KAPITOLA V

MINKOWSKÉHO ČTYŘROZMĚRNÝ PROSTOR

V předchozí kapitole jsme se seznámili s nejvýznamnějšími fyzikálními důsledky Lorentzovy transformace souřadnic a času i s nejdůležitějšími vztahy relativistické kinematiky. Viděli jsme, že to jsou vztahy a vzorce značně složitější než ty, které vyplývají z transformace Galileiho. To budilo v prvních letech jistou nedůvěru k nové teorii a bylo také citelnou brzdou jejího rychlejšího rozvoje i praktického uplatnění.

Pro další systematický rozvoj Einsteinovy teorie relativity měl proto zásadní důležitost přehledný matematický zápis jejích zákonů. O rozřešení tohoto problému má největší zásluhu matematik Minkowski, neboť ukázal, že Lorentzovu transformaci lze interpretovat geometricky. Minkowského geometrie prostoročasu umožnila zavést nové pojmy a vybudovat vhodný matematický aparát, který se stal nedílnou součástí, ba přímo páteří Einsteinovy teorie relativity. Je také její nejkrásnější stránkou i nejsilnějším teoretickým argumentem.

V této kapitole se seznámíme s Minkowského matematickým aparátem i jeho aplikacemi v relativistické kinematice a v dalších kapitolách pak s jeho použitím při formulaci konkrétních fyzikálních zákonů.

1. GEOMETRICKÁ INTERPRETACE LORENTZOVY TRANSFORMACE

1,1. MINKOWSKÉHO ROVINA

Vyjděme ze speciální Lorentzovy transformace (IV 12). Zavedeme-li místo veličin t a t' veličiny

$$x_4 = \mathrm{i}ct\,, \quad x'_4 = \mathrm{i}ct'\,, \tag{1}$$

můžeme tuto transformaci zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma x_1 + \mathrm{i}\beta\gamma x_4\,,\\ x'_2 &= x_2\,,\\ x'_3 &= x_3\,,\\ x'_4 &= -\mathrm{i}\beta\gamma x_1 + \gamma x_4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\gamma^2 + (\mathrm{i}\beta\gamma)^2 = 1\,, \tag{3}$$

můžeme položit

$$\gamma = \cos\psi\,, \quad \mathrm{i}\beta\gamma = \sin\psi \tag{4}$$

a transformaci (2) zapsat takto:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\psi + x_4\sin\psi\,,\\ x'_2 &= x_2\,,\\ x'_3 &= x_3\,,\\ x'_4 &= -x_1\sin\psi + x_4\cos\psi\,. \end{aligned} \tag{2a}$$

Inverzní transformaci (2'a) odpovídající (IV 12'), dostaneme záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a obrácením znaménka „úhlu“ ψ.

Transformaci (2a) můžeme nyní srovnat např. s transformací

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\,,\\ \bar{x}_2 &= -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\,,\\ \bar{x}_3 &= x_3\,,\\ \bar{x}_4 &= x_4\,, \end{aligned} \tag{5}$$

vyjadřující přechod od systému S k systému $\bar{S}$, jehož osový trojhran je otočen kolem osy $3 \equiv \bar{3}$ o úhel φ (popř. jehož *osový kříž* $\bar{1}\ \bar{2}$, je otočen vůči osovému kříži $1, 2$ v *osové rovině* $(1, 2)$ kolem počátku $x_1 = x_2 = 0$ o úhel φ). *Na základě formální podobnosti* transformace (2a) s transformací (5) můžeme pak transformaci (2a) interpretovat jako *„otočení osového kříže v Minkowského osové rovině“* $(1, 4)$.

Je jasné, že „body“ Minkowského roviny $(1, 4)$ jsou vlastně *bodové události* $(x_1, 0, 0; t)$. Přitom bodovou událostí rozumíme, jak jsme už dříve často činili, prostě bod v prostoru v určitém okamžiku. *Z čistě formálních důvodů užíváme místo času* t pro určení bodové události *ryze imaginární „souřadnice“* $x_4 = \mathrm{i}ct$. Na *podstatě věcí se tím sice nic nemění*, neboť veličiny t a x_4 si vzájemně jednoznačně odpovídají, ale zato přemnohé rovnice a vzorce se při zavedení veličiny x_4 místo t zjednoduší (a „zgeometrizují“).

„Počátkem souřadnic“ v Minkowského rovině $(1, 4)$ je bodová událost $x_j = 0$, $t = 0$. „Osa 4“ je zřejmě sledem všech (v inerciálním systému S soumístných) bodových událostí $(0, 0, 0; t)$ a „osa 1“ množinou všech (v inerciálním systému S současných) bodových událostí $(x_1, 0, 0; 0)$. Když jsme v předchozích kapitolách mluvili o osách *1, 2, 3* nebo počátku *O* inerciálního systému S a uvažovali o nich v jejich „vlastním systému“, nebylo nutno blíže specifikovat čas (okamžik), k němuž se vztahovaly. Osa *j* systému S byla pak formálně určena jen rovnicemi $x_k = 0$ $(k \neq j)$ a jeho počátek *O* rovnicemi $x_k(O) = 0$, $k = 1, 2, 3$. Budeme-li mít v dalším výkladu na mysli osu *j* a počátek *O* v tomto smyslu (jen prostorovém, bez udání času), budeme stručně říkat *Lorentzova osa j* a *Lorentzův počátek O*, pokud to jasnost výkladu bude žádat. *Osu j nebo počátek O* souřadnic x_k *v čase* $t = 0$ pak budeme nazývat *Minkowského osou j nebo počátkem O*. Většinou to však nebude nutné, poněvadž význam symbolu nebo slova (osa, počátek) bude zřejmý ze souvislosti. Můžeme tedy např. říci, že Minkowského rovinou *(1, 4)* je množina všech bodových událostí na Lorentzově ose *1* inerciálního systému S a osou *4* v té Minkowského rovině je množina všech bodových událostí v Lorentzově počátku *O* systému S. Minkowského osy *1* a *1'* ani osy *4* a *4'* v Minkowského rovině $(1, 4) \equiv (1', 4')$ obecně nesplývají. To souvisí s relativností současnosti (a soumístnosti) různých bodových událostí.

1,2. PROSTOROČAS A MINKOWSKÉHO SYSTÉM SOUŘADNIC

Minkowski upozornil ve své proslulé přednášce „Prostor a čas“ [38], že „nikdo nepozoroval nějaké místo jinak než v určitém čase a čas jinak než na určitém místě“. Pro čtveřice údajů $(x_1, x_2, x_3; t)$ popř. x_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$, tj. pro „bodové události“, kterými se zabýval ve svých geometrických úvahách, navrhl název „světobody“. Množinu všech světobodů nazval prostě „světem“. Název světobod se ujal a budeme ho také v dalším výkladu užívat. Místo názvu „Minkowského svět“ se však dnes raději říká „Minkowského prostor“ a nejčastěji pak *prostoročas*, a toho budeme také my používat.

Stejně jako Minkowského (osovou) rovinu *(1, 4)* lze definovat i Minkowského roviny *(2, 4)* a *(3, 4)*. Tři Minkowského *osové roviny* $(j, 4), j = 1, 2, 3$ mají společnou osu *4* tvořenou světobody $(0, 0, 0, x_4)$ a společný počátek, světobod $x_\mu = 0$. *Minkowského osy 1* a *2* (Minkowského rovin *(1, 4)* a *(2, 4)*) *určují* také *osovou rovinu (1, 2) v prostoročase*. Je tvořena světobody $(x_1, x_2, 0, 0)$, tj. *představuje rovinu os 1, 2 inerciálního systému* S, *ale jen v okamžiku* $t = 0$. Podobně jsou definovány osové roviny *(2, 3)* a *(3, 1)* *v prostoročase*. Celkem tedy má *Minkowského systém* (souřadnic v prostoročase) čtyři osy a šest osových rovin, což odpovídá tomu, že prostoročas je čtyřrozměrné kontinuum světobodů. Někdy se říká, že prostoročas je „(3 + 1)-rozměrný“, aby se naznačilo, že osa *4* má některé vlastnosti odlišné od vlastností os *1, 2, 3*. Osovým rovinám *(1, 2)*, *(2, 3)*, *(3, 1)* v prostoročase *nebudeme říkat „roviny Minkowského“*, ačkoliv i to jsou osové roviny Minkowského systému souřadnic. Jejich geometrické vlastnosti jsou totiž shodné s vlastnostmi obyčejné roviny Euklidovy, zatímco roviny „Minkowského typu“, např. *(1, 4)*, mají geometrické vlastnosti poněkud jiné, jak si hned ukážeme. Poznamenejme už předem, že odlišnost Minkow-

ského roviny od roviny euklidovské není způsobena zavedením imaginární souřadnice x_4 místo reálného času *t*. O používání reálných souřadnic v Minkowského prostoru viz odst. 6.

1,3. NÁZORNÉ ZOBRAZENÍ MINKOWSKÉHO ROVINY DO ROVINY EUKLIDOVY

Vraťme se nyní k speciální transformaci (2a), v níž položíme $x_2 = x_3 = 0$ $(x'_2 = x'_3 = 0)$ a k transformaci (5), v níž položíme $x_3 = x_4 = 0$ $(\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0)$. Ukážeme si, že analogie mezi transformací otočení (2a) v Minkowského rovině *(1, 4)* a transformací otočení (5) v Euklidově rovině *(1, 2)* je sice pouze formální, nikoliv úplná ve všech ohledech, ale rozdíly nejsou takové, aby její užitečnost mohly znehodnotit. Všimněme si nejprve nejdůležitějších rozdílů a jejich důsledků:

V rovině (1, 2) jsou souřadnice x_1, x_2 i $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ (a také koeficienty transformace otočení (5)) vesměs reálná čísla. Funkce $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ mají reálné hodnoty (v mezích -1, 1) a jsou periodickými funkcemi reálného úhlu φ (neboť jenom pro reálné φ jsou funkce $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ obě reálné). Úhel φ můžeme proto omezit na hodnoty v mezích 0, 2π. Osa $\bar{1}$ $(\bar{x}_2 = 0)$ má v souřadnicích x_1, x_2 rovnici

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg} \varphi \,,$$

osa $\bar{2}$ $(\bar{x}_1 = 0)$ pak rovnici

$$x_2 = -x_1 \operatorname{cotg} \varphi = x_1 \operatorname{tg} (\varphi + \tfrac{1}{2}\pi) \,.$$

Osy $\bar{1}$ a $\bar{2}$ tedy svírají úhel $\frac{1}{2}\pi$ a součin jejich směrnic je -1. Jejich rovnice jsou vždy různé, neboť *rozdíl jejich směrnic není nikdy nulový*.

V Minkowského rovině (1, 4) jsou reálné pouze souřadnice x_1 popř. x'_1, kdežto x_4 popř. x'_4 jsou ryze imaginární. V transformaci (2a) je pouze funkce $\cos\psi = \gamma \geqq 1$ reálná, kdežto $\sin\psi = \mathrm{i}\beta\gamma$ je vždy ryze imaginární. Funkce $\cos\psi$ je reálná a $\geqq 1$ jen když $\psi = 2n\pi + \mathrm{i}\chi$, kde χ je reálné a *n* reálné celé číslo. Poněvadž funkce sin a cos komplexní proměnné mají reálnou periodu 2π, můžeme položit $n = 0$, čili volit ψ ryze imaginární, $\psi = \mathrm{i}\chi$. Pro reálné $\beta = v/c$ v mezích $-1 < \beta < 1$ pak tedy máme $\cos\psi = \cosh\chi = \gamma \geqq 1$, a

$$-\infty < \mathrm{i}^{-1} \sin\psi = \sinh\chi = \beta\gamma < \infty \,,$$

$$-1 < \mathrm{i}^{-1} \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tgh}\chi = \beta < 1 \,,$$

$$-\infty < \mathrm{i}^{-1}\psi = \chi = \operatorname{argtgh}\beta < \infty \,.$$

Osa *1'* $(x'_4 = 0)$ má po transformaci (2a) v souřadnicích x_1, x_4 rovnici

$$x_4 = \mathrm{i}\beta x_1 = x_1 \operatorname{tg}\psi \,,$$

osa $4'$ ($x_1' = 0$) pak rovnici

$$x_4 = -(\mathrm{i}\beta)^{-1} x_1 = -x_1 \operatorname{cotg} \psi = x_1 \operatorname{tg}(\psi + \tfrac{1}{2}\pi)\,.$$

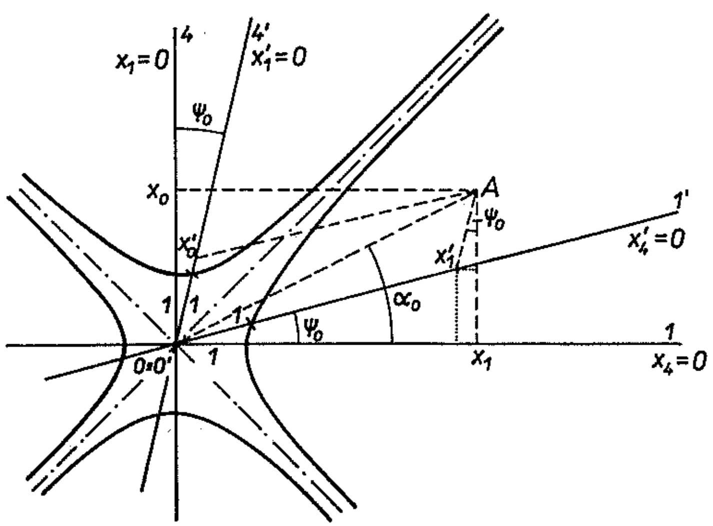
Můžeme tedy říci, že také osy $1'$ a $4'$ „svírají úhel" $\frac{1}{2}\pi$. Součin jejich směrnic je rovněž -1, jako v rovině Euklidově. *Ale při* $\beta \to 1$ (popř. $\beta \to -1$) se rovnice obou os, $1'$ a $4'$, blíží k téže rovnici $x_4 = \mathrm{i}x_1$ (popř. $x_4 = -\mathrm{i}x_1$), tj. *rozdíl jejich směrnic se blíží nule.*

V rovině ($1, 2$) má světobod $P \equiv (x_1, x_2, 0, 0)$, nejsou-li jeho souřadnice x_1, x_2 obě nulové, od počátku vzdálenost

$$r(P) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)^{\frac{1}{2}} > 0\,,$$

tj. reálnou kladnou. *Výraz* $r(P)$ *je invariantní vůči transformaci* (5). Rovnice $x_1^2 + x_2^2 = 0$ má jediné přípustné řešení $x_1 = x_2 = 0$. Podobně v Minkowského rovině ($1, 4$) lze určit „odlehlost" světobodu A o souřadnicích $(x_1, 0, 0, x_4)$ od počátku výrazem

$$s(A) = (x_1^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}} = (x_1'^2 + x_4'^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$



Obr. 15.

který je invariantní vůči transformaci (2a). Veličina $s(A)$ však může být buď reálná kladná (při $|x_4| < |x_1|$, kdy volíme $s = +|s|$) nebo nulová (při $x_4 = \pm\mathrm{i}x_1$, čili $x_1 = \pm ct$), nebo konečně ryze imaginární $s = \mathrm{i}|s|$ (při $|x_4| > |x_1|$). V Minkowského rovině ($1, 4$) tedy máme světobody, které spolu nesplývají ($\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_4 \neq 0$), ale přesto je jejich vzájemná „odlehlost" $\Delta s = [(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_4)^2]^{\frac{1}{2}}$ nulová (je-li $\Delta x_4 = \pm\mathrm{i}\Delta x_1$).

Uvedené rozdíly ve vlastnostech rovin ($1, 2$) a ($1, 4$) jasně ukazují, že *vztahy platné v rovině Minkowského nelze zcela věrně znázornit obrázkem nebo konstrukcemi v rovině Euklidově.* Minkowski však přišel na grafické zobrazení, které je prakticky výhodné, i když není zcela věrné: Narýsujeme dvě k sobě kolmé přímky a označíme je za osy 1 a 4 (viz obr. 15). *Světobod A o souřadnicích x_1, x_4 zobrazíme tak, že na osy 1 a 4 vyneseme reálné euklidovské délky x_1 a $x_0 \equiv x_4/\mathrm{i} = ct$.* Spojnice OA má v Minkowského rovině imaginární směrnici $\operatorname{tg}\alpha = x_4/x_1$, v grafu však reálnou směrnici

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = x_0/x_1 = -\mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Proto také osa $1'$, která má v Minkowského rovině směrnici $\operatorname{tg}\psi = \mathrm{i}\beta$, má na obrázku směrnici

$$\operatorname{tg}\psi_0 = -\mathrm{i}\operatorname{tg}\psi = \beta\,.$$

Obdobně *přímka zobrazující osu $4'$* má v grafu směrnici $-\mathrm{i}\operatorname{tg}(\psi + \frac{1}{2}\pi) = \beta^{-1}$. Úhel os $1'$, $4'$ se tedy na obrázku nejeví pravý.

Kosoúhlé *souřadnice x_1' a x_0' obrazu světobodu A* je dále nutno měřit tak, že se *za jednotky délky vezmou úseky* vymezené na osách $1'$ a $4'$ *mezi počátkem a zakreslenými hyperbolami,* které zobrazují množiny světobodů majících v Minkowského rovině od počátku „odlehlosti" 1 popř. i. Na obrázku mají tyto úseky (jak se snadno vypočte) délku

$$\sigma = [(1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)]^{\frac{1}{2}} = [\cos^2\psi_0 - \sin^2\psi_0]^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{6}$$

Proto platí vztahy (zřejmé z obr. 15)

$$x_1 = \sigma(x_1' \cos\psi_0 + x_0' \sin\psi_0)\,,$$
$$x_0 = \sigma(x_1' \sin\psi_0 + x_0' \cos\psi_0)\,; \tag{7'}$$

obrátíme-li je, dostáváme

$$x_1' = \sigma(x_1 \cos\psi_0 - x_0 \sin\psi_0)\,,$$
$$x_0' = \sigma(-x_1 \sin\psi_0 + x_0 \cos\psi_0)\,. \tag{7}$$

Poněvadž platí

$$\sigma \cos\psi_0 = \gamma\,, \tag{6a}$$
$$\sigma \sin\psi_0 = \beta\gamma\,, \tag{6b}$$

lze rovnice (7) zapsat ve tvaru

$$x_1' = \gamma x_1 - \beta\gamma x_0\,,$$
$$x_0' = -\beta\gamma x_1 + \gamma x_0\,,$$

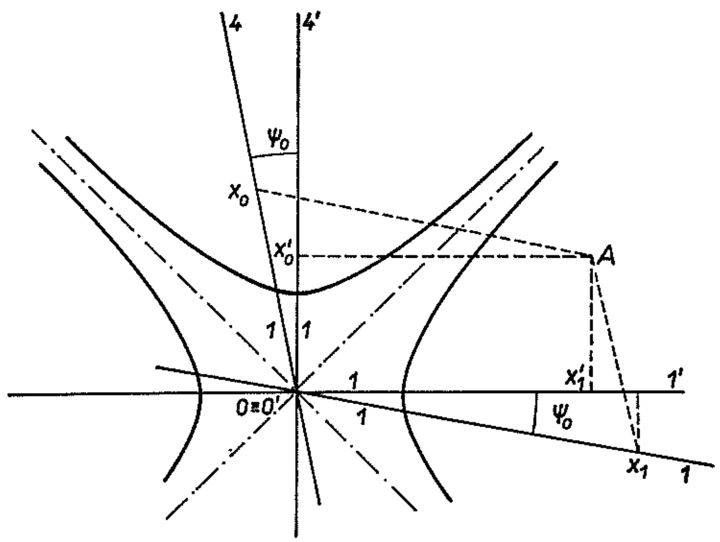
a po zavedení veličin $x_4 = ix_0$, $x'_4 = ix'_0$ a užití vztahů (4) nakonec ve tvaru

$$x'_1 = x_1 \cos \psi + x_4 \sin \psi$$

$$x'_4 = -x_1 \sin \psi + x_4 \cos \psi\,, \tag{8}$$

ve shodě s (2a).

Stejným právem můžeme ovšem dvěma kolmými přímkami zobrazit osy *1'*, *4'* a *místo obrázku 15 používat obdobného obrázku 16*, z něhož plynou ihned rovnice (7). Nový obrázek znázorňuje přesně tentýž vzájemný vztah obou Minkowského



Obr. 16.

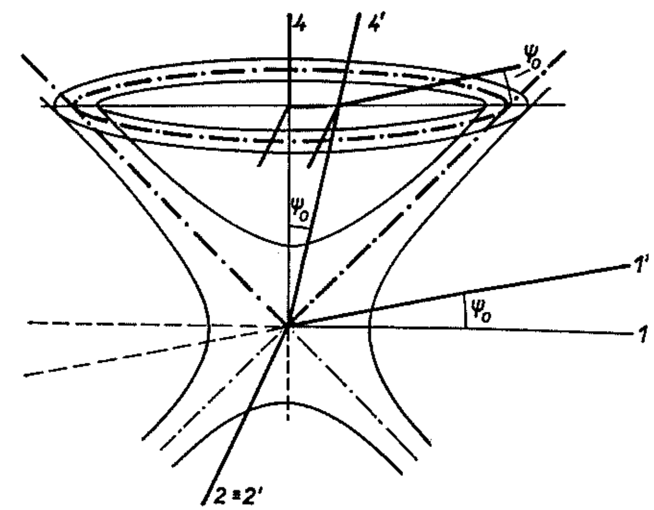
systémů. To znamená, že v grafickém zobrazení jsou vlastně pravoúhlé i kosoúhlé osy rovnocenné, tak jako ve skutečném prostoročase osy *1*, *4* a *1'*, *4'*. Je tomu tak proto, že *délková jednotka σ v grafu závisí na směru* podle (6). Pro světobod *A* v obr. 15, např. platí

$$s^2(A) \equiv x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1^2 + x_0^2)/\sigma^2(\alpha_0)\,,$$

$$\sigma(\alpha_0) = (\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = x_0/x_1\,.$$

Světobody na přímkách $x_4 = \pm ix_1$ $(x_0 = \pm x_1)$ mají v Minkowského rovině nulovou „odlehlost" s od počátku. To je „zachováno" i v grafu, neboť délky na těchto přímkách se musí měřit v jednotkách $\sigma = \infty$. Vidíme tedy, že obrázky 15 a 16, použije-li se jich podle udaných pravidel, celkem dobře vystihují poměry v Minkowského rovině. Praktické použití grafického znázornění ukážeme na několika příkladech v odst. 1,5.

Nyní si ještě všimněme, že *přímky* $x_4 = \pm ix_1$, které jsou *identické s přímkami* $x'_4 = \pm ix'_1$, rozdělují uvažovanou Minkowského rovinu na čtyři *invariantní kvadranty*. V těch, jimiž procházejí časové osy *4*, *4'*, leží světobody, které mají od počátku $O \equiv O'$ imaginární „odlehlost" s, a jsou vůči němu buď absolutně minulé (v dolním kvadrantu) nebo absolutně budoucí (v horním kvadrantu). Je zřejmé, že vždycky je možné přejít transformací tvaru (8) k takovým osám *1"*, *4"*, aby libovolný světobod Q z horního nebo dolního kvadrantu měl $x''_1(Q) = 0$. Pak máme $s(Q) = i|x''_0(Q)| = ic|t''_Q|$.



Obr. 17.

V těch kvadrantech mezi přímkami $x_4 = \pm ix_1$, jimiž procházejí osy *1*, *1'*, leží světobody, které mají reálnou „odlehlost" od počátku; jsou kvazisoučasné s počátkem a vždycky lze zvolit osy *1'*, *4'* tak, aby libovolný takový světobod P měl $x'_4(P) = 0$ a $s(P) = |x'_1(P)|$.

Místo našeho (prozatímního) názvu „odlehlost" dvou světobodů *se všeobecně užívá názvu interval* (prostoročasový) mezi světobody. Nadále ho budeme i my užívat. *Intervaly imaginární* se nazývají též intervaly *časového charakteru*, intervaly *reálné* pak intervaly *prostorového charakteru*. Důvod je zřejmý z předchozího výkladu. Musíme si ovšem uvědomit, že *interval je veličina absolutní, nezávislá na volbě systému souřadnic, kdežto časové rozdíly a prostorové vzdálenosti jsou jen relativní* (závislé na volbě systému).

Čerchané přímky na obr. 15 a 16 znázorňují hodograficky postup světelného signálu po Lorentzově ose *1* (popř. *1'*). Signál prochází Lorentzovým počátkem O (popř. O') v čase $t = 0$ (popř. $t' = 0$). Připomeňme, že oba obrázky odpovídají případu, kdy Lorentzovy osy *1* a *1'* inerciálních systémů S a S' splývají a Lorentzův počátek O' se pohybuje po Lorentzově ose *1* rychlostí v, a prochází počátkem O v čase $t = 0$. (Viz obr. 9.)

Připojíme-li na obr. 15 ještě i osu $2 \equiv 2'$ Minkowského prostoročasového systému, dostaneme obr. 17. Minkowského osu $3 \equiv 3'$ již nelze zakreslit. Položíme proto $x_3 = x_3' = 0$. Na obrázku vidíme kromě dvou trojhranů Minkowského os *1, 2, 4* a *1', 2', 4'* především tzv. *absolutní nebo světelný kužel*

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0\,,$$

znázorňující šíření světelného signálu vyslaného z Lorentzova počátku O systému S v čase $t = 0$ všemi směry po rovině Lorentzových os *1, 2*.

Dále máme na obrázku rotační hyperboloidy dvojdílný

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1\,,$$

a jednodílný

$$s^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = +1\,.$$

Rovnice těchto tří ploch mají v čárkovaných souřadnicích stejný tvar, neboť výraz s^2 je invariantní vůči transformaci (2a). Význam tří trojrozměrných částí, na něž světelný kužel rozděluje $(2 + 1)$-rozměrný Minkowského prostor na obr. 17, je obdobný jako význam kvadrantů mezi čerchanými přímkami v Minkowského rovině (*1, 4*). Na obr. 17 jsou zakresleny též přímky rovnoběžné s Minkowského osami *1, 2* (popř. *1', 2'*); znázorňují množiny událostí, které nastaly na Lorentzových osách *1, 2* (popř. *1', 2'*) v čase $t =$ konst > 0 (popř. $t' =$ konst > 0).

1,5 PRAKTICKÉ POUŽITÍ MINKOWSKÉHO ZOBRAZENÍ

Nakonec si ještě ukážeme použití Minkowského zobrazení k jednoduchému odvození vzorců pro dilataci času, kontrakci délek a transformaci prostorových vzdáleností. (Viz obr. 18.)

Veličina $t'(\mathrm{H}') = c^{-1}\, x_0'(\mathrm{H}')$ je časový údaj hodin H' postavených v Lorentzově počátku O' systému S'. Průmět x_0 délky $x_0'(\mathrm{H}')$ na osu *4* pak určuje příslušný časový údaj $t = c^{-1}x_0$ soumístných hodin systému S. Uvážíme-li, že délka $x_0'(\mathrm{H}')$ je měřena v jednotkách σ, plyne z obr. 18, použije-li se (6a), ihned vztah

$$x_0 = \sigma \,.\, x_0'(\mathrm{H}') \cos \psi_0 = \gamma\, x_0'(\mathrm{H}')\,,$$

tj.

$$t'(\mathrm{H}') = \gamma^{-1} t\,,$$

v souhlase s naším starým vzorcem (IV 31).

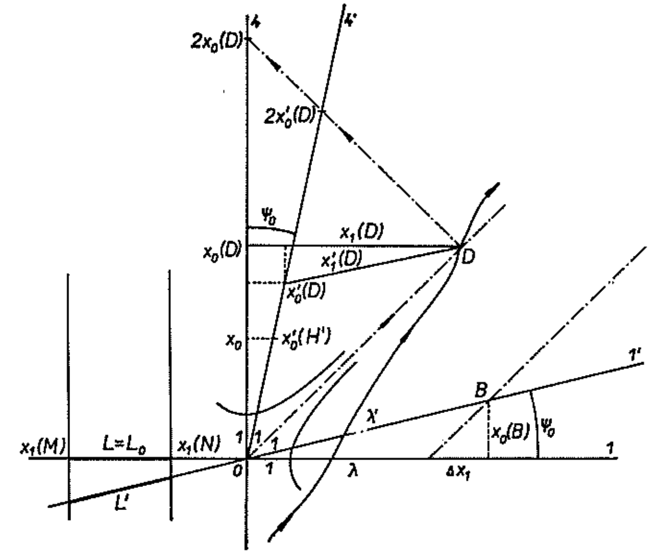
Dvě rovnoběžky s osou *4* nakreslené v levé části obr. 18 znázorňují tyč, která má vlastní délku L_0 a je v klidu na Lorentzově ose *1* systému S. Veličina L' udává vzdálenost současných poloh konců tyče z hlediska systému S'. Uvážíme-li opět, že L' je měřena v jednotkách $\sigma(\psi_0)$, plyne z obr. 18 vztah

$$L_0 = \sigma L' \cos \psi_0 = \gamma L'\,,$$

čili

$$L' = \gamma^{-1} L_0\,,$$

což je náš starý vzorec (IV 43). Pro odvození vzorců $l = \gamma^{-1} l_0 = \gamma^{-1} l'$ (IV 42) a $t(\mathrm{H}) = \gamma^{-1} t'$ (IV 32) se obr. 18 nehodí. K tomu je vhodnější obrázek, v němž osy *1', 4'* jsou ortogonální a osy *1, 4* svírají tupý úhel, jako na obr. 16. To ponechávám čtenáři.



Obr. 18.

Světobod D na obr. 18 může být ze světobodu $O \equiv O'$ dosažen světelným signálem. Veličiny $x_1(D)$ a $x_1'(D)$ jsou tedy radiolokační vzdálenosti světobodu D od Lorentzových počátků obou systémů (srovnej s (IV 51, 52)). Poněvadž platí $x_0(D) = x_1(D)$, $x_0'(D) = x_1'(D)$, plyne z obr. 18 vztah

$$x_1(D) = \sigma\, x_1'(D) \cos \psi_0 + \sigma\, x_1'(D) \sin \psi_0 =$$
$$= x_1'(D)\, \gamma(1 + \beta) =$$
$$= x_1'(D)\,[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{\frac{1}{2}}\,,$$

což je náš starý vzorec (IV 53).

Konečně dvě čerchané rovnoběžky na obr. 18 znázorňují pohyb dvou bodů po Lorentzově ose *1* systému S rychlostí c. Z obrázku plynou vztahy

$$\sigma\lambda' \cos \psi_0 = \lambda + \Delta x_1 = \lambda + x_0(B)\,,$$
$$x_0(B) = \sigma\lambda' \sin \psi_0\,,$$

odkud

$$\lambda = \lambda'(\sigma \cos \psi_0 - \sigma \sin \psi_0) = \lambda'\, \gamma(1 - \beta)$$

čili

$$\lambda = \lambda'[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{\frac{1}{2}}.$$

(Srovnej s Ú IV 18.)

Uvedené příklady jasně ukazují praktickou užitečnost Minkowského grafického znázornění Lorentzovy transformace (IV 12). Dalekosáhlý význam jeho geometrické interpretace Lorentzovy transformace a jeho koncepce prostoročasu poznáme v dalším výkladu.

2. OBECNÁ LORENTZOVA TRANSFORMACE A OBECNÁ LORENTZOVA GRUPA

2,1. OBECNÁ LORENTZOVA TRASNFORMACE A JEJÍ ROZKLAD

Transformace (2a) a (5) jsou speciálními případy obecné ortogonální transformace souřadnic

$$x'_\mu = b_{\mu\nu} x_\nu . \tag{9}$$

Řecké indexy μ, ν nabývají hodnot 1, 2, 3, 4 a podle indexu ν (vystupujícího v jednom členu dvakrát) se automaticky sčítá od 1 do 4. Ortogonální transformací nám bude transformace ve tvaru (9), jestliže její koeficienty $b_{\mu\nu}$ splňují vztahy ortogonality

$$b_{\mu\varrho} b_{\mu\nu} = \delta_{\varrho\nu} = \begin{cases} 1 \ (\varrho = \nu), \\ 0 \ (\varrho \neq \nu). \end{cases} \tag{10a}$$

Použijeme-li těchto vztahů, lze transformaci (9) obrátit ve tvaru

$$x_\varrho = b_{\mu\varrho} x'_\mu . \tag{9'}$$

Poněvadž i transformace (9') je ortogonální, platí též vztahy

$$b_{\nu\varrho} b_{\mu\varrho} = \delta_{\nu\mu} . \tag{10b}$$

Rovnice (10b) plynou z rovnic (10a) a naopak.

Aby transformace (9) mohla mít význam transformace Minkowského prostoročasových souřadnic x_μ, musí ovšem koeficienty $b_{\mu\nu}$ splňovat kromě relací (10a,b) ještě další podmínky. Především je nutno, aby transformace (9) přiřazovala libovolným reálným souřadnicím x_j a ryze imaginární souřadnici x_4 opět reálné souřadnice x'_j a ryze imaginární x'_4. To lze obecně splnit, jen když jsou koeficienty b_{jk} a b_{44} reálné a b_{j4} i b_{4j} ryze imaginární (nejsou-li rovné nule). Musí tedy platit vztahy

$$b^*_{jk} = b_{jk}, \quad b^*_{44} = b_{44}, \quad b^*_{j4} = -b_{j4}, \quad b^*_{4j} = -b_{4j}, \tag{10c}$$

v nichž *šesticípá hvězdička znamená komplexní přidružení.*

Další rozbor nám ukáže, má-li transformace (9) představovat *pouze* obecné *otočení čtyřhranu Minkowského os 1', 2', 3', 4'*, že musí být splněny také podmínky

$$b \equiv \det(b_{\mu\nu}) = +1 , \tag{10d}$$

$$b_{44} \geqq 1 . \tag{10e}$$

Z podmínek (10a) (nebo 10b)) a (10c) plyne jenom $b^2 = 1$, $b_{44}^2 \geqq 1$.

Ve speciálních případech (2a) a (5) jsou koeficienty $b_{\mu\nu}$ elementy matic

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{pmatrix},$$

popř.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a podmínky (10a až e) jsou pro ně splněny. Do podobných matic bychom mohli sestavit koeficienty transformací představujících otočení osových křížů ve zbývajících čtyřech osových rovinách (*2*, *4*), (*3*, *4*), a (*2*, *3*), (*3*, *1*) Minkowského systému.

Každá z těchto (šesti) speciálních transformací závisí na *jednom* parametru (úhlu otočení). Postupným složením *šesti* takových transformací (otočení v šesti různých rovinách) bychom mohli složit obecnou transformaci (9), neboť ta závisí právě na *šesti* nezávislých parametrech. Vztahy (10a) totiž představují deset nezávislých rovnic pro šestnáct koeficientů $b_{\mu\nu}$. A obráceně bychom mohli transformaci (9) rozložit na šest speciálních (jednoparametrových) otočení „typu" (2a) popř. (5), jejichž fyzikální obsah už známe.

Pro rozbor fyzikálního obsahu *konečné transformace* (9) by však takový postup nebyl vhodný. (Později uvidíme, že je vhodný pouze pro vytvoření nebo rozklad obecné *transformace infinitezimální.*) Při konečné transformaci (9) je účelnější, fyzikálně zajímavější (i matematicky jednodušší) určit především složky v_j rychlosti v Lorentzova počátku O' inerciálního systému S' v trojhranu Lorentzových os inerciálního systému S. Veličiny v_j (tři parametry) určují jednoznačně Lorentzovu transformaci $S \to S^+$ tvaru (IV 64a,b) vedoucí k systému S^+, jehož Lorentzův počátek O^+ splývá s O', ale jehož trojhran Lorentzových os $1^+, 2^+, 3^+$ není vůči trojhranu Lorentzových os *1*, *2*, *3* otočen. V prostoročase, tj. z hlediska Minkowského systému, taková transformace $S \to S^+$ zřejmě převádí časovou osu z původního směru *4* přímo do výsledného směru ($4^+ \equiv 4'$), neboť osa 4^+ ($4'$) je právě Lorentzův počátek O^+ (O').

Všimněme si proto blíže geometrických vlastností transformace (IV 64a,b) v prostoročase. Zapíšeme-li ty transformační rovnice ve tvaru

$$x_\lambda^+ = a_{\lambda\nu} x_\nu \,, \tag{11}$$

snadno zjistíme, že matice koeficientů $a_{\lambda\nu}$ vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 1+\eta v_1^2 & \eta v_1 v_2 & \eta v_1 v_3 & \mathrm{i}(\gamma/c)\, v_1 \\ \eta v_2 v_1 & 1+\eta v_2^2 & \eta v_2 v_3 & \mathrm{i}(\gamma/c)\, v_2 \\ \eta v_3 v_1 & \eta v_3 v_2 & 1+\eta v_3^2 & \mathrm{i}(\gamma/c)\, v_3 \\ -\mathrm{i}(\gamma/c)\, v_1 & -\mathrm{i}(\gamma/c)\, v_2 & -\mathrm{i}(\gamma/c)\, v_3 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Přitom jsme do (IV 64a,b) dosadili $\boldsymbol{v}$ místo $\boldsymbol{V}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ místo $\gamma_{(V)}$ a zavedli kromě $x_4 = \mathrm{i}ct$ a $x_4' = \mathrm{i}ct'$ ještě symbol $\eta = (\gamma - 1)\, v^{-2}$. Snadno se potvrdí, že koeficienty $a_{\lambda\nu}$ splňují opět vztahy tvaru (10a až e).

Ukažme si nyní, že *transformace* (11) *neobsahuje otočení v prostoročasové rovině Ξ totálně kolmé k rovině os $(4, 4^+)$*. Stačí to ukázat na rovině Ξ_0 jdoucí počátkem. Světobody P v ní ležící mají souřadnice $x_4(P) = x_4^+(P) = 0$. Aby z rovnice $x_4(P) = 0$ a ze čtvrté z rovnic (11) plynulo $x_4^+(P) = 0$, musí souřadnice $x_j(P)$, $j = 1, 2, 3$, splňovat podmínku $v_j\, x_j(P) = 0$. Rovina Ξ_0 je tedy tvořena světobody, jejichž souřadnice $x_\mu(P)$ splňují rovnice

$$v_j\, x_j(P) = 0 \,, \quad x_4(P) = 0 \,. \tag{12}$$

Transformace (11) pak pro každý světobod P dává $x_\mu^+(P) = x_\mu(P)$.

Jelikož *se u žádného světobodu roviny Ξ_0 nemění při transformaci* (11) *souřadnice*, může tato transformace obsahovat pouze *otočení* v rovině totálně kolmé ke Ξ_0, tj. *v rovině* $(4, 4^+)$. Abychom určili úhel ψ mezi osami 4 a 4^+, stačí volit světobod Q na ose 4, tj. světobod o souřadnicích $x_j(Q) = 0$. Čtvrtá z rovnic (11) dává $x_4^+(Q) = \gamma\, x_4(Q)$, takže $\cos \psi = \gamma$.

Volíme-li v rovině $(4, 4^+)$ osu $I \perp 4$ a osu $I^+ \perp 4^+$, můžeme každý světobod v té rovině určit souřadnicemi x_I, x_4, popř. x_I^+, x_4^+. Pro tyto souřadnice pak musí platit transformace

$$\begin{aligned} x_I^+ &= \gamma x_I + \mathrm{i}\beta\gamma x_4 \,, \\ x_4^+ &= -\mathrm{i}\beta\gamma x_I + \gamma x_4 \,, \end{aligned} \tag{13}$$

která je analogická transformaci (2) popř. (2a) v rovině $(I, 4)$. Abychom transformaci (13) odvodili z transformace (11) a zároveň vyjádřili souřadnici x_I popř. x_I^+ pomocí x_j popř. x_j^+, utvoříme ze souřadnic x_j^+ na levých stranách prvních tří rovnic (11) výraz $v^{-1} v_j x_j^+$. Po jednoduché úpravě pravé strany s použitím tabulky koeficientů $a_{\mu\nu}$ dostaneme rovnici

$$v^{-1} v_j x_j^+ = \gamma v^{-1} v_j x_j + \mathrm{i}\beta\gamma x_4 \,. \tag{13a}$$

Čtvrtou z rovnic (11) je možno zapsat ve tvaru

$$x_4^+ = -\mathrm{i}\beta\gamma v^{-1} v_j x_j + \gamma x_4 \,. \tag{13b}$$

Porovnáním rovnic (13a,b) s rovnicemi (13) dostáváme

$$\begin{aligned} x_I &= v^{-1} v_j x_j \equiv v^{-1} \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{x} \,, \\ x_I^+ &= v^{-1} v_j x_j^+ \equiv v^{-1} \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{x}^+ \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Souřadnice x_I a x_I^+ v rovině $(4, 4^+)$ jsou tedy průměty vektorů $\boldsymbol{x}$ resp. $\boldsymbol{x}^+$ do směru $\boldsymbol{v}$. Tento směr mají splývající Lorentzovy osy $I^+ \equiv I$, které zřejmě při transformaci (11) nahrazují Lorentzovy osy $I' \equiv I$ z transformace (2).

Po provedení transformace (11) máme už časovou osu v konečném směru $4' \equiv 4^+$. Zároveň jsou už dány tři z šesti parametrů obecné transformace (9) (veličiny v_j). Zbývá tedy doplnit transformaci (11) tříparametrovou ortogonální transformací $S^+ \to S'$ zachovávající časovou osu $4' \equiv 4^+$. Takovou transformací je transformace

$$\begin{aligned} x_j' &= C_{jk} x_k^+ \,, \\ x_4' &= x_4^+ \,, \end{aligned} \tag{15}$$

jejichž devět reálných koeficientů C_{jk} splňuje šest relací ortogonality

$$C_{jk} C_{jl} = \delta_{kl} \,. \tag{16a}$$

Z odst. I 1 víme, že transformace (15) představuje otočení trojhranu prostorových os (bez zrcadlení), je-li

$$\det (C_{jk}) = +1 \,. \tag{16b}$$

V prostoročase představuje transformace (15) otočení čtyřhranu os Minkowského systému kolem osy $4^+ \equiv 4'$. Zapíšeme-li tuto transformaci ve „čtyřrozměrném" tvaru

$$x_\mu' = C_{\mu\lambda} x_\lambda^+ \,, \tag{17}$$

má matice koeficientů $C_{\mu\lambda}$ tvar

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty $C_{\mu\lambda}$ splňují, při platnosti vztahů (16a,b), podmínky tvaru (10a až e).

Složením transformací (11) a (17) dostáváme transformaci tvaru (9) s koeficienty

$$b_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu}\,; \tag{18}$$

koeficienty $b_{\mu\nu}$ opět splňují podmínky (10a až e). Platí např.

$$b_{\mu\varrho}b_{\mu\nu} = C_{\mu\sigma}a_{\sigma\varrho}C_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu} =$$

$$= \delta_{\sigma\lambda}a_{\sigma\varrho}a_{\lambda\nu} = a_{\lambda\varrho}a_{\lambda\nu} = \delta_{\varrho\nu}\,,$$

jak žádá (10a). Pro det $(b_{\mu\nu})$ plyne z (18) vyjádření

$$\det(b_{\mu\nu}) = \det(C_{\mu\lambda})\det(a_{\lambda\nu}) = 1\,.$$

Užitím tabulek koeficientů $a_{\mu\nu}$ a $C_{\mu\nu}$ se snadno potvrdí, že koeficienty $b_{\mu\nu}$ dané vzorci (18) splňují i vztahy (10c) a (10e).
Explicite dostáváme např.

$$b_{4j} = -\mathrm{i}(\gamma/c)\,v_j\,, \quad b_{44} = \gamma \geqq 1\,. \tag{19}$$

Vzorců (19) a (18) můžeme nyní použít k řešení obrácené úlohy, tj. úlohy rozložit obecnou danou transformaci typu (9) na transformaci S → S⁺ typu (11) a transformaci S⁺ → S′ typu (17). Nejprve vypočteme užitím (19) veličiny

$$v_j(O^+) = \mathrm{i}cb_{4j}/b_{44} \tag{20}$$

a z nich pak celou tabulku koeficientů $a_{\mu\nu}$. Tím je určena transformace (11), tj. $S \to S^+$. K určení koeficientů $C_{\mu\nu}$ transformace $S^+ \to S'$ můžeme nyní použít vztahů (18). Násobíme-li tyto rovnice $a_{\varrho\nu}$, dostáváme

$$b_{\mu\nu}a_{\varrho\nu} = C_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu}a_{\varrho\nu} = C_{\mu\lambda}\delta_{\lambda\varrho} = C_{\mu\varrho}\,.$$

Tím jsou koeficienty hledaných transformací (11) a (17) explicite a jednoznačně určeny. Ze vzorců (18) je vidět, že při skládání transformací obecně záleží na pořadí, neboť $C_{\mu\lambda}a_{\lambda\nu} \neq a_{\mu\lambda}C_{\lambda\nu}$. (Viz též Ú 2.)

Předchozí rozbor transformace (9) již ukazuje, že tyto transformace jsou relativistickým protějškem obecných Galileiho transformací (I 19). Vskutku v limitě $c \to \infty$ nabývá transformace (11) tvaru

$$x_k^+ = x_k - v_k t\,,$$

$$t^+ = t\,, \tag{21}$$

kdežto transformace (17) ≡ (15) zůstává beze změny, resp. zní takto

$$x'_j = C_{jk}x_k^+\,,$$

$$t' = t^+\,. \tag{22}$$

Složením těchto transformací pak dostáváme

$$x'_j = C_{jk}(x_k - v_k t)\,,$$

$$t' = t\,. \tag{23}$$

Tato transformace tedy udává limitní tvar transformace (9) při $c \to \infty$. Porovnáme-li (23) s (I 19), vidíme, že se shodují, položíme-li v (I 19) $x_k^0(O') = 0$. Transformaci (23) i (I 19) lze ovšem zobecnit na transformaci

$$x'_j = C_{jk}\{[x_k - x_k(O', t_0)] - v_k(t - t_0)\}\,,$$

$$t' = t - t_0\,. \tag{23a}$$

Odpovídající zobecnění transformace (9) (posunutím Minkowského počátku O' do světobodu o souřadnicích $x_\nu(O') \neq 0$) vede na transformaci

$$x'_\mu = b_{\mu\nu}[x_\nu - x_\nu(O')]\,. \tag{9a}$$

Tato transformace se nazývá *obecnou nehomogenní Lorentzovou transformací.* Lze ji zapsat ve výhodnějším tvaru

$$x'_\mu - x'_\mu(O) = b_{\mu\nu}x_\nu\,. \tag{9b}$$

Je zřejmé, že nehomogenní Lorentzova transformace závisí na deseti (6 + 4) vzájemně nezávislých parametrech.

Při transformacích (9) i (9a) popř. (9b) zůstává invariantním výraz

$$s_{AB}^2 = [x_\mu(B) - x_\mu(A)]\,[x_\mu(B) - x_\mu(A)] =$$

$$= [x'_\mu(B) - x'_\mu(A)]\,[x'_\mu(B) - x'_\mu(A)]\,, \tag{24}$$

tj. čtverec intervalu dvou světobodů A, B. Na důkaz stačí dosadit za $x'_\mu(A)$ a $x'_\mu(B)$ z (9a) a použít vztahů (10a).

Obráceně z požadavku, aby při transformacích tvaru (9) platil pro libovolné dva světobody A, B vztah (24), dostáváme pro koeficienty $b_{\mu\nu}$ podmínku (10a) a z ní ihned $b^2 = 1$, tj.

$$b \equiv \det(b_{\mu\nu}) = \pm 1\,. \tag{25a}$$

K podmínkám (10a) je však nutno připojit podmínky (10c) z důvodů uvedených již při jejich formulaci. Z (10c) a (10a) při $\varrho = \nu = 4$ pak plyne

$$b_{44}^2 = 1 - b_{j4}b_{j4} \geqq 1\,,$$

tj.

$$b_{44} \geqq 1 \text{ nebo } b_{44} \leqq -1\,. \tag{25b}$$

Parametry $x'_\mu(O)$ transformace (9b) jsou libovolné, až na to, že $x'_j(O)$ musí být reálné a $x'_4(O)$ ryze imaginární.

2,2. OBECNÁ LORENTZOVA GRUPA A JEJÍ PODGRUPY

Snadno lze potvrdit, že transformace (9b) s koeficienty $b_{\mu\nu}$ splňujícími podmínky (10a,c), a tedy i podmínky (25a,b), tvoří grupu **L**: nazývá se *obecnou* (též rozšířenou nebo geometrickou) *grupou Lorentzovou*, nehomogenní nebo homogenní, podle toho, jsou-li parametry $x'_\mu(O)$ volné, nebo nulové. *Desetiparametrové grupě transformací* (9b) *nebo* (9a) *se často říká též grupa Poincarého.* Není to spojitá grupa, neboť se rozpadá na čtyři disjunktní, nesouvislé části (podmnožiny transformací) charakterizované podmínkami

$$b = 1\,, \quad b_{44} \geqq 1\,, \tag{26$_E$}$$

$$b = -1\,, \quad b_{44} \geqq 1\,, \tag{26$_P$}$$

$$b = -1\,, \quad b_{44} \leqq -1\,, \tag{26$_T$}$$

$$b = 1\,, \quad b_{44} \leqq -1\,. \tag{26$_Z$}$$

První podmnožinu $\mathbf{L}_{(E)}$ zřejmě tvoří transformace, které jsme vyšetřovali v odst. 2,1 (koeficienty $b_{\mu\nu}$ splňují všecky podmínky (10a až e)). Jsou to transformace představující prostá otočení čtyřhranu Minkowského os, doplněná popř. posunutím počátku do jiného světobodu. *Tyto transformace tvoří opět grupu.* Je to nejdůležitější *podgrupa obecné Lorentzovy grupy* a nazývá se *vlastní* (též užší nebo zúženou) *grupou Lorentzovou.* Vlastní Lorentzova grupa je spojitá grupa. K podrobnějšímu zkoumání jejích infinitezimálních prvků se ještě vrátíme.

Ostatní tři množiny obecných Lorentzových transformací $\mathbf{L}_{(P)}, \mathbf{L}_{(T)}, \mathbf{L}_{(Z)}$ zřejmě netvoří grupy, neboť žádná z nich neobsahuje jednotkový element **E**, jímž je v obecné i vlastní Lorentzově grupě „identická transformace"

$$x'_\mu = x_\mu = \delta_{\mu\nu} x_\nu\,.$$

(Je vidět, že koeficienty $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ této transformace splňují podmínky $b = 1$, $b_{44} = \delta_{44} = 1$, tj. podmínky (26$_E$).) Množiny $\mathbf{L}_{(P)}$, $\mathbf{L}_{(T)}$, $\mathbf{L}_{(Z)}$ neobsahují ani infinitezimální Lorentzovy transformace. Přitom však každá z těch tří množin je spojitá v tom smyslu, že od libovolné transformace $S \to S'$ z dané množiny lze dospět k libovolné jiné transformaci $S \to S''$ z téže množiny spojitou změnou parametrů výchozí transformace. Patří-li do uvažované množiny transformace $S \to S'$ i $S \to S''$, patří do ní také inverzní transformace $S' \to S$, $S'' \to S$, ale nikoliv transformace $S' \to S''$ složená z transformací $S' \to S$ a $S \to S''$. Ta patří vždy do vlastní Lorentzovy grupy $\mathbf{L}_{(E)}$.

Každou transformaci $S \to S'$ množiny $\mathbf{L}_{(P)}$ popř. $\mathbf{L}_{(T)}$ popř. $\mathbf{L}_{(Z)}$ lze složit z nějaké vlastní Lorentzovy transformace $S \to \bar{S}$ a z transformace „prostorového zrcadlení" **P**

$$x'_j = -\bar{x}_j\,, \quad x'_4 = \bar{x}_4\,,$$

popř. „časového zrcadlení" **T**

$$x'_j = \bar{x}_j\,, \quad x'_4 = -\bar{x}_4\,,$$

popř. „prostoročasového zrcadlení" **Z**

$$x'_\mu = -\bar{x}_\mu\,.$$

Místo zrcadlení **P** (všech tří prostorových os Minkowského systému) bychom mohli použít též zrcadlení $\mathbf{P}_j$ pouze jedné z těch os, neboť zrcadlení dvou prostorových os je identické s otočením o 180° v jejich rovině. Podobně místo zrcadlení **Z** všech čtyř os bychom mohli použít zrcadlení $\mathbf{Z}_{4j}$ osy časové a j-té prostorové osy. Užíváme však raději operací **P** a **Z**, poněvadž jsou symetričtější. Je nutno upozornit na to, že transformace **Z** a $\mathbf{Z}_{4j}$, nelze v Minkowského prostoru nahradit žádným otočením osového čtyřhranu, ačkoliv mají $b = 1$ a zrcadlí se při nich sudý počet os. To souvisí s tím, že při otočení osového kříže v Minkowského rovině $(j, 4)$ je vždy $b_{44} \geqq 1$.

Poznamenejme ještě, že rozdělení transformací obecné grupy **L** do čtyř podmnožin $\mathbf{L}_{(E)}, \ldots, \mathbf{L}_{(Z)}$ představuje *z hlediska teorie grup* rozklad grupy **L** na třídy vytvořený normální podgrupou $\mathbf{L}_{(E)}$. Lze se přesvědčit (viz Ú 4), že třídy $\mathbf{L}_{(E)}, \ldots, \mathbf{L}_{(Z)}$ jsou samy prvky grupy tříd (faktorové grupy $\mathbf{L}/\mathbf{L}_{(E)}$).

Podgrupa $\mathbf{L}_{(E)}$ je nejobsáhlejší *spojitou* podgrupou obecné Lorentzovy grupy **L**. Není však „největší" podgrupou. Nejdůležitější „větší" podgrupu dostaneme spojením $\mathbf{L}_{(E)}$ a $\mathbf{L}_{(P)}$ nebo prostě připojením prostorového zrcadlení **P** k vlastní Lorentzově grupě. Tím vznikne grupa Lorentzových transformací, charakterizovaná podmínkou (10e), ale místo (10d) máme nyní pouze (25a). *Tato grupa se nazývá úplnou (též ortochronní) Lorentzovou grupou* $\mathbf{L}_{(U)}$. Připojením časového zrcadlení **T** ke grupě $\mathbf{L}_{(U)}$ vzniká již celá obecná grupa **L**, neboť **PT** = **Z**.

Podrobnější rozbor struktury obecné nehomogenní Lorentzovy grupy podává např. Roman [39].

2,3. INFINITEZIMÁLNÍ LORENTZOVY TRANSFORMACE

Nakonec se ještě vraťme k vlastní Lorentzově grupě a všimněme si jejich infinitezimálních prvků. Infinitezimální transformaci, která se nekonečně málo liší od identické transformace **E**, můžeme zapsat ve tvaru

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})\, x_\nu + l_\mu\,. \tag{27}$$

Veličiny l_μ a $\omega_{\mu\nu}$ jsou infinitezimální a jejich součiny zanedbáváme. V dalším se omezíme na homogenní transformace ($l_\mu = 0$).

Aby taková transformace (27) byla Lorentzovou transformací, musí především platit do členů lineárních v $\omega_{\mu\nu}$ vztah

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu .$$

Vychází však

$$x'_\mu x'_\mu - x_\mu x_\mu = 2\omega_{\varrho\nu}\, x_\varrho x_\nu .$$

Má-li být tento výraz identicky rovný nule, musí platit

$$\omega_{\varrho\nu} = -\omega_{\nu\varrho} . \tag{27a}$$

Podmínky (10c) pak dále žádají, aby parametry $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ byly reálné a ω_{j4} ryze imaginární. (Řešte Ú 5.)

Matici **b** koeficientů $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ transformace (27), tj. matici

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & -\omega_{31} & \omega_{14} \\ -\omega_{12} & 1 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 1 & \omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 1 \end{pmatrix},$$

lze zapsat ve tvaru součtu

$$\mathbf{b} = \mathbf{1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\varrho\sigma}\Lambda^{(\varrho\sigma)} , \tag{28}$$

v němž **1** je čtyřřadová jednotková matice a $\Lambda^{(\varrho\sigma)} = -\Lambda^{(\sigma\varrho)}$ jsou hermitovské matice

$$\Lambda^{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(31)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{(14)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(24)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(34)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $\Lambda^{(\mu\nu)}$ se nazývají *generátory* (vytvářející operátory) infinitezimální homogenní Lorentzovy transformace. Je zřejmé, že člen **1** v maticovém součtu (28) vytváří identickou transformaci **E** ($x'_\mu = x_\mu$) a člen s $\Lambda^{(\mu\nu)}$ vytváří nekonečně malé otočení v osové rovině (μ, ν). Zavedeme-li označení

$$\mathbf{M}_1 = \Lambda^{(23)} , \quad \mathbf{M}_2 = \Lambda^{(31)} , \quad \mathbf{M}_3 = \Lambda^{(12)} ,$$
$$\mathbf{N}_1 = \Lambda^{(14)} , \quad \mathbf{N}_2 = \Lambda^{(24)} , \quad \mathbf{N}_3 = \Lambda^{(34)} , \tag{29}$$

zjistíme, že matice $\mathbf{M}_j$ a $\mathbf{N}_j$ splňují tyto komutační relace

$$[\mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k] \equiv \mathbf{M}_j\mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k\mathbf{M}_j = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\mathbf{M}_l ,$$
$$[\mathbf{N}_j, \mathbf{N}_k] = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\mathbf{M}_l ,$$
$$[\mathbf{M}_j, \mathbf{N}_k] = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\mathbf{N}_l . \tag{30}$$

Rovnice (30) lze zapsat souhrnně také ve tvaru

$$[\Lambda^{(\mu\nu)}, \Lambda^{(\varrho\sigma)}] = \mathrm{i}(\delta_{\mu\varrho}\Lambda^{(\nu\sigma)} + \delta_{\nu\sigma}\Lambda^{(\mu\varrho)} - \delta_{\mu\sigma}\Lambda^{(\nu\varrho)} - \delta_{\nu\varrho}\Lambda^{(\mu\sigma)}) . \tag{31}$$

Komutační relace (30) popř. (31) jsou charakteristické pro homogenní Lorentzovu grupu $\mathrm{L}_{(\mathrm{E})}$. Matice $\Lambda^{(\mu\nu)}$ jsou bazí tzv. Lieovy algebry vlastní Lorentzovy grupy.

Velký praktický význam infinitezimálních Lorentzových transformací je v tom, že k zjištění transformačních vlastností fyzikálních veličin a zákonů při obecných Lorentzových transformacích stačí v zásadě vyšetřit jejich „chování" při infinitezimálních Lorentzových transformacích a při prostorovém a časovém zrcadlení **P** a **T**. Také s použitím rovnic (30) se ještě setkáme (viz odst. 5).

3. DALŠÍ DŮLEŽITÉ GEOMETRICKÉ ÚTVARY V PROSTOROČASE

3,1 SVĚTOČÁRY

V odst. 1 jsme se už seznámili s některými speciálními geometrickými útvary v prostoročase. Kromě bezrozměrných světobodů to byly hlavně jednorozměrné (jednoparametrové) množiny světobodů, kterým budeme podle návrhu Minkowského říkat *světočáry*. Světočárami (přímými) jsou např. osy Minkowského systému a přímky

$$x_1 = \pm \mathrm{i}x_4 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0 ; \tag{32}$$

křivými světočárami jsou např. hyperboly

$$x_1^2 + x_4^2 = \pm 1 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0 , \tag{33}$$

znázorněné graficky na obr. 15.

Přímky typu osy *1* (*1'*) a také druhá z hyperbol (33) se podstatně liší od přímek typu osy *4* (*4'*) nebo první hyperboly (33) tím, že libovolná dvojice světobodů na světočárách prvního typu má čtverec intervalu Δs^2 kladný, na světočárách druhého typu však záporný. Přímky (32), tzv. nulové přímky, jsou příkladem na světočáry třetího typu. Na nich libovolná dvojice světobodů má nulový interval. Samozřejmě existují i světočáry (křivé) smíšeného typu, na nichž lze nalézt dvojice světobodů jak s kladným, tak se záporným (nebo nulovým) Δs^2.

Z fyzikálního hlediska nejdůležitější jsou světočáry druhého typu, které – jak říká Minkowski – mohou být „obrazem věčného životního běhu materiální částice" (hmotného bodu). Světočára hmotného bodu musí být světočárou druhého nebo třetího typu proto, aby hmotný bod nemohl v žádném systému být současně na dvou různých místech a aby časové pořadí jeho okamžitých poloh (tj. světobodů na jeho světočáře) bylo stejné ve všech systémech spojených vzájemně ortochronními Lorentzovými transformacemi. (Hmotný bod může přenášet signál!)

Rovnice světočáry hmotného bodu M můžeme zapsat v parametrickém tvaru

$$x_j = \mathrm{f}_j(t)\,, \quad x_4 = \mathrm{f}_4(t) \equiv \mathrm{i}ct\,, \tag{34}$$

v němž jsme za parametr zvolili čas t. Triviálním zobecněním postupu uvedeného při rovnicích (IV 49) lze rovnice (34) převést do systému souřadnic x'_μ určených *obecnou* Lorentzovou transformací (9b) a zapsat je ve tvaru

$$x'_j = \mathrm{f}'_j(t')\,, \quad x'_4 = \mathrm{f}'_4(t') \equiv \mathrm{i}ct'\,. \tag{34'}$$

Ve všech světobodech naší světočáry bude zřejmě $u \equiv (u_j u_j)^{\frac{1}{2}} < c$, jsou-li $u_j = \mathrm{d}x_j/\mathrm{d}t$ složky rychlosti hmotného bodu. Je-li $u < c$ je ovšem také $u' < c$. To plyne obecně z invariance výrazu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\mu = (u^2 - c^2)\,\mathrm{d}t^2 = \\ = \mathrm{d}x'_\mu\mathrm{d}x'_\mu = (u'^2 - c^2)\,\mathrm{d}t'^2\,. \tag{35}$$

Funkce $\mathrm{f}'_j(t')$ v (34') jsou sice obecně jiné než $\mathrm{f}_j(t)$ v (34), ale to pouze říká, že naše světočára má vůči čtyřhranu Minkowského os *1', 2', 3', 4'* jinou „polohu" než vůči čtyřhranu os *1, 2, 3, 4*. Její „geometrický tvar", charakterizovaný jejím „zakřivením" apod., je z hlediska všech systémů stejný. Od pojmu světočáry hmotného bodu se ovšem musí rozlišovat *pojem jeho dráhy*, což je pojem relativní. Dráha hmotného bodu, tj. *prostorová křivka*, po níž se hmotný bod pohybuje, má z hlediska různých inerciálních systémů nejen různou polohu, ale obecně i různý geometrický tvar. Rovnice dráhy našeho hmotného bodu vůči trojhranu Lorentzových os *1, 2, 3* souřadnic x_j dostaneme prostě tak, že z prvních tří rovnic (34) vyloučíme t. Podobně lze postupovat v čárkovaném systému. Můžeme také říci, že dráha hmotného bodu v systému S (S') je projekcí jeho světočáry ve směru osy *4 (4')*. Obě dráhy mají obecně různý tvar, poněvadž jsou to projekce téže světočáry v různých směrech. (Viz Ú 6.)

Omezme se nyní na *ortochronní* Lorentzovy transformace ($b_{44} \geqq 1$). Pak pro dva světobody naší světočáry s $\mathrm{d}t \gtrless 0$ je také $\mathrm{d}t' \gtrless 0$. Definujme si veličinu

$$\mathrm{d}\tau = (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \gamma_{(u)}^{-1}\,\mathrm{d}t = \\ = (1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t' = \gamma_{(u')}^{-1}\,\mathrm{d}t'\,. \tag{36}$$

Obě odmocniny se berou kladně, takže $\mathrm{d}\tau$ má stejné znaménko jako $\mathrm{d}t$ nebo $\mathrm{d}t'$. Zvolme si na světočáře pevný světobod A, jemuž přísluší čas t_A popř. t'_A. Poněvadž rychlosti $u(t)$ a $u'(t')$ jsou známé (z rovnic (34) a (34')), můžeme rovnice (36) integrovat, tj. psát

$$\tau = \int_{t_A}^{t} (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_{t'_A}^{t'} (1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t'\,, \tag{36a}$$

a obráceně vyjádřit t a t' jako funkce parametru τ:

$$t = \mathrm{G}(\tau)\,, \quad t' = \mathrm{G}'(\tau)\,. \tag{36b}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnic (34) popř. (34'), dostaneme souřadnice $x_\mu = x_\mu(\tau)$ i $x'_\mu = x'_\mu(\tau)$ libovolného světobodu na naší světočáře vyjádřeny jako funkce téhož reálného parametru τ.

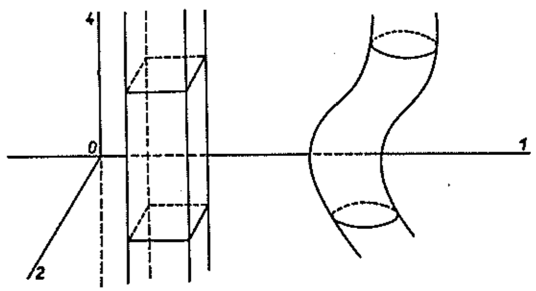
Fyzikální význam reálné veličiny τ snadno určíme porovnáním rovnice (36) s rovnicí (IV 31). Veličina $\mathrm{d}\tau = \gamma_{(u)}^{-1}\,\mathrm{d}t$ udává přírůstek údaje *inerciálních* hodin H, které mají vůči trojhranu Lorentzových os *1, 2, 3* inerciálního systému S *konstantní* rychlost rovnou rychlosti bodu M v daném okamžiku, a jsou tedy vůči bodu M momentálně v klidu. Jinými slovy, $\mathrm{d}\tau$ je přírůstek času v okamžitém klidovém (inerciálním) systému hmotného bodu M, a to přírůstek za dobu $\mathrm{d}t$ v systému S. Veličina τ je pak součet takto definovaných veličin $\mathrm{d}\tau$ ve všech na sebe navazujících dobách $\mathrm{d}t$ mezi okamžiky t_A a t.

Význam veličiny τ je možno objasnit též takto: Představme si, že máme hodiny $\mathrm{H}_{(M)}$, na které působíme jistou vnější silou **f** tak, aby se pohybovaly stále s hmotným bodem M (byly vůči němu trvale v klidu). Předpokládejme dále, že hodiny $\mathrm{H}_{(M)}$ jsou sestrojeny tak, aby byly „necitlivé" na působení síly **f**. To se projeví právě tím, že infinitezimální přírůstek $\mathrm{d}\tau$ jejich údaje (mezi dvěma nekonečně blízkými světobody na světočáře hmotného bodu M) bude stejný jako příslušný přírůstek $\mathrm{d}t$ údaje *inerciálních* hodin H v *té chvíli klidných vůči bodu M*. Je zřejmé, že hodiny $\mathrm{H}_{(M)}$ pak budou měřit přímo veličinu τ, a my jí budeme říkat *vlastní čas hmotného bodu M*. Tato definice vlastního času představuje vhodné *zobecnění pojmu vlastního času inerciálního tělesa (hmotného bodu) na případ tělesa neinerciálního*. (Při pokusu probíraném v odst. II 3,2 nám za neinerciální hodiny $\mathrm{H}_{(M)}$ sloužilo atomové jádro v rotující obruči. Viz též Ú 6.)

Vztah $\mathrm{d}s = \mathrm{i}c|\mathrm{d}\tau|$ plynoucí z (35) a (36) ukazuje, že vlastní čas τ hmotného bodu má v Minkowského prostoročase velmi jednoduchý *geometrický význam*: Je úměrný *oblouku světočáry* hmotného bodu. V kap. VI uvidíme, že veličina τ je z fyzikálního hlediska velmi důležitá a užitečná při formulaci pohybových zákonů relativistické mechaniky.

3,2. PLOCHY A NADPLOCHY V PROSTOROČASE. SVĚTOVÉ TRUBICE

Nejjednoduššími dvojrozměrnými a trojrozměrnými geometrickými útvary v prostoročase jsou *roviny a nadroviny* (trojrozměrné lineární podprostory). Příkladem na roviny jsou osové roviny (*1*, *2*), (*2*, *3*), (*3*, *1*) určitého zvoleného Minkowského systému. Všechny tyto tři roviny jsou „vnořeny" do nadroviny $x_4 = 0$, což je obyčejný *prostor v okamžiku* $t = 0$. Dvojrozměrné geometrické útvary znázorněné na obr. 17 jsou vesměs vnořeny do nadroviny $x_3 = 0$, což je trojrozměrný podprostor tvořený světobody o souřadnicích $(x_1, x_2, 0, x_4)$, čili Lorentzova rovina (*1*, *2*) ve *všech* časech t. Světelný kužel na obr. 17 představuje např. *kružnici*



Obr. 19.

$$x_1^2 + x_2^2 = c^2t^2\,, \quad x_3 = 0\,, \tag{37}$$

(tj. kružnici, která leží v Lorentzově rovině (*1*, *2*), a jejíž poloměr se s časem mění podle vzorce $r = c|t|$) *ve všech časech* $-\infty < t < \infty$.

Graficky znázornit si vůbec můžeme nejvýše trojrozměrné prostoročasové útvary vnořené do nějaké nadroviny. Nejnázornějším *trojrozměrným*, ohraničeným *prostoročasovým útvarem je vnitřek* nějakého *hmotného tělesa v čase* $t = 0$. Hranicí (dvojrozměrnou) této části trojrozměrné nadroviny $x_4 = 0$ je *povrch tělesa v čase* $t = 0$.

Jiným příkladem trojrozměrného prostoročasového útvaru je vnitřek (dvoj)-kužele, nebo jednodílného hyperboloidu z obr. 17. Jsou to *části nadroviny* $x_3 = 0$. Ještě jednodušší trojrozměrné útvary tohoto druhu (trojrozměrné světové trubice „vyříznuté" z nadroviny $x_3 = 0$) jsou znázorněny na obr. 19. Jejich význam je z obrázku zřejmý a není třeba ho popisovat. Dvojrozměrným „pláštěm" těch (trojrozměrných) trubic je obvod obdélníka popř. kruhu ve všech časech.

Příkladem trojrozměrné „světové trubice", kterou již nemůžeme graficky znázornit (poněvadž není „vyříznuta" z nadroviny) je povrch hmotného tělesa ve všech časech t, např. kulová plocha

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 = \text{konst.}\,, \tag{38}$$

ve všech časech t (x_4 libovolné). Rovnice (38) je rovnicí *válcové nadplochy s osou v ose 4*.

Podobným velmi důležitým příkladem trojrozměrné světové trubice je světelný nebo absolutní *nadkužel* určený rovnicí

$$x_\mu x_\mu = 0\,, \tag{39}$$

tj.

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} = c|t|\,. \tag{39a}$$

Při stručném vyjadřování se obvykle i trojrozměrné prostoročasové nadploše (39) popř. (39a) říká prostě *světelný kužel*. Je to zřejmě povrch obyčejné koule se středem v Lorentzově počátku O (prostorových souřadnic x_j), jejíž poloměr se nejprve rychlostí c zmenšuje až na nulu (pro $t = 0$) a pak zase roste rychlostí c do nekonečna jako vlnoplocha světelného signálu — srovnej s (IV 13).

Vnitřek této koule ve všech časech t (vnitřek světelného nadkužele), stejně jako vnitřek pevné koule (38) ve všech časech t (vnitřek nadválce s osou *4*), představují ovšem *čtyřrozměrné prostoročasové obory*. Jsou to speciální *čtyřrozměrné světové trubice*. Trojrozměrné světové trubice (39a) popř. (38) jsou jejich pláštěm.

Důležitou světovou trubici představuje *vnitřek* libovolně se pohybujícího *hmotného tělesa ve všech časech t*. Budeme-li nadále mluvit prostě o *světové trubici hmotného tělesa*, budeme tím mínit vždy právě uvedený čtyřrozměrný obor v prostoročase. Trojrozměrné světové trubici, kterou představuje povrch tělesa ve všech časech, budeme říkat plášť světové trubice toho tělesa.

Z nekonečné světové trubice hmotného tělesa si můžeme vymezit konečnou část, např. část ležící mezi nadrovinami $x_4 = ict_1$ a $x_4 = ict_2$, $t_1 < t_2$. „Řezy" těch rovnoběžných nadrovin s trubicí jsou „základnami" vymezené části trubice. „Dolní" popř. „horní" základnou je tedy (trojrozměrný) vnitřek hmotného tělesa v čase $t = t_1$ popř. $t = t_2$ a pláštěm vymezené části trubice je povrch tělesa v době od t_1 do t_2.

Můžeme-li hmotné těleso (částici) pokládat prakticky za hmotný bod, přejde ovšem světová trubice tělesa (i její plášť) na jednorozměrnou světočáru hmotného bodu.

4. VEKTORY A TENZORY V PROSTOROČASE

4,1. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI PROSTOROČASOVÝCH TENZORŮ

Obecné nehomogenní Lorentzovy transformace jsou formálně zcela podobné transformacím (II 49). Jestliže tedy o veličinách $\mathrm{d}x_j$ transformujících se při (II 49) podle vzorců

$$\mathrm{d}x'_j = C_{jk}\,\mathrm{d}x_k$$

říkáme, že *tvoří obyčejný (prostorový) vektor*, můžeme obdobně o veličinách dx_μ, které se při (9a) popř. (9b) transformují podle vzorců

$$dx'_\mu = b_{\mu\nu}\, dx_\nu\,,$$

říkat, že *tvoří prostoročasový vektor*, nebo stručněji *čtyřvektor*. Obecně, jsou-li F_μ veličiny definované v systému souřadnic x_μ a F'_μ veličiny definované v systému souřadnic x'_μ a platí-li mezi F_μ a F'_μ vztahy

$$F'_\mu = b_{\mu\nu} F_\nu\,, \tag{40}$$

v nichž $b_{\mu\nu} = \partial x'_\mu / \partial x_\nu$ jsou koeficienty transformace souřadnic, říkáme, že F_μ popř. F'_μ jsou složkami čtyřvektoru. Pojem čtyřvektoru lze snadno zobecnit na pojem prostoročasového tenzoru libovolného řádu. Tenzor $T_{\mu\nu\varrho\ldots}$ n-tého řádu má obecně 4^n složek, které se ze systému S do S' transformují podle vzorců

$$T'_{\mu\nu\varrho\ldots} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} \ldots T_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,. \tag{41}$$

Tento tenzor může, ale nemusí být vázán na určitý světobod (x). Fyzikální veličiny tvořící takový tenzor se ve všech systémech vztahují k témuž fyzikálnímu (materiálnímu) objektu nebo popisují tutéž fyzikální skutečnost a také ovšem jsou ve všech systémech definovány stejným způsobem (mají stejný fyzikální význam). Příkladů takových *fyzikálních tenzorů* poznáme ještě celou řadu.

Tenzorový počet založený na pojmu prostoročasového tenzoru je pro teorii relativity ještě důležitější, než byl pro předrelativistickou fyziku vektorový a tenzorový počet operující s vektory a tenzory v obyčejném (trojrozměrném) prostoru: Umožňuje totiž přehlednou formulaci konkrétních fyzikálních zákonů ve tvaru rovnic (tenzorových), jejichž *invariance vůči Lorentzovým transformacím*, zapsaným v Minkowského geometrickém tvaru (9a), je přímo *evidentní*. (Připomeňme, že *obyčejný vektorový* nebo tenzorový *tvar rovnic předrelativistické fyziky nezaručoval* ještě automaticky jejich *invarianci vůči Galileiho transformacím*, nýbrž jenom vůči transformacím typu (II 49).)

Obecná pravidla tenzorového počtu, tj. pravidla o tvoření tenzorů vyššího řádu násobením tenzorů nebo jejich derivacemi podle souřadnic a o tvoření tenzorů nižšího řádu úžením, nezávisí na počtu dimenzí prostoru a jsou tedy pro prostoročasové tenzory stejná jako pro tenzory v obyčejném prostoru. (Doporučujeme čtenáři, aby si zopakoval odst. I 3 a II 4.) Jiný počet rozměrů, a také geometrické vlastnosti, jimiž se Minkowského prostoročas liší od obyčejného prostoru i od čtyřrozměrného euklidovského prostoru, se ovšem projevují ve vlastnostech každého prostoročasového tenzoru.

Všimněme si nejprve, jak je tomu s reálností složek tenzoru. Vyjdeme z příkladu čtyřvektoru dx_μ, jehož složky „odpovídají" čtyřem reálným fyzikálním veličinám dx_1, dx_2, dx_3 a $dt = (ic)^{-1}\, dx_4$. Čtyřvektor dx_μ budeme definitoricky pokládat za „reálný čtyřvektor". Také každý jiný čtyřvektor F_μ, který má složky F_j *reálné* a F_4

ryze imaginární, bude nám *reálným* čtyřvektorem. Konečně toto pravidlo zobecníme pro prostoročasové tenzory libovolného řádu tím způsobem, že *za reálný budeme pokládat tenzor, jehož složky se sudým (lichým) počtem indexů 4 jsou reálné (ryze imaginární)*. Z transformačních formulí (41) a z vlastností (10c) koeficientů $b_{\mu\nu}$ je vidět, že reálnost tenzoru je vlastnost nezávislá na volbě systému souřadnic. V dalším výkladu se budeme setkávat téměř výhradně s reálnými fyzikálními tenzory. Komplexních prostoročasových tenzorů se používá např. v teorii některých druhů elementárních částic.

Invariant $F_\mu F_\mu = F'_\nu F'_\nu$ udává čtverec velikosti čtyřvektoru F_μ. Velikost čtyřvektoru je tedy prostoročasový skalár. Je-li F_μ reálný čtyřvektor a $F_\mu F_\mu < 0$, říkáme, že F_μ je čtyřvektor časového charakteru, a v opačném případě čtyřvektor prostorového charakteru. Existují také čtyřvektory, jejichž složky nejsou nulové, ale jejichž velikost je nulová (čtyřvektor nulové velikosti). Je-li F_μ čtyřvektor prostorového (časového) charakteru, lze vždy nalézt systém souřadnic x'_μ, v němž je $F'_4 = 0$ (popř. $F'_j = 0, j = 1, 2, 3$). Žádnou ortochronní Lorentzovou transformací nelze docílit, aby se u čtvrté složky čtyřvektoru časového charakteru změnilo znaménko. Je to však možné u čtyřvektoru prostorového charakteru.

Při transformacích

$$x'_j = C_{jk}(x_k - x_k(O'))\,,$$
$$x'_4 = x_4 - x_4(O')\,, \tag{42}$$

které tvoří podgrupu obecné Lorentzovy grupy (9a), se složky čtyřvektoru transformují podle vzorců

$$F'_j = C_{jk} F_k\,,$$
$$F'_4 = F_4\,. \tag{42a}$$

První tři složky každého čtyřvektoru se tedy při transformacích (42) (v podstatě identických s (II 49)) *transformují jako složky obyčejného vektoru a čtvrtá složka je obyčejný skalár. Obrácené pravidlo však obecně neplatí.* Trojici fyzikálních veličin, které tvoří obyčejný vektor, nelze vždy (obecně) doplnit čtvrtou veličinou tak, aby vznikl čtyřvektor. Příkladem jsou tři složky rychlosti $u_j = dx_j/dt$ nebo zrychlení $a_j = du_j/dt$ hmotného bodu. S jinými takovými příklady se setkáme později.

4,2. ČTYŘRYCHLOST A ČTYŘZRYCHLENÍ

Máme-li pohyb hmotného bodu popsán rovnicemi jeho světočáry $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$, můžeme vypočítat veličiny

$$U_\alpha \equiv dx_\alpha / d\tau\,, \tag{43}$$

které zřejmě tvoří reálný čtyřvektor, neboť dx_α je takový čtyřvektor a reálná veličina $d\tau = \gamma_{(u)}^{-1}\, dt$ je na systému souřadnic nezávislá (skalár). U_α je velmi důležitý čtyřvektor a nazývá se *čtyřrychlost.*

Dosadíme-li za $d\tau$, přejdou složky čtyřrychlosti na tvar

$$U_j = \gamma_{(u)} u_j\,, \quad U_4 = ic\gamma_{(u)}\,, \tag{43a}$$

a vidíme, že trojici veličin $\gamma_{(u)} u_j$ (na rozdíl od u_j) už lze doplnit na čtyřvektor. Jak u_j, tak i U_j tvoří *obyčejný* (tj. prostorový) vektor, neboť výraz $u^2 \equiv u_j u_j$ a tedy i výraz $\gamma_{(u)}$ je *při transformacích* (42) *invariantní.* (Faktor $\gamma_{(u)}$ je obyčejný skalár, stejně jako dt.)

Z vyjádření (43) i (43a) plyne snadno rovnice

$$U_\alpha U_\alpha = -c^2\,, \tag{44}$$

z níž vidíme, že U_α je *čtyřvektor časového charakteru* (má směr tečný ke světočáře) *a konstantní velikosti.* V okamžitém klidovém systému S_0 uvažovaného hmotného bodu má složky $U_{0j} = 0\,, \quad U_{04} = ic\,.$

Veličiny

$$A_\alpha = dU_\alpha/d\tau \tag{45}$$

tvoří rovněž reálný čtyřvektor, tzv. *čtyřzrychlení.* Dosadíme-li opět za $d\tau = \gamma_{(u)}^{-1}\, dt$ a za U_α podle (43a), dostaneme složky čtyřzrychlení v podobě

$$A_j = \gamma_{(u)}^2 a_j + c^{-2}\,\gamma_{(u)}^4 (\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a})\, u_j\,,$$
$$A_4 = (i/c)\,\gamma_{(u)}^4 \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a}\,. \tag{45a}$$

Invariantní čtverec velikosti čtyřzrychlení lze pak vyjádřit vztahem

$$A_\mu A_\mu = \gamma_{(u)}^4 [a^2 + c^{-2}\,\gamma_{(u)}^2 (\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{a})^2] =$$
$$= \gamma_{(u)}^4 [1 + \gamma_{(u)}^2 \beta_{(u)}^2 \cos^2 \vartheta]\, a^2 \geqq a^2 \geqq 0\,, \tag{46}$$

z něhož vidíme, že A_μ *je čtyřvektor prostorového charakteru.* V okamžitém klidovém systému má čtyřzrychlení složky $A_{0j} = a_{0j}$, $A_{04} = 0$. Z rovnice (46) je také vidět, že obyčejné zrychlení je v okamžitém klidovém systému maximální, jak jsme tvrdili v odst. IV 6,2.

Z rovnice (44) plyne derivací podle τ důležitý vztah

$$U_\alpha A_\alpha = 0\,. \tag{47}$$

Říkáme, že čtyřvektor A_μ je kolmý k U_μ a tedy ke světočáře v uvažovaném světobodě.

4,3. SPECIÁLNÍ TENZORY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Prostoročasový tenzor druhého řádu $T_{\mu\nu}$ má obecně 16 nezávislých složek. Fyzikálně významné prostoročasové tenzory druhého řádu jsou však převážně buď symetrické nebo antisymetrické. Symetrický tenzor 2. řádu $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$ má obecně jen 10 nezávislých složek, a splňuje-li ještě invariantní podmínku $S_{\alpha\alpha} = 0$ (má nulovou stopu), pak může mít jen 9 nezávislých složek. Nejjednodušším symetrickým tenzorem je opět tenzor Kroneckerův $\delta_{\mu\nu}$, jehož složky mají ve všech Minkowského systémech tytéž hodnoty.

$$\delta'_{\mu\nu} = b_{\mu\varrho} b_{\nu\sigma} \delta_{\varrho\sigma} = b_{\mu\varrho} b_{\nu\varrho} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu)\,, \\ 0 & (\mu \neq \nu)\,. \end{cases}$$

Antisymetrický tenzor 2. ř. $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ má obecně 6 nezávislých složek. Je-li reálný, pak složky $F_{jk} = -F_{kj}$ jsou reálné a $F_{j4} = -F_{4j}$ jsou imaginární. Zaveďme si označení

$$F_{23} = H_1\,, \quad F_{31} = H_2\,, \quad F_{12} = H_3\,, \tag{48a}$$

$$F_{41} = iE_1\,, \quad F_{42} = iE_2\,, \quad F_{43} = iE_3 \tag{48b}$$

(a podobně v čárkovaném systému) a zkoumejme, jak se veličiny E_j a H_j transformují při speciálních transformacích (42). Rozepsáním obecných vzorců

$$F'_{\mu\nu} = b_{\mu\varrho} b_{\nu\sigma} F_{\varrho\sigma} \tag{49}$$

v případě transformace (42) dostaneme pro veličiny zavedené v (48a,b) transformační vzorce

$$E'_j = C_{jk} E_k\,, \tag{49a}$$

$$H'_j = \bar{C}_{jk} H_k = C\,.\,C_{jk} H_k\,, \tag{49b}$$

v nichž $\bar{C}_{jk}$ označí doplněk (minor) příslušný k prvku C_{jk} v determinantu $C \equiv \det(C_{jk})$. Vztah $\bar{C}_{jk} = CC_{jk}$ plyne ze srovnání obecných vztahů $\bar{C}_{jk} C_{jl} = C\,.\,\delta_{kl}$, platných pro minory přidružené k prvku *libovolného* determinantu (Laplaceova věta), se vztahy ortogonality (16a).

Ze vzorců (49a,b) vidíme, že veličiny E_j tvoří obyčejný vektor a H_j tvoří obyčejný pseudovektor.

Z prostoročasových tenzorů 3. popř. 4. řádu (majících obecně 64 popř. 256 nezávislých složek) se ve fyzikálních aplikacích zase vyskytují jen takové, které vykazují zvláštní symetrie a mají proto přiměřeně menší počet nezávislých složek. Setkáme se např. s tenzorem 3. řádu $\chi_{\mu\nu\varrho}$ antisymetrickým v prvních dvou indexech (24 nezávislých složek) a s tenzorem $\psi_{\mu\nu\varrho}$ úplně antisymetrickým (ve všech třech indexech), který má jen čtyři nezávislé složky ψ_{234}, ψ_{314}, ψ_{124}, ψ_{123}. Důležitý je úplně antisymetrický tenzor 4. řádu $\psi_{\mu\nu\varrho\sigma}$, který má jen jednu nezávislou složku ψ_{1234}. Ostatní se buď rovnají nule, nebo $\pm\psi_{1234}$.

Netřeba snad ani připomínat, že operace $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ je *z hlediska transformačního zákona* rovnocenná násobení čtyřvektorem, takže např. $\phi_\mu \equiv \partial_\mu \psi(x)$ je čtyřvektor, je-li ψ skalár, tj. platí-li $\psi'(x') = \psi(x)$. Symbol $(x) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ značí světobod a $(x') \equiv (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ určuje ovšem tentýž světobod. Podobně veličiny $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$ tvoří antisymetrický tenzor, je-li $\varphi_\mu(x)$ čtyřvektor (čtyřvektorová funkce světobodu (x)). V podobném smyslu operace $\Box \equiv \partial_\alpha \partial_\alpha \equiv \Delta - c^{-2}\, \partial^2/\partial t^2$ je ekvivalentní násobení prostoročasovým skalárem, takže např. veličiny $J_\nu \equiv \Box \varphi_\nu$ tvoří opět čtyřvektor (je-li φ_ν čtyřvektorem). To znamená, že platí $J'_\mu \equiv \Box' \varphi'_\mu(x') = b_{\mu\nu} J_\nu = b_{\mu\nu} \Box\, \varphi_\nu(x)$. Operátor $\Box$ se nazývá *d'Alembertův operátor*. Je to obdoba Laplaceova operátoru $\Delta \equiv \partial_j \partial_j$ z obyčejného vektorového nebo tenzorového počtu v trojrozměrném prostoru.

4,4. PROSTOROČASOVÉ PSEUDOTENZORY

Kromě tenzorů lze v prostoročase definovat též pseudotenzory. Vzhledem k tomu, že v prostoročase máme tři různá zrcadlení os Minkowského systému (**P**, **T**, **Z** – viz odst. 2,2) je dokonce *možné zavést tři různé druhy pseudotenzorů, uvažujeme-li obecnou Lorentzovu grupu. Zde se však omezíme* (a vlastně jsme se již omezili) *na ortochronní Lorentzovu grupu* obsahující jen zrcadlení **P** a proto vystačíme jen s jedním druhem pseudotenzorů, totiž s pseudotenzory, které se transformují podle obecného vzorce

$$\Pi'_{\mu\nu\varrho\ldots} = b\, b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} \ldots \Pi_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,. \tag{50a}$$

Přitom $b \equiv \det(b_{\mu\nu}) = \pm 1$. Zbývající dva druhy pseudotenzorů, transformující se podle vzorců

$$\Theta'_{\mu\nu\varrho\ldots} = (b_{44}/|b_{44}|)\,.\, b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} \ldots \Theta_{\alpha\beta\gamma\ldots} \tag{50b}$$

popř.

$$\Xi'_{\mu\nu\varrho} = b\,.\,(b_{44}/|b_{44}|)\, b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} \ldots \Xi_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,, \tag{50c}$$

se při transformacích ortochronní grupy neliší od tenzorů (41) popř. pseudotenzorů (50a). Mají však značný význam v teorii elementárních částic, v níž se musí uvažovat i transformace zrcadlení **T** a **Z**.

Na transformace s $b_{44} \geqq 1$ jsme se omezili, už když jsme prohlásili vlastní čas, popř. jeho přírůstek $d\tau$ definovaný rovnicemi (36), za skalár a v důsledku toho pak čtyřrychlost U_α za čtyřvektor. Obecně je $d\tau$ pseudoskalár druhu (50b) a U_α je pseudovektor téhož druhu, neboť podle (36) mění $d\tau$ znaménko při časovém zrcadlení **T**, kdežto skutečný skalár se nemění. Při transformacích vlastní Lorentzovy grupy není ovšem mezi tenzory a pseudotenzory žádný rozdíl.

Důležitým pseudotenzorem je úplně antisymetrický pseudotenzor Levi-Civitův $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$. Jeho složky mají ve všech ortogonálních (Minkowského) systémech tytéž hodnoty, a to

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{tvoří-li indexy sudou permutaci } \mathit{1, 2, 3, 4}, \\ -1, & \text{tvoří-li indexy lichou permutaci } \mathit{1, 2, 3, 4}, \\ 0, & \text{ve všech ostatních případech.} \end{cases}$$

Důkaz, že takto definované veličiny $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$ tvoří pseudotenzor, jehož složky se při transformacích (50a) reprodukují, lze provést jednoduše tímto způsobem: Vzhledem k tomu, že symetrie tenzorů a pseudotenzorů se při jejich transformacích zachovávají, stačí vypočítat složku ε'_{1234}; podle (50a) dostáváme pro ni vyjádření

$$\varepsilon'_{1234} = b(b_{1\alpha} b_{2\beta} b_{3\gamma} b_{4\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta})\,.$$

Ale výraz v závorce je právě determinant b, takže

$$\varepsilon'_{1234} = b^2 = 1 = \varepsilon_{1234}\,.$$

Platí tedy obecně

$$\varepsilon'_{\mu\nu\varrho\sigma} = b\, b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} b_{\sigma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

Snadno se potvrdí také obecný vzorec

$$b = (1/4!)\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} b_{\varrho\gamma} b_{\sigma\delta}\,.$$

Veličiny $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$ splňují vztahy

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu\alpha} & \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\gamma} & \delta_{\mu\eta} \\ \delta_{\nu\alpha} & \delta_{\nu\beta} & \delta_{\nu\gamma} & \delta_{\nu\eta} \\ \delta_{\varrho\alpha} & \delta_{\varrho\beta} & \delta_{\varrho\gamma} & \delta_{\varrho\eta} \\ \delta_{\sigma\alpha} & \delta_{\sigma\beta} & \delta_{\sigma\gamma} & \delta_{\sigma\eta} \end{vmatrix} = \Big(\sum_{\mathrm{P}_+(\alpha\beta\gamma\eta)} - \sum_{\mathrm{P}_-(\alpha\beta\gamma\eta)} \Big)\, \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\varrho\gamma}\delta_{\sigma\eta}\,, \tag{51a}$$

z nichž postupným úžením plyne dále

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \Big(\sum_{\mathrm{P}_+(\alpha\beta\gamma)} - \sum_{\mathrm{P}_-(\alpha\beta\gamma)} \Big)\, \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{\varrho\gamma}\,, \tag{51b}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} = 2(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})\,, \tag{51c}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\varrho\sigma} = 3!\, \delta_{\mu\alpha}\,, \tag{51d}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = 4!\,. \tag{51e}$$

Přitom $\mathrm{P}_\pm(\ldots)$ značí sudé (liché) permutace indexů uvedených v závorce.

Užitím Levi-Civitova pseudotenzoru lze antisymetrickému tenzoru $\psi_{\mu\nu}$ popř. $\psi_{\mu\nu\varrho}$ popř. $\psi_{\mu\nu\varrho\sigma}$ přiřadit duální (duálně sdružený) pseudotenzor $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ popř. pseudovektor $\hat{\psi}_\mu$ popř. pseudoskalár $\hat{\psi}$ rovnicemi

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \psi_{\varrho\sigma}\,, \\ \hat{\psi}_\mu = -(1/3!)\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \psi_{\nu\varrho\sigma}\,, \\ \hat{\psi} = (1/4!)\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \psi_{\mu\nu\varrho\sigma}\,. \end{cases} \tag{52}$$

Použitím příslušných relací (51) lze vztahy (52) snadno „obrátit":

$$\psi_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\hat{\psi}_{\mu\nu}\,,$$
$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\hat{\psi}_{\mu}\,,$$
$$\psi_{\alpha\beta\gamma\eta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,.\,\hat{\psi}\,. \tag{52a}$$

Aby naopak $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ byl tenzor, $\hat{\psi}_{\mu}$ vektor a $\hat{\psi}$ skalár, musí být $\psi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu\varrho}$ a $\psi_{\mu\nu\varrho\sigma}$ pseudotenzory. Praktické použití duálně sdružených veličin při zápisu invariantních rovnic si hned ukážeme.

4,5. TENZOROVÉ INTEGRÁLY

Elementem orientované světočáry Γ je reálný čtyřvektor dx_μ. Je-li $\phi_\mu(x)$ čtyřvektor, pak výraz $\phi_\mu\,dx_\mu$ i křivkový integrál

$$\int_\Gamma \phi_\mu\,dx_\mu \tag{53}$$

jsou invariantní, tj. platí

$$\phi_\mu(x)\,dx_\mu = \phi'_\nu(x')\,dx'_\nu\,,$$

$$\int_\Gamma \phi_\mu(x)\,dx_\mu = \int_\Gamma \phi'_\nu(x')\,dx'_\nu\,.$$

Píšeme-li

$$dx_\mu = T_\mu|ds|\,,\quad ds = (dx_\alpha\,dx_\alpha)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{54}$$

je T_μ čtyřvektor splňující podmínku

$$T_\mu T_\mu = \pm 1\,. \tag{54a}$$

Říkáme mu *tečný jednotkový čtyřvektor*. V našem případě má směr tečny ke světočáře Γ ve světobodě (x), z něhož vychází element dx_μ. Je zřejmé, že T_μ je reálný čtyřvektor. Křivkový integrál čtyřvektoru ϕ_μ je pak možno psát ve tvaru

$$\int_\Gamma \phi_\alpha T_\alpha\,|ds|\,. \tag{53a}$$

Je-li Γ světočárou hmotného bodu, můžeme křivkový integrál (53) zapsat ve fyzikálně názorném tvaru

$$\int_\Gamma \phi_\alpha U_\alpha\,d\tau\,. \tag{53b}$$

Element dvojrozměrné plochy σ v prostoročase je určen dvěma infinitezimálními čtyřvektory dx_μ a δx_μ vycházejícími ze světobodu (x) na ploše σ a v ní ležícími. Složky reálného antisymetrického tenzoru

$$d\sigma_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} dx_\mu & \delta x_\mu \\ dx_\nu & \delta x_\nu \end{vmatrix} = dx_\mu\,\delta x_\nu - dx_\nu\,\delta x_\mu \tag{55}$$

udávají zřejmě obsahy průmětů uvažovaného plošného elementu (kosodélníka) do osových rovin (μ, ν), a skalár

$$d\sigma = (\tfrac{1}{2}\,d\sigma_{\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}} \tag{56}$$

udává jeho plný plošný obsah. Ve speciálním, názorném případě plochy σ vnořené do nadroviny x_4 = konst máme $dx_4 = \delta x_4 = 0$, $d\sigma_{j4} = -d\sigma_{4j} = 0$, $d\sigma_{23} = d\hat{\sigma}_1$, $d\sigma_{31} = d\hat{\sigma}_2$, $d\sigma_{12} = d\hat{\sigma}_3$, a tedy

$$d\sigma = (\tfrac{1}{2}\,d\sigma_{jk}\,d\sigma_{jk})^{\frac{1}{2}} = (d\hat{\sigma}_j\,d\hat{\sigma}_j)^{\frac{1}{2}}\,.$$

(Srovnej s (II 58).)

Je-li $F_{\mu\nu}(x)$ tenzor, pak výraz $F_{\mu\nu}\,d\sigma_{\mu\nu}$ i plošný integrál

$$\int_\sigma F_{\mu\nu}(x)\,d\sigma_{\mu\nu} \tag{57}$$

jsou invariantní. Poněvadž pro symetrický tenzor $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ je invariant $T_{\mu\nu}\,d\sigma_{\mu\nu} = 0$, můžeme se omezit na integrály typu (57) s antisymetrickými tenzory. Takový integrál vystupuje např. ve Stokesově větě zobecněné pro čtyřrozměrný prostor. Budiž $\sigma_{(\Gamma)}$ část plochy σ ohraničená uzavřenou světočárou Γ ležící v té ploše. Budiž dále $\phi_\mu(x)$ čtyřvektor daný jako funkce světobodu (x), se všemi potřebnými derivacemi podle souřadnic. Pak platí (za obvyklých předpokladů o σ a Γ) invariantní vztah

$$\int_\Gamma \phi_\mu\,dx_\mu = \frac{1}{2}\int_{\sigma(\Gamma)} (\partial_\nu\phi_\varrho - \partial_\varrho\phi_\nu)\,d\sigma_{\nu\varrho}\,. \tag{58}$$

Je-li plocha σ vnořena do nadroviny x_4 = konst, přejde (58) v systému souřadnic x_μ na obyčejnou Stokesovu formuli

$$\int_\Gamma \phi_j\,dx_j = \frac{1}{2}\int_{\sigma(\Gamma)} (\partial_k\phi_l - \partial_l\phi_k)\,d\sigma_{kl} \tag{58a}$$

platnou v určitém čase t = konst. (Srovnej s Ú II 9.) Rovnice (58a) je ovšem invariantní jen vůči transformacím (42) zachovávajícím směr osy *4* (a tím i současnost světobodů s t = konst).

K tenzoru $d\sigma_{\mu\nu}$ můžeme sestrojit duální pseudotenzor

$$d\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,dx_\alpha\,\delta x_\beta\,, \tag{59}$$

o němž lze užitím (51c) snadno dokázat, že splňuje vztahy

$$\tfrac{1}{2}\,d\hat{\sigma}_{\mu\nu}\,d\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,d\sigma_{\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta} = d\sigma^2$$

a

$$d\hat{\sigma}_{\mu\nu}\,dx_\nu = d\hat{\sigma}_{\mu\nu}\,\delta x_\nu = 0\,, \quad d\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta} = 0\,.$$

Říkáme, že pseudotenzor $d\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ je totálně kolmý k tenzoru $d\sigma_{\mu\nu}$, popř. k plošnému elementu určenému čtyřvektory dx_μ a δx_μ. Pseudotenzor $d\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ umožňuje utvořit s antisymetrickým tenzorem $F_{\mu\nu}(x)$ plošný integrál

$$\int_\sigma F_{\mu\nu}\,d\hat{\sigma}_{\mu\nu}\,, \tag{60}$$

který je ovšem pseudoskalárem. Jeho použití si ihned ukážeme.

Nejprve si však zavedeme pojem elementu trojrozměrné nadplochy Σ. Ten je určen třemi infinitezimálními čtyřvektory dx_μ, δx_μ, Δx_μ vycházejícími ze světobodu (x) v Σ a ležícími v té nadploše (ale nikoliv v jedné rovině). Utvořme z nich plně antisymetrický tenzor 3. řádu

$$d\Sigma_{\mu\nu\varrho} = \begin{vmatrix} dx_\mu & \delta x_\mu & \Delta x_\mu \\ dx_\nu & \delta x_\nu & \Delta x_\nu \\ dx_\varrho & \delta x_\varrho & \Delta x_\varrho \end{vmatrix} \tag{61}$$

a k němu duální pseudovektor

$$d\hat{\Sigma}_\mu = -(1/3!)\,\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\,d\Sigma_{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{62}$$

Z (61) a (62) snadno plynou vztahy

$$d\hat{\Sigma}_\mu\,dx_\mu = d\hat{\Sigma}_\mu\,\delta x_\mu = d\hat{\Sigma}_\mu\,\Delta x_\mu = 0\,.$$

Pseudovektor $d\hat{\Sigma}_\nu$ je tedy kolmý ke každému čtyřvektoru ležícímu v uvažovaném elementu nadplochy Σ.

Složky pseudovektoru $d\hat{\Sigma}_\nu$ udávají objemy průmětů uvažovaného elementu (trojrozměrného rovnoběžnostěnu) do nadrovin x_ν = konst a skalár

$$d\Sigma = (d\hat{\Sigma}_\alpha\,d\hat{\Sigma}_\alpha)^{\frac{1}{2}} = [(1/3!)\,d\Sigma_{\alpha\beta\gamma}\,d\Sigma_{\alpha\beta\gamma}]^{\frac{1}{2}} \tag{63}$$

udává jeho plný objem.

Budiž nyní $\Sigma_{(\sigma)}$ část nadplochy Σ ohraničená uzavřenou plochou σ (ležící v té nadploše) a budiž $F_{\mu\nu}(x)$ antisymetrický tenzor daný jako funkce světobodu (x), se všemi potřebnými derivacemi podle souřadnic. Potom za obvyklých předpokladů o σ a Σ a při správné volbě vzájemné orientace vektorů dx_μ a δx_μ v ploše σ platí invariantní vztah

$$\frac{1}{2}\int_\sigma F_{\mu\nu}\,d\hat{\sigma}_{\mu\nu} = -\int_{\Sigma(\sigma)} \partial_\beta F_{\alpha\beta}\,d\hat{\Sigma}_\alpha\,. \tag{64}$$

V názorném speciálním případě, kdy je nadplocha Σ identická s nadrovinou x_4 = konst, může např. $\Sigma_{(\sigma)}$ představovat vnitřek V hmotného tělesa (a plocha σ jeho povrch) v daném okamžiku. Pseudovektor $d\hat{\Sigma}_\mu$ má pak *nenulovou* jen složku

$$d\hat{\Sigma}_4 = d\Sigma_{123} = dV_{123} = d\hat{V}$$

(srovnej s (II 60)), a pseudotenzor $d\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ jen složky $d\hat{\sigma}_{14} = d\sigma_{23} = d\hat{\sigma}_1$, atd. (cykl. 1, 2, 3). Označíme-li dále složky F_{j4} jako v (48b), dostane (64) tvar obyčejné Gaussovy formule (II 62a)

$$\int_\sigma E_j\,d\hat{\sigma}_j = \int_V \partial_k E_k\,d\hat{V}\,.$$

To je rovnice invariantní pouze vůči transformacím (42), kdežto její „čtyřrozměrné" zobecnění (64) je invariantní vůči libovolným Lorentzovým transformacím (obě strany (64) jsou pseudoskaláry, je-li $F_{\mu\nu}$ tenzor).

Zbývá definovat také velikost elementu čtyřrozměrné prostoročasové oblasti Ω. Mějme čtyři infinitezimální čtyřvektory dx_μ, δx_μ, Dx_μ, Δx_μ vycházející ze světobodu (x) a neležící v jedné nadrovině, takže určují skutečně čtyřrozměrný „rovnoběžnostěn". Z nich lze utvořit plně antisymetrický tenzor 4. řádu

$$d\Omega_{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} dx_\mu & \delta x_\mu & Dx_\mu & \Delta x_\mu \\ dx_\nu & \delta x_\nu & Dx_\nu & \Delta x_\nu \\ dx_\varrho & \delta x_\varrho & Dx_\varrho & \Delta x_\varrho \\ dx_\sigma & \delta x_\sigma & Dx_\sigma & \Delta x_\sigma \end{vmatrix} \tag{65}$$

a k němu duální pseudoskalár

$$d\hat{\Omega} = (1/4!)\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,d\Omega_{\alpha\beta\gamma\eta} = d\Omega_{1234}\,. \tag{66}$$

Volíme-li speciálně

$$dx_\mu \equiv (dx_1, 0, 0, 0)\,, \quad \delta x_\mu \equiv (0, \delta x_2, 0, 0)\,,$$
$$Dx_\mu \equiv (0, 0, Dx_3, 0)\,, \quad \Delta x_\mu \equiv (0, 0, 0, \Delta x_4)\,, \tag{67}$$

dostaneme

$$d\hat{\Omega} = dx_1\,\delta x_2\,Dx_3\,\Delta x_4\,, \tag{68}$$

a vidíme, že pseudoskalár $d\hat{\Omega}$ nebo skalár

$$d\Omega \equiv |d\hat{\Omega}| = |dx_1\,\delta x_2\,Dx_3|\,c|\Delta t| = dV\,.\,c|\Delta t|$$

udává velikost elementu čtyřrozměrné prostoročasové oblasti Ω.

Je-li čtyřrozměrná oblast Ω *ohraničena* trojrozměrnou *uzavřenou* nadplochou Σ, a je-li $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ tenzor daný jako funkce světobodu, se všemi potřebnými derivacemi podle souřadnic, pak při správné volbě vektorů, z nichž jsou podle (61), (62) utvořeny složky pseudovektoru $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu$, platí invariantní vztah

$$\int_\Omega \partial_\nu T_{\alpha\ldots\mu\nu}\, \mathrm{d}\hat{\Omega} = +\int_\Sigma T_{\alpha\ldots\mu\nu}\, \mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu\,. \tag{69}$$

V čem záleží správnost volby pseudovektoru $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu$, lze objasnit takto: Předpokládejme, že čtyřvektory, z nichž je podle (65), (66) utvořen pseudoskalár $\mathrm{d}\hat{\Omega}$, jsou již zvoleny tak, že platí

$$\mathrm{d}\hat{\Omega} = +\mathrm{i}|\mathrm{d}\hat{\Omega}| = +\mathrm{i}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{68a}$$

V systému souřadnic, který vznikne transformací obsahující zrcadlení **P**, pak ovšem máme $\mathrm{d}\hat{\Omega}' = -\mathrm{i}|\mathrm{d}\hat{\Omega}'| = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}\Omega$. Pišme dále

$$\mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu = \mathrm{i}N_\nu|\mathrm{d}\Sigma|\,. \tag{70}$$

Poněvadž veličiny $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_j$ jsou ryze imaginární a $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_4$ reálná, jsou zřejmě veličiny N_j reálné a N_4 ryze imaginární. Přitom platí $N_\mu N_\mu = \pm 1$, a také vztahy $N_\mu\,\mathrm{d}x_\mu = N_\mu\,\delta x_\mu = N_\mu\,\Delta x_\mu = 0$, jsou-li $\mathrm{d}x_\mu$, δx_μ a Δx_μ čtyřvektory určující element nadplochy Σ. Je nyní účelné, přisoudit veličinám N_μ transformační vlastnosti složek *čtyřvektoru*, tj. pokládat $N_\mu(x)$ za (reálný) *jednotkový čtyřvektor kolmý k elementu nadplochy* Σ ve světobodě (x). Poněvadž $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu$ je *pseudočtyřvektor* a $\mathrm{d}\Sigma$ *skalár*, platí rovnice (70) pouze v systémech, které vzniknou ze zvoleného systému S transformacemi *vlastní* Lorentzovy grupy. Po transformaci obsahující zrcadlení **P** platí místo (70) rovnice $\mathrm{d}\hat{\Sigma}'_\nu = -\mathrm{i}N'_\nu|\mathrm{d}\Sigma|$. Správná volba $\mathrm{d}\hat{\Sigma}_\nu$, kterou vyžaduje platnost vztahu (69), záleží v tom, že čtyřvektor N_ν má mít směr *vnější* normály k nadploše Σ.

Dosadíme-li výrazy (68a) a (70) do (69), nabudou tyto vztahy obvyklejšího Gaussova tvaru

$$\int_\Omega \partial_\nu T_{\alpha\ldots\mu\nu}\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Sigma T_{\alpha\ldots\mu\nu} N_\nu |\mathrm{d}\Sigma|\,. \tag{69a}$$

Vztahy (69) popř. (69a) jsou formálně zcela analogické vztahům (II 63a) popř. (II 63). Je zřejmé, že rovnice (69) i (69a) jsou invariantní vůči libovolným Lorentzovým transformacím. Obě strany v (69) jsou pseudotenzory a v (69a) pak tenzory řádu $n-1$, je-li $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ tenzor n-tého řádu.

4,6. VĚTA O INTEGRÁLECH PO NADPLOCHÁCH PROSTOROVÉ POVAHY

Matematické věty (58), (64) a (69) popř. (69a) lze dokázat vhodnou úpravou a zobecněním postupů, jimiž se dokazují podobné věty (Stokesova a Gaussova) v trojrozměrném prostoru. My si místo toho z obecných vztahů (69) popř. (69a) od-

vodíme několik speciálních důsledků, které mají „praktické použití" a jsou důležité v relativistické fyzice, jak uvidíme v dalších kapitolách.

Nejprve si definujme důležitý pojem nadplochy „prostorové povahy" nebo nadplochy „podobné prostoru". (Stručně jí budeme říkat též „prostorová nadplocha".) Je to obecně křivá nadplocha Σ v prostoročase, v jejíchž elementech mají čtyřvektory N_μ určené vztahy (70) vesměs časový charakter. Ke každému jejímu elementu lze tedy udat Minkowského systém souřadnic x'_μ, v němž čtyřvektor N'_μ toho elementu má složky $N'_j = 0$ a $N'_4 = \pm\mathrm{i}$, a tedy $\mathrm{d}\hat{\Sigma}'_j = 0$, $|\mathrm{d}\hat{\Sigma}'_4| = \mathrm{d}V'$. Uvažovaný element, je pak identický s jedním elementem tečné nadroviny $x'_4 = $ konst, tj. s elementem obyčejného prostoru v čase $t' = $ konst. Tím je dán i názorný fyzikální význam skalární veličiny $|\mathrm{d}\Sigma|$, neboť

$$|\mathrm{d}\Sigma| = |\mathrm{d}\Sigma'| = |\mathrm{d}\hat{\Sigma}'_4| = \mathrm{d}V'$$

Všecky světobody v takové nadploše jsou kvazisoučasné a k libovolně zvoleným čtyřem z nich lze vždy nalézt systém, v němž se jeví současnými. Je-li daná nadplocha (prostorové povahy) sama nadrovinou, lze ji vždy celou ztotožnit s obyčejným prostorem v jistém okamžiku v jistém inerciálním systému.

Vraťme se nyní k vztahům (69a). Nechť za prvé tenzor $T_{\alpha\ldots\mu\nu}(x)$ splňuje invariantní podmínky

$$\partial_\nu T_{\alpha\ldots\mu\nu} = 0 \tag{71}$$

a nechť za druhé jeho složky $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ jsou od nuly různé pouze uvnitř jisté světové trubice, např. světové trubice nějakého hmotného tělesa. Vymezme z té trubice část Ω dvěma nadrovinami $\Sigma_{(1)}$ $(x_4 = \mathrm{i}ct_1)$ a $\Sigma_{(2)}$ $(x_4 = \mathrm{i}ct_2)$, $t_1 < t_2$. Rovnice (69a) pak dávají

$$\int_{\Sigma_{(1)}} T_{\alpha\ldots\mu\nu} N_\nu |\mathrm{d}\Sigma| + \int_{\Sigma_{(2)}} T_{\alpha\ldots\mu\nu} N_\nu |\mathrm{d}\Sigma| = 0\,, \tag{72}$$

neboť uvnitř Ω platí (71) a na plášti trubice je $T_{\alpha\ldots\mu\nu} = 0$. Integrály v (72) se vztahují na základny vymezené části trubice; mohou se však rozšířit i na celé nadroviny $\Sigma_{(1)}$ a $\Sigma_{(2)}$, je-li vně trubice všude $T_{\alpha\ldots\mu\nu} = 0$.

V základně $\Sigma_{(1)}$ máme $N_j = 0$, $N_4 = -\mathrm{i}$ a v $\Sigma_{(2)}$ pak $N_j = 0$, $N_4 = +\mathrm{i}$, neboť vektor N_ν musí mířit ven z Ω. Dostáváme tedy rovnice

$$\int_{V_{(1)}} T_{\alpha\ldots\mu 4}(\mathbf{x}, t_1)\,\mathrm{d}V = \int_{V_{(2)}} T_{\alpha\ldots\mu 4}(\mathbf{x}, t_2)\,\mathrm{d}V\,. \tag{72a}$$

Přitom $V_{(1)}$ (popř. $V_{(2)}$) značí vnitřek tělesa, nebo celý obyčejný prostor, v čase t_1 (popř. t_2). Poněvadž okamžiky t_1 a t_2 jsou libovolné, docházíme k důležitému výsledku, že *za uvedených podmínek stanovených pro tenzor* $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ *jsou integrály*

$$Q_{\alpha\ldots\mu}(t) = \int_V T_{\alpha\ldots\mu 4}(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}V\,, \tag{73}$$

vztažené na vnitřek tělesa nebo na celý prostor v okamžiku t fakticky *nezávislé na čase* t, čili platí pro ně zákony zachování.

Předchozí úvahu lze snadno zobecnit tím, že nadroviny $\Sigma_{(1)}$ $\Sigma_{(2)}$ nahradíme libovolnými nadplochami prostorové povahy. Dojdeme tak k výsledku, že integrály

$$Q^{(\Sigma)}_{\alpha\ldots\mu} = -\mathrm{i} \int_{\Sigma} T_{\alpha\ldots\mu\nu} N_{\nu} |\mathrm{d}\Sigma| \tag{74}$$

jsou za daných předpokladů o $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ fakticky nezávislé na volbě prostorové nadplochy Σ, pokud ovšem zůstává stejně „orientována", např. $N_4 = +\mathrm{i}|N_4|$.

Integrály (74) sice nemají takový názorný fyzikální význam jako (73), a nejsou-li splněny podmínky (71), obecně se jejich hodnoty ani nerovnají hodnotám integrálů (73), ale zato *mají významnou vlastnost formální*: Z jejich tvaru je totiž zřejmé, že při dané prostorové nadploše Σ *tvoří tenzor, a to bez speciálních předpokladů o tenzoru* $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$. (Stačí, aby integrály (74) vůbec existovaly.) Vskutku, definujeme-li čárkované veličiny vzorci

$$Q'^{(\Sigma)}_{\alpha\ldots\mu} = -\mathrm{i} \int_{\Sigma} T'_{\alpha\ldots\mu\nu} N'_{\nu} |\mathrm{d}\Sigma| \tag{74'}$$

(které se formálně shodují se vzorci (74), neboť $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}\Sigma'$), a uvážíme-li, že platí

$$T'_{\alpha\ldots\mu\nu} N'_{\nu} = b_{\alpha\varrho} \ldots b_{\mu\sigma} T_{\varrho\ldots\sigma\nu} N_{\nu} ,$$

dostáváme vztahy

$$Q'^{(\Sigma)}_{\alpha\ldots\mu} = b_{\alpha\varrho} \ldots b_{\mu\sigma} Q^{(\Sigma)}_{\varrho\ldots\sigma} , \tag{75}$$

což je transformační zákon tenzoru.

Splňuje-li tenzor $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$ podmínky (71), a jsou-li tedy veličiny (74) a tím i (74') nezávislé na Σ, můžeme ovšem na pravé straně v (75) dosadit za Q výraz (73) a na levé straně výraz

$$Q'_{\alpha\ldots\mu}(t') = \int_{V'} T'_{\alpha\ldots\mu 4}(x', t') \, \mathrm{d}V' , \tag{73'}$$

který vznikne ze (74'), volíme-li za Σ nadrovinu $x'_4 =$ konst. Tím jsme z matematické věty (69a) odvodili další důležitý výsledek, že za předpokladu (71) integrály tvaru (73) tvoří tenzor $Q_{\alpha\ldots\mu}$.

S příklady integrálů typu (73) jsme se setkávali již v odst. II 1 a vrátíme se k nim v kap. VI. Je proto užitečné znát jejich formální vlastnosti a vědět, kdy je mají. Z výrazů (73) a (73') samotných totiž není vůbec zřejmé, že jsou složkami (téhož) tenzoru (a obecně to ani není pravda). Jiné použití věty (69a) viz v Ú 7.

5. REPREZENTACE LORENTZOVY GRUPY

5,1. JEDNOZNAČNÉ REPREZENTACE KONEČNÉHO STUPNĚ

U tenzorů a pseudotenzorů jsme bez povšimnutí přešli jednu podstatnou formální vlastnost jejich transformací určených vzorci (41) popř. (50). Poněvadž je to vlastnost velmi důležitá i z hlediska fyzikálního, musíme s ní nyní blíže seznámit.

Z uvedených vzorců je především vidět, že každé Lorentzově transformaci $(x) \to (x')$ je vždy jednoznačně přiřaděna určitá (homogenní, lineární) transformace $(T) \to (T')$ složek uvažovaného tenzoru. Přiřadění má tyto vlastnosti: Identické transformaci $x'_\mu = x_\mu$ prostoročasových souřadnic je sice vždy přiřaděna identická transformace $T'_{\mu\nu\ldots} = T_{\mu\nu\ldots}$ složek libovolného tenzoru, ale transformace přiřaděné různým Lorentzovým transformacím obecně nejsou vždy různé. Vidíme např., že vzorce (41) a (50a,b,c) přiřaďují identickou transformaci složek tenzoru celé grupě prostoročasových posunutí

$$x'_\mu = x_\mu + l_\mu ,$$

která je (komutativní) *normální podgrupou* obecné, nehomogenní Lorentzovy grupy. Z toho je zřejmé, že se při úvahách o vlastnostech tenzorových a pseudotenzorových transformací můžeme omezit na *homogenní* Lorentzovu grupu. V dalším výkladu se navíc omezíme jen na homogenní *vlastní* grupu $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$ (nebo ortochronní grupu $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$). Ani při takovém omezení však obecně nejsou různým Lorentzovým transformacím přiřaděny různé transformace tenzorů. Je-li např. ψ skalár (tenzor nultého řádu), je celé grupě $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$ přiřaděna identická transformace $\psi \to \psi' = \psi$. Je-li χ pseudoskalár, je celé grupě $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$, která je normální podgrupou grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$, přiřaděna identická transformace $\chi \to \chi' = \chi$ a celé třídě transformací (26_{P}) je přiřaděna jediná transformace $\chi \to \chi' = -\chi$.

Dále je snadné ukázat, že Lorentzově transformaci $(x) \to (x'')$ složené z transformací $(x) \to (x')$ a $(x') \to (x'')$ je podle vzorců (41) nebo (50a,b,c) vždy přiřaděna transformace $(T) \to (T'')$ složená z transformací $(T) \to (T')$ a $(T') \to (T'')$ přiřaděných k $(x) \to (x')$ popř. $(x') \to (x'')$. Z toho již vyplývá, že *transformace složek určitého tenzoru* nebo pseudotenzoru, přiřaděné podle uvedených vzorců transformacím Lorentzovy grupy, *tvoří samy také grupu, která je homomorfním zobrazením grupy Lorentzovy a nazývá se její reprezentací.* Počet nezávislých složek tenzoru (pseudotenzoru) udává tzv. stupeň (nebo dimenzi) reprezentace.

Je zřejmé, že při vlastní Lorentzově grupě $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$ není rozdílu mezi tenzorovými a pseudotenzorovými reprezentacemi. Pro ortochronní grupu $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$ však pseudotenzory udávají reprezentace odlišné od tenzorových. Lze dokázat, že tenzorové reprezentace jsou jedinými jednoznačnými reprezentacemi konečného stupně grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$ (a tenzorové i pseudotenzorové pak jedinými takovými reprezentacemi grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$). Dále uvidíme, že grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$ a $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$ mají kromě jednoznačných také dvojznačné (spinorové) reprezentace konečného stupně. Existují také ještě nekonečně dimenzionální reprezentace homogenní (i nehomogenní) Lorentzovy grupy, ale těmi se zabývat nebudeme.

Nejjednodušší reprezentace homogenních grup $\mathbf{L}_{(E)}$ a $\mathbf{L}_{(U)}$ dávají skalár ψ a čtyřvektor F_μ. „Skalární" reprezentace (1. stupně) zobrazuje celé grupy $\mathbf{L}_{(E)}$ i $\mathbf{L}_{(U)}$ identickou transformací $\psi \to \psi' = \psi$ a „čtyřvektorová" reprezentace (4. stupně) zobrazuje grupy $\mathbf{L}_{(E)}$ a $\mathbf{L}_{(U)}$ jimi samými. Složitější je už reprezentace zprostředkovaná obecným tenzorem 2. řádu $T_{\mu\nu}$, která je 16. stupně (16-ti dimenzionální). Všimněme si blíže jejích vlastností. Uvažovaný tenzor lze určit buď přímo udáním jeho šestnácti složek $T_{\mu\nu}$, nebo udáním jistých šestnácti nezávislých lineárních kombinací $T_{(A)}$ ($A = 1, \ldots$ $\ldots, 16$) složek $T_{\mu\nu}$. Utvoříme-li stejné lineární kombinace $T'_{(A)}$ i ze složek $T'_{\mu\nu}$, pak z transformací

$$T'_{\mu\nu} = b_{\mu\varrho} b_{\nu\sigma} T_{\varrho\sigma} \tag{76}$$

plynou jednoznačně transformace

$$T'_{(A)} = \sum_{B=1}^{16} k_{(A)(B)} T_{(B)} \,. \tag{76a}$$

Transformace (76a) tvoří také grupu, která je také reprezentací grupy Lorentzových transformací $x'_\mu = b_{\mu\nu} x_\nu$. Reprezentaci (76a) však nepokládáme za podstatně odlišnou od (76) a říkáme, že obě tyto reprezentace jsou vzájemně *ekvivalentní*.

Ze složek $T_{\mu\nu}$ lze např. utvořit lineární kombinace

$$S_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$$

a

$$F_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \,.$$

Těch prvních, symetrických $S_{\mu\nu}$, je jen deset různých a nezávislých a těch druhých, antisymetrických $F_{\mu\nu}$, jen šest. Přitom platí

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \,.$$

Utvoříme-li stejné symetrické a antisymetrické kombinace $S'_{\mu\nu}$ a $F'_{\mu\nu}$ i ze složek $T'_{\mu\nu}$, snadno zjistíme, že z transformace (76) plynou transformace

$$S'_{\mu\nu} = b_{\mu\varrho} b_{\nu\sigma} S_{\varrho\sigma} \,, \tag{77}$$

a

$$F'_{\mu\nu} = b_{\mu\varrho} b_{\mu\sigma} F_{\varrho\sigma} \,, \tag{78}$$

z nichž je vidět, že jak veličiny $S_{\mu\nu}$, tak $F_{\mu\nu}$ samy tvoří také tenzory. Říkáme též, že jsme obecný (nesymetrický) tenzor $T_{\mu\nu}$ rozdělili na symetrickou a antisymetrickou část. Tyto části jsou samostatnými tenzory a transformují se odděleně.

Zavedeme-li si pro deset nezávislých složek $S_{\mu\nu}$ (v libovolném pořadí) označení $T_{(1)}, \ldots, T_{(10)}$ a pro šest složek $F_{\mu\nu}$ označení $T_{(11)}, \ldots, T_{(16)}$, můžeme transformace

(77) a (78) zapsat souhrnně ve tvaru (76a). Tato reprezentace se však nyní rozpadá na dvě samostatné reprezentace 10. a 6. stupně. Říkáme proto, že reprezentace daná grupou tenzorových transformací (76) *je reducibilní*. Vhodnou volbou veličin $T_{(A)}$ ji lze *redukovat na reprezentace nižšího stupně* (16 = 10 + 6). Naproti tomu reprezentaci, kterou nelze žádným způsobem redukovat, nazýváme ireducibilní. Příklady (triviálními) takových reprezentací jsou reprezentace skalární a čtyřvektorová.

Vzniká samozřejmě otázka, zda jsou reprezentace (77) a (78) již ireducibilní, nebo zda je lze dále redukovat. Je ihned vidět, že reprezentace (77) neboli

$$T'_{(A)} = \sum_{B=1}^{10} k_{(A)(B)} T_{(B)} \,, \quad A = 1, \ldots, 10 \,, \tag{77a}$$

je ještě reducibilní. Z deseti složek $S_{\mu\nu}$ lze utvořit deset nezávislých lineárních kombinací $S_{(A)}$ ($A = 1, \ldots, 10$) např. tak, že za $S_{(1)}$ volíme invariant $S_{\mu\mu}$ (stopu tenzoru $S_{\mu\nu}$) a za veličiny $S_{(2)}, \ldots, S_{(10)}$ libovolné vzájemně nezávislé lineární kombinace veličin

$$S^{(0)}_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\delta_{\mu\nu} S_{\varrho\varrho} \,,$$

tvořících *symetrický tenzor s nulovou stopou* $S^{(0)}_{\mu\mu} = 0$. (Proto je pouze 9 složek $S^{(0)}_{\mu\nu}$ nezávislých.) Pak se zřejmě reprezentace daná grupou transformací

$$S'_{(A)} = \sum_{B=1}^{10} k^{(S)}_{(A)(B)} S_{(B)} \,, \tag{77b}$$

jednoznačně určených transformacemi (77), *rozpadá*, a to *na reprezentaci 1. stupně* (skalární) danou identickou transformací $S'_{(1)} = S_{(1)}$, *a na reprezentaci 9. stupně* danou grupou transformací

$$S'_{(A)} = \sum_{B=2}^{10} k^{(S)}_{(A)(B)} S_{(B)} \,, \quad A = 2, 3, \ldots, 10 \,, \tag{79}$$

která je ekvivalentní tenzorové reprezentaci dané grupou transformací složek tenzoru $S^{(0)}_{\mu\nu}$ (symetrického s nulovou stopou). O této reprezentaci 9. stupně lze dokázat, že už je ireducibilní i jako reprezentace vlastní Lorentzovy grupy $\mathbf{L}_{(E)}$.

Reprezentace 6. stupně daná grupou transformací (78) neboli

$$T'_{(A)} = \sum_{B=11}^{16} k_{(A)(B)} T_{(B)} \,, \quad A = 11, \ldots, 16 \,, \tag{78a}$$

je ireducibilní pouze jakožto reprezentace úplné (ortochronní) grupy $\mathbf{L}_{(U)}$. Jakožto reprezentaci vlastní grupy $\mathbf{L}_{(E)}$ lze ji ještě redukovat tímto postupem: Sestrojíme si k tenzoru $F_{\mu\nu}$ duální pseudotenzor

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma}$$

a utvoříme veličiny

$$\varphi_{\mu\nu}^{(\pm)} = F_{\mu\nu} \pm \hat{F}_{\mu\nu} \,. \tag{80}$$

Pak máme

$$\hat{\varphi}_{\mu\nu}^{(\pm)} \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varphi_{\varrho\sigma}^{(\pm)} = \pm\varphi_{\mu\nu}^{(\pm)} \tag{81}$$

a

$$F_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_{\mu\nu}^{(+)} + \varphi_{\mu\nu}^{(-)}\big)\,. \tag{82}$$

Proto říkáme, že jsme antisymetrický tenzor $F_{\mu\nu}$ rozdělili na duálně samodružnou a na duálně pseudo-samodružnou část.

Při úplné grupě $\mathbf{L}_{(\mathrm{U})}$ netvoří veličiny $\varphi_{\mu\nu}^{(+)}$ ani veličiny $\varphi_{\mu\nu}^{(-)}$ tenzor ani pseudotenzor a netransformují se odděleně. Vyjádříme-li tyto veličiny veličinami H_j a E_j, definovanými v (48a,b), dostaneme vzorce

$$\varphi_{23}^{(\pm)} = \varphi_{14}^{(\pm)} = H_1 \mp \mathrm{i}E_1 \equiv F_{(1)}^{(\pm)}\,, \quad \text{cykl. } 1, 2, 3\,. \tag{80a}$$

Z nich je zřejmé, že např. prostorovému zrcadlení $\mathbf{P}$ je přiřaděna transformace

$$\varphi_{\mu\nu}^{\prime(\pm)} = \varphi_{\mu\nu}^{(\mp)}\,, \quad F_{(j)}^{(\pm)\prime} = F_{(j)}^{(\mp)}\,, \tag{83}$$

neboť při něm je $H'_j = H_j$, ale $E'_j = -E_j$. Naproti tomu při transformacích z vlastní Lorentzovy grupy se složky pseudotenzoru $\hat{F}_{\mu\nu}$ transformují stejně jako složky tenzoru $F_{\mu\nu}$. Proto při grupě $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$ tvoří i veličiny $\varphi_{\mu\nu}^{(+)}$ i $\varphi_{\mu\nu}^{(-)}$ antisymetrický tenzor a veličiny $F_{(j)}^{+} = H_j - \mathrm{i}E_j$ se transformují odděleně od veličin $F_{(j)}^{(-)} = H_j + \mathrm{i}E_j$. To znamená, že když místo šesti složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ zavedeme šest jejich nezávislých lineárních kombinací $F_{(j)}^{(\pm)}$, reprezentace 6. stupně grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$, daná grupou transformací (78) nebo (78a), se rozpadne na dvě reprezentace 3. stupně dané grupami transformací

$$F_{(j)}^{(\pm)\prime} = \sum_{l=1}^{3} k_{(j)(l)}^{(\pm)} F_{(l)}^{(\pm)}\,. \tag{$84^\pm$}$$

Jejich koeficienty $k_{(j)(l)}^{(\pm)}$ lze užitím rovnic (78), (80) a (80a) vyjádřit jistými kvadratickými formami veličin $b_{\mu\nu}$. Transformace ($84^\pm$) jsou vhodným zobecněním transformací (49a,b), na případ obecné vlastní Lorentzovy transformace. (Při pouhém *prostorovém* otočení platí $k_{(j)(l)}^{(+)} = k_{(j)(l)}^{(-)} = C_{jl}$.)

Jak ještě uvidíme, reprezentace ($84^\pm$) vlastní homogenní Lorentzovy grupy jsou už ireducibilní. Jiný příklad reprezentací ekvivalentních tenzorovým reprezentacím viz v Ú 8.

5,3. MATICOVÝ ZÁPIS TRANSFORMACÍ. INFINITEZIMÁLNÍ TRANSFORMACE Z DANÉ REPREZENTACE

Při zkoumání vlastností reprezentací Lorentzovy grupy je vhodné zapisovat transformace a substituce v maticovém tvaru. Homogenní Lorentzovu transformaci

(9) zapíšeme takto:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{b}\mathbf{x}\,. \tag{85}$$

Symbol $\mathbf{x}$ popř. $\mathbf{x}'$ nyní značí sloupcovou čtyřřádkovou matici s elementy x_μ popř. x'_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) a $\mathbf{b}$ čtvercovou matici koeficientů $b_{\mu\nu}$. Označíme-li symbolem $\mathbf{b}^{-1}$ matici inverzní k $\mathbf{b}$ (splňující vztahy $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{1}$, v nichž $\mathbf{1}$ značí čtyřřadovou jednotkovou matici), můžeme obrácení transformace (85) vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{x}'\,. \tag{85'}$$

Ze vztahů ortogonality (10a,b), které lze užitím transponované matice $\tilde{\mathbf{b}}$ zapsat ve tvaru $\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$ však vidíme, že $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^{-1}$. Transformace (85′) je tedy shodná s transformací $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{x}'$ představující maticový zápis transformace (9′). *Ortogonální transformace* (85) *je charakterizována právě tím, že k ní kontragredientně přidružená transformace* $\mathbf{x}'' = \tilde{\mathbf{b}}^{-1}\mathbf{x}$ (nebo stručně *kontragredientní*) *je shodná s původní.*

Transformaci (76a) zapíšeme nyní ve tvaru

$$\mathbf{T}' = \mathbf{k}\mathbf{T}\,. \tag{86}$$

Zavedeme-li místo veličin $T_{(A)}$ jejich lineární kombinace $T_{(A)}^{(R)}$, zapíšeme to maticovou rovnicí

$$\mathbf{T}^{(R)} = \mathbf{R}\mathbf{T}\,. \tag{87}$$

Matice $\mathbf{R}$ musí mít od nuly různý determinant, aby existovala inverzní matice $\mathbf{R}^{-1}$ a vztahy (87) se mohly obrátit ve tvaru

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}^{(R)}\,. \tag{87'}$$

Z definice $\mathbf{T}'^{(R)} = \mathbf{R}\mathbf{T}'$ a z transformace (86) pak plynou ihned transformační vzorce pro veličiny $T_{(A)}^{(R)}$:

$$\mathbf{T}'^{(R)} = \mathbf{R}\mathbf{k}\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{k}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T} = \mathbf{k}^{(R)}\mathbf{T}^{(R)}\,.$$

Ekvivalenci dvou reprezentací lze tedy vyjádřit vztahem $\mathbf{k}^{(R)} = \mathbf{R}\mathbf{k}\mathbf{R}^{-1}$.

Při řešení nejdůležitějších úloh teorie reprezentací Lorentzovy grupy se zkoumají *pouze infinitezimální transformace* jejich reprezentací. Obecný tvar matice $\mathbf{b}$ koeficientů *infinitezimální* Lorentzovy transformace jsme již udali (viz (28)). Ve stejném obecném tvaru, pouze s jinými generátory $\Lambda^{(\varrho\sigma)}$, lze zapsat matice koeficientů infinitezimální transformace libovolné reprezentace grupy $\mathbf{L}_{(\mathrm{E})}$.

Jako příklad udejme generátory infinitezimálních transformací ($84^\pm$). Tyto rovnice si nejprve zapíšeme v maticovém tvaru takto:

$$\mathbf{F}^{(\pm)\prime} = \mathbf{k}^{(\pm)}\mathbf{F}^{(\pm)}\,. \tag{$88^\pm$}$$

Veličiny $\varphi_{\mu\nu}^{(\pm)}$ se při transformacích z vlastní Lorentzovy grupy transformují stejně jako veličiny $F_{\mu\nu}$. Použijeme-li na $\varphi_{\mu\nu}^{(\pm)}$ transformačních vzorců (78) s koeficienty

$b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ a zavedeme-li pak veličiny $F_{(j)}^{(\pm)}$ podle (80a), snadno najdeme, že matice $\mathbf{k}^{(\pm)}$ koeficientů $k_{(j)(l)}^{(\pm)}$ *infinitezimálních* transformací ($88^{\pm}$) mají obecný tvar

$$\mathbf{k}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 1, & \omega_{12} \pm \omega_{34}, & -(\omega_{31} \pm \omega_{24}) \\ -(\omega_{12} \pm \omega_{34}), & 1, & \omega_{23} \pm \omega_{14} \\ \omega_{31} \pm \omega_{24}, & -(\omega_{23} \pm \omega_{14}). & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\varrho\sigma}\Lambda_{(\pm)}^{(\varrho\sigma)} . \qquad (89^{\pm})$$

Generátory $\Lambda_{(\pm)}^{(\varrho\sigma)} = -\Lambda_{(\pm)}^{(\sigma\varrho)}$, popř. $\mathbf{M}_j^{(\pm)}$ a $\mathbf{N}_j^{(\pm)}$ (viz (29)) lze nyní vyjádřit takto:

$$\mathbf{M}_j^{(\pm)} = \boldsymbol{\lambda}_j , \quad \mathbf{N}_j^{(\pm)} = \pm\boldsymbol{\lambda}_j , \qquad (90^{\pm})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (91)$$

Jsou to opět hermitovské (hermitovsky samodružné) matice, neboť matice $\boldsymbol{\lambda}_j$ zřejmě splňují vztahy $\boldsymbol{\lambda}_j^{\dagger} \equiv \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j^{*} = \boldsymbol{\lambda}_j$.

Lze snadno ověřit, že jak matice $\mathbf{M}_j^{(+)}$, $\mathbf{N}_j^{(+)}$ tak i matice $\mathbf{M}_j^{(-)}$, $\mathbf{N}_j^{(-)}$ splňují vztahy (30), neboť matice $\boldsymbol{\lambda}_j$ splňují relace

$$[\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\lambda}_k] = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\lambda}_l .$$

Vztahy (30) *popř.* (31) *platí obecně* pro generátory infinitezimálních transformací *ve všech reprezentacích vlastní grupy* $\mathbf{L}_{(E)}$ *a jsou charakteristické právě pro reprezentace této grupy.* Udáním generátorů infinitezimálních transformací je reprezentace grupy již v podstatě určena a nalezneme-li všechna ireducibilní řešení komutačních relací (30), můžeme udat všecky ireducibilní reprezentace grupy $\mathbf{L}_{(E)}$.

Na příkladě reprezentací určených generátory ($90^{\pm}$) si nyní ukážeme, jak znalost těchto operátorů usnadňuje zkoumání vlastností těch reprezentací. Především si můžeme snadno ověřit, že neexistuje matice $\mathbf{R}$ s nenulovým determinantem splňující vztahy $\mathbf{R}\mathbf{M}_j^{(-)}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{M}_j^{(+)}$, $\mathbf{R}\mathbf{N}_j^{(-)}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{N}_j^{(+)}$. Reprezentace ($88^{+}$) a ($88^{-}$) jsou tedy neekvivalentní. Obě jsou již také ireducibilní, neboť kromě násobku jednotkové matice neexistuje žádná matice s nenulovým determinantem, která by komutovala se všemi třemi maticemi $\boldsymbol{\lambda}_j$. (Taková matice by musela existovat, kdyby reprezentace byly reducibilní – viz též Ú 9.) Všimněme si ještě, že matice ($89^{\pm}$) splňují vztahy $\tilde{\mathbf{k}}(\omega) = \mathbf{k}(-\omega) = \mathbf{k}^{-1}(\omega)$, takže $\mathbf{k}\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{1}$, a transformace ($88^{\pm}$) jsou tedy ortogonální. Kromě toho platí $\mathbf{k}^{(+)} = \mathbf{k}^{(-)*}$; transformace ($88^{+}$) a ($88^{-}$) jsou tedy vzájemně komplexně sdružené.

5,4. DVOJZNAČNÉ REPREZENTACE. SPINORY

Až do třicátých let tohoto století měly v relativistické teoretické fyzice použití pouze tenzory, popř. veličiny transformující se podle reprezentací ekvivalentních tenzorovým reprezentacím grupy $\mathbf{L}_{(E)}$. Teprve v Diracově teorii elektronu, popř. v teorii Diracova vlnového pole z r. 1928 nalezly použití netenzorové veličiny, tj. veličiny, jejichž transformace nejsou ani ekvivalentní transformacím tenzorovým, ačkoliv také tvoří reprezentaci Lorentzovy grupy $\mathbf{L}_{(E)}$. Tyto veličiny se dnes nazývaií *spinory*.

Spinor $\boldsymbol{\xi}$ (prvního řádu) má dvě složky $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}$, které se při infinitezimální Lorentzově transformaci (28) transformují podle rovnic

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}\boldsymbol{\Lambda}^{(\mu\nu)})\,\boldsymbol{\xi} . \qquad (92)$$

Zde jsou nové generátory $\boldsymbol{\Lambda}^{(\mu\nu)}$ nebo $\mathbf{M}_j$ a $\mathbf{N}_j$ dvouřadovými hermitovskými maticemi

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{N}_j = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_j ; \qquad (93)$$

přitom $\boldsymbol{\sigma}_j$ jsou Pauliho matice

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (94)$$

Generátory (93) splňují opět komutační relace (30), neboť matice $\boldsymbol{\sigma}_j$ splňují vztahy

$$[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\sigma}_l , \qquad (95)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_j = 2\delta_{jk} . \mathbf{1} ,$$

tj. $\boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^3 = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_3$ a cyklicky 1, 2, 3.

Rozepíšeme-li si matici $\boldsymbol{\Gamma}$ infinitezimální transformace (92) vidíme, že má tvar

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i}\pi & \mu + \mathrm{i}\nu \\ -\mu + \mathrm{i}\nu & 1 - \mathrm{i}\pi \end{pmatrix};$$

veličiny π, μ, ν souvisí s parametry $\omega_{\alpha\beta}$ vztahy

$$\pi = \tfrac{1}{2}(\omega_{12} + \omega_{34}) , \quad \mu = \tfrac{1}{2}(\omega_{31} + \omega_{24}) , \quad \nu = \tfrac{1}{2}(\omega_{23} + \omega_{14})$$

a jsou to tedy tři vzájemně nezávislá, infinitezimální, komplexní čísla. Determinant matice $\boldsymbol{\Gamma}$ má (až na veličiny 2. řádu) hodnotu 1. Tuto charakteristickou vlastnost, det $\boldsymbol{\Gamma} = 1$, si ovšem zachovávají i matice konečných inorových transformací přiřazených libovolným konečným transformacím Lorentzovy grupy $\mathbf{L}_{(E)}$. Matici $\boldsymbol{\Gamma}$ *konečné* spinorové transformace lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} l + \mathrm{i}p & m + \mathrm{i}n \\ -m + \mathrm{i}n & l - \mathrm{i}p \end{pmatrix}, \qquad (96)$$

kde l, p, m, n jsou obecně komplexní čísla vázaná podmínkou

$$\det \mathbf{\Gamma} = l^2 + m^2 + n^2 + p^2 = 1 .$$

Matice (96) tedy závisí na třech komplexních, tj. na šesti reálných parametrech, právě tak jako matice **b** obecné transformace Lorentzovy.

Abychom nalezli vztahy mezi koeficienty $b_{\mu\nu}$ konečné Lorentzovy transformace a koeficienty jí přiřazené konečné spinorové transformace, zavedeme čtvrtou matici

$$\boldsymbol{\sigma}_4 = -\boldsymbol{\sigma}_4^\dagger = \mathrm{i}\,\mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{94a}$$

a definujeme čtyři veličiny

$$J_\mu \equiv \xi^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \xi = \tilde{\xi}^* \boldsymbol{\sigma}_\mu \xi , \quad \mu = 1, 2, 3, 4 . \tag{97}$$

Pro čárkované veličiny J'_μ pak máme vyjádření

$$J'_\mu \equiv \xi'^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \xi' = \xi^\dagger \mathbf{\Gamma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{\Gamma} \xi .$$

Při infinitezimální transformaci (92) však snadno zjistíme, že platí

$$\mathbf{\Gamma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{\Gamma} = (1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega^*_{\varrho\nu}\mathbf{A}^{(\varrho\nu)})\,\boldsymbol{\sigma}_\mu(1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{A}^{(\alpha\beta)}) = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})\,\boldsymbol{\sigma}_\nu$$

(do veličin 1. řádu v parametrech $\omega_{\mu\nu}$). Je tedy

$$J'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})\, J_\nu ,$$

takže *veličiny J_μ tvoří čtyřvektor.* Tuto vlastnost si veličiny J_μ zachovávají i při konečných transformacích, kdy platí

$$J'_\mu = b_{\mu\nu} J_\nu$$

a tedy

$$\mathbf{\Gamma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{\Gamma} = b_{\mu\nu} \boldsymbol{\sigma}_\nu . \tag{98}$$

Z tohoto obecného vztahu vidíme, že *koeficienty spinorové transformace* přiřazené k dané transformaci Lorentzově *jsou určeny obecně dvojznačně.* Kromě matice $\mathbf{\Gamma}$ vyhovuje rovnicím (98) i matice $-\mathbf{\Gamma}$.

Grupa spinorových transformací

$$\xi' = \mathbf{\Gamma}\xi , \quad \det \mathbf{\Gamma} = 1 , \tag{99}$$

tj. speciální (unimodulární) grupa komplexních lineárních transformací dvou proměnných $\xi_{(1)}$, $\xi_{(2)}$, se v literatuře nazývá grupou SL (2, C). *Je dvojznačnou reprezentací vlastní Lorentzovy grupy* $\mathbf{L}_{(E)}$ a obráceně grupa $\mathbf{L}_{(E)}$ je jednoznačnou reprezentací grupy SL (2, C). (Viz též Ú 11, 12.)

Vedle spinorů transformujících se podle (99) se zavádějí i spinory $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\chi}$ transformující se podle transformací komplexně sdružených ($\boldsymbol{\zeta}' = \mathbf{\Gamma}^*\boldsymbol{\zeta}$), nebo kontragredientních ($\boldsymbol{\eta}' = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}\boldsymbol{\eta}$), nebo komplexně sdružených s kontragredientními ($\boldsymbol{\chi}' = (\mathbf{\Gamma}^\dagger)^{-1}\, \boldsymbol{\chi}$). (Viz Ú 10.)

Poznamenejme, že grupou transformací (99) nelze reprezentovat celou ortochronní grupu $\mathbf{L}_{(U)}$. *Spinorovou ireducibilní reprezentaci celé grupy* $\mathbf{L}_{(U)}$ *lze však sestrojit použitím dvou spinorů* $\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{\chi}$ (viz Ú 17).

Podobně jako při tenzorech je možno definovat i *spinory vyšších řádů* a vyvodit soustavu početních pravidel pro spinory, tzv. *spinorový počet.* Lze ukázat, že *grupy transformací spinorů sudého řádu, které jsou jednoznačnými reprezentacemi grupy* $\mathbf{L}_{(E)}$, *jsou ekvivalentní jistým tenzorovým reprezentacím.* O teorii reprezentací Lorentzovy grupy i o spinorovém počtu existuje rozsáhlá speciální literatura. Knihy nejvhodnější k prvnímu studiu uvádíme v seznamu literatury [39].

6. REÁLNÉ SOUŘADNICE V PROSTOROČASE

6,1. ZAVEDENÍ REÁLNÝCH SOUŘADNIC. METRICKÉ KOEFICIENTY

V předchozích odstavcích této kapitoly jsme k určení světobodu používali místo času t ryze imaginární souřadnici $x_4 = ict$. Připomeňme si ještě jednou hlavní výhody, které to přineslo:

a) Lorentzovy transformace mají vnější tvar ortogonálních transformací kartézských souřadnic v čtyřrozměrném prostoru; jejich koeficienty $b_{\mu\nu}$ splňují formálně relace ortogonality.

b) *Čtverec* invariantního *intervalu* dvou světobodů je vyjádřen *součtem čtverců* rozdílů jejich souřadnic, podobně jako čtverec vzdálenosti v euklidovském prostoru.

c) Bylo možno formulovat pravidla tenzorového počtu (pro tenzory v čtyřrozměrném prostoročase) nejjednodušším zobecněním pravidel pro tenzory v obyčejném trojrozměrném euklidovském prostoru.

Na druhé straně jsme však viděli, že ani zavedení souřadnice x_4 neodstranilo podstatnou odlišnost geometrických vlastností Minkowského prostoru od vlastností čtyřrozměrného euklidovského prostoru a Lorentzových transformací od *reálných* ortogonálních transformací. Odlišnosti byly sice zastřeny při formálních operacích povahy po výtce algebraické, ale projevovaly se jasně při úvahách čistě geometrických. Při hlubším zkoumání *geometrických vlastností prostoročasu* je proto zavádění imaginární souřadnice x_4 nejenom zbytečné, ale bylo by vysloveně nevýhodné. To platí zejména o úvahách potřebných v obecné teorii relativity a Einsteinově teorii gravitace. Nyní si ukážeme, že místo ryze imaginární souřadnice x_4 je možno užívat reálné souřadnice $x_0 = ct$ i při formulaci pravidel tenzorového počtu ve speciální teorii relativity. Uvidíme, že to sice způsobí určité formální komplikace, ale ty budou i zde už do jisté míry vyváženy některými výhodami.

Při užívání *reálných souřadnic* v prostoročase je obvyklé psát jejich *indexy zásadně nahoře.* Zavedeme si tedy pro veličiny x_j, $x_0 = ct$, kterých jsme už dříve příležitostně používali, nové označení x^μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$. Čtverec intervalu dvou světobodů o souřadnicích x^μ a $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ pak dostane tvar

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2\,, \tag{100}$$

který explicite ukazuje, jak se míra „vzdálenosti" v Minkowského prostoru liší od míry euklidovské. Říkáme, že *metrika prostoročasu* není euklidovská, nýbrž *pseudoeuklidovská. Reálné souřadnice* x^μ lze pak označit za *pseudokartézské.*

Abychom výraz (100) mohli zapsat v kratším tvaru, zavedeme si konstantní *metrické koeficienty* $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ takto:

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1\,, \quad \eta_{44} = -1\,, \quad \eta_{\mu\nu} = 0\,, \quad (\mu \neq \nu)\,. \tag{101}$$

Vzorec (100) lze pak psát stručně

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,, \tag{100a}$$

přijmeme-li úmluvu, že *podle řeckého indexu se automaticky sčítá* od 1 do 4, vyskytuje-li se *v jednom členu dvakrát, a to jednou v poloze dolní a jednou v horní.* Toto *nové „sčítací pravidlo"* *nahrazuje* ve formalismu s reálnými souřadnicemi *pravidlo dosud používané.*

6,2. TRANSFORMACE REÁLNÝCH SOUŘADNIC

Obecnou homogenní transformaci Lorentzovu, kterou dostaneme z (9) zavedením reálných souřadnic x^μ a x'^μ, zapíšeme nyní takto:

$$x'^\mu = B'^\mu_{\varrho} x^\varrho\,. \tag{102}$$

Je zřejmé, že reálné koeficienty B'^μ_{ϱ} souvisí s koeficienty $b_{\mu\varrho}$ v rovnicích (9) vztahy

$$B'^j_k = b_{jk}\,, \qquad B'^j_4 = \mathrm{i}b_{j4}\,,$$
$$B'^4_j = -\mathrm{i}b_{4j}\,, \quad B'^4_4 = b_{44}\,. \tag{103}$$

Dosazením z těchto vztahů do podmínek ortogonality (10a) nebo (10b) dostali bychom odpovídající podmínky pro reálné koeficienty B'^μ_ν. Snadněji a také hezčím způsobem je dostaneme přímo z požadavku invariance výrazu (100a). Dosadíme-li ze (102) do levé strany rovnice

$$\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^\mu\,\mathrm{d}x'^\nu = \eta_{\varrho\sigma}\,\mathrm{d}x^\varrho\,\mathrm{d}x^\sigma\,, \tag{104}$$

zjistíme ihned, že musí platit podmínky „pseudoortogonality"

$$\eta_{\mu\nu} B'^\mu_{\varrho} B'^\nu_{\sigma} = \eta_{\varrho\sigma}\,. \tag{105a}$$

Vidíme, že jsou poněkud složitější než podmínky (10a) pro $b_{\mu\nu}$.

Užití starých podmínek ortogonality (10a) dovolilo transformaci (9) snadno obrátit na tvar (9'). „Pseudoortogonální" transformaci (102) tak jednoduše obrátit nelze. Už na příkladě speciálních transformací (7) a (7') je vidět, že matice koeficientů inverzní transformace (7') není prostě jen transponovanou maticí koeficientů původní transformace (7). Obecně proto transformaci inverzní k (102) zapíšeme ve tvaru

$$x^\varrho = B_{,\alpha}^{\;\varrho} x'^\alpha\,. \tag{102'}$$

Koeficient $B_{,\alpha}^{\;\varrho}$ ve (102') se nerovná koeficientu B'^ϱ_α ze (102). Je to vyznačeno tím, že u jednoho koeficientu je čárka před *horním*, u druhého před *dolním* indexem.

Srovnáním transformace (102') a (9') je zase možno vyjádřit koeficienty $B_{,\alpha}^{\;\varrho}$ pomocí starých koeficientů $b_{\alpha\varrho}$:

$$B_{,j}^{\;k} = b_{jk}\,, \quad B_{,j}^{\;4} = -\mathrm{i}b_{j4}\,, \tag{103'}$$
$$B_{,4}^{\;j} = \mathrm{i}b_{4j}\,, \quad B_{,4}^{\;4} = b_{44}\,.$$

Spojení s rovnicemi (103) dává pak vztahy

$$B_{,j}^{\;k} = B'^j_k\,, \qquad B_{,j}^{\;4} = -B'^j_4\,,$$
$$B_{,4}^{\;j} = -B'^4_j\,, \quad B_{,4}^{\;4} = B'^4_4\,.$$

Nyní si toto vyjádření koeficientů inverzní transformace (102') pomocí koeficientů přímé transformace (102) odvodíme obecnějším a obratnějším způsobem ve stručném tvaru. Nejprve poznamenejme, že dosazení z rovnic (102') do *pravé* strany rovnice (104) ukazuje, že i pro koeficienty $B_{,\alpha}^{\;\varrho}$ musí platit podmínky pseudoortogonality

$$\eta_{\varrho\sigma} B_{,\alpha}^{\;\varrho} B_{,\beta}^{\;\sigma} = \eta_{\alpha\beta}\,. \tag{105b}$$

Implicitní vztahy mezi koeficienty transformací (102) a (102') získáme dosazením ze (102') do (102). Dostaneme tak rovnice

$$x'^\mu = B'^\mu_{\varrho} B_{,\alpha}^{\;\varrho} x'^\alpha\,,$$

které musí být identitami, takže z nich plynou podmínky

$$B'^\mu_{\varrho} B_{,\alpha}^{\;\varrho} = \delta^\mu_\alpha = \begin{cases} 1 & (\alpha = \mu)\,, \\ 0 & (\alpha \neq \mu)\,. \end{cases} \tag{106}$$

Násobíme-li tyto rovnice činitelem $\eta_{\mu\beta}$, dostáváme

$$\eta_{\mu\beta} B'^{\mu}_{\varrho} B_{,\alpha}^{\varrho} = \eta_{\mu\beta} \delta^{\mu}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \,. \tag{107}$$

Z porovnání (107) a (105b) pak plynou lineární vztahy

$$\eta_{\mu\beta} B'^{\mu}_{\varrho} = \eta_{\varrho\sigma} B_{,\beta}^{\sigma} \,. \tag{108}$$

Abychom rovnice (108) rozřešili podle jednoho nebo druhého druhu koeficientů B, zavedeme si ještě koeficienty $\eta^{\alpha\beta}$ určené vztahy

$$\eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\mu} \,. \tag{109}$$

Uvážíme-li hodnoty, jichž nabývají $\eta_{\mu\beta}$ a δ^{α}_{μ}, snadno zjistíme, že $\eta^{\alpha\beta}$ mají tyto hodnoty:

$$\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1 \,, \quad \eta^{44} = -1 \,, \quad \eta^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \,. \tag{110}$$

Tedy $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha}$ a číselné hodnoty těchto koeficientů souhlasí s hodnotami koeficientů $\eta_{\alpha\beta}$.

Nyní můžeme z rovnic (108) snadno vypočítat např. B'^{α}_{ϱ}: Násobíme-li tyto rovnice činitelem $\eta^{\alpha\beta}$ a užijeme vztahu (109), dostáváme

$$\delta^{\alpha}_{\mu} B'^{\mu}_{\varrho} = B'^{\alpha}_{\varrho} = \eta^{\alpha\beta} \eta_{\varrho\sigma} B_{,\beta}^{\sigma} \,. \tag{111a}$$

Obráceně zřejmě platí

$$B_{,\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\varrho} B'^{\alpha}_{\varrho} \,. \tag{111b}$$

Poznamenejme ještě, že podobně jako jsme odvodili vztahy (106), můžeme dosazením ze (102) do (102′) získat vztahy

$$B'^{\nu}_{\sigma} B_{,\nu}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\sigma} \,, \tag{106a}$$

čili

$$\eta_{\varrho\beta} B'^{\nu}_{\sigma} B_{,\nu}^{\beta} = \eta_{\varrho\sigma} \,. \tag{107a}$$

Jejich porovnání s rovnicemi (105a) pak opět dává lineární rovnice (108).

Nakonec ještě uveďme, že koeficienty B'^{μ}_{ν} *infinitezimální* transformace je možno vyjádřit vzorci

$$B'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu} \,, \tag{102a}$$

v nichž $\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$ jsou reálné infinitezimální parametry splňující podmínky $\eta_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha}{}_{\nu} = -\eta_{\nu\alpha}\varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}$.

Pro čtenáře bude nepochybně užitečné sdělení, že místo B'^{μ}_{ϱ}, resp. $B_{,\alpha}^{\varrho}$ se koeficienty transformací (102), resp. (102′) často označují $B^{\mu}{}_{\varrho}$, resp. $B_{\alpha}{}^{\varrho}$. Toto označení je pro *speciální* teorii relativity stejně vhodné (ne-li vhodnější) než zde zavedené, které bylo zvoleno pro lepší návaznost na symboliku používanou v knize Kuchařově.

6,3. KONTRAVARIANTNÍ A KOVARIANTNÍ SLOŽKY ČTYŘVEKTORŮ. TENZORY A JEJICH DERIVACE PODLE SOUŘADNIC

Nechť je v systému S pseudokartézských, reálných prostoročasových souřadnic x^{μ} nějaký fyzikální fakt popsán udáním čtyř veličin F^{μ} a v systému S′ souřadnic zase udáním veličin F'^{μ}. Platí-li dále mezi veličinami F^{μ} a F'^{μ} stejné vztahy jako mezi diferencemi souřadnic dx^{μ} a dx'^{μ} dvou světobodů, tj. platí-li transformační rovnice

$$F'^{\mu} = B'^{\mu}_{\varrho} F^{\varrho} \,, \tag{112}$$

říkáme, že *veličiny* F^{μ} (popř. F'^{μ}) *tvoří čtyřvektor* a ten že je určen svými *kontravariantními složkami* F^{μ} v systému S (popř. F'^{μ} v systému S′). Složky *reálného čtyřvektoru* jsou ovšem *nyní vesměs reálné.*

Definujme si dále v systému S veličiny F_{μ} a v systému S′ veličiny F'_{μ} vztahy

$$F_{\mu} = \eta_{\mu\nu} F^{\nu} \,, \quad F'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} F'^{\nu}. \tag{113a}$$

Násobíme-li tyto rovnice činitelem $\eta^{\alpha\mu}$, dostáváme ihned obrácené vztahy

$$\eta^{\alpha\mu} F_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\nu} F^{\nu} = F^{\alpha} \,, \quad \eta^{\alpha\mu} F'_{\mu} = F'^{\alpha} \,. \tag{113b}$$

Veličiny F_{μ} popř. F'_{μ} nazýváme *kovariantními složkami* našeho čtyřvektoru. Uvážíme-li speciální hodnoty (101) nebo (110), jichž nabývají metrické koeficienty $\eta_{\mu\nu}$ nebo $\eta^{\mu\nu}$ v našich pseudokartézských systémech, vidíme, že (113a) i (113b) dává

$$F_j = F^j \,, \quad F_4 = -F^4 \quad (j = 1, 2, 3) \,.$$

Operace (113a) se nazývá *snižování indexu* a operace (113b) *zvedání indexu složky čtyřvektoru.*

Snadno nalezneme transformační vzorce pro kovariantní složky F_{μ}. Dosadíme-li do čárkovaného vztahu (113a) z rovnic (112), dostáváme ihned

$$F'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} B'^{\nu}_{\alpha} F^{\alpha} = \eta_{\mu\nu} B'^{\nu}_{\alpha} \eta^{\alpha\varrho} F_{\varrho} \,,$$

čili

$$F'_{\mu} = B_{,\mu}^{\varrho} F_{\varrho} \,. \tag{114}$$

Při postupných úpravách jsme použili nečárkovaného vztahu (113b) a vztahu (111b). Porovnáme-li transformaci (114) s transformací inversní ke (112), tj. s

$$F^{\mu} = B_{,\varrho}^{\mu} F'^{\varrho} \tag{112′}$$

vidíme, že se kovariantní složky transformují kontragredientně k složkám kontravariantním. (Matice transformace (114) je *transponovanou maticí* k matici transformace (112′).)

Invariantní čtverec velikosti čtyřvektoru lze nyní psát buď ve tvaru $\eta_{\mu\nu} F^{\mu} F^{\nu}$ nebo ve tvaru $F_{\nu} F^{\nu}$, nebo konečně ve tvaru $\eta^{\mu\nu} F_{\mu} F_{\nu}$.

Pojem čtyřvektoru lze opět snadno zobecnit na pojem prostoročasového tenzoru libovolného řádu. Např. tenzor druhého řádu s kontravariantními složkami $T^{\mu\nu}$ se transformuje podle rovnic

$$T'^{\mu\nu} = B'^{\mu}_{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} T^{\varrho\sigma} . \tag{115a}$$

Místo kontravariantních složek lze ovšem zavést a používat i složky smíšené, např.

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} ,$$

které se transformují podle vzorců

$$T'^{\nu}_{\mu} = B_{,\mu}^{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} T_{\varrho}{}^{\sigma} , \tag{115b}$$

nebo složky kovariantní

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\nu\beta} T_{\mu}{}^{\beta} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} ,$$

pro něž platí

$$T'_{\mu\nu} = B_{,\mu}^{\varrho} B_{,\nu}^{\sigma} T_{\varrho\sigma} . \tag{115c}$$

Zapíšeme-li rovnice (105b) ve tvaru

$$\eta'_{\alpha\beta} \equiv B_{,\alpha}^{\varrho} B_{,\beta}^{\sigma} \eta_{\varrho\sigma} = \eta_{\alpha\beta}$$

a porovnáme je se (115c), vidíme, že *veličiny* $\eta_{\alpha\beta}$ můžeme pokládat za *kovariantní složky* speciálního *tenzoru*, který má tu vlastnost, že při transformaci (115c) se hodnoty jeho složek reprodukují. *Metrické koeficienty* $\eta_{\mu\nu}$ definované rovnicemi (101) *tedy tvoří izotropní tenzor, který nazýváme metrickým tenzorem prostoročasu.*

Poznamenejme ještě, že se při snižování nebo zvedání indexů nesymetrického tenzoru musí zachovat jejich pořadí. U symetrického tenzoru je možno u smíšených složek psát indexy přímo nad sebe. Pro metrický tenzor dostáváme podle (109) smíšené složky

$$\eta_{\mu}^{\nu} = \eta^{\nu\beta} \eta_{\mu\beta} = \delta_{\mu}^{\nu} .$$

Z rovnic (115b) a (106) pak plyne

$$\eta'^{\nu}_{\mu} = B_{,\mu}^{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} \eta_{\varrho}^{\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu} .$$

Podobně lze ukázat, že veličiny $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\varrho} \eta_{\varrho}^{\beta}$ jsou kontravariantními složkami izotropního tenzoru. (Viz Ú 18.)

Úžení tenzoru je možné jenom podle jednoho horního a jednoho dolního indexu. Např. zúžením tenzoru $Q_{\mu}{}^{\nu\varrho}$ v indexech μ, ϱ vzniká čtyřvektor $Q^{\nu} = Q_{\mu}{}^{\nu\mu}$, zúžením v indexech μ, ν pak obecně jiný čtyřvektor $\overline{Q}^{\varrho} = Q_{\mu}{}^{\mu\varrho}$. Abychom mohli zúžit v indexech ν, ϱ, musíme napřed jeden z nich snížit; dostaneme pak třetí čtyřvektor $q_{\mu} = \eta_{\nu\varrho} Q_{\mu}{}^{\nu\varrho} = Q_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu} = Q_{\mu\nu}{}^{\nu}$.

Invariantní stopu tenzoru $T^{\mu\nu}$ musíme tedy tvořit podle vzorce

$$T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^{\mu}{}_{\mu} = T_{\mu}{}^{\mu} .$$

Buďtež nakonec dány složky nějakého tenzoru jako funkce světobodu, tedy např. složky $T^{\mu\nu}(x)$. V systému S′ pak vyjadřujeme $T'^{\mu\nu}$ jako funkce souřadnic x'^{β} takto:

$$T'^{\mu\nu}(x') = B'^{\mu}_{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} T^{\varrho\sigma}(x(x')) .$$

Přitom funkce $x^{\alpha}(x')$ jsou určeny transformačními vzorci (102′). Utvořme nyní derivace složek $T'^{\mu\nu}$ podle souřadnic. Pak zřejmě platí

$$\partial T'^{\mu\nu}/\partial x'^{\beta} = B'^{\mu}_{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} \sum_{\alpha} (\partial T^{\varrho\sigma}/\partial x^{\alpha})\, \partial x^{\alpha}/\partial x'^{\beta} =$$

$$= B'^{\mu}_{\varrho} B'^{\nu}_{\sigma} B_{,\beta}^{\alpha}\, \partial T^{\varrho\sigma}/\partial x^{\alpha} .$$

Ve výrazu $\partial(\ldots)/\partial x^{\alpha}$ *budeme vypsaný index* α *pokládat za dolní index.* Vidíme pak, že *derivováním složek tenzoru* podle souřadnic *vznikají opět složky tenzoru* (s jedním *dolním* indexem navíc). Symbolicky můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} \equiv B_{,\beta}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} .$$

Operátory $\partial_{\alpha} \equiv \partial/\partial x^{\alpha}$ (složky čtyřgradientu) se tedy transformují jako *kovariantní složky čtyřvektoru.* Operátor

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu}\, \partial_{\mu} \partial_{\nu} \equiv \Delta - c^{-2}\, \partial^2/\partial t^2$$

(d'Alembertův operátor) je invariantní, neboť pro libovolnou veličinu $F(x)$ platí $\square\, F(x) = \square' F(x(x'))$.

K dalšímu rozvoji formalismu tenzorového počtu v reálných prostoročasových souřadnicích vedly zejména velké matematické nároky obecné teorie relativity.

ÚLOHY

1. Osový kříž $(1', 4')$ je otočen vůči $(1, 4)$ o úhel ψ ($\operatorname{tg} \psi = \mathrm{i}v/c$) a osový kříž $(1'', 4'')$ je otočen vůči $(1', 4')$ o úhel ψ' ($\operatorname{tg} \psi' = \mathrm{i}u'/c$), takže $(1'', 4'')$ je otočen vůči $(1, 4)$ o $\psi + \psi'$ ($\operatorname{tg}(\psi + \psi') = \mathrm{i}u/c$). Ukažte, že z toho plyne adiční teorém rychlostí (IV 22).

2. Rozložte danou transformaci $x'_{\mu} = b_{\mu\nu} x_{\nu}$ ($b_{44} > 1$) na transformaci $\bar{x}_{\varrho} = \overline{C}_{\varrho\nu} x_{\nu}$ typu (17) a na transformaci $x'_{\mu} = \bar{a}_{\mu\varrho} \bar{x}_{\varrho}$ typu (11). Udejte složky rychlosti $\bar{v}_j(O')$ Lorentzova počátku O' vůči $\bar{\mathrm{S}}$ a koeficienty $\overline{C}_{\varrho\nu}$ transformace prostorového otočení $(x) \to (\bar{x})$.

3. Použijte invariance Δs^2 a ukažte obecně, že vzdálenost (časová diference) dvou světobodů s $\Delta s^2 \gtrless 0$ je nejmenší v tom systému, v němž jsou ty světobody současné (soumístné).

4. Sestavte „multiplikační tabulku" čtyř prvků faktorové grupy $\mathbf{L}/\mathbf{L}_{(E)}$ a porovnejte ji s grupou symetrií obdélníka (tzv. Kleinovou grupou).

5. Udejte inverzní transformaci k infinitezimální Lorentzově transformaci $x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})\, x_\nu$.

6. Hmotný bod M se v inerciálním systému S pohybuje podle rovnic

$$x_1 = r \cos \omega t\,, \quad x_2 = r \sin \omega t\,, \quad x_3 = 0\,.$$

Systém S′ je určen transformací

$$x'_1 = x_1\,, \quad x'_2 = x_2\,, \quad x'_3 = \gamma(x_3 - vt)\,, \quad t' = \gamma(t - vx_3/c^2)\,.$$

Vyjádřete v obou systémech vlastní čas τ bodu M (měřený od okamžiku $t = 0$). Udejte souřadnice x_μ a x'_μ světobodů na světočáře hmotného bodu M jako funkce τ. Udejte též rovnice dráhy bodu M v obou systémech.

7. Mějme dva systémy S a S′ spojené libovolnou Lorentzovou transformací a pevné hmotné těleso, které je v klidu v systému S. Těleso má v S konstantní objem V a konstantní čtyřrychlost $U_\mu \leqq (0, 0, 0, ic)$. Použijte na část jeho světové trubice ohraničenou nadrovinami $x_4 = K^{(1)}$ a $x'_4 = K^{(2)}$ větu (69a) se čtyřvektorem $J_\nu = \varkappa U_\nu$ místo tenzoru $T_{\alpha\ldots\mu\nu}$. Konstanta $\varkappa$ je skalár, který má hodnotu 1 uvnitř a hodnotu 0 na povrchu a vně světové trubice. Vypočtěte objem V' daného tělesa v systému S′.

8. Ukažte, že veličiny F^*_μ komplexně sdružené k složkám F_μ libovolného čtyřvektoru (i komplexního) se transformují podle reprezentace Lorentzovy grupy ekvivalentní reprezentaci čtyřvektorové. (Udejte lineární kombinace veličin F^*_μ, které se transformují stejně jako F_μ. Zobecněte to pravidlo pro libovolný tenzor.)

9. Dokažte větu: Je-li grupa lineárních transformací $\mathbf{T}' = \mathbf{kT}$ reducibilní, existuje nesingulární matice $\mathbf{D}$, která není násobkem jednotkové matice a přesto komutuje se všemi maticemi $\mathbf{k}$ (a tedy i se všemi generátory té grupy).

10. Udejte generátory transformací a) komplexně sdružených s transformacemi (92), b) kontragredientních k transformacím (92), c) komplexně sdružených s kontragredientními. Které z nich jsou ekvivalentní původním?

11. Ukažte, že vztahy (98) mezi koeficienty Lorentzovy transformace a koeficienty přiřazené spinorové transformace jsou v souhlase s požadavkem skládání odpovídajících si transformací (obsaženým v definici pojmu reprezentace grupy).

12. Užijte vztahu (98) a ukažte, že spinorové transformace odpovídající prostým otočením trojhranu prostorových os jsou unitární, tj. platí pro ně $\mathbf{\Gamma}^\dagger = \mathbf{\Gamma}^{-1}$.

13. K matici

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{\Gamma} = 1\,,$$

udejte explicite matice $\mathbf{\Gamma}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}$ a prověřte vztah ekvivalence transformací $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{\eta}' = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}\boldsymbol{\eta}$.

14. Ukažte, že rovnice $\boldsymbol{\sigma}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\xi} = 0$ pro spinor $\boldsymbol{\xi}(x)$ jsou invariantní vůči vlastní Lorentzově grupě $\mathbf{L}_{(E)}$ a že jejich levá strana je spinor $\boldsymbol{\chi}$ transformující se podle formule $\boldsymbol{\chi}' = (\mathbf{\Gamma}^\dagger)^{-1}\, \boldsymbol{\chi}$. Ukažte dále, že výraz $I \equiv \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\xi}$ je invariant, že veličiny $T_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu\, \partial_\nu \boldsymbol{\xi}$ tvoří tenzor a veličiny $J_\mu \equiv \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_\mu \boldsymbol{\xi}$ tvoří čtyřvektor (při transformacích z vlastní Lorentzovy grupy).

15. Matice $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) buďtež dány vztahy $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_j = \boldsymbol{\sigma}_j$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_4 = -\boldsymbol{\sigma}_4$ a spinor $\boldsymbol{\chi}(x)$ nechť se transformuje podle formule $\boldsymbol{\chi}'(x') = (\mathbf{\Gamma}^\dagger)^{-1}\, \boldsymbol{\chi}(x)$. Ukažte, že rovnice $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\chi} = 0$ jsou invariantní vůči grupě $\mathbf{L}_{(E)}$ a že jejich levá strana je spinor $\boldsymbol{\xi}$ transformující se podle formule $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\xi}$. Ukažte dále, že veličiny $\bar{J}_\mu \equiv \boldsymbol{\chi}^\dagger \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu \boldsymbol{\chi}$ tvoří čtyřvektor, výraz $\bar{I} \equiv \boldsymbol{\chi}^\dagger \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\chi}$ je invariant a veličiny $\bar{T}_{\mu\nu} \equiv \equiv \boldsymbol{\chi}^\dagger \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu\, \partial_\nu \boldsymbol{\chi}$ tvoří tenzor (při transformacích z grupy $\mathbf{L}_{(E)}$).

16. Z rovnic $\boldsymbol{\sigma}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\xi} = 0$ a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu\, \partial_\mu \boldsymbol{\chi} = 0$ odvoďte rovnice $\Box \boldsymbol{\xi} = 0$, $\Box \boldsymbol{\chi} = 0$.

17. Definujme čtyřřadové (Diracovy) matice

$$\gamma_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}$$

a čtyřsložkový (Diracův) spinor

$$\boldsymbol{\Psi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(x) \\ \boldsymbol{\chi}(x) \end{pmatrix},$$

který se při transformacích $x'_\mu = b_{\mu\nu} x_\nu$ z grupy $\mathbf{L}_{(E)}$ transformuje podle vzorce

$$\boldsymbol{\Psi}'(x') \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}'(x') \\ \boldsymbol{\chi}'(x') \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}\, \boldsymbol{\Psi}(x)\,, \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & (\mathbf{\Gamma}^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(x) \\ \boldsymbol{\chi}(x) \end{pmatrix}$$

a při prostorovém zrcadlení $x'_j = -x_j$, $x'_4 = x_4$ ($x'_\mu = b^{(P)}_{\mu\nu} x_\nu$) podle vzorce

$$\boldsymbol{\Psi}'(x') = \boldsymbol{\Lambda}_{(P)}\, \boldsymbol{\Psi}(x) \equiv \gamma_4\, \boldsymbol{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\, \boldsymbol{\chi}(x) \\ \mathrm{i}\, \boldsymbol{\xi}(x) \end{pmatrix}.$$

Prověřte, že matice γ_μ jsou hermitovské a splňují relace

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\,.\,\mathbf{1}\,.$$

Dále potvrďte, že transformační matice Λ a $\Lambda_{(P)}$ splňují vztahy

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda &= b_{\mu\nu}\gamma_\nu\,,\\
\Lambda_{(P)}^{-1}\gamma_\mu\Lambda_{(P)} &= b_{\mu\nu}^{(P)}\gamma_\nu\,,\\
\Lambda^\dagger\gamma_4 &= \gamma_4\Lambda^{-1}\,,\\
\Lambda_{(P)}^\dagger\gamma_4 &= \gamma_4\Lambda_{(P)}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Použijte těchto vztahů a ukažte, že rovnice (Diracovy)

$$(\gamma_\mu\,\partial_\mu + \varkappa)\,\Psi(x) = 0\,,\quad \varkappa = \text{konst.}\,,$$

jsou invariantní vůči celé ortochronní Lorentzově grupě. Odvoďte z nich také rovnice $(\Box + \varkappa^2)\,\Psi = 0$.

Udejte transformační vzorec pro přidružený Diracův spinor $\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma_4$ a ukažte, že

1. výrazy $\overline{\Psi}\Psi$ a $\overline{\Psi}\gamma_\mu\,\partial_\mu\Psi$ jsou invariantní, takže veličiny jimi určené jsou prostoročasové skaláry;

2. veličiny určené výrazy $\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, tvoří čtyřvektor a obecně veličiny $\overline{\Psi}\gamma_\mu,\gamma_\nu \ldots \Psi$ tvoří tenzor;

3. veličina $\overline{\Psi}\gamma_5\Psi$ s $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ je pseudoskalár, a veličiny $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$, $\mu = 1, 2, 3, 4$ tvoří pseudovektor. Odvoďte též invariantní Diracovy rovnice pro spinor $\overline{\Psi}$.

18. Ukažte, že neexistuje nenulový čtyřvektor, který by byl při Lorentzových transformacích izotropní, kdežto každý izotropní kontravariantní tenzor druhého řádu je prostým násobkem izotropního tenzoru $\eta^{\mu\nu}$.

KAPITOLA VI

RELATIVISTICKÁ ELEKTRODYNAMIKA A MECHANIKA HMOTNÝCH ČÁSTIC

Matematického aparátu rozvinutého v předchozí kapitole (tenzorového počtu speciální teorie relativity) nyní použijeme k formálně invariantnímu vyjádření (relativistickému tenzorovému zápisu) základních zákonů elektrodynamiky a mechaniky. Uvedeme příklady praktického použití transformačních vzorců pro různé fyzikální veličiny a odvodíme tadé řadu konkrétních důsledků z obecných základních rovnic. Podrobně si objasníme zejména důležitý Einsteinův zákon o ekvivalenci setrvačné hmoty a energie.

S výjimkou posledního odstavce budeme v této kapitole používat imaginární čtvrté souřadnice $x_4 = ict$ a pravidel tenzorového počtu z odst. V 4.

1. RELATIVISTICKÝ TENZOROVÝ ZÁPIS MAXWELLOVÝCH-LORENTZOVÝCH ROVNIC

Lorentz, Poincaré a Einstein dokazovali původně invarianci základních rovnic elektromagnetického pole vůči Lorentzovým transformacím dosti pracnými a nepřehlednými výpočty. Zde si ji dokážeme prostě tak, že ty rovnice zapíšeme v relativistickém tenzorovém tvaru. K tomu cíli musíme veličiny vystupující v Maxwellových-Lorentzových rovnicích identifikovat se složkami jistých *tenzorů v Minkowského čtyřrozměrném prostoru* a ukázat, že rovnice tím přejdou na rovnice tenzorové.

Začneme s Lorentzovou podmínkou pro elektromagnetické potenciály, která je obzvlášť jednoduchá. Zavedeme-li označení

$$\varphi_j \equiv A_j \quad (j = 1, 2, 3)\,,\quad \varphi_4 \equiv i\varphi\,, \tag{1}$$

můžeme rovnici (II 7) (popř. (II $\overline{7}$) z odst. II 4,3) zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu\varphi_\mu = 0\,. \tag{2}$$

Z požadavku invariance této rovnice vůči Lorentzově grupě $\mathbf{L}_{(U)}$ a z toho, že veličiny A_j tvoří obyčejný prostorový vektor a že φ je obyčejný skalár, jednoznačně plyne, že