentální fyzikové se tohoto zajímavého úkolu ujali s velikou horlivostí a do dnešní doby navrhli a vykonali dlouhou řadu důmyslných pokusů. Stručně se seznámíme alespoň s nejdůležitějšími z nich, k nimž patří i některé zcela nové. Při tom rozebereme jejich pozoruhodné výsledky z hlediska Lorentzovy teorie a ukážeme si, jaké významné závěry z nich vyplývají pro tuto teorii i Newtonovu mechaniku, pro teorii éteru i fyzikální pojmy prostoru a času.

1. VZTAHY MEZI KINEMATICKÝMI PARAMETRY SVĚTELNÉ VLNY V KLIDNÉM A POHYBUJÍCÍM SE SYSTÉMU

Nejprve si musíme odvodit několik důležitých vztahů, z nichž budeme vycházet při rozboru „optických" pokusů.

Mějme kartézský systém S klidný vůči éteru a systém S' určený Galileiho transformací

$$x'_j = x_j - v_j t\,, \quad v_j = \text{konst}\,, \quad t' = t\,. \tag{1}$$

Mějme dále rovinnou, lineárně polarizovanou elektromagnetickou vlnu šířící se ve vakuu a popsanou v systému S výrazy

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin F\,, \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{H}_0 \sin F\,, \tag{2}$$
$$F(\boldsymbol{x}, t) = 2\pi\nu(t - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{x})$$

pro intenzity pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ a fázi F. *Kinematickými parametry* v těchto vzorcích rozumíme vektor $\boldsymbol{N}$, frekvenci ν a fázovou rychlost c.

Zajímá nás nyní kinematický popis této světelné vlny z hlediska systému S'. Konkrétní tvar vztahu veličin $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ k veličinám $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ k tomu nepotřebujeme. Vystačíme s předpokladem (viz odst. II 4,4), že z rovnic $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 0$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ plynou rovnice $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}', t) = 0$, $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}', t) = 0$, je-li $x'_j = x_j - v_j t$, podle (1). Z toho lze přede-