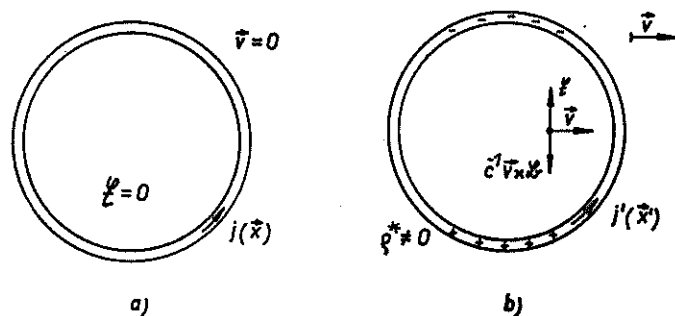


nechť protéká časově konstantní elektrický vodivý proud (viz obrázek 12). Uvažujte dva případy: a) proudovodič je v klidu vůči éteru, b) je v rovnoměrném translačním pohybu rychlostí $v \ll c$. Udejte v obou případech řešení rovnic makroskopického pole z odst. II 5 a ukažte, že síla působící na zkusný náboj e , který je vůči proudovodiči v klidu (v libovolném místě), je nulová! V případě b) vyjádřete veličinu $\mathcal{E}$ pomocí $\mathcal{B}$ a v a hustotu náboje ρ^* pomocí j' a v .



Obr. 12.

23. Představte si, že by v soustavě dvou elektricky nabitých tělísek podle obr. 8b (schematické uspořádání Troutonova-Nobleova pokusu) byla náhle odstraněna pevná izolační příčka. Tělíska by se pak začala pohybovat pod účinkem necentrálních Lorentzových sil $\pm f^{(E)}$ daných vzorcem (32a). Ukažte z rovnic (38a), (36), (35) a (32), že zrychlení a by přesto mělo směr centrální, tj. $a \parallel r$. Omezte se na počáteční okamžik, kdy náboje mají ještě rychlost v . Uvažte, co z toho plyne pro výklad výsledku Troutonova-Nobleova pokusu.

KAPITOLA IV

PROSTOR A ČAS VE SPECIÁLNÍ TEORII RELATIVITY

V závěru předchozí kapitoly jsme konstatovali, že Einsteinův princip relativity si vyžádá radikální změnu starých představ o vlastnostech samotného prostoru a času. Naším úkolem nyní bude podrobně se seznámit s těmito významnými důsledky Einsteinova principu.

1. INERCIÁLNÍ SYSTÉMY A LORENTZOVY TRANSFORMACE

1.1. KONSTRUKCE INERCIÁLNÍHO SYSTÉMU A ZÁKLADNÍ POSTULÁTY TEORIE RELATIVITY

V předchozí kapitole jsme heuristickým, induktivním postupem, opírajícím se o rozbor výsledků konkrétních experimentů a pozorování, dospěli k řadě poznatků, které doplnily původní formulaci Lorentzovy teorie. V souhrnu vyvrcholily zjištěním invariance základních rovnic takto doplněné teorie vůči Lorentzovým transformacím prostorových souřadnic i času a vyslovením nového, Einsteinova (speciálního) principu relativity, který říká, že všechny inerciální systémy jsou pro formulaci všech fyzikálních zákonů zcela rovnocenné. Jakmile tento princip přijmeme, nutně se stává základním principem veškeré fyzikální teorie a je zřejmé, že ji musíme od prvních pojmů budovat nezávisle na starých představách Lorentzovy teorie a Newtonovy mechaniky. To neznamená, že se zřikáme všech jejich výsledků, fyzikálních zákonů, vztahů, rovnic atd. Ty zůstanou většinou zachovány, ale jejich výklad a popř. způsob odvození se zásadně změní.

Prvními potřebnými pojmy nové teorie jsou systémy souřadnic, zejména inerciální systémy, o jejichž rovnocennosti se mluví již v principu relativity. Při definici (Lorentzových) inerciálních systémů v odst. III 6 jsme vycházeli z jistého systému S , o němž jsme předpokládali, že je „v klidu vůči éteru“. Jsou-li však všechny inerciální systémy fyzikálně rovnocenné, musí být možno oprostit i samotnou jejich definici od starých výrazů a představ. *Inerciální systémy se musí od základu zbavit takových nepodstatných, experimentálně neověřitelných přívlastků, jako „klidný“ nebo „pohybující se“ vůči éteru. Nová definice jim však musí zachovat všechny podstatné*

vlastnosti, aby v nich mohly platit Lorentzovy pohybové rovnice a Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, tak jako v Lorentzových systémech (podle staré definice).

Všem uvedeným požadavkům na inerciální systém vyhovuje tato konstrukce: Nejprve si zvolíme nějaké referenční těleso (soustavu) a vytyčíme s ním pevně spojený ortogonální trojhran os 1, 2, 3 našeho systému. S podmínkou, která omezuje výběr „vhodného“ referenčního tělesa a umožňuje dodatečně vyloučit těleso nevhodně vybrané, se seznámíme za chvíli. Zatím budeme předpokládat, že jsme volili správně. Nejprve totiž musíme stanovit způsob měření souřadnic x_j a času t .

Souřadnice x_j budeme měřit pevnými délkovými měřítky, klidnými vůči zvolenému trojhranu os. Budeme předpokládat, že máme ideální měřítka, která byla vyrobena přesně stejným způsobem a mají ve všech pevných místech a polohách vůči inerciálnímu systému tutéž délku. Budeme také předpokládat, že se ve všech uvažovaných systémech užívá stejných měřitek.

Čas t vždy odečítáme na místních hodinách, které si rozestavíme na všech potřebných pevných místech našeho systému. Opět budeme předpokládat, že máme ideální hodiny, které byly vyrobeny všechny přesně stejným způsobem a v pevných místech inerciálního systému jdou všechny „stejně rychle“ (mají stejný „chod“). Abychom mohli na kterémkoliv z nich odečítat čas t , musíme je ovšem synchronizovat a k tomu potřebujeme další fyzikální zákon nebo princip.

Můžeme např. předpokládat, že v našem systému platí (nebo postulovat, že mají platit) Maxwellovy rovnice ve stejném tvaru, v němž v Lorentzově teorii platily v systému „klidném vůči éteru“. Pak se můžeme opírat o to, že světlo se v našem systému musí šířit všemi směry stejnou rychlostí c , a používat k synchronizaci hodin světelných signálů např. tímto způsobem: Od určitých místních hodin, např. hodin $H_{(O)}$ postavených v počátku O našeho systému ($x_j(O) = 0$), vyšleme všemi směry světelný signál, právě když ukazují čas (údaj) $t = t_{(O)} = 0$. Hodiny $H_{(A)}$, postavené v pevném místě ve vzdálenosti r_{OA} , musí pak být v okamžiku příchodu signálu nastaveny na čas $t = t_{(A)} = c^{-1}r_{OA}$.

A nyní můžeme udat podmínku nutnou k tomu, abychom takto definovaný systém souřadnic x_j a času t mohli prohlásit za inerciální systém: synchronizace hodin musí být nezávislá na volbě hodin vysílajících signál. Jestliže tedy v pozdějším okamžiku $t = t_{(B)} \geq c^{-1}r_{OB}$ vyšleme nový signál od libovolných hodin $H_{(B)}$ (synchronizovaných prvním signálem s hodinami $H_{(O)}$), musí ten signál přijít k libovolným hodinám $H_{(P)}$ už ve správném čase $t = t_{(P)} = t_{(B)} + c^{-1}r_{BP}$. Dopadnou-li takovéto zkoušky synchronizace vesměs dobře, můžeme právem věřit a tvrdit, že „chod“ všech místních hodin v systému S je stejný a že se v něm světelné signály vskutku šíří všemi směry stejnou rychlostí c .

Empirická fakta rozebraná v předchozí kapitole ukazují, že takovéto systémy existují a že je lze prakticky sestavit. Na druhé straně Sagnacův pokus (Ú III 21) ukazuje, že existují i referenční tělesa, s nimiž osový trojhran takového systému spojit nelze.

Poznamenejme, že můžeme synchronizovat hodiny našeho systému užitím světelných signálů, i když neznáme číselnou hodnotu jejich rychlosti c . Stačí např. postavit do stejné vzdálenosti od daných dvou hodin systému S pozorovatele, který přijímá optické nebo radiotelegrafické časové signály vysílané od obojích hodin. Jestliže již známe číselnou hodnotu rychlosti světla, je zase naopak možno měřit souřadnice x_j hmotných objektů v našem inerciálním systému i pomocí hodin, metodou radiolokační. Na radiolokační stanici, v místě pevném vůči trojhranu os (např. v počátku O) potřebujeme kromě hodin a vysílače i přijímací zařízení, které umožňuje určit i směr, z něhož se vrátila „ozvěna signálu“. Vrátil-li se signál vyslaný v okamžiku t za dobu $2\Delta t$, leží místo odrazu signálu ve vzdálenosti $R = c\Delta t$ a odraz nastal v okamžiku $t + \Delta t$. Známe-li ještě i směr, z něhož se vrátila ozvěna signálu, můžeme určit souřadnice $x_j(M)$ hmotného objektu M v čase $t + \Delta t$ a při trvalém chodu stanice pak sledovat přímo jeho pohyb vůči radiolokačnímu systému S . popř. zjišťovat, že je v klidu. Máme-li několik takových klidných objektů $M_1, M_2, \dots$, které jsou schopné odrážet signály (mohou to být automatické retranslační stanice), pak můžeme v zásadě prověřovat inerciálnost systému S srovnáváním dob, jež signály vyslané stanicí v O potřebují na okružní cesty OM_1M_2O a OM_2M_1O . V inerciálním systému budou stejné. Podobné zkoušky inerciálnosti systému jsou ovšem možné i při obyčejném měření vzdáleností (přikládáním délkových měřitek a metodou triangulační). Vzdálenosti a úhly musí být v souladu s euklidovskou geometrií. Zjištěné časové difference (okružní) nebo odchylky od euklidovské geometrie mohou např. prozradit, že vytyčený trojhran os, popř. zvolené referenční těleso, se ve skutečnosti vůči inerciálnímu systému otáčí. (Viz odst. 5,4 a Ú III 21.)

Vraťme se ještě k použitému specifickému zákonu o šíření světla v inerciálním systému. Původně byl zákon o nezávislosti rychlosti světla na směru postupu (i na pohybu zdroje) vyvozen jen pro systém „klidný vůči éteru“. Nyní má platit ve všech inerciálních systémech, tj. i v těch, které jsou vůči systému S , v němž skutečně platí, v rovnoměrném translačním pohybu. Nepřekvapí proto, že z principu relativity (kterému se říká též *první princip* nebo postulát teorie relativity) a ze zákona o konstantní rychlosti světla (kterému se říká též *druhý princip* nebo postulát teorie relativity) je možno znovu odvodit Lorentzovu transformaci. Na rozdíl od odvození podaného na konci předchozí kapitoly nebudou přitom nutné žádné výslovné předpoklady o chování hodin a měřitek při jejich pohybu.

K „povýšení“ zákona o konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních systémech na druhý základní princip teorie relativity bude vhodné dodat ještě několik poznámek. Tento zákon je zřejmě možno pokládat za speciální důsledek Maxwellových rovnic a Einsteinova principu relativity. Na druhé straně však princip relativity lze v zásadě (logicky) sloučit i s jinými teoriemi šíření světla, než je maxwellovská. A tak, i když dnešní fyzika nemá jinou konkrétní teorii šíření světla než právě teorii Maxwellovu, je zásadně vhodné postulovat zmíněný empiricky osvědčený zákon o šíření světla jako samostatný princip, bez výslovného odkazu na Maxwellovy rovnice. Je to i prakticky výhodné, protože práce s ním (např. při odvozování Lorentzovy trans-

formace) je jednodušší než přímo s Maxwellovými rovnicemi, jak to činili původně (před Einsteinem) Lorentz a Poincaré.

Pro Lorentze a Poincaréa byly ovšem fyzikálním základem Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, kdežto Lorentzova transformace i „elektromagnetický princip relativity“ byly jen důsledkem plynoucím z vlastností těch rovnic, podobně jako v Newtonově mechanice byl (Galileiho) princip relativity původně jen důsledkem vlastností pohybových rovnic a zákonů sil. Teprve v rukou relativistů (Lange, Mach) stal se princip relativity základním postulátem, jemuž měly vyhovovat konkrétní zákony mechaniky. Einsteinovo stanovisko je v tom ohledu podobné Machovu. Fyzikální zákony mají být takové, aby vyhovovaly oběma základním postulátům: principu relativity a principu konstantní rychlosti světla. V kapitole VI. a dalších uvidíme, že je vskutku možné relativistické fyzikální zákony takto vyjádřit (a jak je to možné). Uvidíme také, že základní rovnice doplněné Lorentzovy teorie představují právě jednu takovou formální možnost.

Přijetí obou základních principů teorie relativity na dané úrovni rozvoje fyzikální teorie nás ještě nezavazuje, že budeme dnešní formu teorie relativity a dnešní relativistickou teorii prostoru a času pokládat za definitivní základ a navždy neměnný formální rámec každé možné budoucí fyzikální teorie. Není např. vyloučeno, že v nějaké budoucí fyzikální teorii se i samotné pojmy času a prostoru stanou pouze druhotnými, odvozenými pojmy s omezenou použitelností. (Viz odst. IX 3.)

1.2. ODVOZENÍ LORENTZOVY TRANSFORMACE

Inerciální systém popsaný a sestrojený v předchozím odstavci se ve všech podstatných vlastnostech podobá Lorentzovu absolutně klidnému systému. Podobá se však i Lorentzovým systémům sestrojeným v odst. III 6 (i v nich platí zákon konstantní rychlosti světla). V Lorentzově teorii jsme předpokládali, že systém S, „klidný vůči éteru“, je zároveň inerciálním systémem ve smyslu mechanickém. Platnost rovnic $d^2x'_j(M)/dt'^2 = 0$ v ostatních Lorentzových systémech je pak evidentním důsledkem rovnic $d^2x_j(M)/dt^2 = 0$ a lineárnosti Lorentzovy transformace. Inerciální systém podle naší nové definice lze oprávněně nazvat také „opticky izotropním“, nebo „inerciálním v elektromagnetickém smyslu“ [32]. Vzniká ovšem otázka, zdali a v jaké míře „optická izotropie“ tohoto systému určuje i jeho „obyčejnou inerciálnost“ ve smyslu mechanickém, a zda je vztah mezi dvěma takovými systémy nutně dán Lorentzovou transformací.

Je to otázka dosti zajímavá a stojí za stručnou zmínku. Zdrojem „problému“ je pozoruhodný výsledek této čistě matematické úlohy: Vyjděme od daného systému S souřadnic x_j a času t , a hledejme transformaci

$$\begin{aligned} x'_j &= f_j(x_1, x_2, x_3, t), \quad j = 1, 2, 3; \\ t' &= g(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \quad (1)$$

takovou, aby z rovnic

$$x'_j - x'_j(0) = ce'_j \cdot (t' - t'_0) \quad (2')$$

plynuly rovnice (podobného) tvaru

$$x_j - x_j(0) = ce_j \cdot (t - t_0). \quad (2)$$

Konstanty e'_j splňují rovnice $e'_j e'_j = 1$. Počáteční hodnoty $x_j(0)$ a t_0 , které určují místo a čas vyslání signálu, se ovšem transformují stejně jako x_j a t . Veličiny e_j v rovnicích (2) mají vyjít také konstantní a splňovat rovnici $e_j e_j = 1$. Pak je možno říci, že v systému S platí „zákon konstantní rychlosti světelných signálů“ v důsledku jeho platnosti v systému S'.

Tuto matematickou úlohu lze obecně rozřešit a explicitě udat obecný tvar transformace (1). Nebudeme zde uvádět ani postup řešení ani výsledné transformační vzorce (viz např. [32], Dodatek A). Pro naše závěry postačí, když budeme jen slovně charakterizovat jejich nejdůležitější vlastnosti: Transformace (1) může, ale nemusí být lineární (podle volby libovolných parametrů vystupujících ve funkcích f_j a g). Je-li zvolena nelineární, pak z rovnic

$$x'_j(M) - x'_j(M, 0) = u'_j \cdot (t' - t'_0), \quad (3')$$

při $u'_j = \text{konst}$, $u'_j u'_j \neq c^2$, neplynou rovnice (podobného) tvaru

$$x_j(M) - x_j(M, 0) = u_j \cdot (t - t_0) \quad (3)$$

s $u_j = \text{konst}$. To znamená, že „opticky izotropní“ systém S obecně nemusí být inerciální ve smyslu mechanickém.

Z toho důvodu Fok (l. c. [32], § 8) doplňuje postuláty definující opticky izotropní systém S tím, že trojhran jeho os má být vždy zvolen ještě tak, aby se v něm volné hmotné body pohybovaly podle rovnic tvaru (3), tj. s nulovým zrychlením, a teprve systém tak definovaný nazývá prostě inerciálním. Potom je už možno bez dalších předpokladů dokázat, že transformace vedoucí od jednoho inerciálního systému k druhému je nutně lineární.

Einstein a po něm většina autorů linearitu transformace (1) prostě předpokládá. Jiní, po vzoru Weylově [33] a Robbově [34] zavádějí doplňující předpoklad (místo požadavku invariance rovnic (3)), že konečným hodnotám x_j , t přísluší vždy konečné hodnoty x'_j , t' . Tím se transformace (1) také automaticky omezuje na lineární; zmíněné nelineární transformace jsou totiž vesměs singulární a jistým konečným hodnotám x_j , t nepřirazují konečné hodnoty x'_j , t' . U inerciálních systémů, které lze prakticky sestavit, je uvedený předpoklad vždycky splněn a z tohoto hlediska je tedy jaksi „samozřejmý“. Lineárnost transformací mezi inerciálními systémy lze zdůvodnit také z Minkowského geometrické interpretace prostoru i času (viz kap. V).

Po vyloučení singulárních transformací již nic teoreticky nepřekáží, aby Newtonův první pohybový zákon platil ve všech opticky izotropních systémech. Jeho

platnost (právě v těchto systémech) se vskutku dodatečně potvrzuje zkušeností; stejně jako platnost celé řady dalších obecných fyzikálních zákonů. Rozdíl proti Fokovu pojetí je v tom, že nyní rovnice (3) pro pohyb volných hmotných bodů platí v uvažovaných systémech nikoliv proto, že se jejich platnost výslovně požadovala už při definici a výběru systémů, nýbrž proto, že všechny fyzikální zákony vzájemně vnitřně souvisí. V dalším se přidržíme obvyklého nejjednoduššího postupu, tj. budeme od počátku předpokládat, že transformace spojující dva inerciální systémy S a S' je lineární

Přistupme nyní k bližšímu určení této transformace z obou základních postulátů Einsteinovy teorie relativity. Nejobecnější lineární vztah mezi proměnnými x'_j , t' a x_k , t zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_j &= \alpha_{jk}x_k + \alpha_{j0}t + \alpha_j, \\t' &= \alpha_{0k}x_k + \alpha_{00}t + \alpha_0.\end{aligned}\quad (4)$$

Nejdůležitější nové vlastnosti, jimiž se hledaná transformace podstatně liší od transformace Galileiho, lze však ukázat již na jednoduchém speciálním případě daném těmito předpoklady (srov. s odst. III 6):

1. osy 1 a 1' splývají,
2. osy 2 a 2' (a tedy i 3, 3') jsou rovnoběžné a téhož smyslu,
3. v okamžiku, kdy se oba počátky O a O' setkají, ukazují hodiny $H_{(O)}$ i $H_{(O')}$ na nulu.

Rovnicím (4) je nutno rozumět takto: Souřadnice x_j a čas t (údaj místních hodin, klidných vůči systému S) určují místo a okamžik nějaké „bodové události“ z hlediska pozorovatele v systému S. Souřadnice x'_j a čas t' (údaj místních hodin, klidných vůči systému S') určují místo a okamžik téže „bodové události“ z hlediska pozorovatele v systému S'. Podle rovnic (4) lze pak přepočítat výsledky měření pozorovatele v S na výsledky měření pozorovatele v S'.

Vezmeme-li za „bodovou událost“ setkání počátků O a O' obou systémů, již podle předpokladu 3. přísluší v systému S data $x_j = 0$, $t = 0$ a v systému S' data $x'_j = 0$, $t' = 0$, vidíme, že aditivní konstanty v rovnicích (4) musí vymizet:

$$\alpha_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \alpha_0 = 0.$$

Z předpokladu 1. vyplývá, že při $x_2 = x_3 = 0$ musí být rovněž $x'_2 = x'_3 = 0$ (při libovolném x_1 i t). Je tedy

$$\alpha_{21} = \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{20} = \alpha_{30} = 0,$$

a rovnice (4) pro x'_2 a x'_3 se zjednodušují na tvar

$$\begin{aligned}x'_2 &= \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\x'_3 &= \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3.\end{aligned}$$

Z předpokladu 2. dále plyne, je-li $x_3 = 0$, musí být $x'_3 = 0$ (při libovolném x_2) a podobně je-li $x_2 = 0$, musí být $x'_2 = 0$ (při libovolném x_3). Je tedy

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = 0,$$

a výrazy pro x'_2 a x'_3 se dále zjednodušují:

$$\begin{aligned}x'_2 &= \alpha_{22}x_2, \\x'_3 &= \alpha_{33}x_3.\end{aligned}$$

Samozřejmá rovnocennost všech směrů kolmých ke společné ose $l \equiv l'$ (popř. všech rovin proložených tou osou) však vyžaduje

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha > 0.$$

Z principu relativity, tj. rovnocennosti obou systémů, pak plyne nakonec $\alpha = 1$, neboť kdyby bylo $\alpha \neq 1$, mohla by se např. „dávát přednost“ zásadně vždy tomu systému, v němž jsou vzdálenosti od společné osy menší. Platí tedy v našem případě transformační vzorce

$$x'_2 = x_2, \quad (5a)$$

$$x'_3 = x_3. \quad (5b)$$

Zbývá určit koeficienty ve vzorcích (4) pro x'_1 a t' . Nejprve opět z rovnocennosti všech směrů kolmých ke společné ose plyne, že ani x'_1 ani t' nemůže záviset na x_2 a x_3 , tj. musí být

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{02} = \alpha_{03} = 0.$$

Rovnice (4) pro x'_1 a t' tedy mají tvar

$$x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{10}t, \quad (6a)$$

$$t' = \alpha_{01}x_1 + \alpha_{00}t. \quad (6b)$$

Konstanty α_{11} a α_{00} jsou určitě nenulové, neboť x'_1 musí záviset na x_1 , a t' na t . Zavedeme-li nové konstanty γ a v vztahy

$$\alpha_{11} = \gamma, \quad \alpha_{10} = -\gamma v, \quad (7a)$$

můžeme vzorec (6a) zapsat ve tvaru

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad (8a)$$

z něhož je vidět, že se každý bod pevný v systému S' (např. bod O') vůči systému S pohybuje ve směru osy 1 konstantní rychlostí $v = -\alpha_{10}/\alpha_{11}$. Konstanta γ je kladná, neboť předpokládáme, že osy 1 a 1' jsou orientovány v tomtéž smyslu.

Z požadavku rovnocennosti obou systémů však vyplývá, že inverzní transformace $S' \Rightarrow S$ se v našem speciálním případě může lišit od transformace $S \Rightarrow S'$ pouze znaménkem rychlosti v , takže zároveň s (8a) platí obráceně

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'). \quad (8a')$$

Z (8a) a (8a') plyne eliminací x'_1 vzorec

$$t' = (1 - \gamma^2)(\gamma v)^{-1} x_1 + \gamma t, \quad (8b)$$

a eliminací x_1 obrácený vzorec

$$t = -(1 - \gamma^2)(\gamma v)^{-1} x'_1 + \gamma t'. \quad (8b')$$

Vidíme, že se i vzorce (8b) a (8b') liší jen znaménkem veličiny v , jak vyžaduje rovnocennost obou systémů. Rovnice (8b) ovšem musí být identická s (8b), takže máme

$$\alpha_{01} = (1 - \gamma^2)(\gamma v)^{-1}, \quad \alpha_{00} = \gamma. \quad (7b)$$

Zbývá tedy určit jen koeficient γ .

K tomu použijeme podmínky, že světelné signály se mají v obou systémech šířit toutéž rychlostí c . Stačí uvažovat signál vyslaný v čase $t = 0$ z počátku O ve směru osy 1 . Tento signál se šíří po ose 1 podle rovnice

$$x_1 = ct. \quad (9)$$

Příchod signálu do místa x_1 (v čase $t = x_1/c$) je bodová událost, již v systému S' přísluší souřadnice x'_1 podle (8a) a čas t' podle (8b). Dosadíme-li ještě za x_1 z rovnice (9), máme

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(c - v)t, \\ t' &= [(1 - \gamma^2)c(\gamma v)^{-1} + \gamma]t. \end{aligned} \quad (10)$$

Jelikož signál byl vyslán z O v čase $t = 0$, tj. právě když se oba počátky O' a O setkaly, byl z hlediska systému S' vyslán z počátku O' v čase $t' = 0$. Poněvadž se šíří i po ose $1'$ rychlostí c , platí rovnice

$$x'_1 = ct' \quad (9')$$

obdobná rovnici (9). Dosadíme-li do ní z rovnic (10), dostáváme po zkrácení t tuto podmínku pro γ :

$$\gamma(c - v) = c[(1 - \gamma^2)c(\gamma v)^{-1} + \gamma].$$

Z ní plyne pro koeficient γ vyjádření

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = v/c. \quad (11)$$

Koeficient při x_1 v rovnici (8b) lze nyní upravit takto: $(1 - \gamma^2)(\gamma v)^{-1} = -\gamma v c^{-2}$.

Transformační rovnice (5a,b) a (8a,b) lze tedy souhrnně napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3; \\ t' &= \gamma(t - vc^{-2}x_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Inverzní transformaci dávají v souhrnu rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + vt'), \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3; \\ t &= \gamma(t' + vc^{-2}x'_1). \end{aligned} \quad (12')$$

Transformace (12) a (12') jsou identické s Lorentzovými transformacemi odvozenými v odst. III 6. Tehdy jsme nepředpokládali ani neočekávali rovnocennost systému S' se systémem S , takže podobnost tvaru inverzní transformace (III 45') s přímou transformací (III 45) byla jistým „překvapením“. Při novém odvození byla rovnocennost obou systémů jedním z nejdůležitějších požadavků. Poznamenejme ještě, že podaný postup odvození Lorentzovy transformace je možno různými způsoby obměňovat. (Viz učebnice uvedené v seznamu literatury.)

2. VLASTNOSTI SPECIÁLNÍ LORENTZOVY TRANSFORMACE

2.1. DŮLEŽITÁ INVARIANTNÍ ROVNICE A INVARIANT LORENTZOVY TRANSFORMACE

Dříve než přistoupíme k rozboru hlavních fyzikálních důsledků Lorentzovy transformace (12), bude vhodné obeznámit se s některými jejími formálními vlastnostmi.

V předchozím odvození transformace (12) jsme pominuli výslovné ověření, že se světlo v novém systému S' šíří *všemi směry* stejnou rychlostí c , šíří-li se tímto způsobem v původním systému S . To nyní doplníme. Dokážeme to dvěma jednoduchými způsoby. Při každém z nich poznáme nové, zajímavé a pro další úvahy užitečné vlastnosti transformací (12).

Při prvním způsobu se postupuje takto: Z místa o souřadnicích $x_j(P)$ v čase t_P vyšleme světelný signál na všechny strany. Šíří-li se v systému S všemi směry rychlostí c , dospěje v čase $t > t_P$ do míst ležících na kulové ploše poloměru $c(t - t_P)$ se středem v bodě $x_j(P)$. Souřadnice x_j bodů dosažených signálem v čase t splňují tedy rovnici

$$(x_j - x_j(P))(x_j - x_j(P)) - c^2(t - t_P)^2 = 0. \quad (13)$$

Vyslání signálu z místa $x_j(P)$ v čase t_P je bodová událost, již v systému S' přísluší souřadnice $x'_j(P)$ a čas t'_P . Mezi $x_j(P)$, t_P a $x'_j(P)$, t'_P platí vztahy (12) resp. (12').

Příchod signálu do místa x_j v čase t je rovněž bodová událost a v S' jí přísluší souřadnice x'_j a čas t' podle (12) popř. (12'). Platí tedy vztahy

$$\begin{aligned}x'_1 - x'_1(P) &= \gamma[(x_1 - x_1(P)) - v(t - t_P)], \\x'_2 - x'_2(P) &= x_2 - x_2(P), \\x'_3 - x'_3(P) &= x_3 - x_3(P), \\t' - t'_P &= \gamma[(t - t_P) - vc^{-2}(x_1 - x_1(P))].\end{aligned}\quad (14)$$

Inverzní vztahy (14'), které zde nevypisujeme, se liší od (14) pouze výměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a změnou znaménka při v .

Dosazením za $x_j - x_j(P)$, $t - t_P$ ze (14') do (13) a jednoduchou úpravou s použitím (11) dostaneme rovnici

$$(x'_j - x'_j(P))(x'_j - x'_j(P)) - c^2(t' - t'_P)^2 = 0. \quad (13')$$

To je rovnice přesně stejného tvaru jako původní rovnice (13); vyjadřuje, že uvažovaný světelný signál se šíří i vůči systému S' všemi směry stejnou rychlostí c (od bodu s pevnými souřadnicemi $x'_j(P)$). Bližší fyzikální rozbor a výklad tohoto matematického výsledku podáme v odst. 4,3.

Z matematického hlediska jsme právě zjistili důležitou formální vlastnost Lorentzovy transformace (12), že totiž zachovává beze změny tvar rovnice (13). Neméně významné je dále to, že při převádění rovnice (13) na (13') (tj. ze systému S do systému S') nebyl žádný faktor zkrácen. Výraz na levé straně rovnice (13') se tedy na základě vztahů (14) a (11) přesně rovná výrazu (téhož tvaru) na levé straně rovnice (13) a oba výrazy by se sobě rovnaly, i kdyby nebyly oba nulové. Můžeme proto říci, že výraz

$$s_{AB}^2 = (x_j(B) - x_j(A))(x_j(B) - x_j(A)) - c^2(t_B - t_A)^2, \quad (15)$$

utvořený ze souřadnic a časů dvou libovolných bodových událostí A , B je při Lorentzových transformacích (12) invariantní, zcela podobně jako výraz

$$r_{MN}^2 = (x_j(N) - x_j(M))(x_j(N) - x_j(M)),$$

tj. čtverec vzdálenosti současných poloh dvou bodů M , N , při transformacích Galileiho. Minkowski ukázal, že invariance výrazu (15) při Lorentzových transformacích lze využít k formálně výhodné geometrické interpretaci těchto transformací a k jednotnému geometrickému popisu prostoru i času. Minkowského geometrizace prostoro-časových vztahů měla pro rozvoj teorie relativity základní význam. Podrobně se s ní seznámíme v následující kapitole.

2.2. PODSVĚTELNĚ A NADSVĚTELNĚ RYCHLOSTI

Nyní přistupme k druhému, stejně poučnému ověřování konstantní rychlosti světla v systému S' . Mohli bychom při tom vyjít z rovnic (2), které popisují v systému S postup směřovaného světelného (elektromagnetického) signálu, např. kratinkého pulsu vyslaného světlometem nebo radarovou anténou z místa $x_j(0)$ v čase t_0 ve směru $\mathbf{e} \equiv (e_j)$. Lépe však bude vyjít z obecnějších rovnic (3). Tyto rovnice možno pokládat za popis pohybu volného hmotného bodu M v inerciálním systému S . Ale není to nutné, neboť M může být jakýkoliv jiný „objekt“, který je v čase t_0 v místě $x_j(M, 0)$ a pohybuje se konstantní rychlostí $\mathbf{u} \equiv (u_j)$. S příklady takových objektů se seznámíme v následujícím odstavci. Rovnice (2) jsou jen speciálním případem rovnic (3) pro $u_j = ce_j$.

Dosadíme-li do rovnic (3) za $x_j(M) - x_j(M, 0)$ a $t - t_0$ z transformačních vzorců obdobných (14'), po jednoduché úpravě dostaneme rovnice (3') se složkami rychlosti u'_j takto vyjádřenými:

$$\begin{aligned}u'_1 &= (u_1 - v)(1 - vu_1/c^2)^{-1}, \\u'_2 &= u_2\gamma^{-1}(1 - vu_1/c^2)^{-1}, \\u'_3 &= u_3\gamma^{-1}(1 - vu_1/c^2)^{-1}\end{aligned}\quad (16)$$

(Jiný postup odvození těchto vzorců viz v Ú 1 i v odst. 6.) Z (16) vidíme, že při konstantních u_j jsou také u'_j konstantní. Pohyb objektu M je tedy i vůči systému S' přímočarý rovnoměrný.

Utvoříme dále čtverec velikosti rychlosti u' , tj. výraz $u'^2 \equiv u'_j u'_j$. Použijeme-li výrazů (16), dostaneme po jednoduché úpravě vztah

$$u'^2 = c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{vu_1}{c^2} \right)^{-2} \right], \quad (17)$$

který při $u = c$ dává $u'^2 = c^2$, tj. $u' = c$. Pohybuje-li se tedy objekt M vůči systému S rychlostí c , pohybuje se stejně velkou rychlostí i vůči systému S' nezávisle na tom, jak velkou rychlostí $v < c$ se oba systémy S a S' pohybují vůči sobě navzájem.

Položíme-li $\mathbf{u} = c\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^2 = 1$, můžeme psát i $\mathbf{u}' = c\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}'^2 = 1$. Rovnice (16) pak dávají jednoduché vztahy mezi složkami e_j vektoru $\mathbf{e}$ v osách systému S a složkami e'_j vektoru $\mathbf{e}'$ v rovnoběžných osách systému S' . Z těchto vztahů lze snadno odvodit přesný relativistický vzorec pro aberaci světelného paprsku. (Viz Ú 2 a odst. VI 4.)

Vraťme se nyní k vzorci (17) a uvažujme také případ $u < c$ a $u > c$. Předpokládáme ovšem, že stále je $v^2 < c^2$, neboť při $v^2 > c^2$ nemá transformace (12) fyzikální význam a při $v^2 = c^2$ nemá smysl ani z hlediska čistě matematického. Ze vzorce (17) pak vyplývá, že je-li $u < c$, je $u' < c$ a je-li $u > c$, je také $u' > c$. Minimum u' při daném v nastává při $u_1 = v$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, a má ovšem hodnotu $u'_{\min} = 0$ (objekt M je v klidu vůči S'). V limitě $u \rightarrow c$ (zdola i shora) máme také $u' \rightarrow c$.

Existují však konečné rychlosti $u > c$, jimiž odpovídá $u' \rightarrow \infty$ a obráceně (viz Ú 3,4). To svědčí o zvláštní povaze „nadsvětelných“ rychlostí i „objektů“, které se takovými rychlostmi mohou pohybovat. Podrobněji si to objasníme a příklady doložíme v odstavci 3.

Celkem tedy vidíme, že tři obory rychlostí $|u| < c$, $|u| = c$ a $|u| > c$ se při Lorentzových transformacích „transformují samy v sebe“. Zjištění, že rychlost objektu M je menší než c (rovná c , větší než c) je tedy absolutní, nezávislé na volbě inerciálního systému, vzhledem k němuž tu rychlost určujeme. Tím se kinematika založená na Lorentzových transformacích podstatně liší od kinematiky založené na transformacích Galileiho.

Poznamenejme, že nejobecnější transformace vedoucí od jednoho inerciálního systému k druhému se liší od speciální Lorentzovy transformace (12) pouze přídavnými otočeními (a popř. zrcadlením) trojhranu os, nehledě k možnému posunutí počátku souřadnic x'_j i počátku měření času t' . Tyto přídavné operace nenaruší platnost uvedených vět o rovnici (13), výrazu (15) a oborech rychlostí $< c$, $= c$, $> c$. Vlastnostmi obecných Lorentzových transformací se budeme podrobně zabývat v odst. V 2.

2.3. SPECIÁLNÍ LORENTZOVA GRUPE. APROXIMACE LORENTZOVY TRANSFORMACE PŘI $v \ll c$

Galileiho transformace „odpovídající“ speciální Lorentzově transformaci (12) má tvar

$$x'_1 = x_1 - vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = t. \quad (18)$$

Transformace (12) i (18) určují stejnou vzájemnou orientaci i pohyb osových trojhranů systémů S a S' . Vztahy (18) představují limitní tvar vztahů (12) při $c \rightarrow \infty$. Obor rychlostí $u < c$ se přitom rozšiřuje na obor zahrnující všechny konečné rychlosti a vzorce (16) dostanou tvar Galileiho adičního teorému rychlostí

$$u'_1 = u_1 - v, \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3. \quad (19)$$

(Srovnej s (I 12) při $\mathbf{v} \equiv (v, 0, 0)$.)

Množina transformací (18) s libovolným reálným parametrem v tvoří speciální Galileiho grupu. Ukažme si, že také množina transformací (12) s reálným parametrem v z intervalu $(-c, c)$ tvoří spojitou, jednoparametrickou grupu, kterou její objevitel Poincaré nazval *speciální grupou Lorentzovou*. K tomu cíli nejprve složíme transformaci $S \rightarrow S'$ danou vztahy (12) s transformací $S' \rightarrow S''$ danou vztahy

$$\begin{aligned} x''_1 &= \gamma'(x'_1 - u't'), & x''_2 &= x'_2, & x''_3 &= x'_3, \\ t'' &= \gamma'(t' - u'x'_1/c^2), \end{aligned} \quad (20)$$

v nichž $\gamma' = [1 - (u'/c)^2]^{-1/2}$, $|u'| < c$, na výslednou transformaci $S \rightarrow S''$. Dosazením z (12) do (20) dostáváme pro x''_j , t'' výrazy

$$\begin{aligned} x''_1 &= \gamma\gamma'(1 + vu'/c^2)(x_1 - ut), \\ x''_2 &= x_2, \\ x''_3 &= x_3, \\ t'' &= \gamma\gamma'(1 + vu'/c^2)(t - ux_1/c^2), \end{aligned} \quad (21)$$

v nichž

$$u = (u' + v)(1 + vu'/c^2)^{-1}. \quad (22)$$

Aby bylo ověřeno, že také transformace (21) je typu (12), musíme ukázat, že $|u| < c$ a že platí vztah

$$\gamma\gamma'(1 + vu'/c^2) = \gamma_{(u)} \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}. \quad (23)$$

Důkaz je snadný. Umocníme-li rovnici (22) na druhou, můžeme jednoduchou úpravou pravé strany získat vzorec

$$u^2 = c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 + \frac{vu'}{c^2} \right)^{-2} \right], \quad (22a)$$

který je obdobný vzorci (17). Z (22a) plyne, že při $|v| < c$, $|u'| < c$ je také $|u| < c$. Vztah (22a) je dále možno upravit na tvar

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 + \frac{vu'}{c^2} \right)^{-2},$$

a umocněním na $-\frac{1}{2}$ získat vztah (23). Transformace (21) je tedy opět transformací typu (12). Stejně snadný, i když poněkud zdoluhavější, je důkaz asociativnosti skládání tří transformací typu (12); ponecháváme jej čtenáři. Poněvadž konečně jak inverzní transformace (12'), tak identická transformace $x'_j = x_j$, $t' = t$ patří k uvažované množině transformací (12) s $-c < v < c$, je dokázáno, že tyto transformace tvoří grupu. Je to spojitá, jednoparametrická a proto komutativní grupa, jak je vidět také ze symetrie výrazu (22).

Infinitezimální transformace této grupy jsou transformace (12) s nekonečně malým parametrem $v = \varepsilon$, neboť v limitě $v \rightarrow 0$ dostáváme transformaci identickou. Takové transformace lze psát ve tvaru

$$x'_1 = x_1 - \varepsilon t, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = t - \varepsilon c^{-2} x_1. \quad (24)$$

(Viz též Ú 5.)

Vidíme, že infinitezimální Lorentzova transformace (24) nemá tvar Galileiho transformace (18). Všimněme si proto skutečného poměru transformace Galileiho (18) k Lorentzově (12) poněkud podrobněji. Ve fiktivním „limitním světě“ s $c \rightarrow \infty$ platí vztahy (18) a (19) přesně a bez omezení, při libovolné hodnotě v a pro libovolné

hodnoty veličin x_j , t , u_j . Takovým světem je např. „Laplaceův svět“, který se řídí přesně zákony Newtonovy-Laplaceovy mechaniky. Ve skutečném fyzikálním světě, s konečnou hodnotou rychlosti c , představují však rovnice (18) a (19) pouze velmi speciální aproximace přesných vztahů (12) a (16) a lze jich použít jen ve zvláštních případech.

Aproximaci přesného relativistického vztahu, vhodnou v dané fyzikální situaci, je vždycky nutno pečlivě určit, stejně jako se vždy musí pečlivě vyšetřit za jakých podmínek lze použít předložené aproximační formule. Správná aproximace, správně použitá, nikdy nevede k výsledkům odporujícím základním principům a zákonům teorie relativity. Objasníme si to podrobněji na příkladech aproximací Lorentzovy transformace (12).

Použitelnost aproximace (18) vztahů (12) je zřejmě omezena podmínkou $|\beta| \ll 1$ (aby bylo možno psát $\gamma \doteq 1$ s přesností do veličin řádu β). Nahradíme-li za toho předpokladu první z rovnic (12) přibližnou rovnicí $x'_1 \doteq x_1 - vt$, předpokládáme vlastně také ještě $\beta^2|x_1| \ll |vt|$, neboť jinak bychom musili připojit i člen $\frac{1}{2}\beta^2x_1$ z rozvoje $\gamma x_1 = x_1(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots)$. Pak ale máme $|t| \gg |vc^{-2}x_1|$ a můžeme čtvrtou z rovnic (12) nahradit přibližnou rovnicí $t' = t$ a tím celou transformaci (12) transformací (18). Zdálo by se tedy, že aproximace (18) lze spolehlivě použít místo přesné transformace (12) už za podmínek $|\beta| \ll 1$, $|x_1| \ll |c^2v^{-1}t|$.

Výsledky však ukazují, že tomu tak není. Uvedme příklad. Jelikož při $|\beta| \ll 1$ je druhá z uvedených podmínek splněna i při $|x_1| \approx ct$, měly by vztahy (18) platit i při popisu postupu světelného signálu vyslaného v čase $t = 0$ z počátku O ve směru osy 1. Z rovnice $x_1 = ct$ a vztahů (18) však vychází $x'_1 = c(1 - \beta)t'$. Dostáváme tedy výsledek, který už ve veličinách 1. řádu odporuje postulátu konstantní rychlosti světla, a to znamená, že jsme překročili obor použitelnosti daných přibližných vztahů (18). Jejich použitelnost je skutečně omezena přísnější podmínkou $|x_1| \ll |ct|$ (kromě $|\beta| \ll 1$). Důvod je ten, že při $|x_1| \approx |ct|$ platí

$$|vc^{-2}x_1| \approx |\beta t|, \quad |vt| \approx |\beta x_1|,$$

takže je nedůsledné zanedbat člen vx_1/c^2 proti t ve čtvrté z rovnic (12) a přitom zachovat člen vt vedle x_1 v první rovnici. Při $|x_1| \ll |ct|$ je to správné, neboť pak je

$$|vc^{-2}x_1| \ll |\beta t|, \quad |vt| \gg |\beta x_1|.$$

Obraťme nyní otázku a ptejme se, jakými přibližnými vztahy lze nahradit přesné rovnice (12), je-li $|\beta| \ll 1$ a $|x_1| \approx ct$. Z předchozích úvah vyplývá, že nejhrubší aproximací, která zachovává v rovnicích jen největší členy, je „transformace identická“ $x'_j = x_j$, $t' = t$. To je ovšem málo užitečné řešení. Lepší aproximaci představují vztahy (24), neboť zachovávají kromě největších členů i členy β -krát menší. Zapišeme-li je ve tvaru

$$x'_1 \doteq x_1 - \beta ct, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad ct' \doteq ct - \beta x_1, \quad (24a)$$

je poměrná velikost členů na pravých stranách hned zřejmá.

Poněvadž tyto vztahy jsou obecně správnou aproximací vztahů (12) při $v \ll c$, jsou také v mezích své přesnosti v souladu s postulátem konstantní rychlosti světla i s Einsteinovým principem relativity. Vskutku, dosadíme-li do nich $x_1 = ct$, máme

$$x'_1 \doteq (1 - \beta)ct, \quad ct' \doteq (1 - \beta)ct,$$

a tedy $x'_1 = ct'$. Obrácení transformace (24) zní

$$x_1 = x'_1 + \beta ct', \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad t = t' + \beta c^{-1}x'_1, \quad (24')$$

a liší se tedy od transformace (24) podobně jako (12') od (12).

Lorentz často používal jednoduchých přibližných transformačních rovnic (24) při svých teoretických rozbořech optických jevů v pohybujících se systémech (dříve než přesných rovnic (12), které našel teprve později). Lze jich zřejmě použít jen při rozboru a výkladu vlivů prvního řádu. Při vlivech druhého řádu je nezbytná přesnější aproximace nebo přímo přesné rovnice (12), jak si v dalším ukážeme.

Srovnání (19) a (16) ukazuje, že vzorce (19) jsou vhodnou a matematicky správnou aproximací přesných vzorců (16), pouze když je $|v| \ll c$ i $|u_1| \ll c$. Nedá se jich použít při $u_1 \approx c$. (Při $u_1 = c$ vzorce (19) dávají $u'_1 = c - v$, kdežto z (16) plyne $u'_1 = c$. Viz též Ú 6.) Na pravých stranách rovnic (19) stojí složky vektorového rozdílu $u - v$, tj. rozdílu rychlostí dvou objektů M a O' vůči systému S . S tímto významem u' platí ovšem vzorce (19) i v teorii relativity bez omezení. Uvedené omezení v a u_1 je nutné pouze k tomu, abychom veličinu $u - v$ mohli pokládat za aproximaci veličiny u' ve významu rychlosti objektu M vůči systému S' . V teorii relativity je takto chápána veličina u' , tj. rychlost vůči S' , důležitějším pojmem než $u - v$. Ale nelze říci, že veličina $u - v$ není v teorii relativity vůbec potřebná. Setkáme se s ní např. v odst. 5 při popisu a výkladu Michelsonova pokusu z hlediska systému S , vůči němuž se aparát pohybuje rychlostí v a světlo postupuje rychlostí $u = ce$.

3. RELATIVNOST SOUČASNOSTI A PRINCIP KAUZALITY

3.1. RELATIVNOST SOUČASNOSTI BODOVÝCH UDÁLOSTÍ

Nejjednodušší a nejzajímavější fyzikální důsledek Lorentzovy transformace se týká pojmu současnosti dvou událostí. Mějme dvě „bodové události“ A , B , které jsou v inerciálním systému S určeny souřadnicemi a časy $x_j(A)$, t_A popř. $x_j(B)$, t_B . Podle čtvrté z rovnic (12) popř. (14) pak platí

$$t'_B - t'_A = \gamma\{t_B - t_A - vc^{-2}[x_1(B) - x_1(A)]\}. \quad (25)$$

Nechť je $t_B = t_A$, tj. události A a B nastaly, podle údajů místních hodin systému S , současně. Ze vztahu (25) pak vidíme, že pozorovateli v systému S' se tyto události „nejeví“ současně, je-li $x_1(B) \neq x_1(A)$.

Budiž např. $x_1(B) > x_1(A)$. Pak podle (25) máme $t'_B < t'_A$, tj. událost v místě ležícím ve směru pohybu systému S' nastala podle údaje souměstných hodin pevných v systému S' dříve. Z toho dále plyne, že časový sled dvou událostí A, B , které jsou v jednom inerciálním systému S současné, může být v různých systémech různý. Např. v systému S'' , který se vůči S pohybuje podobně jako S' , ale v opačném směru, platí $t''_A < t''_B$.

Všimněme si ještě několika dalších důležitých vztahů. Podle prvních tří transformačních rovnic (12) platí při $t_B = t_A$ vzorce

$$\begin{aligned}x'_1(B) - x'_1(A) &= \gamma[x_1(B) - x_1(A)], \\x'_2(B) - x'_2(A) &= x_2(B) - x_2(A), \\x'_3(B) - x'_3(A) &= x_3(B) - x_3(A).\end{aligned}\quad (26)$$

Z nich je především vidět, že difference souřadnic našich událostí A, B mají (na rozdíl od difference jejich časů) ve všech systémech S' určených transformacemi ve tvaru (12) tatáž znaménka jako v systému S . Dále z nich plyne, že vzdálenost míst, v nichž nastaly události A, B , je nejmenší právě pro pozorovatele v systému S , v němž jsou události současné, neboť při $v \neq 0$ je $\gamma > 1$. Konečně ze vztahu (25) při $t_B = t_A$ a ze vztahů (26) plyne nerovnost

$$|t'_B - t'_A| \leq |v/c^2| |x'_1(B) - x'_1(A)| < c^{-1} |x'(B) - x'(A)|, \quad (27)$$

neboť $|v| < c$ a obecně $|x'_1(B) - x'_1(A)| \leq |x'(B) - x'(A)|$.

Jsou-li tedy dvě události A, B v určitém inerciálním systému S současné, pak v žádném jiném takovém systému S' nemůže být jejich časový rozdíl větší než doba, kterou potřebuje světlo, aby dospělo z místa jedné události do místa události druhé. Lze také říci, že „signál“, který by byl vyslán z místa a v okamžiku té události, jež je v uvažovaném systému dřívejší, a měl by dospět do místa druhé události „včas“ (ne později než ta událost nastane), by musel postupovat rychleji než světlo.

Správná je i tato „obrácená“ poučka: Platí-li v nějakém inerciálním systému S' mezi souřadnicemi a dobami dvou událostí A, B nerovnost (27), lze nalézt inerciální systém S , v němž se ty události „jeví“ současnými. Lze rovněž nalézt systém S'' , v němž se události A, B objevují v obráceném časovém pořadí než v systému S' . Důkaz toho je jednoduchý a ponecháváme jej čtenáři. (Srovnej též s Ú 3.) Stejně snadno je možno dokázat, že dvě události C a D , jejichž časy a souřadnice v systému S splňují nerovnost

$$|t_D - t_C| \geq c^{-1} |x(D) - x(C)|, \quad (28)$$

mají časové pořadí stejné ve všech inerciálních systémech. (Viz Ú 7.)

3.2. PRINCIP KAUZALITY. MAXIMÁLNÍ SIGNÁLOVÁ RYCHLOST

Nyní můžeme přistoupit k podrobnějšímu fyzikálnímu zhodnocení uvedených matematických vztahů. Nejprve připomeňme, že v pojetí Lorentzovy teorie by byly události A a B jen v tom případě „skutečně současné“, kdyby se „jevily“ současnými podle výsledku měření na hodinách pevně umístěných a synchronizovaných v systému klidném vůči éteru. V ostatních Lorentzových systémech jsou podle této teorie, jak víme z předchozí kapitoly, místní hodiny „nepravdě synchronizovány“ a proto se v nich „skutečně současné“ události „jeví“ nesoučasnými a „ve skutečnosti nesoučasné“ se mohou „jevit“ současnými. Současnost dvou událostí je tedy v Lorentzově teorii, podobně jako v Newtonově mechanice, pojem absolutní. Je to vlastnost těmi událostmi samotnými již úplně určená a na ničem jiném nezávislá.

V teorii relativity je situace jiná. Podle Einsteinova principu relativity jsou všechny inerciální systémy fyzikálně zcela rovnocenné. O žádném z nich nelze tvrdit, že v něm jsou hodiny synchronizovány správněji než v druhých. Proto musíme současnost událostí zjištěnou měřením v systému S pokládat za stejně pravdivou, skutečnou a objektivní, jako jejich nesoučasnost zjištěnou v systémech S', S'' apj. V teorii relativity se tedy i současnost dvou událostí nutně stává pojmem relativním, podobně jako např. rychlost tělesa.

Tento poměrně jednoduchý důsledek teorie relativity kdysi velmi „pobouřil“ vědeckou veřejnost a setkal se s odporem zvláště u některých filosofů. Způsobil také, že i někteří fyzikové zůstali vůči nové teorii skeptickými. Poněvadž praktická použitelnost nového pojmu relativní současnosti vskutku není zcela samozřejmá, všimněme si této stránky celé věci ještě poněkud podrobněji.

Je sice jasné, že vztahy $t_A = t_B$, $t'_A > t'_B$, $t''_A < t''_B$ neodporují matematické logice, neboť jsou to vztahy mezi různými veličinami popř. údaji různých dvojic hodin, i když se ve všech třech případech vztahují k téže dvojici událostí A, B . Ale není již tak zřejmé, že jejich fyzikální rovnocennost neodporuje jiným, obecně uznávaným fyzikálním principům. To je nutno blíže prozkoumat.

Důležitým fyzikálním principem, který má přímý vztah k pojmu současnosti a k časovému pořadí (sledu) událostí, je zvláště princip kauzality (příčinnosti). Vyžaduje, aby následek nemohl nikdy nastat dříve než vznikla jeho příčina. Bylo by např. zcela protismyslné, kdyby signál mohl přijít do místa svého určení dříve než byl vyslán.

Srovnáním této zásady s výsledky našich předcházejících úvah o dvojici událostí A, B s $t_A = t_B$, $x(A) \neq x(B)$ snadno poznáme, že by vskutku vznikl rozpor mezi Einsteinovým principem relativity a principem kauzality, kdyby událost A měla být příčinou (nebo následkem) události B . Rozpor by záležel v tom, že z hlediska jiného systému S' (nebo S''), fyzikálně rovnoprávného se systémem S , následek by časově předcházel před svou příčinou.

Aby k takovým rozporům nedocházelo, je zřejmě nutno a stačí, aby byla zásadně vyloučena možnost přímé příčinné souvislosti dvou událostí, jejichž souřadnice

a časy splňují nerovnost (27). Jako příčina a následek mohou spolu souviset pouze události, jejichž „data“ splňují nerovnost (28) a jejichž časové pořadí je proto absolutní.

Aby však byla znemožněna příčinná souvislost událostí A , B splňujících podmínku (27), je zase nutné a stačí, aby nebylo možné přenášet rychlostí větší, než je rychlost světla c , jakékoliv působení nebo vlivy schopné vyvolat „událost“. Jinými slovy vyjádřeno: Vzájemné působení (interakce) mezi materiálními objekty může probíhat pouze rychlostí $u \leq c$. To je obecná, nutná a postačující podmínka, za které se Einsteinova teorie relativity snaží s principem kauzality.

Prakticky a konkrétně to znamená, že nemohou např. existovat síly působící přímo do dálky (okamžitě). Nemůže tedy přesně platit ani Newtonův gravitační zákon ani podobné jiné zákony sil používané v Newtonově mechanice. Ani nemohou existovat ideálně tuhá tělesa (tyče) a signály šířící se nadsvětelnou rychlostí. Všecka tato omezení jsou v reálném světě splněna. Bezpečně lze to tvrdit alespoň o oblasti jevů makroskopických. V kapitolách věnovaných konkrétním zákonům relativistické fyziky (elektrodynamiky, mechaniky ap.) uvidíme, jakým způsobem je to formálně zajištěno.

Vraťme se ještě na chvíli k nerovnostem (27) a (28). Obě dvě představují výpovědi absolutní, nezávislé na volbě systému. (Souvisí to s vlastnostmi různě velkých rychlostí, odvozenými v odst. 2.2.) *Událostem A , B , které splňují podmínku (27), můžeme říkat kvazisoučasné*, neboť vždy lze nalézt systém, v němž jsou (přesně) současné. Kvazisoučasnost dvou událostí je pojem absolutní, na rozdíl od (přesné) současnosti, která je jen relativní. Dvě kvazisoučasné události příčinně nesouvisí, ale obě dvě mohou být následkem jedné a téže třetí události. Události C , D , splňují-li podmínku (28), mají časové pořadí absolutní, tj. ve všech inerciálních systémech stejné. Platí-li kromě (28) také nerovnost $t_C < t_D$, je D vůči C absolutně budoucí a C vůči D absolutně minulou událostí. (Viz též Ú 7.)

Rychlost c , původně jen rychlost světla vůči éteru, má — jak jsme už dostatečně poznali — fakticky mnohem širší uplatnění a hlubší fyzikální význam: Jako maximální možná rychlost, s jakou se přenášejí interakce materiálních soustav, popř. mezní signálová rychlost, charakterizuje zřejmě základní vlastnosti nejenom veškeré materie, ale i prostoru a času. Proto se jí v teorii relativity často říká „fundamentální rychlost“.

3.3. PŘÍKLADY „PRAKTICKÉHO POUŽITÍ“ NOVÉHO POJMU SOUČASNOSTI

Nechť je při setkání počátků O a O' systémů S a S' spojených transformací (12) z místa $O \equiv O'$ vyslán světelný signál na všechny strany. Z hlediska pozorovatele v systému S se signál šíří tak, že body, k nimž dospěl, vyplňují v každém okamžiku kulovou plochu se středem v počátku O . Její poloměr vzrůstá rychlostí c . Totéž tvrdí pozorovatel v systému S' , jenže podle něho je střed kulové plochy v počátku O' . To

se zdá na první pohled podivné, neboť vyslán byl jen jeden signál a počátky O a O' v pozdější době již nesplyvají.

Vysvětlení je v tom, že zmíněná kulová plocha se středem v O je množinou bodů, k nimž signál dospěl současně z hlediska systému S . Ale podle pozorovatele v systému S' signál nepřišel do všech bodů té plochy současně. Podle jeho měření přichází signál současně právě do bodů ležících na kulové ploše se středem v počátku O' . (Způsob, jímž oba pozorovatelé v zásadě mohou svá tvrzení experimentálně prokázat, viz např. v Ú 8.) Mluví-li tedy oba pozorovatelé o ploše zaujaté signálem po jisté době od jeho vyslání, mluví vlastně každý z nich o jiné množině bodových událostí. Propočtení a rozbor myšleného pokusu viz v Ú 8.

Jiný zajímavý a poučný příklad sestrojíme takto: V systému S mějme úsečku MN rovnoběžnou s osou l . Může to být např. hrana pravítka položeného na rovinu (1, 2). Pravítko nechť se posouvá ve směru osy 2 rychlostí $W < c$. V určitém okamžiku splyne hrana pravítka s osou l . Oba koncové body M , N i všechny body na hraně pravítka projdou osou l současně. Můžeme rovněž říci, že průsečík hrany pravítka s osou l proletí po té ose nekonečně velikou rychlostí.

Jak bude tento „pokus“ popisovat pozorovatel v systému S' určeném transformací (12) s $v > 0$? Je-li $x_1(M) < x_1(N)$, projde osou $l' \equiv l$ koncový bod N dříve než M . Hrana pravítka se tedy v systému S' zřejmě nejví rovnoběžnou s osou l' . To se snadno pochopí, uvážíme-li, že *poloha hrany pravítka v daném okamžiku představuje vlastně množinu současných poloh jejích jednotlivých bodů* (tedy množinu současných „bodových událostí“), a že současnost takových událostí je pojem relativní. Výpočet všech veličin v systému S' (úhlu hrany pravítka s osou l' atd.) viz v Ú 9.

Máme-li pravítko, jehož hrana svírá s osou l v systému S dostatečně malý úhel ϕ , a posouváme-li pravítko rovnoběžně dosti velkou rychlostí $W < c$ ve směru kolmém k hraně pravítka, pohybuje se průsečík po ose l rychlostí $u = W/\sin \phi > c$. Takový průsečík je příkladem „objektu“, který se může pohybovat nadsvětelnou rychlostí, aniž vznikne spor principu relativity s principem kauzality. Snadno se totiž přesvědčíme, že „pomocí průsečíku“ nelze po té ose l poslat žádnou novou zprávu. Bylo by sice možné, aby např. experimentátor v místě P (jímž projde hrana pravítka v okamžiku t_P) slíbil pozorovateli v místě Q (jímž projde hrana pravítka v okamžiku $t_Q = t_P + r_{PQ}/u$), že v okamžiku t_P rozžehne světlo. V tomto případě by se tedy pozorovatel v Q mohl „dovědět“, že v P bylo rozžehnuto světlo, dříve než by k němu světelný signál došel. Je však zřejmé, že „zpráva“ došla do Q v čase t_Q by nebyla zprávou o skutečné události v místě P v čase t_P a nijak by s ní nesouvisela. Co kdyby se pokus o rozžehnutí světla náhodou nezdařil? To by se pozorovatel v Q nemohl v čase t_Q ještě dovědět!

Příklad jiného, podobného „objektu“ schopného pohybovat se nadsvětelnou rychlostí viz v Ú 10.

4. DILATACE ČASU. VLASTNÍ ČAS

4.1. ZPOMALOVÁNÍ CHODU HODIN V RELATIVNÍM POHYBU

S relativností současnosti úzce souvisí další významný relativistický jev, tzv. *dilatace času neboli zpomalení chodu hodin, které jsou v pohybu vůči zvolenému systému*. Název dilatace (dloužení) času je obvyklejší a vhodnější, poněvadž lépe vystihuje skutečnou povahu a obecný význam jevu.

Než přistoupíme k odvození příslušných kvantitativních vztahů, znovu si připomeňme, že hodiny definující čas ve zvoleném inerciálním systému S, tj. hodiny rozestavené v místech pevných vůči tomu systému a seřazené předepsaným způsobem, všechny „v daném okamžiku“ ukazují tentýž časový údaj t a mají stejný chod (jdou stejně „rychle“). Pojem „určitý okamžik“ z hlediska systému S je vlastně definován právě určitým stejným údajem t všech hodin tohoto systému. Z předchozího odstavce pak víme, že takto definovaný pojem se nekryje s pojmem „určitý okamžik“ v jiném inerciálním systému S', neboť události, které se sběhly v různých místech, ale v tomtéž, jediném okamžiku v systému S, nenastaly obecně v jednom okamžiku např. z hlediska systému S' určeného transformací (12) (a obráceně).

Nyní si tedy dejme za úkol vzájemně porovnat „chod hodin“ v těch systémech S a S'. Postavíme se nejprve na stanovisko pozorovatele v systému S. Poněvadž každé hodiny H' systému S' ukazují obecně v daném okamžiku t jiný časový údaj $t'(H')$, je zřejmé, že chceme-li zkoumat chod hodin systému S', musíme vybrat jedny určité hodiny H' a sledovat, jak jejich údaj $t'(H')$ vzrůstá s naším časem t . Uvidíme, že výsledek nezávisí na tom, které hodiny H' si vybereme.

Vybrané hodiny H' mají v systému S' neproměnné souřadnice $x'_j(H')$ a vůči našemu systému S se pohybují rychlostí $u(H') \equiv (v, 0, 0)$; přitom potkávají různé hodiny našeho systému. Chod zvolených hodin H' proto můžeme pohodlně sledovat tak, že jejich údaj $t'(H')$ srovnáme vždy s údajem t těch našich hodin H, s nimiž se právě potkaly. Nevadí, že se každá hodnota t odečítá na jiných hodinách našeho systému, neboť všechny naše hodiny jsou synchronizovány. Kdybychom údaje $t'(H')$ hodin H' „odečítali na dálku“ z jednoho pevného místa P (v systému S), musili bychom každý zjištěný údaj opravovat o dobu, kterou signál potřeboval na cestu od hodin H' k bodu P. Odečítáním času t na hodinách H souměrných s H' si právě toto opravování ušetříme. (Viz Ú 12.)

Data $x'_j(H')$, $t'(H')$ určují „bodovou událost“, již podle transformace (12') přísluší v našem systému S souřadnice

$$x_1 = \gamma[x'_1(H') + vt'(H')], \quad x_2 = x'_2(H'), \quad x_3 = x'_3(H') \quad (29a)$$

a čas

$$t = \gamma[t'(H') + vc^{-2}x'_1(H')]. \quad (29b)$$

Vzroste-li údaj $t'(H')$ o $dt'(H')$, souřadnice $x'_j(H')$ se nezmění. Data $x'_j(H')$, $t'(H') + dt'(H')$ pak určují novou bodovou událost, již (opět podle (12')) přísluší v našem

systému S souřadnice $x_j + dx_j$ a čas $t + dt$. Odtud, použijeme-li (29a,b), plyne dx_j a dt v podobě

$$dx_1 = \gamma v dt'(H'), \quad dx_2 = dx_3 = 0, \quad (30a)$$

$$dt = \gamma dt'(H'). \quad (30b)$$

Přírůstek času $dt'(H')$ na vybraných hodinách H' systému S' tedy souvisí s přírůstkem času dt v našem systému S vztahem

$$dt'(H') = \gamma^{-1} dt = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} dt < dt. \quad (31)$$

Dosazením z (31) do (30a) dostáváme $dx_1 = v dt$, $dx_2 = dx_3 = 0$, v soulase s tím, co bylo řečeno o pohybu hodin H' vůči systému S. Vzorec (31) lze též odvodit, použijeme-li přímé transformace (12). (Viz Ú 11.)

Jelikož ve vzorci (31) nevystupují souřadnice vybraných hodin H', můžeme říci, že hodiny systému S' jdou γ^{-1} -krát pomaleji (měří čas na γ -krát větší jednotky) než naše hodiny v systému S. Můžeme tedy mluvit o *dilataci času v systému S'*. Na druhé straně je však zřejmé, že stejnou úvahu, jakou jsme z hlediska systému S rozvinuli o vybraných hodinách H' systému S', můžeme uplatnit z hlediska systému S' na vybrané hodiny H systému S, tj. na hodiny mající neproměnné souřadnice $x_j(H)$ a pohybující se tedy vůči S' rychlostí $u'(H) \equiv (-v, 0, 0)$. Označíme-li jejich údaj $t(H)$ a porovnáme jej vždy s údajem t' těch hodin H' systému S', s nimiž se právě potkaly, můžeme k přepočtení dat $x_j(H)$, $t(H)$ do systému S' použít transformace (12). Postupem stejným jako v předchozím případě pak snadno odvodíme pro $dt(H)$ vzorec

$$dt(H) = \gamma^{-1} dt' < dt', \quad (32)$$

tvarem shodný se vzorcem (31).

Vidíme tedy, že z hlediska systému S' nastává dilatace času zase v systému S. Tak tomu také musí být, mají-li být oba systémy fyzikálně rovnocenné, jak žádá Einsteinův princip relativity. Tato na první pohled podivná vzájemnost a symetrie zpomalování hodin je umožněna přítomností druhého členu v transformačních vzorcích pro čas. To je zvláště dobře patrné z odvození vzorce (31) podle Ú 11. *Relativistická dilatace času tedy úzce souvisí i s relativností současnosti*, která „spolupůsobí“ při vyvolání uvažovaného jevu.

V kapitole V, v níž se budeme zabývat geometrickým znázorněním Lorentzovy transformace (12), uvidíme, že dilataci času popsanou vzorci (31), (32) lze interpretovat geometricky (jako „promítání úseček“ z jedné různoběžky do druhé). Viz odst. V 1,5 a obr. 18.

4.2. VLASTNÍ FREKVENCE OSCILÁTORU. VLASTNÍ ČAS. PASIVNÍ A AKTIVNÍ INTERPRETACE DILATACE ČASU

Ze vzorce (31) je vidět, že trvání (popř. perioda) nějakého fyzikálního děje probíhajícího na inerciálním hmotném tělese M je nejkratší a frekvence největší v systému $S' \equiv S_0$, vůči němuž je to těleso v klidu. V systému S , vůči němuž se těleso M pohybuje rychlostí $v < c$, je trvání popř. perioda T^* uvažovaného děje delší než $T^{**} = T_0^*$ (a frekvence ν^* menší než $\nu^{**} = \nu_0^*$), a to podle vzorců

$$T^* = \gamma T^{**} = \gamma T_0^* > T_0^*, \quad (33)$$

$$\nu^* = \gamma^{-1} \nu^{**} = \gamma^{-1} \nu_0^* < \nu_0^*. \quad (34)$$

Vzorců (33), (34) lze použít např. k přepočítávání periody nebo frekvence vnitřních oscilací nějakého atomu ze systému S_0 , v němž je atom v klidu, do systému S , v němž se pohybuje konstantní rychlostí v (viz Ú 13, 14, 15).

Systém S_0 , kterému říkáme *klidový nebo vlastní systém tělesa M* , je pro popis fyzikálních jevů na tomto tělese systémem význačným. Čas $t_0 = \gamma^{-1} t$ udávaný hodinami pohybujícími se s tělesem M , se nazývá *vlastním časem* toho tělesa (hmotného bodu). Zatím je vlastní čas definován jen pro inerciální těleso (volný hmotný bod), jehož klidový systém S_0 je inerciální. Později si tento užitečný a důležitý pojem zobecníme i pro těleso (hmotný bod) podléhající působení síly a pohybující se vůči inerciálnímu systému zrychleně. Také periodě $T_0^* = \gamma^{-1} T^*$ (vyjádřeně v jednotkách vlastního času) a frekvenci $\nu_0^* = \gamma \nu^*$ vnitřních oscilací v tělese (vztaheně k jednotce vlastního času) říkáme *vlastní perioda a frekvence*.

Zmíněná význačnost klidového systému S_0 tělesa M nijak neodporuje Einsteinovu principu relativity, tj. požadavku fyzikální rovnocennosti všech inerciálních systémů. V případě systému S_0 je to totiž význačnost jen čistě „místní povahy“ (z hlediska tělesa M) nikoliv význačnost z hlediska obecných fyzikálních zákonů (pohybových rovnic apod.). Z Einsteinova principu relativity neplyne, že by např. perioda a frekvence oscilací atomu (molekuly, hodin) musela mít stejnou číselnou hodnotu z hlediska všech inerciálních systémů; naopak tento princip, jak jsme viděli, vede právě k vztahům (33) a (34). Ukážeme si však, že z něho plyne jiný významný důsledek, který nám umožní podat ještě druhou interpretaci těchto vzorců.

Mějme dvě stejné hmotné soustavy (hodiny, molekuly, atomy), z nichž první je vůči inerciálnímu systému S v tomtéž pohybovém stavu jako druhá vůči systému S' . Konkrétně mějme na mysli např. dvě stejné molekuly 1, 2, z nichž první je v klidu vůči S , druhá v klidu vůči S' . Z Einsteinova principu relativity (rovnocennosti obou inerciálních systémů S, S' , a tedy i stejného tvaru pohybových zákonů v obou systémech), pak pro vlastní frekvence vnitřních oscilací těchto molekul vyplývá vztah $\nu^*(1) = \nu^*(2) = \nu_0^*$. Poněvadž molekula 2 se vůči systému S pohybuje rychlostí v , plyne z (34) dále vzorec

$$\nu^*(2) = \gamma^{-1} \nu^{**}(2) = \gamma^{-1} \nu^*(1), \quad (34a)$$

a analogicky z (33) vzorec

$$T^*(2) = \gamma T^{**}(2) = \gamma T^*(1). \quad (33a)$$

Frekvence $\nu^*(1)$ a $\nu^*(2)$ jsou nyní měřeny v tomtéž systému S , ale vztahují se ke dvěma (stejným) molekulám v různých pohybových stavech vůči tomu systému (molekula 1 je v klidu). Vzorce (34a), (33a) můžeme vyložit též v tom smyslu, že udávají vztah mezi frekvencí (periodou) téhož atomu měřenou v tomtéž systému S , ale zjišťovanou dvakrát: jednou když byl ten atom vůči S v klidu a podruhé, když byl uveden do pohybu rychlostí v .

Interpretaci příslušné k formulím (33a), (34a) říkáme *aktivní*, kdežto interpretaci příslušné k (33), (34) (jeden objekt popisovaný ve dvou systémech S, S') *pasivní*. Vzorec (34a) je formálně i výkladem obdobný vzorci (III 17a) a vzorec (33a) vzorci (III 17b). Rozdíl je pouze v tom, že tehdy byl systém S v klidu „vůči éteru“, kdežto nyní to může být kterýkoliv inerciální systém. Podobně vztah (34) odpovídá starému vztahu $\nu^* = \gamma^{-1} \bar{\nu}^*$ (viz (III 18)) neboť ν^{**} má stejný význam jako $\bar{\nu}^*$.

Připomeňme si ještě, že v odst. III 5,2 jsme příčinu zpomalování chodu hodin (kmitů mechanické soustavy) hledali a našli v zákonech dynamických (vlastnostech sil a setrvačných hmot, tvaru pohybových rovnic). Nyní jsme podobný důsledek (34a) odvodili bez výslovného použití dynamických zákonů, z úvah převážně kinematické povahy. Ve skutečnosti jsou ovšem požadavky na dynamické zákony skryty v Einsteinově principu relativity, popř. v požadavku jejich invariance vůči Lorentzovým transformacím. Později, v kap. VI, totiž uvidíme, že tento požadavek určuje tvar dynamických zákonů ve shodě s tvarem předpokládaným doplněnou Lorentzovou teorií. Nové odvození vztahů (34a) je nicméně uspokojivější, neboť platí zcela obecně i pro jevy nemechanické povahy a odhaluje hlubší základy těchto vztahů.

4.3. PŘÍMÝ EXPERIMENTÁLNÍ DŮKAZ DILATACE ČASU

Relativistickou dilataci času lze poměrně snadno potvrdit experimentálně. Měření, která nyní stručně popíšeme a rozebereme, ukazují přímo a jasně, že se trvání určitého fyzikálního děje probíhajícího na hmotném objektu prodlouží při větší rychlosti toho objektu vůči Zemi, a to podle vztahu (33a). Rychlost objektu i doba trvání jevu se měří v (prakticky) inerciálním systému spojeném se Zemí. Zvláštní význam experimentu, který popíšeme, je v tom, že při něm *nejde o periodu mechanických oscilací, nýbrž o fyzikální děj nemechanický a neperiodický*. Zkoumá se totiž samovolný rozpad nestálých elementárních částic, kterým se říká miony (též mezony μ).

Rozpad těchto elementárních částic probíhá podle téhož statistického „časového zákona rozpadu“ jako rozpad nestálých (radioaktivních) atomových jader, tj. podle známého vzorce

$$n(t) = n(0) \exp(-\Gamma^* t) = n(0) \exp(-t/\tau^*). \quad (35)$$

V něm $n(0)$ značí počet částic přítomných v čase $t = 0$ a $n(t)$ počet těch částic přítomných (ještě nerozpadlých) v čase $t > 0$. Veličina

$$\Gamma^* = \frac{1}{n(t)} \left| \frac{dn(t)}{dt} \right|$$

udává pravděpodobnost, že se vybraná částice rozpadne během jedné vteřiny, a doba $\tau^* = 1/\Gamma^*$ udává střední dobu „života částice“. Za dobu $\Delta t = \tau^*$ se původní počet částic zmenší e-krát (tj. 2,718 ...-krát). Zkušenost učí, že veličiny Γ^* , τ^* jsou u daného druhu částic charakteristické konstanty. (Tuto výpověď ještě podstatně zpřesníme.)

Protože je časová závislost (35) pravidelná, může vzorek radioaktivní látky zastávat úlohu hodin. Ačkoliv je jeho rozpad děj neperiodický, jsou veličiny τ^* a Γ^* (střední doba života a rozpadová konstanta) obdobné veličinám T^* a ν^* , periodě a frekvenci oscilací atomu, molekuly nebo obyčejných hodin.

Zákon působení, které vyvolává rozpad částice, je obecný fyzikální zákon, který nepochybně zní stejně ve všech inerciálních systémech, tak jako zákony sil působících v molekule a pohybové rovnice. Proto je nutné zase očekávat, že u daného druhu nestálé částice bude, přesně vzato, charakteristická její vlastní (klidová) doba života τ_0^* . Částice pohybující se vůči zvolenému systému S rychlostí v musí pak mít dobu života $\tau^* = \gamma \tau_0^* > \tau_0^*$. Pokusy s miony to vskutku potvrdily.

Mion je částice asi 207-krát hmotnější než obyčejný elektron. Má stejný elektrický náboj a rozpadá se na elektron a dvě neutrína. V přírodě miony vznikají jako druhotné produkty při srážkách částic primárního kosmického záření (převážně protonů) s atomy atmosféry. Pozorování konaná pomocí stratosférických balonů ukázala, že miony vznikají zhruba ve výšce 30 km. Z té výšky pak dopadají v hojném počtu na zem, kde jsou zachycovány. Měření ukazují, že zastavené miony se rozpadají s charakteristickou dobou života $\tau_0^* = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

Je ihned zřejmé, že miony schopné proletět 30 km zemskou atmosférou, mají dobu života τ^* podstatně větší než τ_0^* , neboť na to potřebují jistě dobu $\Delta t \geq 10^{-4}$ s $\approx 50\tau_0^*$. Kdyby doba života mionu nezávisela na jeho rychlosti v , nemohly by prakticky žádné miony dojít až k zemi, protože jejich počet by se během letu (za dobu $50\tau_0^*$) zmenšil asi 10^{20} -krát! Zbývá tedy ještě potvrdit, že doba τ^* je vskutku dána výrazem $\gamma \tau_0^*$.

K tomu je za prvé nutno z proudu mionů „padajících“ k zemi vybrat ty, které mají určitou rychlost v . Počet $N(v)$ těch mionů, dopadajících ve svislém směru na 1 cm^2 za 1 s, se musí určit ve dvou nadmořských výškách h_1 a $h_2 > h_1$. Doba života τ^* se pak vypočte z rovnice

$$\frac{N_1(v)}{N_2(v)} = \exp\left(-\frac{h_2 - h_1}{v\tau^*}\right), \quad (36)$$

která plyne ihned z rozpadového zákona (35) dosadí-li se $t = (h_2 - h_1)/v$. Vztah (36) ovšem platí jen ve vakuu. Ve skutečnosti se miony vybrané rychlosti ztrácejí mezi

oběma pozorovacími stanicemi nejen rozpadem, ale i brzděním a rozptylem ve vzduchu. Přihlédnutí k tomuto vlivu a různé další opravy jsou však jen čistě technickými problémy. (Viz např. [35].) Vzorec $\tau^* = \gamma \tau_0^*$ byl tímto způsobem vskutku ověřen.

Popsaná pozorování a měření dokazují přímo a nezvratně relativistické dloužení času. Ukazují, že má skutečně původ v relativním pohybu; závisí na relativní rychlosti nositele fyzikálního děje (hodin) vůči systému, v němž je ten děj sledován. Ukazují, že zpomalování časového průběhu postihuje i jevy nemechanické a neelektromagnetické, a svědčí tedy o jeho obecnosti, která plně odpovídá pojetí teorie relativity a názvu „dilatace času“. (Další experimentální důkazy dilatace času viz např. v [36].)

4.4. O TAK ZVANÉM „PARADOXU HODIN“

Dilatace času má zajímavý důsledek, který se při povrchním rozboru jeví paradoxním a nazývá se „paradox hodin“ (též problém dvojčat, problém návratného pohybu, problém kosmonauta apod.). Vyvolává stále mnoho diskusí a v literatuře (viz [37]) je mu i v posledních letech věnována neobyčejná pozornost, ačkoliv je už dávno vysvětlen. Jde o tento problém: Z počátku O inerciálního systému S startuje v čase $t = t_A = 0$ „kosmická loď“ ve směru osy 1 (start $\equiv$ bodová událost A). V krátké době nabude loď velké rychlosti $v < c$ (např. $v = 0,6c$) a touto konstantní rychlostí se velmi dlouho pohybuje. Potom se brzděním rychle zastaví (obrat $\equiv$ bodová událost B) a stejným způsobem se vrátí zpět do bodu O (přistání $\equiv$ bodová událost D). Kosmonaut veze s sebou svoje hodiny $H_{(K)}$, které udávají jeho vlastní čas τ , a při startu ukazují také na nulu ($\tau_A = 0$). Otázka je, jaký čas τ_D budou tyto hodiny ukazovat po návratu do O v době t_D udávané hodinami $H_{(O)}$ umístěnými v O (které při startu ukazovaly čas $t_A = 0$).

Budeme předpokládat, že hodiny $H_{(K)}$ jsou sestrojeny tak, že jsou prakticky „necitlivé“ na zrychlení vůči S vyvolané vnější mechanickou (negravitační) silou, která na ně působí při uvádění kosmické lodi do pohybu a při jejím zastavování.

Takové hodiny lze snadno sestavit a v přírodě existují přímo ideální hodiny toho druhu, totiž oscilující molekuly, atomy a zvláště atomová jádra. Pokus s jádry Fe^{57} probíraný v odst. III, 32 ukazuje, že frekvence ν^* jejich vnitřních oscilací není ovlivněna dostředivým zrychlením $\omega^2 R$ řádu 10^8 cm s^{-2} . Jiné pokusy (viz [36]) ukazují, že ani zrychlení řádu $10^{19} \text{ cm s}^{-2}$ nemá znatelný vliv (poměrná změna frekvence způsobená zrychlením jádra $\Delta\nu^*/\nu^*$ je $< 10^{-13}$). Frekvence ν^* závisí prakticky jen na rychlosti jádra podle vzorce (34a).

Můžeme si tedy úlohu zjednodušit a předpokládat, že zrychlení při startu a při obratu jsou velká a že ty operace trvají dobu zanedbatelně krátkou proti trvání celé cesty. Jinými slovy můžeme předpokládat, že kosmická loď na cestě tam i zpět je prakticky stále v pohybu vůči S konstantní rychlostí v . Je-li na cestě tam dobu

$t_D = T$, doletí do vzdálenosti $x_1(B) = vT$ a vrátí se do O v době $t_D = 2T$. Je jasné, že za těchto předpokladů bude podle (31) prakticky stále $d\tau = \gamma^{-1} dt$ a tedy také

$$\tau_D = \gamma^{-1} t_D < t_D. \quad (37)$$

Je-li např. $v = 0,6c$ ($\gamma^{-1} = 0,8$) a $T = 5$ roků ($x_1(B) = 3$ světelné roky), je $t_D = 10$ let a $\tau_D = 8$ let. Poněvadž se všechny fyzikální děje zpomalují stejně jako chod hodin, zestárne i kosmonaut o 2 roky méně, než jeho druzi „na Zemi“. Ačkoliv to překvapuje, není na tom ještě nic paradoxního (protimluvného) ani neuvěřitelného.

Zatím jsme ovšem popis celého děje i výpočet údajů obou hodin podávali ze stanoviska systému S popř. pozorovatele v O . Stejný výsledek však musí vyjít i při výpočtu provedeném v libovolném jiném inerciálním systému, neboť údaje obojích hodin $H_{(O)}$ a $H_{(K)}$ při jejich setkání po návratu jsou absolutním faktem. (To lze skutečně potvrdit např. výpočtem v systému S' určeném transformací (12) – viz Ú 16.)

„Paradox“ (zdánlivý) vzniká, teprve když se počítá (nesprávným způsobem) z hlediska „klidového systému“ kosmické lodi. Při takovém „výpočtu“ se předpokládá, že kosmonaut má právo „podle principu relativity“ usuzovat takto: Téměř po celou dobu cesty tam i zpět (s výjimkou krátkého období startu a obratu) je můj klidový systém prakticky stále inerciální a hodiny $H_{(O)}$ se vůči němu pohybují rychlostí v . Podle vzorce (32) jsou tedy přírůstky $dt(H_{(O)})$ údaje těch hodin menší než přírůstky času v mém klidovém systému. Při návratu tedy naleznou hodiny v O opožděny proti mým hodinám, tj. $t_D = \gamma^{-1} \tau_D < \tau_D$, ve sporu s nerovností (37).

To je proslulý „paradox hodin“, z něhož někteří autoři vyvozují, že buď sám princip relativity, nebo alespoň jeho důsledek – dilatace času, musí být nesprávný. Na druhé straně však víme, že relativistická dilatace času je experimentálně dokázána způsobem, který jednoznačně svědčí o správnosti výsledku (37). Vysvětlení „paradoxu hodin“ se tedy musí hledat v tom, že „kosmonautův výpočet“ je chybný.

Odhalení chyby je jednoduché, ale poučné, neboť ukazuje, jak všechny relativistické vlivy spolu úzce souvisí a vzájemně se podmiňují. Chyba totiž vznikla tím, že byla zanedbána relativnost současnosti. Při výpočtu z hlediska „klidového systému“ kosmické lodi se musí přihlížet k tomu, že systém S' , v němž je kosmická loď v klidu mezi startem A a obratem B , a systém S'' , v němž je v klidu mezi obratem B a návratem D , jsou sice oba inerciální, ale různé systémy, takže pojmy současnosti v nich nesouhlasí ani navzájem ani s pojmem současnosti v systému S . Tak např. událost C v bodě O , která je určena údajem

$$t_C = T = \frac{1}{2} t_D = \frac{1}{2} \Delta t_{AD}$$

hodin $H_{(O)}$, a je tedy v systému S současná s událostí B , není s B současná v S' ani v S'' . V systému S' (popř. S'') je událost C pozdější (popř. dřívější) než B . (Viz odst. 3,1 a obr. 13.) Obráceně, událost E (popř. F) v bodě O , která je v systému S' (popř. S'') současná s B , je v systému S dřívější (popř. pozdější) než B , nebo s ní současná C .

Hodiny $H_{(O)}$ se vůči S' i vůči S'' pohybují rychlostí v (opačnými směry) a proto se vskutku i vůči hodinám systému S' i vůči hodinám systému S'' ve smyslu rovnice (32) opožďují podle $dt(H_{(O)}) = \gamma^{-1} dt'$ popř. $dt(H_{(O)}) = \gamma^{-1} dt''$. Platí tedy

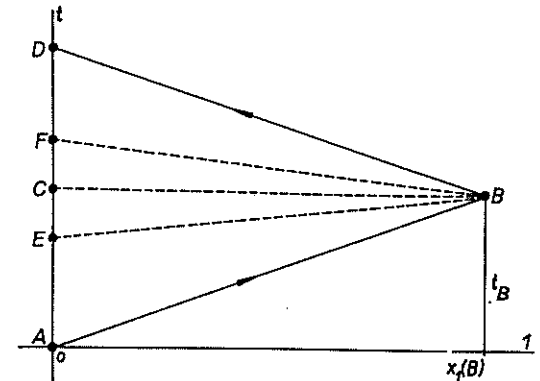
$$\Delta t_{AE} = \gamma^{-1} \Delta t'_{AE} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AB}, \quad (38a)$$

neboť mezi A a B jsou hodiny $H_{(K)}$ hodinami systému S' a události E a B jsou současné v S' . Z podobných důvodů platí

$$\Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta t''_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{BD} \quad (38b)$$

a tedy

$$\Delta t_{AE} + \Delta t_{FD} = \gamma^{-1} \Delta \tau_{AD} = \gamma^{-1} \tau_D. \quad (39)$$



Obr. 13.

Pravá strana této rovnice už obsahuje hledanou veličinu τ_D , ale levá strana ještě není rovna $\Delta t_{AD} = t_D$, neboť mezi událostmi E a F je časová „mezera“ Δt_{EF} . Platí tedy

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \Delta t_{EF}. \quad (40)$$

Protože

$$\Delta t_{EF} = \Delta t_{EC} + \Delta t_{CF} = 2 \Delta t_{EC} = 2 \Delta t_{EB},$$

zbývá vyjádřit Δt_{EB} pomocí τ_D . K tomu dojdeme touto úvahou: Systém S souvisí se systémem S' transformací (12'), takže platí

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v c^{-2} \Delta x'_1).$$

Pro události E, B je však $\Delta t' = 0$ a $\Delta x'_1$ je vzdálenost, do níž se v systému S' vzdálil počátek O od hodin $H_{(K)}$ v okamžiku $t' = t'_B = \tau_B = \frac{1}{2} \tau_D$. Tato vzdálenost se však rovná $v \cdot \frac{1}{2} \tau_D$. Když ji dosadíme do hořejší rovnice, dostáváme $\Delta t_{EB} = \frac{1}{2} \gamma \beta^2 \tau_D$, a na konec ze (40)

$$t_D = \gamma^{-1} \tau_D + \gamma \beta^2 \tau_D = \gamma \tau_D. \quad (41)$$

Vidíme tedy, že po opravě přehlédnutí „mezery“ Δt_{EF} dostáváme shodu se vzorcem (37), i když vyjdeme z toho, že se hodiny $H_{(O)}$ v „klidovém systému“ kosmické lodi zpožďují.

Jiné, jednodušší odvození vzorce (41), užívající „experimentální metody“ z Ú 12, která automaticky nedovolí „přehlédnout mezeru“, viz v Ú 17. Časová mezera vyjadřuje skutečnost, že po dobu obrátky není systém kosmické lodi inerciální, takže na chod hodin $H_{(O)}$ nemůžeme použít prosté dilatační formule. Úplnější vzo-

rec pro chod hodin, platný obecně i v neinerciálním systému, podává obecná teorie relativity. Z obecného vzorce plyne, že neinerciálnost systému kosmické lodi v době obrátky urychlí chod hodin $H_{(O)}$ proti hodinám $H_{(K)}$ natolik, že se nejen vyrovná jejich zpoždění vzniklé během rovnoměrného přímočarého pohybu od kosmické lodi a zpět, ale dokonce vznikne předstih odpovídající vzorci (37). Tento na první pohled fantastický výklad je ve skutečnosti rovnocenný předchozímu, který jsme podali podle E. S. Lowryho l. c. [37].

Nakonec ještě poznamenejme, že se i hodiny $H_{(r)}$ připevněné na obvodě kruhové desky o poloměru r , která vzhledem k inerciálnímu systému S rotuje úhlovou rychlostí ω , trvale zpožďují proti hodinám $H_{(P)}$ systému S postaveným vedle desky i proti hodinám $H_{(O)}$ postaveným na desce v jejím středu O . Zpoždění hodin $H_{(r)}$ proti hodinám $H_{(P)}$ by se dalo zjistit při každém jejich návratu k hodinám $H_{(P)}$. Zpožďování proti hodinám $H_{(O)}$ (jdoucím synchronně s $H_{(P)}$) ukazuje pokus s atomovými jádry Fe^{57} z odst. III 3,2. Kvantitativní rozbor tohoto důležitého případu podle teorie relativity podáme později na vhodných místech (viz odst. V 3,1, dále Ú V 6 a odst. VI 4,2).

5. TRANSFORMACE DÉLEK A VZDÁLENOSTÍ

5.1. RELATIVISTICKÁ KONTRAKCE DÉLKY TYČE V POHYBU

Mějme inerciální systém S a systém S' určený transformací (12). Na ose I' systému S' volme dva pevné body M, N s konstantními souřadnicemi $x'_1(M) < x'_1(N)$. Mohou to být např. koncové body pevné hmotné tyče, která leží v ose I' v klidu vzhledem k systému S' a má v něm „klidovou délku“ $l' = l_0 = x'_1(N) - x'_1(M)$. Vůči systému S se tyč pohybuje ve směru své délky rychlostí v . Ptejme se nyní na délku tyče (úsečky MN) z hlediska systému S .

Délkou tyče v systému S budeme ovšem rozumět vzdálenost l současných poloh obou jejích konců. Tuto délku lze tedy v zásadě změřit tak, že si na ose I zaznaménáme v daném čase t polohy $x_1(M, t) = x_1(A)$, $x_1(N, t) = x_1(B)$ obou koncových bodů M, N a pak určíme rozdíl souřadnic značek:

$$l = x_1(B) - x_1(A).$$

Vytvoření obou značek na ose I jsou dvě bodové události A, B současně v systému S ($t_A = t_B = t$). Rozdíl jejich souřadnic $x'_1(B) - x'_1(A)$ v systému S' je pak určen první z rovnic (26). Souřadnice $x'_1(A)$, $x'_1(B)$ udávají sice polohy bodů M, N v systému S' v různých časech ($t'_A \neq t'_B$, viz rovnici (25) s $t_A = t_B = t$), ale to nám nevadí, protože v tomto systému jsou body M, N nehybné. Platí tedy $x'_1(A) = x'_1(M)$, $x'_1(B) = x'_1(N)$ a první rovnice (26) dává $l' = \gamma l$ čili

$$l = \gamma^{-1} l' = \gamma^{-1} l_0 = l_0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (42)$$

Zcela podobně budeme postupovat, budeme-li chtít v systému S' určit délku l' tyče, která leží v ose I v klidu vůči systému S a má tam (klidovou) délku $l = l_0$. Pro délku l' tyče v (podélném) pohybu tak opět dostaneme (kontrakční) vzorec

$$l' = \gamma^{-1} l = \gamma^{-1} l_0. \quad (43)$$

Z rovnic (26) dále vyplývá, že u tyče postavené kolmo ke směru vzájemného pohybu systémů S, S' se v obou těchto systémech nalezne stejná délka. To platí dokonce nezávisle na tom, zda je nebo není tyč v některém z těchto systémů v klidu. Může např. mít vůči systému S' translační rychlost $u' \neq 0$. Je-li přitom $x'_1(M, t') = x'_1(N, t')$, pak záznamy A, B poloh konců tyče udělané současně v systému S' jsou podle (12') současně i v S , kde platí rovněž $x_1(M, t) = x_1(N, t)$. Máme tedy

$$\begin{aligned} l' &= \{[x'_2(B) - x'_2(A)]^2 + [x'_3(B) - x'_3(A)]^2\}^{1/2} = \\ &= \{[x_2(B) - x_2(A)]^2 + [x_3(B) - x_3(A)]^2\}^{1/2} = l, \end{aligned}$$

přičemž

$$x_j(A) \equiv x_j(M, t), \quad x_j(B) \equiv x_j(N, t), \quad x'_j(A) \equiv x'_j(M, t'), \quad x'_j(B) \equiv x'_j(N, t').$$

Je-li speciálně $u' = 0$, máme $l' \equiv l_0$, a tedy i

$$l = l' = l_0. \quad (44a)$$

Je-li nakonec tyč v obecné poloze v klidu vůči systému S' , pak její délka l v systému S je podle (26) dána vzorcem

$$\begin{aligned} l &= \{[x_j(N, t) - x_j(M, t)][x_j(N, t) - x_j(M, t)]\}^{1/2} = (l_{\parallel}^2 + l_{\perp}^2)^{1/2} = \\ &= [(\gamma^{-1} l_0)_{\parallel}^2 + l_{\perp}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (45)$$

v němž

$$\begin{aligned} l_{\parallel} &= l'_{\parallel} \equiv |x'_1(N) - x'_1(M)| = \gamma |x_1(N, t) - x_1(M, t)| = \gamma l_{\parallel}, \\ l_{\perp} &= l'_{\perp} \equiv \{[x'_2(N) - x'_2(M)]^2 + [x'_3(N) - x'_3(M)]^2\}^{1/2} = l_{\perp}. \end{aligned}$$

Vzorce (42), (45) jsou formálně shodné s těmi, které jsme pro zkracování délky tyče měli v Lorentzově teorii (viz (III 24)). Tam ovšem systém, k němuž se vztahoval rovnoměrný translační pohyb tyče, byl klidný „vůči éteru“. Nyní to může být kterýkoliv inerciální systém, neboť kontrakce (42) popř. (43) je jev vyvolaný relativním pohybem. Ze vzorců (42) a (43) je také vidět, že co se týká kontrakce délek tyčí (délkových měřitek), je vzájemný vztah dvou rovnocenných systémů S a S' opět zcela symetrický, tak jako při dilataci času. Ukážeme si, že tato z hlediska principu relativity nutná symetrie je opět umožněna relativností pojmu současnosti.

Podrobněji si všimněme případu, k němuž se vztahují vzorce (42) nebo (45), tj. tyče klidné v S' . Pozorovatel v systému S měří tedy popsáním způsobem rozměry

těles klidných vůči S' a zjišťuje, že jejich podélné rozměry (ve směru pohybu systému S') jsou vesměs v poměru γ^{-1} menší než udává pozorovatel v systému S' . Zjišťuje tedy také, že se i měřítko používané v systému S' při otočení z polohy příčné do podélné zkracuje v tomtéž poměru γ^{-1} . (Jen v příčné poloze je stejně dlouhé jako měřítko používané v S .) Tím si pozorovatel v S vysvětluje, proč pozorovatel v S' o kontrakci těles klidných vůči S' „nic neví“.

Pozorovatel v S' však nedůvěřuje ani tomu, co zjistil pozorovatel v S , ani jeho vysvětlení, neboť uvažuje takto: Kdyby se moje měřítko při otočení do směru osy I' skutečně zkracovalo (jak tvrdí pozorovatel v S), musel bych při měření rozměrů těles klidných vůči S zjistit, že jejich rozměry ve směru osy I' (i délka měřítka užívaného v S v poloze podélné) jsou vesměs delší než udává pozorovatel v S . Já však zjišťuji pravý opak; nalézám hodnoty menší v souladu se vzorcem (43). Z toho soudím, že pozorovatel v systému S měřil asi chybně.

Aby odhalil očekávanou „chybu“, sleduje pozorovatel v S' pečlivě postup měření pozorovatele v S a zjišťuje toto: Při měření délky l (tyče ležící na ose I' v klidu vůči S') si pozorovatel v S neznamenal na své ose I polohy obou konců tyče „současně“ (z hlediska systému S'). Polohu $x_1(B)$ předního konce N zaznamenal dříve (v čase t'_B), polohu $x_1(A)$ zadního konce M později (v čase $t'_A > t'_B$). Nevymezil tedy na své ose I celou délku tyče $l' = l_0$, nýbrž jen část $l_0 - v(t'_A - t'_B)$, neboť za dobu $t'_A - t'_B$ se systém S vůči tyči posunul o délku $v(t'_A - t'_B)$ ve směru od N k M . Kromě toho pak vymezený úsek na své ose I měřil svým zkráceným měřítkem, jehož jednotka má (z hlediska systému S') pouze délku γ^{-1} . Musel tedy u tyče naměřit délku

$$l = \gamma[l_0 - v(t'_A - t'_B)]. \quad (46)$$

Když pozorovatel v S' do svého vzorce (46) dosadí své hodnoty l_0 , t'_A , t'_B , dostane pro l vskutku hodnotu udávanou pozorovatelem v S . My se o tom můžeme snadno přesvědčit, bez dosazování číselných hodnot, uijeme-li rovnice (25), z níž při $t_A = t_B$ a $x_1(B) - x_1(A) = l$ plyne

$$t'_A - t'_B = \gamma vl/c^2.$$

Po dosazení tohoto výrazu do (46) dostáváme rovnici

$$l = \gamma(l_0 - \gamma\beta^2 l)$$

a z ní

$$l = \gamma^{-1} l_0,$$

v souladu se vzorcem (42). Pozorovatel v S' „odhalil“ tedy u pozorovatele v S „chybu“ měření a našel „vysvětlení“ jeho výsledku.

Ptejme se nyní, zda má pozorovatel v S' na základě svého „odhalení“ a „vysvětlení“ vskutku právo pokládat měření pozorovatele v S za chybná a kontrakci, kterou zjistil u rozměrů těles klidných vůči S' , za „zdánlivou“. Zřejmě nemá, neboť při své kritice měření konaných v S a při odvození svého vzorce (46) pokládal kon-

trakci, kterou sám zjistil na tělesech klidných vůči S (na měřítku pozorovatele v S), za skutečnou. Pozorovatel v S by mohl kritizovat stejným způsobem a obdobně „vysvětlovat“ výsledky měření v systému S' . Nebylo by však ani správné, kdyby se relativistická kontrakce délek (42) i (43) vůbec prohlašovala za zdánlivou a za pravou a správnou délku tyče se pokládala pouze její délka l_0 (popř. L_0) zjištěná v jejím klidovém systému. Ukážeme si, že zkrácenou délku tyče v pohybu (definovanou jako vzdálenost současných poloh obou jejích konců) musíme pokládat za stejně skutečnou, objektivní délku tyče, jako její klidovou, vlastní délku l_0 . Délka tyče je opět pojem relativní; představuje vlastnost (a veličinu) určenou nejenom samotnou tyčí, ale i systémem, v němž ji zjišťujeme (měříme).

5.2. PŘÍKLAD NA POUŽITÍ RELATIVNÍ DÉLKY TYČE

Omezíme zatím své úvahy na tělesa (tyče) inerciální, tj. na tělesa, jejichž klidové systémy jsou prakticky inerciální. Klidová délka l_0 je ovšem pro danou tyč význačná, neboť je to délka měřená v systému, který je pro popis té tyče význačný. Víme však, že význačnost klidového systému není význačností z hlediska fyzikálních zákonů. Z hlediska fyzikálních zákonů jsou pro popis daného tělesa a fyzikálních jevů na něm probíhajících všechny inerciální systémy rovnocenné. Uvidíme, že pro popis dané tyče v inerciálním systému S , v němž se ta tyč pohybuje (zatím podle uvedeného omezení jen rovnoměrně translačně), má její délka l podobný význam, jaký má její klidová délka $l_0 = l'$ pro popis v jejím klidovém systému $S_0 \equiv S'$. Naproti tomu vlastní délka l_0 není pro popis tyče v systému S nijak zvláště vhodným a přirozeným pojmem. Tak např. v systému S , pro tyč ležící v ose I a pohybující se rychlostí $v > 0$, je l_0 vzdáleností poloh obou konců tyče zaznamenaných nikoliv současně, ale v časovém odstupu Δt , který je určen rovnicemi $\Delta x'_1 = \gamma(\Delta x_1 - v\Delta t)$ a $\Delta x_1 = \Delta x'_1 = l_0$. To dává $\Delta t = l_0(1 - \gamma^{-1})/v$, takže poloha $x_1(A)$ zadního konce tyče M musí být zaznamenána dříve než poloha $x_1(B)$ předního konce N . Je zřejmé, že takto určená veličina l_0 nemůže být pro popis tyče v systému S vhodnou a důležitou veličinou. (Ani poměr $l_0/\Delta t = v/(1 - \gamma^{-1}) = c^2(1 + \gamma^{-1})/v > c^2/v > c$ nemá důležitý fyzikální význam.)

Přirozený fyzikální význam i praktickou důležitost délky $l = \gamma^{-1} l_0$ v systému S si objasníme relativistickým rozбором a výkladem Michelsonova popř. Kennedyova-Thorndikeova pokusu. Pro popis tohoto pokusu je ovšem „lokálně význačným“ klidový systém přístroje, tj. prakticky inerciální systém S_0 spojený se Zemí. V něm mají ramena interferometru délky l_{10} , l_{20} (vlastní délky) nezávislé na orientaci přístroje. Světlo se vůči S_0 a tedy vůči přístroji šíří všemi směry stejnou rychlostí c . Doby, které světlo potřebuje k proběhnutí ramen tam i zpět, jsou tedy

$$\Delta t_{10} = 2l_{10}/c, \quad \Delta t_{20} = 2l_{20}/c \quad (47)$$

a jsou rovněž nezávislé na orientaci aparatury. Údaje Δt_{10} , Δt_{20} jsou přirozeně vyjádřeny v jednotkách vlastního času přístroje.

Z hlediska obecných fyzikálních zákonů *rovnocenný popis experimentu lze však podat i v inerciálním systému S*, vůči němuž se Země popř. přístroj pohybuje *prakticky konstantní rychlostí v*. Rozbor provedený v tomto systému musí předpovídat též výsledek pokusu, neboť ten je absolutním faktem. Nechť rameno 2 stojí kolmo ke směru rychlosti v . Jeho délka v systému S (vzdálenost současných poloh zrcátek M a Z_2 na obr. 7.) je tedy podle (44a) $l_2 = l_{20}$. Světelný signál, který vyjde v daném okamžiku t z místa $M(t)$, postupuje vůči systému S rychlostí c (nezávisle na pohybu zrcátka M), neboť S je inerciální systém a platí v něm zákon konstantní rychlosti světla. Aby se vrátil k zrcátku M , musí signál v systému S proběhnout dráhu $M(t) \rightarrow Z_2(t + \frac{1}{2} \Delta t_2) \rightarrow M(t + \Delta t_2)$. Poněvadž se M a Z_2 pohybují rychlostí v kolmo ke směru $M(t) Z_2(t)$, je Δt_2 určeno rovnicí

$$c \Delta t_2 = 2[(v \cdot \frac{1}{2} \Delta t_2)^2 + l_2^2]^{\frac{1}{2}},$$

z níž plyne

$$\Delta t_2 = 2\gamma l_2/c = \gamma \cdot 2l_{20}/c = \gamma \Delta t_{20}. \quad (48a)$$

(Srovnej též s výpočtem Δt_1 v Ú III 15. Dráha v éteru je nyní nahrazena drahou v systému S.)

Rameno 1 má směr rychlosti v a jeho délka v systému S (vzdálenost současných poloh zrcátek M a Z_1 na obr. 7) je tedy $l_1 = \gamma^{-1} l_{10}$. Světlo, které vyjde v čase t z místa $M(t)$ a dojde k zrcadlu Z_1 v čase $t + \Delta t_+$ (v místě $Z_1(t + \Delta t_+)$), proběhne v systému S dráhu

$$c \Delta t_+ = l_1 + v \Delta t_+,$$

takže

$$\Delta t_+ = l_1/(c - v).$$

Na zpětné cestě $Z_1 M$ proběhne v systému S dráhu $Z_1(t + \Delta t_+) \rightarrow M(t + \Delta t_+ + \Delta t_-)$, takže platí

$$c \Delta t_- = l_1 - v \Delta t_-$$

čili

$$\Delta t_- = l_1/(c + v).$$

(Srovnej opět s Ú III 15). Celkem tedy máme

$$\Delta t_1 \equiv \Delta t_+ + \Delta t_- = 2l_1\gamma^2/c = \gamma \cdot 2l_{10}/c = \gamma \Delta t_{10}. \quad (48b)$$

Časový rozdíl

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = \gamma(\Delta t_{10} - \Delta t_{20}) = (2\gamma/c)(l_{10} - l_{20}) \quad (48c)$$

se shoduje s hodnotou odvozenou v odst. III 4,3 (viz např. (III 21a)). Z podaného odvození vzorců pro Δt_+ a Δt_- je vidět, že délka l_1 má význam skutečné délky ramena MZ_1 v systému S. Vidíme také, že se v těchto vzorcích uplatňují rozdíly rychlostí

světelného signálu a přístroje vůči systému S. (Viz závěr odst. 2.) A nakonec je zřejmé, že faktory γ na pravých stranách rovnic (48a,b,c) vlastně jenom převádějí údaje odčítané na hodinách pohybujících se s přístrojem na údaje souměrných hodin systému S, ve shodě se vzorci (30b) popř. (33) pro dilataci času.

5.3. JINÉ PŘÍKLADY VZDÁLENOSTÍ A JEJICH TRANSFORMACE

Veličiny l i l_0 mají význam nejenom pro pevnou hmotnou tyč. Lze jich použít např. i pro dva volné hmotné body (bodové objekty) M, N , které se vůči inerciálnímu systému S pohybují stejnou konstantní rychlostí v ($v < c$), a mají tedy společný inerciální klidový systém S_0 . Pohybují-li se však body M, N vůči S jiným způsobem, např. obecně podle rovnic

$$x_j(M, t) = f_j(t), \quad x_j(N, t) = g_j(t), \quad (49)$$

nemají společný klidový systém S_0 a veličinu l_0 (klidovou vzdálenost) již nelze definovat. Naproti tomu veličina

$$l(t) = |x(N, t) - x(M, t)| \quad (50)$$

si v systému S zachovává svůj význam i v tomto obecném případě.

Chceme-li nyní vypočítat vzdálenost $l'(t')$ bodů M, N v systému S' v libovolném okamžiku t' , musíme nejprve určit pohyb bodů M, N v systému S' rovnicemi

$$x'_j(M, t') = f'_j(t'), \quad x'_j(N, t') = g'_j(t'), \quad (49')$$

a pak teprve použít vzorce

$$l'(t') = |x'(N, t') - x'(M, t')|, \quad (50')$$

který je tvarem shodný se vzorcem (50). Je-li systém S' určen transformací (12), převádíme (transformujeme) rovnice (49) na rovnice (49') takto: Bodové události A určené v systému S daty t_A , $x_j(A) \equiv x_j(M, t_A) = f_j(t_A)$ přísluší v systému S' čas

$$t'_A = \gamma[t_A - vc^{-2} f_1(t_A)].$$

Řešením této rovnice podle t_A dostaneme vyjádření $t_A = F(t'_A)$ a dosadíme-li do transformačních vzorců (12), vyjádříme souřadnice $x'_j(A) \equiv x'_j(M, t'_A)$ takto:

$$x'_1(M, t'_A) = \gamma[f_1(t_A) - vt_A] \equiv f'_1(t'_A),$$

$$x'_2(M, t'_A) = f_2(t_A) = f_2[F(t'_A)] \equiv f'_2(t'_A),$$

$$x'_3(M, t'_A) = f_3(t_A) \equiv f'_3(t'_A).$$

Podobným postupem při události B určené daty t_B , $x_j(B) = g_j(t_B)$ nalezneme vyjádření $t_B = G(t'_B)$ a $x'_j(N, t'_B) = g'_j(t'_B)$. Poněvadž hodnoty t_A , t_B jsou libovolné, můžeme je volit tak, aby platilo $t'_A = t'_B = t'$, a máme rovnice (49'). Veličinu $l'(t')$ nyní nelze vyjádřit obecným explicitním vzorcem pomocí $l(t)$, ani když např. zvolíme $t = F(t')$, takže obě vzdálenosti l i l' jsou měřeny od téže události na bodu (objektu) M . Jednoduchý, ale důležitý speciální případ dvou bodových objektů M , N , jejichž klidová vzdálenost l_0 není definována, viz v Ú 18.

Kromě „okamžité“ vzdálenosti $l(t) \equiv r_{MN}$ dvou bodů M , N má ve fyzice značnou důležitost též jejich vzdálenost definovaná vztahy

$$R = |x(N, t_B) - x(M, t_A)| = c(t_B - t_A). \quad (51)$$

(Srovnej se vztahy (II 19, 20)). Veličina R je zřejmě vzdálenost míst dvou bodových událostí, první na objektu M , druhé na objektu N , spojeným světelným signálem postupujícím od M k N .

Ve speciálním případě, kdy se body M , N pohybují po ose l , platí pro transformaci vzdálenosti R ze systému S do systému S' určeného transformací (12) velmi jednoduchý vzorec, který si snadno odvodíme. Nejprve však udejme, jak se prakticky měří vzdálenost R . Představme si např., že z počátku O inerciálního systému S odstartovaly kdysi dvě kosmické lodi M a N ve směru osy l a v čase $t = 0$ i později jsou někde na ní. V bodě O je radarová stanice, která v čase $t = 0$ vyšle ve směru osy l signál. „Ozvěna“ od M se vrátí do O v čase $2t_A > 0$ a od N v čase $2t_B$; nechť $t_B > t_A$. Poněvadž systém S je inerciální a signál tedy postupuje vůči němu v obou směrech stejnou rychlostí c , zastihl zřejmě loď M v čase t_A v místě $x_1(M, t_A) = ct_A$ a loď N v čase t_B v místě $x_1(N, t_B) = ct_B$. Máme tedy vztahy

$$\begin{aligned} R &= x_1(N, t_B) - x_1(M, t_A) \equiv \Delta x_1, \\ R &= c(t_B - t_A) \equiv c \Delta t = \Delta x_1 > 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Popišme nyní tuto operaci v systému S' určeném transformací (12). Z hlediska systému S' byl signál vyslán z počátku O' v čase $t' = 0$, šíří se vůči S' tam i zpět rychlostí c a ozvěny se vrátí do O' v časech $2t'_A > 0$, $2t'_B > 2t'_A$. Signál zastihl lodi M a N v časech t'_A , t'_B v místech $x'_1(M, t'_A) = ct'_A$, $x'_1(N, t'_B) = ct'_B$ a proto platí vztahy

$$\begin{aligned} R' &= x'_1(N, t'_B) - x'_1(M, t'_A) \equiv \Delta x'_1, \\ R' &= c(t'_B - t'_A) \equiv c \Delta t' = \Delta x'_1 < 0. \end{aligned} \quad (52')$$

Bodové události A , B určené daty $x'_1(M, t'_A)$, t'_A a $x'_1(N, t'_B)$, t'_B jsou však identické s bodovými událostmi uvažovanými při popisu měření v systému S a proto podle transformace (12) platí

$$\begin{aligned} \Delta x'_1 &= \gamma(\Delta x_1 - v \Delta t) = \gamma(1 - \beta) \Delta x_1 \\ \text{čili} \\ R' &= [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{\frac{1}{2}} R. \end{aligned} \quad (53)$$

Kromě toho platí také

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - vc^{-2} \Delta x_1) = \gamma(1 - \beta) \Delta t \\ \text{čili} \\ \Delta t' &= [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{\frac{1}{2}} \Delta t, \end{aligned} \quad (54)$$

v soulase s (52), (52') a (53).

Jsou-li body M a N v systému S' nehybné, je ovšem $R' = l_0$ (klidová vzdálenost) a vztah (53) lze přepsat na

$$R = l_0[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{\frac{1}{2}} = l/(1 - \beta) > l_0 > l. \quad (53a)$$

Veličina $l = \gamma^{-1} l_0$ je obyčejná vzdálenost bodů M a N v systému S (vzdálenost jejich současných poloh). Vzorce (53), (53a) zřejmě předpokládají, že radiolokační signál postupuje od M k N ve směru pohybu systému S' vůči S . V opačném případě by bylo nutno v nich psát $(-\beta)$ místo β , pokládáme-li β za kladné. (Viz též Ú 19.)

5.4. „PARADOX“ ROTUJÍCÍHO KOTOUČE

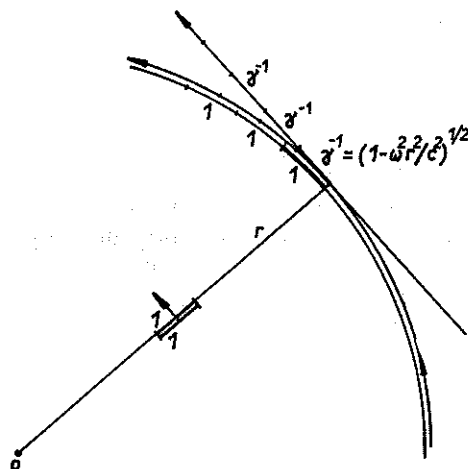
V odst. III 5,1 jsme ukázali, že Lorentzovu kontrakci podélných rozměrů hmotných těles v rovnoměrném translačním pohybu vůči éteru lze vyložit dynamicky, tj. zdůvodnit ji na základě jistých obecných vlastností pravých sil působících uvnitř tělesa. Nyní jsme kvantitativně stejné, ale relativní zkrácení rozměrů inerciálních těles (nebo vzdáleností bodů majících společný inerciální klidový systém) odvodili přímo z Lorentzovy transformace, tedy jen úvahami „čistě kinematické povahy“. To ovšem neznamená, že předpoklady o vlastnostech sil jsou nyní zbytečné. Je nutno si uvědomit, že požadavky na síly schopné udržovat skutečné délky pevných inerciálních měříték v soulase s předpověďmi plynoucími z Lorentzovy transformace, jsou zase skrytě obsaženy v Einsteinově principu relativity, popř. v požadavku invariance obecných fyzikálních zákonů vůči Lorentzovým transformacím. Později uvidíme, že z toho požadavku plynou pro složky pravých sil transformační vzorce formálně shodné se vzorci (III 36a) popř. (III 42). (Vzorec (III 36a) zřejmě odpovídá aktivní interpretaci transformace složek síly f .)

Nyní si ukážeme, že porušení inerciálnosti „klidového systému“ pevného tělesa, provázené vznikem zdánlivých sil, jejichž vlastnosti se liší od vlastností sil pravých, se nutně projeví i v délkových měřeních prováděných pomocí standardních pevných měříték klidných vůči tělesu.

Mějme inerciální systém S , v jehož rovině (1, 2) leží kotouč o poloměru r a se středem v počátku O . Kotouč se vůči S otáčí kolem osy 3 úhlovou rychlostí ω . Obvodová rychlost $\omega r < c$ je značná. Nad rotujícím kotoučem si představme průhlednou desku, která je v klidu vůči systému S , a na ní narysovanou kružnici

přesně se kryjí s obvodem kotouče. Poloměr i obvod kruhu na klidné desce se dá změřit přikládáním měřítka (inerciálního) a můžeme se tak přesvědčit, že naše kružnice má délku $2\pi r$.

Pozorovatel na rotujícím kotouči má stejné měřítko jako pozorovatel na klidné desce. Obě měřítka lze srovnat u středu kotouče, kde je i měřítko na kotouči prakticky v klidu vůči S a nepůsobí na ně žádné síly. Při měření poloměru kotouče může pozorovatel postupovat tak, že měřítko vždy „zavěsí“ na konci bližším ke středu a nechá volně ležet podél poloměru. (Pod účinkem odstředivé síly se ovšem měřítko napne a prodlouží. Pozorovatel však zná vlastnosti materiálu měřítka a může proto snadno délku měřítka nebo výsledky měření opravit. Pro jednoduchost můžeme předpokládat, že materiál měřítka je tak „tuhý“, že se vystačí bez korekcí.) Takto může (pozorovatel na kotouči) *vynést na rotující poloměr jednotkové dílky* a určit poloměr kotouče.



Obr. 14.

desce, který vidí na kotouč. Může si zaznamenat oba konce dílky, právě když máji jeho stanoviště, a srovnat jej s vlastním jednotkovým dílkem vneseným na klidném poloměru své kružnice. Vzhledem k tomu, že se dílky na poloměru kotouče pohybují kolmo ke svému směru, budou se dílky vnesené na obou poloměrech shodovat a oba pozorovatelé naměří tedy u kryjících se kružnic stejný poloměr r . (Viz obr. 14.)

Zcela jinak to dopadne na obvodu kotouče. Pozorovatel na průhledné desce zjistí, že pozorovatel na kotouči vynáší na obvod kotouče menší dílky než vynášel na poloměr. Zjistí totiž zkrácení měřítka v poměru $\gamma^{-1} = (1 - \omega^2 r^2 / c^2)^{1/2}$. Pozorovatel na kotouči je ovšem přesvědčen, že nanáší správné (jednotkové) dílky. Může ho o tom ubezpečit třetí pozorovatel, který se pohybuje rychlostí $v = \omega r$ po tečně k obvodu kotouče a jehož měřítko (inerciální!) je v bodě dotyku právě v klidu vůči měřítku na obvodu kotouče. Tento třetí pozorovatel zjistí, že měřítko na obvodu rotujícího kotouče má stejnou délku jako jeho vlastní, kdežto měřítko na obvodu kružnice na „klidné desce“ nalezne kratší (vzájemnost zkrácení ve dvou inerciálních systémech). Na obr. 14 jsou zakresleny délky měřítka, které zjišťuje pozorovatel na klidné desce.

Přes všechny tyto okolnosti pozorovatel na kotouči nanese na obvod *více* „jednotkových dílků“ než pozorovatel na klidné desce. Můžeme si představit, že podél kružnice na klidné (inerciální) desce jsou rozestaveny synchronizované hodiny

a jimi ovládané fotoaparáty, které v daném okamžiku určí polohu všech „dělících čárek“ na obvodu kotouče vůči dělícím čárkám na obvodu pevné kružnice. Protože všechny dílky na obvodu kotouče jsou menší než dílky na pevné kružnici a obě kružnice se kryjí, jednoznačně z toho vyplývá uvedený závěr o počtu dílků. Pozorovatel na kotouči naměří obvod kotouče $2\pi r' > 2\pi r$ a usoudí tedy, že na kotouči neplatí poučky euklidovské geometrie.

Vzhledem k tomu, že různý počet jednotkových dílků vnesených na obvod rotujícího kotouče a na obvod kružnice (téhož poloměru) na inerciální desce je fakt absolutní, není mezi rotující a inerciální deskou podobný symetrický vztah jako mezi dvěma inerciálními systémy. To se projevuje také tím, že na rotujícím kotouči nelze synchronizovat hodiny podobným způsobem jako v inerciálním systému. (Víme již, že hodiny na obvodu jdou pomaleji než ve středu kotouče.) Ze Sagnacova pokusu také víme, že se světlo vůči kotouči ve směru obvodu nešíří v obou smyslech oběhu stejně rychle. Konečně pak na rotujícím kotouči působí zdánlivé síly, které se v inerciálních systémech nevyskytují. Všecky tyto (i další jiné) skutečnosti vedou k novým závažným teoretickým problémům, jejichž přesnou relativistickou formulaci a řešení podává teprve obecná teorie relativity. Zatím se omezíme na používání inerciálních systémů.

Poznámka 1. V předcházejícím výkladu o délkových měřeních na rotujícím kotouči jsme se úmyslně vyhnuli otázce, co se stane s kotoučem a s jednotkovými dílky vnesenými na jeho poloměru a obvodě, když se roztočí nebo zastaví: nemusí být totiž prakticky v naší moci kotouč zastavit. (Nemůžeme např. zastavit rotující Zemi.) Za druhé odpověď závisí na vlastnostech materiálu, z něhož je kotouč zhotoven; neznáme-li je, nemůžeme říci, co se např. stane s poloměrem kotouče při roztáčení. Není to sice u problému délkových měření na rotujícím kotouči podstatné, ale je známo, že studenti často nejvíce zajímají právě takové, pro věc nepodstatné otázky.

Učiňme tedy pro jednoduchost předpoklad (libovolný), že kotouč je tuhý radiálně (odstředivé síly vznikající při roztáčení kotouče nezmění jeho poloměr) i ohybově (jeho povrch zůstane i po roztočení rovinný). Počet jednotkových dílků vnesených na poloměr a obvod kotouče, pokud byl v klidu, je zřejmě stejný, jako počet dílků na poloměru a obvodu kružnice na klidné průhledné desce. Na roztočeném kotouči nalezne tedy pozorovatel staré dílky na obvodu delší než je jeho jednotková tyč: roztočený kotouč je na obvodě napjat, kdežto měrná tyč, jejíž konce jsou volné, zůstane nenapjatá. Ze stanoviska pozorovatele na klidné desce se měrná tyč na obvodu rotujícího kotouče zkrátí a staré dílky zůstaly beze změny (napětí zabránilo jejich zkrácení). Pozorovatel na kotouči však může říci, že jeho měřítko zůstalo stejně dlouhé, ale obvod kotouče se prodloužil a geometrie v jeho rovině přestala být euklidovskou.

Poznámka 2. Výklad Sagnacova pokusu podle speciální teorie relativity (v inerciálním systému, v němž je osa rotující desky v klidu) je zcela stejný jako výklad podaný v Ú III 21 podle teorie Lorentzovy.

6. TRANSFORMACE RYCHLOSTI A ZRYCHLENÍ

6.1. TRANSFORMACE SLOŽEK RYCHLOSTI BODU V LIBOVOLNÉM POHYBU

V předchozích úvahách jsme se již setkali se vzorci pro transformaci složek konstantní rychlosti bodu M ze systému S do systému S' určeného transformací (12). Jsou to vzorce (16), s jejichž důsledky jsme již obeznámeni. Nyní si ukážeme, že stejné vzorce platí, i když pohyb bodu M vůči systému S popř. S' není rovnoměrný přímočarý, jak předpokládají rovnice (3) popř. (3'), kterých jsme použili při odvození vzorců (16).

Nechť se bod M vůči systému S pohybuje obecně podle rovnic (49), tj.

$$x_j(M, t) = f_j(t). \quad (55)$$

Jeho pohyb vůči systému S' je pak určen rovnicemi

$$\begin{cases} x'_1(M, t') = \gamma[x_1(M, t) - vt], \\ x'_2(M, t') = x_2(M, t), \\ x'_3(M, t') = x_3(M, t), \end{cases} \quad (55')$$

přičemž vztah mezi t a t' v rovnicích (55') je dán rovnicí

$$t' = \gamma[t - vc^{-2} x_1(M, t)]. \quad (56)$$

Definujeme-li složky rychlosti bodu M vůči S a S' vzorci $u_j = dx_j/dt$, $u'_j = dx'_j/dt'$, plyne z rovnice (56) vztah

$$dt'/dt = \gamma(1 - vu_1/c^2) \quad (57)$$

a z rovnic (55') dostáváme

$$\begin{aligned} u'_1 &= \gamma(u_1 - v) dt/dt' = (u_1 - v)(1 - vu_1/c^2)^{-1} \\ u'_2 &= u_2 \gamma^{-1}(1 - vu_1/c^2)^{-1}, \\ u'_3 &= u_3 \gamma^{-1}(1 - vu_1/c^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (58)$$

ve formální shodě s (16). Vzorce (58) jsou ovšem obecnější, neboť složky $u_j \equiv u_j(M, t)$ jsou nyní funkcemi času t a složky $u'_j \equiv u'_j(M, t')$ funkcemi času t' , přičemž t a t' jsou vázány vztahem (56). (Data t , $x_j(M, t)$, $u_j(M, t)$ i data t' , $x'_j(M, t)$, $u'_j(M, t')$ se vztahují k téže „bodové události“.)

Z první z rovnic (58) snadno plyne užitečný vztah

$$(1 + vu'_1/c^2)(1 - vu_1/c^2) = \gamma^{-2} \equiv 1 - v^2/c^2. \quad (59)$$

Dále plyne z rovnic (58) opět vztah (17), který lze zapsat též ve tvaru

$$\gamma_{(u')} = \gamma_{(u)} \gamma(1 - vu_1/c^2). \quad (60)$$

Vzorce (58) lze snadno obrátit a získat tak vzorce (58') vyjadřující veličiny u_j pomocí u'_j . Tyto vzorce nevypisujeme, neboť vzniknou z (58) prostou výměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a obrácením znaménka při v . Z (58') pak plynou vztahy (59'), (60'), které vzniknou z (59) a (60) stejným způsobem jako (58') z (58). Vidíme, že je (59') $\equiv$ (59) $\equiv$ (60) $\cdot$ (60'). Se vztahem (60') jsme se také už setkali ve speciálním případě $u \equiv (u, 0, 0)$, $u' \equiv (u', 0, 0)$, kdy přechází na (23). V tomto speciálním případě platí též užitečný vztah

$$\frac{c - u'}{c + u'} = \frac{c - u}{c + u} \cdot \frac{c + v}{c - v}. \quad (61)$$

6.2. TRANSFORMACE SLOŽEK ZRYCHLENÍ. KLIDOVÉ ZRYCHLENÍ

Definujme složky zrychlení $a_j \equiv du_j/dt$, $a'_j \equiv du'_j/dt'$. Derivujeme-li rovnice (58) podle t' a použijeme-li při tom opět vztahu (57), dostaneme po jednoduchých úpravách transformační vzorce

$$\begin{aligned} a'_1 &= \gamma^{-3}(1 - vu_1/c^2)^{-3} a_1, \\ a'_2 &= \gamma^{-2}(1 - vu_1/c^2)^{-2} [a_2 + a_1(vu_2/c^2)(1 - vu_1/c^2)^{-1}], \\ a'_3 &= \gamma^{-2}(1 - vu_1/c^2)^{-2} [a_3 + a_1(vu_3/c^2)(1 - vu_1/c^2)^{-1}]. \end{aligned} \quad (62)$$

Inverzní vztahy (62'), tj. vyjádření a_j pomocí a'_j a u'_j dostaneme opět tím, že čárkované veličiny nahradíme nečárkovanými a naopak a změníme znaménko u v .

Ze vzorců (62) plyne, že při $a = 0$ je také $a' = 0$. To ovšem už víme z rovnic (58), z nichž je vidět, že při $u = \text{konst}$ je také $u' = \text{konst}$. Ze vztahů (62) však dále vidíme, že při $a = \text{konst} \neq 0$ už obecně není $a' = \text{konst}$ ani $a' = a$, jak tomu bylo při transformaci Galileiho. Může však být ve speciálním případě v daném okamžiku $a' = a \neq 0$ i při $v \neq 0$ (viz Ú 20).

Je-li $u(M, t) = (v, 0, 0)$, tj. podle (58) $u'(M, t') = 0$, a tedy bod M v daném okamžiku v klidu vůči $S' \equiv S_0$, nazýváme zrychlení $a'(M, t') \equiv a_0$ klidovým nebo vlastním zrychlením. Z rovnic (62) popř. (62') dostáváme mezi klidovým zrychlením a zrychlením v systému S (v němž má bod M právě rychlost $u = (v, 0, 0)$) vztahy

$$a_1 = \gamma^{-3} a_{01}, \quad a_2 = \gamma^{-2} a_{02}, \quad a_3 = \gamma^{-2} a_{03}, \quad (63a)$$

čili

$$a_{\parallel} = \gamma^{-3} a_{0\parallel}, \quad a_{\perp} = \gamma^{-2} a_{0\perp}, \quad (63b)$$

formálně shodné a významem analogické vztahům (III 40). Tehdy byl ovšem systém S „v klidu vůči éteru“. Lze ukázat, že klidové zrychlení je maximální, tj. větší než v kterémkoliv jiném inerciálním systému. Dokazovat to zatím nebudeme, protože v následující kapitole to dokážeme snadněji a obecněji než bychom to mohli udělat nyní.

7. ZOBECNĚNÍ SPECIÁLNÍ LORENTZOVY TRANSFORMACE NA LIBOVOLNÝ SMĚR RYCHLOSTI

7.1. ODVOZENÍ TRANSFORMACE A JEJÍ VLASTNOSTI

V dalším nám bude velmi užitečné zobecnění Lorentzovy transformace (12) na případ, kdy rychlost osového trojhranu nového systému vůči původnímu má libovolný směr. Při transformaci (12) má zmíněná rychlost směr osy 1, $\mathbf{v} \equiv (v, 0, 0)$. Mohla by mít také směr osy 2 nebo 3. To by byla stále speciální transformace „typu (12)“. Nás zajímá podobná transformace $S \rightarrow S^+$, která odpovídá translaci rychlostí $\mathbf{V} \equiv (V_1, V_2, V_3)$.

Slovem *podobná* se rozumí toto: Pro $x_j = 0$, $t = 0$, má být také $x_j^+ = 0$, $t^+ = 0$. (Počátek O^+ prochází počátkem O v čase $t = 0$ a obráceně počátek O prochází počátkem O^+ v čase $t^+ = 0$.) Dále transformace $S \rightarrow S^+$ nemá zahrnovat otočení trojhranu os 1^+ , 2^+ , 3^+ vůči trojhranu os $1, 2, 3$. To však nyní neznamena, že např. v okamžiku $t = 0$ musí osy 1^+ , 2^+ , 3^+ splývat s osami $1, 2, 3$. Takový požadavek by ani nebylo možno splnit, neboť následkem podélného zkrácení se při obecném směru rychlosti $\mathbf{V}$ bude např. krychle s hranami v osách 1^+ , 2^+ , 3^+ jevit — z hlediska systému S — jako obecný rovnoběžnostěn! Požadavek transformace $S \rightarrow S^+$ bez otočení trojhranu os 1^+ , 2^+ , 3^+ lze však vyjádřit takto: Bude-li se v systému S počátek O^+ systému S^+ pohybovat podle rovnice

$$x_j(O^+, t) = u_j(O^+) t = V_j t,$$

musí se v systému S^+ počátek O systému S pohybovat podle rovnice

$$x_j^+(O, t^+) = u_j^+(O) t^+ = -V_j t^+.$$

Kdyby transformace $S \rightarrow S^+$ obsahovala otočení, neplatily by vztahy

$$u_j(O^+) = -u_j^+(O) = V_j,$$

nýbrž pouze $u(O^+) = u^+(O) = V$ (stejná velikost obou rychlostí).

V dalším odstavci uvidíme, že hledanou transformaci $S \rightarrow S^+$ nelze získat složením transformací typu (12) v různých osách. Sestrojíme si ji tímto postupem: Představme si nějaký „abstraktní“, trojrozměrný euklidovský prostor a v něm zvolený kartézský systém Σ . Z počátku systému Σ si nyní vyneseme tři „abstraktní průvodiče“. Za první průvodič $\mathbf{x}$, jehož složky v osách systému Σ jsou x_j , tj. rovnají se souřadnicím určujícím v systému S polohu jisté bodové události $A \equiv (x_j, t)$. Za druhé průvodič $\mathbf{x}^+$, jehož složky v osách systému Σ jsou x_j^+ , tj. rovnají se souřadnicím téže bodové události $A \equiv (x_j^+, t^+)$ v systému S^+ . Konečně za třetí průvodič $\mathbf{V}$, jehož složky V_j v osách systému Σ se rovnají složkám rychlosti $\mathbf{u}(O^+) = \mathbf{V}$ v osách systému S .

V této abstraktní, obrazné interpretaci veličin x_j , x_j^+ , V_j můžeme transformaci $S \rightarrow S^+$ zapsat jako vztahy mezi našimi třemi průvodiči a veličinami t a t^+ takto:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \{(\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} - \gamma_{(V)} t\} \mathbf{V}, \quad (64a)$$

$$t^+ = \gamma_{(V)} \{t - c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}\}. \quad (64b)$$

Snadno se přesvědčíme, že je to správná transformace; ukážeme, že splňuje všechny naše požadavky.

Volme nejprve $\mathbf{V} \equiv (v, 0, 0)$, takže $V^2 = v^2$, $\gamma_{(V)} = \gamma_{(v)} \equiv \gamma$ a $\mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = vx_1$. Rozepíšeme-li nyní vektorovou rovnici (64a) ve složkách v osách systému Σ , dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x_1^+ &= \gamma(x_1 - vt), \\ x_2^+ &= x_2, \\ x_3^+ &= x_3. \end{aligned} \quad (65a)$$

Rovnice (64b) pak dává

$$t^+ = \gamma(t - vc^{-2}x_1). \quad (65b)$$

Vrátíme-li se tedy po rozepsání rovnic (64a, b) ve složkách v systému Σ k původnímu významu veličin x_j , t a x_j^+ , t^+ , máme v rovnicích (65a, b) právě speciální Lorentzovu transformaci (12).

Zbývá ukázat, že i v obecném případě, při libovolném směru rychlosti $\mathbf{V}$, dostaneme tímto postupem z rovnic (64a, b) vskutku to zobecnění transformace (12), které splňuje všechny naše požadavky. Položme tedy v (64a, b) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(O) = 0$. Pak dostáváme

$$\mathbf{x}^+(O) = -\gamma_{(V)} \mathbf{V} t, \quad t^+ = \gamma_{(V)} t, \quad t \equiv t(H_{(O)}),$$

čili $x_j^+(O, t^+) = -V_j t^+$, jak jsme požadovali. Obrácení transformace (64a, b) zní

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ + \{(\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}^+ + \gamma_{(V)} t^+\} \mathbf{V}, \quad (64^+a)$$

$$t = \gamma_{(V)} \{t^+ + c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}^+\}. \quad (64^+b)$$

Tato transformace vyjadřuje zpětný přechod od S^+ k S a vznikne z (64a, b) záměnami $\mathbf{x} \rightleftharpoons \mathbf{x}^+$, $t \rightleftharpoons t^+$, $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$. Lze se přesvědčit, že dosazením z (64a, b) do (64⁺a, b) dostáváme vskutku $\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $t = t$. Položíme-li nyní $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^+(O^+) = 0$, plynou z (64⁺a, b) rovnice

$$\mathbf{x}(O^+) = \gamma_{(V)} \mathbf{V} t^+, \quad t = \gamma_{(V)} t^+, \quad t^+ \equiv t^+(H_{(O^+)}),$$

tj. $x_j(O^+, t) = V_j t$, opět v soulase s předpokladem o pohybu O^+ v systému S .

Nakonec lze užitím (64a,b) snadno potvrdit vztah

$$[x^+ - x^+(P)]^2 - c^2(t^+ - t_P^+)^2 = [x - x(P)]^2 - c^2(t - t_P)^2,$$

který při

$$|x - x(P)| = c(t - t_P)$$

dává

$$|x^+ - x^+(P)| = c(t^+ - t_P^+),$$

a podle rozboru rovnic (13) a (13') tedy vede k tomuto výsledku: Šíří-li se světlo v systému S všemi směry stejnou rychlostí c , šíří se tím způsobem i v systému S^+ . Je-li tedy systém S inerciální, je jím i systém S^+ .

Rovnice (64a,b) představují vhodný, symbolický zápis hledaného zobecnění speciální Lorentzovy transformace. Je však nutno ještě upozornit na to, že transformace typu (64a,b) *obecně netvoří grupu*, neboť složením dvou takových transformací $S \rightarrow S^+$, a $S^+ \rightarrow S^{++}$ nevznikne obecně transformace téhož tvaru. Aby to nastalo, musí mít rychlost systému S^{++} vůči S^+ stejný směr jako rychlost systému S^+ vůči S. Proč je tomu tak, to si objasníme v odstavci 8.

7.2. POUŽITÍ TRANSFORMACE

Z rovnic (64a,b) lze vyvodit i všechny ostatní důsledky charakteristické pro Lorentzovu transformaci. Volíme-li dvě bodové události A, B s $t_A = t_B$, plyne z (64a,b)

$$\begin{aligned} t_B^+ - t_A^+ &= -\gamma_{(V)} c^{-2} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{x}(B) - \mathbf{x}(A)] = \\ &= -c^{-2} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{x}^+(B) - \mathbf{x}^+(A)]. \end{aligned}$$

Je-li tedy vektor $\mathbf{x}(B) - \mathbf{x}(A)$ při $t_B = t_A$ kolmý k $\mathbf{V}$, je také $\mathbf{x}^+(B) - \mathbf{x}^+(A)$ kolmý k $\mathbf{V}$ a $t_B^+ = t_A^+$. (Srovnej s odstavcem 3.)

Je-li $dt^+(H^+)$ přírůstek údaje hodin H^+ pevných v systému S^+ (takže $d\mathbf{x}^+(H^+) = 0$), plyne z rovnice (64+b) vztah

$$dt = \gamma_{(V)} dt^+(H^+)$$

v soulase s (30b).

Je-li konečně $\mathbf{l}^+ = \mathbf{l}_0$ vektor spojující dva body M, N klidné v systému S^+ a je-li $\mathbf{l}$ vektor spojující současné polohy těch bodů v systému S, dává rovnice (64a) vztah

$$\mathbf{l}^+ = \mathbf{l} + (\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{V}.$$

Násobíme-li tuto rovnici skalárně jednotkovým vektorem $V^{-1}\mathbf{V}$, dostaneme

$$l_{\parallel}^+ \equiv l_{0\parallel} = l_{\parallel} + (\gamma_{(V)} - 1) l_{\parallel} = \gamma_{(V)} l_{\parallel},$$

a

$$\begin{aligned} l_{\perp}^+ \equiv l_{0\perp} &= |\mathbf{l}^+ - l_{\parallel}^+| = |\mathbf{l}^+ - l_{\parallel}^+ V^{-1}\mathbf{V}| = \\ &= |\mathbf{l} - V^{-2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{V}| = |\mathbf{l} - l_{\parallel}| \equiv l_{\perp}, \end{aligned}$$

v soulase s výsledky odst. 5.

Z rovnic (64a,b) lze také snadno odvodit příslušné zobecnění vzorců (58) a (62) pro transformaci rychlosti $\mathbf{u}$ a zrychlení $\mathbf{a}$ bodu M ze systému S do S^+ . Pro $\mathbf{u}^+$ platí např. vzorec

$$\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u} + [(\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} - \gamma_{(V)}] \mathbf{V}}{\gamma_{(V)} [1 - c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}]},$$

z něhož lze snadno odvodit i vztahy

$$(1 - c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u})(1 + c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}^+) = \gamma_{(V)}^{-2}$$

a

$$\gamma_{(u^+)} = \gamma_{(u)} \gamma_{(V)} (1 - c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}),$$

které zobecňují speciální vztahy (59) a (60).

Při $\mathbf{u} \perp \mathbf{V}$ se vzorec pro $\mathbf{u}^+$ zjednoduší na $\mathbf{u}^+ = \gamma_{(V)}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{V}$, při $\mathbf{u} \parallel \mathbf{V}$ na $\mathbf{u}^+ = (\mathbf{u} - \mathbf{V})(1 - c^{-2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u})^{-1}$. Odvození a rozbor vzorce pro $\mathbf{a}^+$ ponechávám čtenáři.

8. SKLÁDÁNÍ SPECIÁLNÍCH LORENTZOVÝCH TRANSFORMACÍ VE DVOU KOLMÝCH SMĚRECH

8.1. OTOČENÍ TROJHRANU OS PŘI SLOŽENÉ TRANSFORMACI

Od systému S přejdeme nejprve k systému S' transformací (12), čili transformací typu (64a,b) s rychlostí

$$\mathbf{u}(O') \equiv (v, 0, 0).$$

Od systému S' přejdeme dále k systému S'' transformací typu (12) odpovídající translaci ve směru osy $2'$ rychlostí W' , neboli transformací typu (64a,b) s rychlostí $\mathbf{u}''(O'') \equiv (0, W', 0)$. Podle vzorců inverzních k (58) má počátek O'' systému S'' vůči systému S rychlost

$$\mathbf{u}(O'') \equiv \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3) = (v, \gamma^{-1} W', 0),$$

a podle (60) platí v našem případě

$$\gamma' \equiv \gamma_{(W')} = \gamma_{(V)} \gamma (1 - v^2/c^2) = \gamma_{(V)} \gamma^{-1},$$

$$\gamma \equiv \gamma_{(v)}.$$

Rovnice vyjadřující transformaci $S \rightarrow S''$ dostaneme, dosadíme-li z rovnic

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = \gamma(t - vc^{-2}x_1),$$

které vyjadřují transformaci $S \rightarrow S'$, do rovnic

$$x''_1 = x'_1, \quad x''_2 = \gamma'(x'_2 - W't'), \quad x''_3 = x'_3, \quad t'' = \gamma'(t' - W'c^{-2}x'_2),$$

které vyjadřují transformaci $S' \rightarrow S''$. Zavedeme-li ještě místo veličin v, W' a γ' veličiny $V_1, \gamma V_2$ a $\gamma_{(V)}\gamma^{-1}$, dostaneme tak rovnice

$$\begin{aligned} x''_1 &= \gamma(x_1 - V_1 t), \\ x''_2 &= \gamma_{(V)}(\gamma V_1 V_2 c^{-2} x_1 + \gamma^{-1} x_2 - \gamma V_2 t), \\ x''_3 &= x_3, \\ t'' &= \gamma_{(V)}(-V_1 c^{-2} x_1 - V_2 c^{-2} x_2 + t). \end{aligned} \quad (66)$$

Je možno se přesvědčit, že platí vztah

$$x''_j x''_j - (ct'')^2 = x_j x_j - (ct)^2,$$

takže S'' je inerciálním systémem, je-li jím systém S .

Porovnejme nyní transformaci (66) s transformací $S \rightarrow S^+$ typu (64a,b) odpovídající téže translační rychlosti V počátku O^+ jakou má O'' (takže bude $O^+ \equiv O''$). Rozepíšeme-li rovnice (64a,b) v osách Σ při $V \equiv (V_1, V_2, 0)$, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} x_1^+ &= [1 + (\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} V_1^2] x_1 + (\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} V_1 V_2 x_2 - \gamma_{(V)} V_1 t, \\ x_2^+ &= (\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} V_1 V_2 x_1 + [1 + (\gamma_{(V)} - 1) V^{-2} V_2^2] x_2 - \gamma_{(V)} V_2 t, \\ x_3^+ &= x_3, \\ t^+ &= \gamma_{(V)}(-V_1 c^{-2} x_1 - V_2 c^{-2} x_2 + t). \end{aligned} \quad (67)$$

Porovnání rovnic (66) s (67) ukazuje, že transformace $S \rightarrow S''$ není typu (64a,b) a musíme nyní zjistit, čím se od ní liší. To znamená určit transformaci $S^+ \rightarrow S''$, již je nutno doplnit transformaci $S \rightarrow S^+$, aby vznikla transformace $S \rightarrow S''$.

Abychom určili transformaci $S^+ \rightarrow S''$, tj. vyjádřili veličiny x''_j, t'' veličinami x_j^+, t^+ , dosadíme do rovnic (66) ze vzorců inverzních k (67). Obrácení vztahů (67) získáme výměnou křížkovaných a nekřížkovaných veličin a obrácením znamének

veličin V_1 a V_2 . Tímto způsobem nalezneme, po uspořádání a úpravě pravých stran (66), transformaci $S^+ \rightarrow S''$ vyjádřenou takto:

$$\begin{aligned} x''_1 &= x_1^+ \cos \varphi + x_2^+ \sin \varphi, \\ x''_2 &= -x_1^+ \sin \varphi + x_2^+ \cos \varphi, \\ x''_3 &= x_3^+, \\ t'' &= t^+; \end{aligned} \quad (68)$$

koefficienty $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$ jsou určeny vzorcí

$$\cos \varphi = \frac{V_1^2 + \gamma_{(V)} V_2^2}{\gamma' V^2} > 0, \quad \sin \varphi = \frac{(1 - \gamma_{(V)}) V_1 V_2}{\gamma' V^2}. \quad (69)$$

Při $v > 0, W' > 0$ je $\sin \varphi < 0, -\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$.

Vidíme, že transformace $S^+ \rightarrow S''$ představuje prosté otočení trojhranu os systému S'' vůči trojhranu os systému S^+ o jistý úhel φ kolem společné osy $3'' \equiv 3^+$. Složení dvou speciálních transformací $S \rightarrow S'$ a $S' \rightarrow S''$ typu (12), tj. dvou čistých translací ve dvou různých směrech tedy vzniká transformace $S \rightarrow S''$, která již neodpovídá čisté translaci, nýbrž se skládá z čisté translace (ve směru ležícím v rovině určené směry obou původních translací) a z čistého otočení (kolem osy kolmé k té rovině). Proto také transformace typu (64a,b) obecně, tj. s různými směry translační rychlosti, netvoří grupu.

8.2. JEDNODUCHÉ ODVOZENÍ VZORCE PRO THOMASOVU PRECESI

Vraťme se nyní ke vzorcům (69) určujícím úhel otočení φ . Předpokládejme, že je $W' \ll v < c$, takže $\gamma' \doteq 1$ a $\gamma_{(V)} \doteq \gamma$. Pak je také $V_2 \ll V_1$. Vyjádříme-li nyní rychlost V ve tvaru vektorového součtu $V = v + dv$, v němž $v \equiv (v_1 = V_1 = v, 0, 0)$ a $dv \equiv (0, dv_2 = V_2 = \gamma^{-1} W', 0)$, můžeme vzorec pro $\sin \varphi$ zapsat ve tvaru

$$\sin \varphi \doteq \varphi = d\varphi \doteq (1 - \gamma) v^{-2} v_1 dv_2. \quad (69a)$$

Je-li dále také $v_1 = v \ll c$ (při zachování nerovnosti $dv_2 \ll v_1$), lze vzorec (69a) zjednodušit na

$$d\varphi \doteq -\frac{1}{2} c^{-2} v_1 dv_2. \quad (69b)$$

Jiné odvození přibližného vzorce (69b) viz v Ú 21.

Malé otočení kolem dané osy lze pokládat za vektor mající směr té osy a smysl určený (v pravotočivém systému) smyslem postupu pravotočivého šroubu. Vzorec (69a,b) lze pak zapsat ve vektorovém tvaru

$$\overrightarrow{d\varphi} \doteq (1 - \gamma) v^{-2} \mathbf{v} \times d\mathbf{v}, \quad (70a)$$

popř.

$$\vec{d\varphi} \doteq -\frac{1}{2}c^{-2} \mathbf{v} \times d\mathbf{v}. \quad (70b)$$

Představme si nyní, že inerciální systém S' , určený transformací $S \rightarrow S'$ typu (64a,b) s rychlostí $\mathbf{v}$, je okamžitým klidovým systémem nějakého hmotného bodu M . Bod M se může vůči systému S pohybovat libovolným způsobem, ale v daném okamžiku t je právě v počátku O' a jeho rychlost $\mathbf{u}(M, t) = \mathbf{u}(O') = \mathbf{v}$. V čase $t + dt$ se rychlost $\mathbf{u}(M)$ změní na

$$\mathbf{u}(M, t + dt) = \mathbf{v} + \mathbf{a}(M, t) dt = \mathbf{v} + d\mathbf{v}.$$

Systém S' pak již není klidovým systémem bodu M . Můžeme však zavést dva nové inerciální systémy S'' a S^+ , v nichž je hmotný bod M právě v klidu (v bodě $O'' \equiv O^+$) v čase $t + dt$. Systém S^+ vznikne přímo z S transformací $S \rightarrow S^+$ typu (64a,b) s rychlostí $\mathbf{u}(O^+) = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, kdežto S'' vznikne z S' transformací $S' \rightarrow S''$ typu (64a,b) s rychlostí $\mathbf{u}'(O'')$, která odpovídá rychlosti $\mathbf{u}(O'') = \mathbf{u}(O^+) = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

V ještě pozdějším čase znovu přejdeme od systému S'' k dalšímu klidovému systému S''' transformací $S'' \rightarrow S'''$ podobnou transformací $S' \rightarrow S''$ a zároveň systém S^+ nahradíme systémem S^{++} (s $O^{++} \equiv O'''$) určeným transformací $S \rightarrow S^{++}$ podobnou $S \rightarrow S^+$, atd. Sledujeme-li takto postupně konstruované systémy „spojitě“ (v limitě $dt \rightarrow 0$), můžeme vzorec (70a,b) zapsat ve tvaru

$$\omega_{Th} \equiv \vec{d\varphi}/dt \doteq (1 - \gamma_{(u)}) u^{-2} \mathbf{u} \times \mathbf{a}, \quad (71a)$$

popř.

$$\omega_{Th} \equiv -\frac{1}{2}c^{-2} \mathbf{u} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(M, t), \quad \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(M, t), \quad (71b)$$

a říci, že osové trojhrany čárkovaných systémů se z hlediska systému S postupně „stáčí“ úhlovou rychlostí ω_{Th} (neboť trojhrany křížkovaných systémů se vůči systému S „nestáčí“).

Vzorce (71a,b) vyjadřují tzv. *Thomasovu precesi* a mají velkou důležitost v atomové fyzice, při popisu chování spinu elektronu pohybujícího se v systému S rychlostí $\mathbf{u}$ a se zrychlením $\mathbf{a}$.

Elektron se spinem se chová jako osově symetrický setrvačnický roztočený kolem osy. Nepůsobí-li na setrvačnický žádný vnější otáčivý moment, „zachovává si jeho osa směr“ i při zrychleném pohybu jeho těžiště (vyvolaném silou působící v těžišti). Přesněji řečeno, *osa si zachovává směr vždy v tom inerciálním systému, v němž je v daném okamžiku těžiště setrvačnicku v klidu*. (To si odvodíme v odst. VI 9,3.) To znamená, že *osa má tentýž směr ve všech čárkovaných klidových systémech těžiště, neboť každý z nich vzniká z předchozího Lorentzovou transformací odpovídající čisté translaci (bez otočení)*. Osa setrvačnicku pak ovšem nemá stejný směr v křížkovaných klidových systémech a tedy ani v systému S , vůči němuž se křížkované systémy „nestáčí“. Z hlediska systému S tedy setrvačnick (elektron se spinem) koná kromě zrychleného pohybu také Thomasovu precesi, při níž se osa setrvačnicku (směr spinu elektronu) otáčí úhlovou rychlostí ω_{Th} danou přibližně vzorcem (71b).

Původ této precese je „čistě kinematický“. Koná-li osa setrvačnicku vůči trojhranům čárkovaných klidových systémů ještě také vlastní dynamickou precesi úhlovou rychlostí ω_D , pak koná z hlediska systému S precesi úhlovou rychlostí $\omega = \omega_D + \omega_{Th}$. Při pohybu makroskopického setrvačnicku je ovšem veličina ω_{Th} vždy nepozorovatelně malá. Při pohybu elektronu v atomu jsou však veličiny ω_D a ω_{Th} téhož řádu a ve výraze pro precesní rychlost ω nelze Thomasův člen ω_{Th} zanedbat.

ÚLOHY

1. Odvoďte vzorce (16) ze vztahů (14) a rovnic (3) a (3').
2. Dosazením $u_j = ce_j$ a $u'_j = ce'_j$ do (16) dostanete vztahy mezi e_j a e'_j . Odvoďte z nich vzorec pro tangens úhlu α těchto vektorů a srovnajte jej se vzorcem (III 8a).
3. Objekt M se pohybuje vůči inerciálnímu systému S konečnou nadsvětelnou rychlostí $\mathbf{u}$ se složkou $u_1 > c$. Užijte vzorců (16) a sledujte jeho rychlost $\mathbf{u}'$ vůči systému S' při různých hodnotách v ($v < c$).
4. Do vzorců (16) dosadte $\mathbf{u} = u\mathbf{N}$ ($N^2 = 1$) a určete limity při $u \rightarrow \infty$ a konstantním $\mathbf{N}$. Ukažte, že limitní hodnoty všech složek u'_j jsou konečné, je-li $N_1 \neq 0$, $v \neq 0$.
5. Transformace $S \rightarrow S'$ je dána vzorcí (12), transformace $S \rightarrow S''$ stejnými vzorci, ale s $u = v + \delta$ místo v . Ukažte, že při infinitezimálním δ je transformace $S' \rightarrow S''$ infinitezimální transformací tvaru (24) a určete její parametr ε .
6. Ukažte, je-li $v \ll c$, $u_j = ce_j$ ($e^2 = 1$, $e_1 \approx 1$), že vzorce (19) nejsou správnou aproximací přesných vzorců (16). Chybí v nich další členy téže řádové velikosti jako v . Přesto užijte vzorců (19) i v daném případě a odvoďte postupem podobným jako v Ú 2 výraz pro tangens úhlu $\alpha_{(L)}$ mezi jednotkovými vektory $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}' = \mathbf{u}'/\mathbf{u}'$. Ukažte, že vyjde starý vzorec (III 8a), který je do veličin řádu v/c správný (jak víme z výsledku Ú 2). Vysvětlete tyto skutečnosti.
7. Nechť je pro souřadnice a časy událostí C, D v systému S splněna podmínka (28) a např. ještě $t_C < t_D$. Ukažte, že pak
 - a) také ve všech systémech S' určených transformacemi (12) je $t'_C < t'_D$;
 - b) při $|\mathbf{x}(D) - \mathbf{x}(C)| < c(t_D - t_C)$ lze nalézt systém S' , v němž je $\mathbf{x}'(D) = \mathbf{x}'(C)$;
 - c) v tomto systému S' je $t'_D - t'_C$ minimální.
8. Jsou dány dva inerciální systémy S, S' . Transformace $S \rightarrow S'$ je určena vzorcí (12). V okamžiku setkání počátků O a O' je z místa $O' \equiv O$ vyslán světelný signál na všechny strany. Na osách 2 a 2' jsou ve vzdálenosti $x_2 = x'_2 = d$ upevněna tělesa odrážející světlo. Odražené světlo signálu přijímají pozorovatelé v O a v O' . Vypočítejte polohy (souřadnice) i doby, v nichž světlo signálu zastihlo ta tělesa (v obou systémech). Ukažte, že to jsou kvazisoučasné události. Udejte doby, v nichž pozorova-

těle v O a v O' spatří osvětlená tělesa. Udejte, jak by se po ose I musel pohybovat třetí pozorovatel, aby spatřil osvětlení obou těles *současně*.

9. Na rovině $(1, 2)$ v inerciálním systému S je položeno pravítko s hranou, která je rovnoběžná s osou I . Pravítko se posouvá rovnoběžně ve směru osy 2 rychlostí $W \leq c$. Rovnice hrany pravítka je $x_2 = Wt$. Na hraně pravítka jsou dva body M a N o souřadnicích $x_1(M) = -\frac{1}{2}L$, $x_1(N) = \frac{1}{2}L$. Popište pohyb pravítka i bodů M , N z hlediska systému S' určeného transformací (12). Udejte úhel hrany pravítka s osou I' , rychlosti průsečíků hrany pravítka s osami I' a $2'$ a úhel směru pohybu libovolného bodu pravítka (např. M) s osou I' i s hranou pravítka (zejména též v případě $W = c$). Udejte doby $t'_1(M)$, $t'_1(N)$ průchodů M a N osou I' a vzdálenosti současných poloh bodů M a N v systému S i S' .

10. V počátku O systému S je umístěn trvale svítící světlomet, jehož osa je kolmá k ose 3 a otáčí se v rovině $(1, 2)$ konstantní úhlovou rychlostí ω . Do každého pevného směru v rovině $(1, 2)$ vysílá tedy světlomet periodicky, s periodou $T = 2\pi/\omega$, světelný signál (puls). V čase t svírá osa světlometu s osou I úhel $\phi = \omega t$. Udejte vzdálenost $r_1(\alpha, t)$, do níž v čase t dospěl poslední signál vyslaný do směru svírajícího s osou I úhel α . V rovině $(1, 2)$ je opsána kružnice K ze středu O poloměrem r . Vypočítejte rychlost u , již se po této kružnici pohybuje stopa světelného svazku vysílaného světlometem. Uvažte důsledky plynoucí z toho, že může být $u > c$. Lze toho využít k posílání zpráv podél kružnice rychlostí větší než c ?

11. Odvoďte vztah (31) z transformace (12).

12. Pozorovatel v počátku O systému S pozoruje dalekohledem vzdálené hodiny H' pohybující se po ose I rychlostí v a srovnává jejich údaj (viděný v dalekohledu) s údajem svých vlastních hodin $H_{(O)}$ (postavených v O). Udejte vztah mezi $dt(H_{(O)})$ a $dt(H')$ (viděným přírůstkem údaje hodin H').

13. V systému S' obíhá bod M po kružnici poloměru r_0 kolem počátku O' v rovině $(2', 3')$ úhlovou rychlostí ω^* . Udejte $x'_j(M, t')$ a vypočítejte $x_j(M, t)$ v systému S určeném transformací (12'). Vypočítejte úhlovou rychlost (cyklickou frekvenci) ω^* v systému S .

14. V systému S' určeném transformací (12) jsou kolmo k ose $3'$ pevně postavena dvě rovinná zrcadla. Jejich vzdálenost je l_0 . Mezi zrcadly „osciluje“ podél osy $3'$ světelný puls. Tím jsou vytvořeny tzv. Einsteinovy elektromagnetické hodiny. Odvoďte vztah mezi jejich *vlastní* frekvencí $\nu^{**} \equiv \nu_0^* = c/(2l_0)$ a frekvencí ν^* měřenou v systému S . (Ze zákona konstantní rychlosti světla.)

15. Systém S' vznikne z S transformací (12) a systém S'' stejnou transformací, ale s u místo v . Atom je v klidu vůči $S' \equiv S_0$ a vlastní frekvence jeho vnitřních oscilací je $\nu^{**} \equiv \nu_0^*$. Vypočítejte ν^* a ν^{**} . Udejte také vztah mezi ν^{**} a ν^* .

16. Popište cestu kosmonauta z odst. 4,4 a odvoďte vztah časových údajů t_D a τ_D z hlediska systému S' určeného transformací (12).

17. Kosmonaut během celé své cesty přijímá časové signály $t(H_{(O)})$ vysílané radiostanicí v O a srovnává je s údaji τ svých hodin $H_{(K)}$. Použijte výsledku Ú 12 a vy-

počítejte signálový údaj $t_B(H_{(O)})$, který kosmonaut přijme při obratu B kosmické lodi (v čase $\tau_B = \frac{1}{2}\tau_D$) i signálový údaj přijatý při návratu D v čase τ_D . Odvoďte tím vztah (37) ze stanoviska klidového systému kosmické lodi. Podobně může postupovat i pozorovatel v místě O , jestliže také kosmická loď vysílá své časové signály. Odvoďte tím způsobem výsledek (37) i ze stanoviska systému S .

18. Po ose I inerciálního systému S se pohybují dva body M , N podle rovnic $x_1(M, t) = ct$, $x_1(N, t) = ct + \lambda$, $\lambda = \text{konst.}$ Udejte vztah mezi jejich okamžitou vzdáleností $l(t) = \lambda$ v systému S a jejich okamžitou vzdáleností $l'(t')$ v systému S' určeném transformací (12).

19. Tyč vlastní délky l_0 leží v ose I systému S a pohybuje se vůči S rychlostí $u \equiv (v, 0, 0)$, $0 < v < c$. Střed tyče prochází počátkem v čase $t = 0$. Na ose 2 v malé vzdálenosti $x_2(P) = \delta$ od počátku O je pozorovatel P a pozoruje tyč. Paprsky světla, které k němu přicházejí v době t_P od obou konců tyče, určují svými průsečíky s osou I tu „délku tyče“ $l_{(P)}$, kterou pozorovatel přímo „vidí“. Udejte délku $l_{(P)}$ v libovolném čase t_P . Počítejte všechny údaje v limitě $\delta \rightarrow 0$.

20. Bod M má v systému S v určitém čase t rychlost $u(t) \equiv (u, 0, 0)$ a zrychlení $a(t) \equiv (a, 0, 0)$. Určete systém S' transformací (12) tak, aby v něm bod M měl (v odpovídajícím čase t') stejné zrychlení jako v systému S . Jakou rychlost má bod M v tomto systému S' ? Ve kterém systému je zrychlení extrémní? Ukažte, že veličinu $I = a(1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ lze v každém systému S' určeném transformací (12) vyjádřit stejným vzorcem.

21. Systém S'' je určen transformací (66), systém S^+ transformací (67). Udejte rovnice os těchto systémů v systému S v čase $t = 0$. Při $V_2 \ll V_1 \ll c$ vypočítejte úhly sevřené stejnojmennými osami.