Dále potvrďte, že transformační matice Λ a $\Lambda_{(P)}$ splňují vztahy

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda &= b_{\mu\nu}\gamma_\nu\,, \\ \Lambda_{(P)}^{-1}\gamma_\mu\Lambda_{(P)} &= b_{\mu\nu}^{(P)}\gamma_\nu\,, \\ \Lambda^{\dagger}\gamma_4 &= \gamma_4\Lambda^{-1}\,, \\ \Lambda_{(P)}^{\dagger}\gamma_4 &= \gamma_4\Lambda_{(P)}^{-1}\,. \end{aligned}$$

Použijte těchto vztahů a ukažte, že rovnice (Diracovy)

$$(\gamma_\mu\,\partial_\mu + \varkappa)\,\Psi(x) = 0\,, \quad \varkappa = \text{konst.}\,,$$

jsou invariantní vůči celé ortochronní Lorentzově grupě. Odvoďte z nich také rovnice $(\Box + \varkappa^2)\,\Psi = 0$.

Udejte transformační vzorec pro přidružený Diracův spinor $\overline{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}\gamma_4$ a ukažte, že

1. výrazy $\overline{\Psi}\Psi$ a $\overline{\Psi}\gamma_\mu\,\partial_\mu\Psi$ jsou invariantní, takže veličiny jimi určené jsou prostoročasové skaláry;

2. veličiny určené výrazy $\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, tvoří čtyřvektor a obecně veličiny $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu \ldots \Psi$ tvoří tenzor;

3. veličina $\overline{\Psi}\gamma_5\Psi$ s $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ je pseudoskalár, a veličiny $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$, $\mu = 1, 2, 3, 4$ tvoří pseudovektor. Odvoďte též invariantní Diracovy rovnice pro spinor $\overline{\Psi}$.

18. Ukažte, že neexistuje nenulový čtyřvektor, který by byl při Lorentzových transformacích izotropní, kdežto každý izotropní kontravariantní tenzor druhého řádu je prostým násobkem izotropního tenzoru $\eta^{\mu\nu}$.

KAPITOLA VI

RELATIVISTICKÁ ELEKTRODYNAMIKA A MECHANIKA HMOTNÝCH ČÁSTIC

Matematického aparátu rozvinutého v předchozí kapitole (tenzorového počtu speciální teorie relativity) nyní použijeme k formálně invariantnímu vyjádření (relativistickému tenzorovému zápisu) základních zákonů elektrodynamiky a mechaniky. Uvedeme příklady praktického použití transformačních vzorců pro různé fyzikální veličiny a odvodíme tadé řadu konkrétních důsledků z obecných základních rovnic. Podrobně si objasníme zejména důležitý Einsteinův zákon o ekvivalenci setrvačné hmoty a energie.

S výjimkou posledního odstavce budeme v této kapitole používat imaginární čtvrté souřadnice $x_4 = ict$ a pravidel tenzorového počtu z odst. V 4.

1. RELATIVISTICKÝ TENZOROVÝ ZÁPIS MAXWELLOVÝCH-LORENTZOVÝCH ROVNIC

Lorentz, Poincaré a Einstein dokazovali původně invarianci základních rovnic elektromagnetického pole vůči Lorentzovým transformacím dosti pracnými a nepřehlednými výpočty. Zde si ji dokážeme prostě tak, že ty rovnice zapíšeme v relativistickém tenzorovém tvaru. K tomu cíli musíme veličiny vystupující v Maxwellových-Lorentzových rovnicích identifikovat se složkami jistých *tenzorů v Minkowského čtyřrozměrném prostoru* a ukázat, že rovnice tím přejdou na rovnice tenzorové.

Začneme s Lorentzovou podmínkou pro elektromagnetické potenciály, která je obzvlášť jednoduchá. Zavedeme-li označení

$$\varphi_j \equiv A_j \quad (j = 1, 2, 3)\,, \quad \varphi_4 \equiv \mathrm{i}\varphi\,, \tag{1}$$

můžeme rovnici (II 7) (popř. (II $\overline{7}$) z odst. II 4,3) zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu\varphi_\mu = 0\,. \tag{2}$$

Z požadavku invariance této rovnice vůči Lorentzově grupě $L_{(U)}$ a z toho, že veličiny A_j tvoří obyčejný prostorový vektor a že φ je obyčejný skalár, jednoznačně plyne, že veličiny φ_μ *tvoří čtyřvektor, tzv. čtyřpotenciál.* S příkladem praktického použití transformačních vzorců $\varphi'_\mu = b_{\mu\nu}\varphi_\nu$ pro složky čtyřpotenciálu se setkáme v odst. 2.

Přistupme nyní k vlnovým rovnicím (II 1a) a (II 2a) pro potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ. Násobíme-li rovnici pro φ imaginární jednotkou i a zavedeme φ_4 podle (1), lze vlnové rovnice pro čtyři složky čtyřpotenciálu $\varphi_\mu \equiv (\boldsymbol{A}, i\varphi)$ zapsat takto:

$$\Box\varphi_\mu = -4\pi c^{-1} J_\mu \quad \mu = 1, 2, 3, 4 . \tag{3}$$

Veličiny $J_\mu \equiv (\varrho \boldsymbol{u}, ic\varrho)$ jsou složky tzv. elektrického čtyřproudu. Jeho první tři složky J_k jsou identické se složkami ϱu_j Lorentzovy *hustoty* elektrického *proudu* a čtvrtá složka $J_4 \equiv ic\varrho$ je ic-násobkem *hustoty* elektrického *náboje*. Aby rovnice (3) byly formálně invariantní vůči grupě Lorentzových transformací, musí veličiny J_μ tvořit čtyřvektor, neboť $\Box\varphi_\mu$ je čtyřvektor.

V čárkovaném systému jsou tedy složky čtyřproudu určeny transformačními vzorci $J'_\mu = b_{\mu\nu}J_\nu$. Pro veličiny J'_μ platí ovšem také vyjádření $J'_k = \varrho' u'_k$, $J'_4 = ic\varrho'$, *neboť čárkovaný systém je fyzikálně rovnocenný s původním.* Srovnáním obou vyjádření pro J'_μ dostaneme transformační vzorec pro hustotu náboje ϱ. (Vrátíme se k němu v odst. 2.)

Rovnici kontinuity (II 8) lze nyní zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu J_\mu = 0 , \tag{4}$$

který zřejmě *je invariantní, tvoří-li J_μ čtyřvektor.* Obráceně z požadavku invariance rovnice (4) a z toho, že ϱ je obyčejný skalár, lze opět odvodit, že veličiny J_μ *musí* tvořit čtyřvektor. Je tedy také možno vyjít od rovnice (4) místo od rovnice (2) a celý předchozí postup obrátit.

Zbývá zapsat v relativistickém tenzorovém tvaru rovnice (II 1 až 4). Už jsme si je zapsali v prostorově-tenzorovém tvaru — viz rov. (II 1*, $\bar{2}$, 3*, 4*) z odst. II 4,3. Abychom ukázali jejich prostoročasově-tenzorovou povahu, zavedeme si antisymetrický tenzor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu . \tag{5}$$

Použijeme-li definice (1), snadno zjistíme, že nenulové složky $F_{\mu\nu}$ mají tento fyzikální význam:

$$F_{23} = -F_{32} = H_1 , \quad \text{cykl. } 1, 2, 3, \tag{6a}$$
$$(F_{jk} = -F_{kj} = \varepsilon_{jkl}H_l) ;$$
$$F_{41} = -F_{14} = iE_1 , \quad \text{cykl. } 1, 2, 3, \tag{6b}$$
$$(F_{4j} = -F_{j4} = iE_j) .$$

Rovnice (5) zřejmě představují invariantní zápis rovnic (II 5, 6). Na základě vztahů (6a,b) mezi složkami tenzoru $F_{\mu\nu}$ a složkami intenzit pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ se nyní snadno přesvědčíme, že rovnice (II 1) a (II 2), popř. (II 1*) a (II $\bar{2}$), lze zapsat ve tvaru

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 4\pi c^{-1} J_\mu , \tag{7}$$

a rovnice (II 3) a (II 4), popř. (II 3*) a (II 4*) ve tvaru

$$\partial_\mu F_{\nu\varrho} + \partial_\varrho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\varrho\mu} = 0 . \tag{8}$$

Rovnice (7) a (8) jsou invariantní vůči grupě Lorentzových transformací, neboť (7) vyjadřuje rovnost dvou čtyřvektorů a (8) pak anulování všech složek jistého tenzoru $\psi_{\mu\nu\varrho}$.

První tři z rovnic (7) (pro $\mu = 1, 2, 3$) dávají rovnice (II 1*) ≡ (II 1) a čtvrtá (pro $\mu = 4$) dává rovnici (II $\bar{2}$) ≡ (II 2). O tenzoru $\psi_{\mu\nu\varrho}$ (levé straně rovnic (8)) lze snadno ukázat, že je úplně antisymetrický (ve všech třech indexech), tj. platí $\psi_{\mu\nu\varrho} = -\psi_{\nu\mu\varrho} = -\psi_{\mu\varrho\nu} = -\psi_{\varrho\nu\mu}$. To plyne již z pouhé antisymetrie tenzoru $F_{\mu\nu}$. Jsou-li tedy dva indexy stejné, přejdou rovnice (8) na identitu $0 = 0$. Proto dávají pouze čtyři podmínky pro šest složek tenzoru $F_{\mu\nu}$. Pro $(\mu, \nu, \varrho) = (1, 2, 3)$ dostáváme rovnici (II 4). Rovnice (II 3) dostáváme pro $(\mu, \nu, \varrho) = (2, 3, 4)$; $(3, 1, 4)$; $(1, 2, 4)$. Snadno se také ověří, že rovnice (8) jsou identicky splněny na základě vyjádření (5), právě tak jako rovnice (II 3, 4) na základě (II 5) a (II 6).

Z rovnic (7) plyne ihned rovnice kontinuity ve tvaru (4), neboť $\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu} \equiv 0$ na základě antisymetrie $F_{\mu\nu}$. Dosadíme-li z (5) do (7), dostáváme

$$\partial_\mu(\partial_\nu\varphi_\nu) - \partial_\nu\partial_\nu\varphi_\mu = 4\pi c^{-1} J_\mu , \tag{3a}$$

a použijeme-li podmínky (2), pak vlnové rovnice (3).

Poznamenejme, že veličiny φ_μ můžeme nahradit veličinami $\bar{\varphi}_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu\chi$, aniž se tím změní složky $F_{\mu\nu}$. Aby veličiny $\bar{\varphi}_\mu$ tvořily opět čtyřvektor, musí být $\chi(x)$ prostoročasový skalár. Rovnice (2) a (3) jsou pro čtyřpotenciál $\bar{\varphi}_\mu$ splněny, jenom když skalár $\chi(x)$ splňuje vlnovou rovnici $\Box\chi = 0$. Jinak máme $\partial_\mu\bar{\varphi}_\mu = \Box\chi \neq 0$ a místo vlnových rovnic tvaru (3) platí pro $\bar{\varphi}_\mu$ pouze obecnější rovnice tvaru (3a). I tyto rovnice jsou ovšem invariantní, jsou-li $\bar{\varphi}_\mu$ a J_μ čtyřvektory.

2. FYZIKÁLNÍ DŮSLEDKY TRANSFORMAČNÍCH VZORCŮ A JEJICH PRAKTICKÉ POUŽITÍ

Při obecné Lorentzově transformaci $x'_\mu = b_{\mu\nu}x_\nu$ se složky tenzoru $F_{\mu\nu}$ transformují podle vzorců (V 49). V odstavci V 4,3. jsme si již ukázali, že při speciální transformaci souřadnic (V 42) se veličiny E_j transformují odděleně od H_j, a že E_j tvoří obyčejný polární vektor, kdežto veličiny H_j axiální vektor (viz rov. (V 49a,b)). Je-li tedy v systému S pole čistě elektrické nebo čistě magnetické, je takovým i z hlediska systému S′, který vznikne pouhým *otočením* (a popř. i zrcadlením) *trojhranu prostorových os.* Použijeme-li však transformačních vzorců (V 49) v případě speciální

Lorentzovy transformace (V 2) popř. (IV 12), dostaneme po zavedení veličin E_j, H_j, E'_j, H'_j transformační vzorce

$$E'_1 = E_1\,, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta H_3)\,, \quad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta H_2)\,,$$
$$H'_1 = H_1\,, \quad H'_2 = \gamma(H_2 + \beta E_3)\,, \quad H'_3 = \gamma(H_3 - \beta E_2)\,, \tag{9}$$

tvarem zcela shodné s Lorentzovými vzorci (III 46).

Z těchto důležitých vztahů vidíme, že pojmy elektrické pole nebo magnetické pole mají *v teorii relativity* pouze *relativní význam*. To, co se např. v jednom inerciálním systému jeví jako pole *čistě elektrické* ($\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$), je z hlediska jiného inerciálního systému polem *elektromagnetickým* ($\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{H}' \neq 0$). Protože oba systémy jsou fyzikálně rovnocenné, jsou obě zjištění stejně oprávněná. To je nutno dobře si uvědomit, protože v Lorentzově teorii tomu bylo jinak. Tam vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{H}$ charakterizovaly stav éteru. Bylo-li vzbuzeno pouze pole elektrické (např. elektronem *v klidu vůči éteru*), byl stav éteru jiný, než když bylo vzbuzeno i pole magnetické (např. elektronem *v pohybu vůči éteru*.) Pojmy elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a magnetické intenzity $\mathbf{H}$ měly samostatný, absolutní význam.

Obrácení vztahů (9) dostaneme prostou výměnou čárkovaných a nečárkovaných složek a změnou znaménka u koeficientu β. Ukažme si nyní, jak lze těchto vztahů použít k snadnému odvození vzorců (II 26a,b) pro intenzity pole vzbuzeného bodovým elektrickým nábojem v rovnoměrném přímočarém pohybu. Bodový náboj velikosti e nechť je uložen v počátku O' inerciálního systému S'. Z hlediska tohoto systému je tedy vzbuzeno jen elektrostatické pole popsané intenzitou

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = e r'^{-3} \mathbf{x}'\,, \quad \mathbf{H}' \equiv 0\,. \tag{10}$$

Vztah mezi systémem S a S' nechť je dán speciální Lorentzovou transformací

$$x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4\,, \quad x'_2 = x_2\,, \quad x'_3 = x_3\,, \quad x'_4 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4\,, \tag{11}$$

čili

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)\,, \quad x'_2 = x_2\,, \quad x'_3 = x_3\,, \quad t' = \gamma(t - vc^{-2}x_1)\,,$$

jíž právě odpovídá transformace (9) složek intenzit pole. Složky E_j a H_j v systému S jsou tedy dány obrácením vzorců (9). Při $H'_j = 0$ dostáváme

$$E_1 = E'_1\,, \quad E_2 = \gamma E'_2\,, \quad E_3 = \gamma E'_3\,, \tag{12a}$$

$$H_1 = H'_1 = 0\,, \quad H_2 = -\gamma\beta E'_3 = -\beta E_3\,, \quad H_3 = \gamma\beta E'_2 = \beta E_2\,. \tag{12b}$$

Uvážíme-li, že z hlediska systému S se náš bodový náboj pohybuje po ose *1* rychlostí $\mathbf{u} \equiv (v = \beta c, 0, 0)$ podle rovnice $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(O') = \mathbf{u}t \equiv (vt, 0, 0)$, vidíme, že rovnice (12b) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{H} = c^{-1}\mathbf{u} \times \mathbf{E}\,,$$

který je shodný s (II 26b). Abychom z (12a) dostali vzorec (II 26a), musíme složky $E_j(\mathbf{x}, t)$ vyjádřit složkami vektoru $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)$. Z transformace souřadnic (11) dostáváme vyjádření

$$r' \equiv (x'_j x'_j)^{\frac{1}{2}} = [\gamma^2(x_1 - vt)^2 + x_2^2 - x_3^2]^{\frac{1}{2}} = \gamma \mathrm{q}(\mathbf{r})\,,$$

a z (12a), (10) a (11) pak ihned máme

$$E_1 = e\gamma^{-2}\mathrm{q}^{-3}(\mathbf{r})\,(x_1 - x_1^*(t))\,, \quad E_2 = e\gamma^{-2}\mathrm{q}^{-3}(\mathbf{r})\,x_2\,, \quad E_3 = e\gamma^{-2}\mathrm{q}^{-3}(\mathbf{r})\,x_3\,,$$

čili $\mathbf{E} = e(1 - \beta^2)\,\mathrm{q}^{-3}(\mathbf{r})\,\mathbf{r}$, v plné shodě s (II 26a). Zřejmě si konstanta e ze vzorce (10) zachovává v systému S stejný fyzikální význam, jaký měla v systému S'. V dalším výkladu si ukážeme, že je to správné, neboť náboj izolované částice je veličina invariantní vůči Lorentzovým transformacím.

Stejně snadno jako jsme odvodili vzorce (II 26a,b) užitím (9), je možno odvodit i vzorce (II 25a,b) užitím transformačních formulí pro složky čtyřpotenciálu φ_μ (viz Ú 1).

Ze speciálních výrazů (II 25a,b) ani z obecnějších Liénardových-Wiechertových výrazů (II 21a,b) není přímo patrné, že veličiny $\varphi_j = A_j$ a $\varphi_4 = i\varphi$ tvoří čtyřvektor. Hned to však bude zřejmé, jestliže výrazy (II 21a,b) zapíšeme ve vhodnějším tvaru.

Budiž $x_\mu \equiv (\mathbf{x}, ict)$, $x_\mu^* \equiv (\mathbf{x}^*(t^*), ict^*)$ a $R_\mu = x_\mu - x_\mu^* \equiv (\mathbf{R}, ic(t - t^*))$. Podmínku (II 19) lze pak zapsat v invariantním tvaru

$$R_\mu R_\mu = 0\,, \quad t - t^* > 0\,. \tag{13}$$

Souřadnice x_μ^* vyjádříme jako funkce vlastního času $\tau(t^*)$ a definujeme čtyřrychlost bodového náboje

$$U_\mu = \mathrm{d}x_\mu^*/\mathrm{d}\tau \equiv (\gamma_{(u)}\mathbf{u}, ic\gamma_{(u)})\,, \tag{14}$$

$\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{x}^*/\mathrm{d}t^*$. Použijeme-li (13) a (14), snadno se pak přesvědčíme, že invariant

$$R_\nu U_\nu = -c\gamma_{(u)}(R - c^{-1}\mathbf{R} \,.\, \mathbf{u})\,, \quad R = |\mathbf{R}|\,. \tag{15}$$

Čtyřpotenciál $\varphi_\mu \equiv (\mathbf{A}, i\varphi)$, v němž $\mathbf{A}$ a φ jsou dány vzorci (II 21a,b), lze tedy vyjádřit vzorcem

$$\varphi_\mu = -e\,U_\mu(R_\nu U_\nu)^{-1}\,. \tag{16}$$

To je vzorec invariantní, neboť i na pravé straně stojí čtyřvektor, je-li ovšem náboj e invariantní. To si nyní odvodíme z vlastností čtyřvektoru $J_\mu \equiv (\varrho\mathbf{u}, ic\varrho)$.

Mějme osamocené elektricky nabité tělísko. Čtyřproud J_μ je pak od nuly různý jen uvnitř světové trubice tělíska. Poněvadž kromě toho platí všude rovnice kontinuity (4), splňuje čtyřvektor J_μ předpoklady matematické věty odvozené v odst. V 4,6 o vlastnostech integrálů (V 73) a (V 73'). Podle ní je integrál

$$e = (ic)^{-1} \int_V J_4 \, dV = \int_V \varrho \, dV$$

nezávislý na čase t a invariantní, tj. platí také

$$(ic)^{-1} \int_{V'} J'_4 \, dV' = \int_{V'} \varrho' \, dV' = e' = e = \text{konst} .$$

Elektrický náboj našeho tělíska má tedy ve všech systémech tutéž konstantní hodnotu e.

Všimněme si nyní transformačních vlastností *hustoty náboje* ϱ. Porovnání složek čtyřvektoru $J_\mu \equiv (\varrho u_j, ic\varrho)$ s veličinami $dx_\mu \equiv (dx_j, ic\, dt)$ ukazuje, že se veličiny $(\varrho u_j, \varrho)$ transformují stejně jako (dx_j, dt). Při speciální Lorentzově transformaci (11) tedy platí

$$\varrho' u'_1 = \gamma_{(v)}(\varrho u_1 - v\varrho) , \quad \varrho' u'_2 = \varrho u_2 , \quad \varrho' u'_3 = \varrho u_3 , \tag{17}$$

$$\varrho' = \gamma_{(v)}(\varrho - v\varrho u_1/c^2) = \varrho\gamma_{(v)}(1 - vu_1/c^2) . \tag{18}$$

Z rovnice (18) vidíme, že pro výpočet ϱ' nestačí znát ϱ a $\boldsymbol{v}$; obecně musíme znát také $\boldsymbol{u}$ nebo $\boldsymbol{J} = \varrho \boldsymbol{u}$.

Podle Lorentze si elektrický proud můžeme představit jako pohyb (proudění) jakési „nábojové substance", rozložené po prostoru s hustotou $\varrho(\boldsymbol{x}, t)$ a pohybující se (proudící) v místě $\boldsymbol{x}$ v čase t rychlostí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. Veličiny $u_j(\boldsymbol{x}, t)$ jsou tedy složky rychlosti „elementu nábojové substance", který se v čase t právě nachází v bezprostředním okolí bodu $\boldsymbol{x}$. V systému S' pak ovšem odpovídají souřadnicím x_j a času t souřadnice x'_j a čas t' určené rovnicemi (11) a složkám rychlosti $u_j(\boldsymbol{x}, t)$ složky $u'_j(\boldsymbol{x}', t')$ určené transformačními vzorci (IV 58). Dosadíme-li z těchto vzorců do rovnic (17), dostaneme pro hustotu ϱ opět transformační vzorec (18). Tento vzorec je tedy v souhlase jak s požadavkem, aby veličiny $J_\mu \equiv (\varrho u_j, ic\varrho)$ tvořily čtyřvektor, tak s požadavkem, aby se veličiny u_j transformovaly jako složky rychlosti nějakého „objektu" M.

Obrácení transformačních vztahů (17) a (18) dostaneme opět výměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin ϱ a u_j a obrácením znaménka rychlosti v. Pro hustotu náboje máme tedy vyjádření

$$\varrho = \varrho' \gamma_{(v)}(1 + vu'_1/c^2) . \tag{18'}$$

Je-li „náhodou" v určitém místě $\boldsymbol{x}'$ v určitém čase t' rychlost $\boldsymbol{u}' = 0$, pak formule (18') dává v tom světobodě

$$\varrho(x) = \gamma_{(v)} \varrho'(x') . \tag{18'a}$$

Veličinu ϱ' při $\boldsymbol{u}' = 0$ budeme označovat symbolem ϱ_0 a nazývat *klidovou hustotou* elektrického náboje v daném světobodě. Pojem klidové hustoty náboje je zřejmě absolutní a veličina ϱ_0 musí být nezávislá na systému souřadnic, neboť je určena jen světobodem a nábojovou substancí samotnou.

Z hlediska systému S má nábojová substance v uvažovaném světobodě rychlost $\boldsymbol{u} \equiv (v, 0, 0)$. Je tedy nyní $\gamma_{(v)} = \gamma_{(u)}$, a pro hustotu ϱ_0 plyne z (18) i (18'a) obecné vyjádření

$$\varrho_0 = \varrho \gamma_{(u)}^{-1} . \tag{19}$$

Vzorec (19) platí v každém systému S. Lze to potvrdit např. přepočtením pravé strany rovnice (19) do systému S^+ určeného transformací (IV 64a,b) (viz Ú 2). Zavedeme-li ϱ_0 do výrazů pro složky J_ν, dostaneme pro ně nové vyjádření

$$J_\nu = \varrho_0 U_\nu \equiv (\varrho_0 \gamma_{(u)} \boldsymbol{u}, ic\varrho_0 \gamma_{(u)}) . \tag{20}$$

Odtud vidíme, že ϱ_0 je *prostoročasový skalár*, je-li J_ν čtyřvektor, a obráceně. Z (20) dostáváme také pro ϱ_0 nová, zřejmě *invariantní vyjádření*

$$\varrho_0 = -c^{-2} J_\nu U_\nu = c^{-1}(-J_\nu J_\nu)^{\frac{1}{2}} . \tag{19a}$$

Představme si nakonec, že kolem *pevného místa* určeného v systému S polohovým vektorem $\boldsymbol{x}$ vymezíme *v okamžiku t* objemový element dV, který obsahuje v tom okamžiku jisté množství nábojové substance (element substance) a odpovídající elektrický náboj $de = \varrho \, dV$. Takto vybraný „element nábojové substance" se ovšem vůči systému S pohybuje (jako element proudící tekutiny). V dostatečně krátkém časovém intervalu kolem zvoleného okamžiku t zůstává jeho objem prakticky konstantní, jako objem pevného tělíska při pohybu prakticky konstantní rychlostí.

Mějme dále systém S', který se vůči S pohybuje *konstantní* rychlostí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. V něm zvolenému světobodu přísluší polohový vektor $\boldsymbol{x}'$ a čas t'. Uvažovaný element nábojové substance pak má *v čase t'* rychlost $\boldsymbol{u}' = 0$, objem $dV' \equiv dV_0 = \gamma_{(v)} \, dV$ a hustotu náboje $\varrho' \equiv \varrho_0 = \varrho \gamma_{(v)}^{-1}$, takže z hlediska systému S' obsahuje elektrický náboj

$$de' = \varrho' \, dV' \equiv \varrho_0 \, dV_0 = \varrho \, dV = de .$$

Tím jsme znovu jednoduchým způsobem potvrdili invarianci elektrického náboje i nezávislost náboje izolovaného tělíska na jeho rychlosti. Vzrůst *hustoty* náboje v takovém tělísku s jeho rychlostí u (podle vzorce $\varrho = \varrho_0 \gamma_{(u)}$) je možno naopak chápat jako důsledek Lorentzovy kontrakce podélného rozměru tělíska při zachovávajícím se úhrnném náboji.

3. LORENTZOVA ČTYŘSÍLA A TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

3,1. HUSTOTA SÍLY A ÚHRNNÁ SÍLA

Vzorec (II 9*) (z odst. II 4,3) pro *hustotu* Lorentzovy *síly* $\phi \equiv (\phi_j)$ lze zavedením složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ a čtyřvektoru J_ν zapsat ve tvaru

$$\phi_j = c^{-1} F_{j\nu} J_\nu .$$

Z toho vyjádření je zřejmé, že *veličiny* ϕ_j *tvoří první tři složky čtyřvektoru*

$$\phi_\mu = c^{-1} F_{\mu\nu} J_\nu . \tag{21}$$

Pro jeho imaginární čtvrtou složku plynou postupně výrazy

$$\phi_4 = c^{-1} F_{4\nu} J_\nu = c^{-1} F_{4j} J_j = \mathrm{i} c^{-1} \boldsymbol{E} . \boldsymbol{J} = \mathrm{i} c^{-1} \boldsymbol{\phi} . \boldsymbol{u} , \tag{21a}$$

a vidíme tedy, že ϕ_4 je (i/c)-násobná hustota výkonu $\boldsymbol{\phi} . \boldsymbol{u}$. Z důvodu, který vysvitne z dalšího výkladu, budeme *čtyřvektor* ϕ_μ nazývat *vlastní hustotou Lorentzovy čtyřsíly*. Čtyřvektory ϕ_μ a J_μ jsou vzájemně ortogonální, neboť

$$\phi_\mu J_\mu = c^{-1} F_{\mu\nu} J_\nu J_\mu \equiv 0 . \tag{22}$$

Poněvadž veličiny ϕ_j tvoří obyčejný vektor $\boldsymbol{\phi}$, tvoří i veličiny f_j dané integrály

$$f_j = \int_V \phi_j \,\mathrm{d}V \tag{23}$$

obyčejný vektor $\boldsymbol{f}$ (úhrnné) *Lorentzovy síly*. (Viz odst. II 4,2.) Z podobného důvodu je veličina $f_{(4)}$ daná integrálem

$$f_{(4)} \equiv \int_V \phi_4 \,\mathrm{d}V = \mathrm{i} c^{-1} \int_V \boldsymbol{\phi} . \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}V \tag{24}$$

obyčejným skalárem. Ale na rozdíl od veličin $\phi_\mu \equiv (\phi_j, \phi_4)$ netvoří jejich objemové integrály f_j a $f_{(4)}$ *čtyřvektor*. Veličiny f_j nejsou prvními třemi složkami ani žádného jiného čtyřvektoru, tj. trojici těchto veličin nelze ani připojením žádné jiné čtvrté veličiny f_4 doplnit na čtveřici složek čtyřvektoru. Dále uvidíme, že za jistých omezujících podmínek se dají složky Lorentzovy síly f_j „upravit" na složky čtyřvektoru F_j (podobně jako u_j na U_j). V obecném případě se však složky Lorentzovy síly $\boldsymbol{f}$, dané obecnými výrazy (23), budou při Lorentzově transformaci chovat velmi složitým způsobem.

Omezíme se proto jen na jednoduchý případ vnější síly působící na malé elektricky nabité tělísko, které koná prakticky translační pohyb v rozlehlém vnějším elektromagnetickém poli. Budeme tedy předpokládat, že rychlost všech elementů

substance tělíska je v daném čase t prakticky stejná (tj. $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}(t)$) a že se i časem pomalu mění, tj. zůstává prakticky konstantní po dobu $\approx l/c$ (l udává řádově lineární rozměry tělíska). Totéž budeme předpokládat o intenzitách $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vnějšího pole uvnitř a v okolí tělíska. Za těchto předpokladů je úhrnná vnější Lorentzova síla dána jednoduchým vzorcem (II 34b), tj. máme

$$\boldsymbol{f} = e(\boldsymbol{E} + c^{-1} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) . \tag{25}$$

Tento vzorec udává sílu z hlediska jistého inerciálního systému S. Je však zřejmé, že uvedené předpoklady jeho platnosti jsou splněny i v každém jiném inerciálním systému. V systému S' proto platí formálně stejný vzorec

$$\boldsymbol{f}' = e(\boldsymbol{E}' + c^{-1} \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{H}') . \tag{25'}$$

Píšeme v něm $e' = e$, neboť už víme, že náboj osamoceného tělíska je invariantní a konstantní. Všecky veličiny ve vzorcích (25) a (25') bereme ovšem v tomtéž světobodě na světočáře našeho tělíska (popř. jeho „středu").

Zvolme si nyní za systém S' okamžitý klidový systém tělíska, takže $\boldsymbol{u}' = 0$ a $f'_j = eE'_j$. V systému S určeném obrácenou transformací (11) pak máme v uvažovaném světobodě $\boldsymbol{u} \equiv (v = \beta c, 0, 0)$. Použijeme-li vzorců (25) a *obrácených* transformačních vzorců (9), budou mít složky f_j vyjádření

$$f_1 = e(E_1 + c^{-1}(u_2 H_3 - u_3 H_2)) = eE_1 = eE'_1 = f'_1 ,$$

$$f_2 = e(E_2 + c^{-1}(u_3 H_1 - u_1 H_3)) =$$

$$= e(\gamma(E'_2 + \beta H'_3) - \beta\gamma(H'_3 + \beta E'_2)) =$$

$$= e\gamma(1 - \beta^2) E'_2 = \gamma^{-1} f'_2 ,$$

a podobně $f_3 = \gamma^{-1} f'_3$.

Tyto vztahy, které lze zapsat také ve tvaru

$$f_\parallel = f'_\parallel , \quad f_\perp = \gamma^{-1} f'_\perp , \tag{26}$$

jsou v plném souhlase s našimi starými vztahy (III 42). Lze je odvodit i z transformace čtyřvektoru ϕ_μ a obecných výrazů (23), ovšem také jen za předpokladů, za nichž platí i vzorce (25), (25').

V okamžitém klidovém systému S' máme totiž $\phi'_4 = 0$, a proto v systému S, v němž je $\boldsymbol{u} \equiv (v, 0, 0)$, dostáváme

$$\phi_1 = \gamma \phi'_1 , \quad \phi_2 = \phi'_2 , \quad \phi_3 = \phi'_3 , \quad \phi_4 = \mathrm{i}\beta\gamma\phi'_1 = \mathrm{i}\beta\phi_1 . \tag{27}$$

Poslední z těchto čtyř rovnic můžeme psát též ve tvaru $\phi_4 = (i/c)\,\boldsymbol{\phi}\,.\,\boldsymbol{u}$, v souhlase s (21a). První tři nyní násobme objemovým elementem $dV = \gamma^{-1}\,dV'$ a integrujme po celém objemu tělíska. Dostaneme tak znovu

$$f_1 = \int_V \phi_1\,dV = \int_{V'} \phi'_1\,dV' = f'_1\,,$$

$$f_2 = \int_V \phi_2\,dV = \gamma^{-1}\int_{V'} \phi'_2\,dV' = \gamma^{-1}f'_2\,,$$

a podobně $f_3 = \gamma^{-1}f'_3$.

V případě obyčejné rychlosti $\boldsymbol{u}$ jsme viděli, že trojici veličin $U_j = \gamma_{(u)}u_j$ lze doplnit čtvrtou veličinou $U_4 = ic\gamma_{(u)}$ na čtveřici složek čtyřvektoru U_μ. Ukažme si nyní, že podobně můžeme postupovat i při Lorentzově úhrnné síle $\boldsymbol{f}$. Použijme opět nejprve vzorce (25) a rozepišme ho na složky; po zavedení složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ podle (6a,b) dává výrazy

$$f_j = e(iF_{j4} + c^{-1}F_{jk}u_k) =$$
$$= ec^{-1}\gamma_{(u)}^{-1}F_{j\nu}U_\nu\,.$$

Vidíme, že veličiny

$$F_j = \gamma_{(u)}f_j = ec^{-1}F_{j\nu}U_\nu$$

představují první tři složky čtyřvektoru

$$F_\mu = ec^{-1}F_{\mu\nu}U_\nu\,. \tag{28}$$

Tento čtyřvektor se nazývá Lorentzova čtyřsíla nebo *Minkowského elektromagnetická čtyřsíla*. Z jeho prostorových složek F_j dostaneme složky f_j obyčejné Lorentzovy síly násobením $\gamma_{(u)}^{-1}$. Všimněme si ještě fyzikálního významu jeho čtvrté složky. Zvolíme-li ve (28) $\mu = 4$ a zavedeme-li zpětně veličiny E_j a u_j, dostáváme

$$F_4 = iec^{-1}\gamma_{(u)}\boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{u} = ic^{-1}\gamma_{(u)}\boldsymbol{f}\,.\,\boldsymbol{u}\,. \tag{28a}$$

Vidíme tedy, že veličina $\gamma_{(u)}^{-1}F_4$ je (i/c)-násobkem výkonu Lorentzovy síly $\boldsymbol{f}$.

Z rovnice (28) také ihned plyne vztah

$$F_\mu U_\mu = 0\,. \tag{29}$$

Lorentzova čtyřsíla je tedy stále ortogonální ke světočáře nabitého tělíska. Je to zřejmě čtyřvektor prostorové povahy (jako čtyřzrychlení), neboť v klidovém systému S' je $F'_4 = 0$.

Nakonec si ukažme, jak lze ke vzorcům (28) pro čtyřvektor F_μ dospět jiným postupem, přímo z rovnic (21) — samozřejmě opět za uvažovaných omezujících před-

pokladů. Dosaďme do (21) podle (20) $J_\nu = \varrho_0 U_\nu$, násobme objemovým elementem dV_0 a integrujme po klidovém objemu našeho tělíska. Dostaneme tak

$$\int_{V_0} \phi_\mu\,dV_0 \doteq c^{-1}F_{\mu\nu}U_\nu \int_{V_0} \varrho_0\,dV_0 = ec^{-1}F_{\mu\nu}U_\nu = F_\mu\,.$$

Integrály na levé straně zřejmě tvoří čtyřvektor, neboť ϕ_μ je čtyřvektor a veličina dV_0 je invariantní (udává *velikost* $d\Sigma$ elementu nadroviny kolmé ke světové trubici tělíska). Z tohoto vyjádření Lorentzovy čtyřsíly F_μ je také vidět, že ϕ_μ je *čtyřsíla* (v systému S) *připadající na jednotku vlastního* (klidového) *objemu tělíska*: $\phi_\mu = dF_\mu/dV_0$. Odtud i název *vlastní hustota čtyřsíly*.

Později uvidíme, že čtyřsíla F_μ, podobně jako čtyřrychlost U_μ a čtyřzrychlení A_μ, má důležitou úlohu při invariantní formulaci pohybových rovnic relativistické mechaniky.

3,2. TENZOR ENERGIE A HYBNOSTI ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Rovnice (II 14) a (II 12) vyjadřující v diferenciálním tvaru zákon zachování hybnosti a energie lze zapsat ve tvaru

$$\partial_k T_{jk} + \partial_4(icw_j) = -\phi_j\,, \tag{30}$$

$$\partial_k(ic^{-1}S_k) + \partial_4(-h) = -ic^{-1}\boldsymbol{\phi}\,.\,\boldsymbol{u}\,. \tag{31}$$

Na pravých stranách těchto čtyř rovnic stojí složky čtyřvektoru $-\phi_\mu$. Také tvar levých stran naznačuje, že rovnice (30), (31) lze patrně spojit a zapsat společně jako rovnici mezi dvěma čtyřvektory. Jsou vskutku identické se čtyřmi složkami rovnice

$$\partial_\nu T^{(E)}_{\mu\nu} = -\phi_\mu\,, \tag{32}$$

v níž tenzor $T^{(E)}_{\mu\nu}$ je sestrojen takto:

$$T^{(E)}_{\mu\nu} = (4\pi)^{-1}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right). \tag{33}$$

Rozepíšeme-li výraz (33), snadno se přesvědčíme, že pro $\mu = j$ a $\nu = k$ dostáváme složky prostorového tenzoru $T^{(E)}_{jk}$ v plném souhlase s původními vzorci (II 15b) (popř. (II 15*b) z odstavce II 4,3). Podobně potvrdíme, že platí vztahy

$$T^{(E)}_{j4} = icw_j\,,\quad T^{(E)}_{4j} = ic^{-1}S_j \quad T^{(E)}_{44} = -h\,, \tag{34}$$

v nichž w_j, S_j a h jsou určeny vzorci (II 13) a (II 15a) (popř. (II 13*) z odstavce II 4,3).

Platnost rovnice (32) pro tenzor $T^{(E)}_{\mu\nu}$ lze potvrdit přímo takto: Zderivujeme-li výraz v závorce v (33) podle x_ν, dostáváme

$$\partial_\nu T^{(E)}_{\mu\nu} = (4\pi)^{-1}\{F_{\nu\alpha}\partial_\nu F_{\mu\alpha} + F_{\mu\alpha}\partial_\nu F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}\} =$$
$$= (4\pi)^{-1}\{F_{\nu\alpha}\partial_\nu F_{\mu\alpha} - F_{\mu\alpha}\,\partial_\nu F_{\alpha\nu} + \tfrac{1}{2}F_{\beta\alpha}\,\partial_\mu F_{\alpha\beta}\}\,.$$

Nyní můžeme do druhého členu ve svorce dosadit z rovnic (7), v třetím členu přejmenovat sčítací index β na ν a první člen upravit tímto způsobem:

$$F_{\nu\alpha}\,\partial_\nu F_{\mu\alpha} = F_{\alpha\nu}\,\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}F_{\nu\alpha}(\partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\nu\mu})\,.$$

Dospějeme tak k rovnici

$$\partial_\nu T^{(E)}_{\mu\nu} = -c^{-1}F_{\mu\alpha}J_\alpha + (8\pi)^{-1}\,F_{\nu\alpha}(\partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\nu\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\nu})\,.$$

Podle (8) se však výraz v poslední závorce rovná nule a zbývající první člen na pravé straně rovnice je podle (21) právě $-\phi_\mu$.

Z výrazu (33) je zřejmé, že *tensor* $T^{(E)}_{\mu\nu}$ *je symetrický a má nulovou stopu* $T^{(E)}_{\nu\nu} = 0$. Ve všech systémech tedy platí vztahy

$$w_j = c^{-2}S_j\,,\quad h = -T^{(E)}_{44} = T^{(E)}_{jj}\,. \tag{35}$$

Při transformacích typu (V 17) popř. (V 42) se obě trojice veličin $w_j \equiv -\mathrm{i}c^{-1}T^{(E)}_{j4}$ a $S_j \equiv -\mathrm{i}cT^{(E)}_{4j}$ transformují jako trojice složek obyčejných, polárních vektorů a veličina $h \equiv -T^{(E)}_{44}$ je skalár, neboť

$$T'_{j4} = C_{j\alpha}C_{4\beta}T_{\alpha\beta} = C_{jk}C_{44}T_{k4} = C_{jk}T_{k4}\,,$$
$$T'_{4j} = C_{jk}T_{4k}\,,$$
$$T'_{44} = C_{4\alpha}C_{4\beta}T_{\alpha\beta} = T_{44}\,.$$

Prostorové vektory $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{S}$ nelze ovšem doplnit na čtyřvektory.

Veličiny $T^{(E)}_{j1}$, $T^{(E)}_{j2}$, $T^{(E)}_{j3}$ představují, jak víme již z odst. II 1,2, trojici složek hustoty proudu j-té složky hybnosti elektromagnetického pole. *Tyto veličiny však netvoří ani obyčejný vektor.* To je pochopitelné, neboť „proudící veličina" není skalár. Při transformacích jako jsou (V 17) popř. (V 42) se veličiny T_{jk} transformují podle rovnic

$$T'_{jk} = C_{j\alpha}C_{k\beta}T_{\alpha\beta} = C_{jl}C_{km}T_{lm}\,.$$

Každá nová složka T'_{jk} je tedy i při těchto transformacích obecně lineární kombinací všech šesti starých složek $T_{lm} = T_{ml}$.

Správně bychom tedy měli tenzor $T^{(E)}_{\mu\nu}$ nazývat *tenzorem hustoty* energie, hybnosti, proudu energie a proudu hybnosti (nebo Maxwellových napětí) elektromagnetického pole. Kvůli stručnosti se mu však říká prostě *tenzor energie a hybnosti.*

3,3. ÚHRNNÁ ENERGIE A HYBNOST ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Všimněme si nyní vlastností objemových integrálů ze složek tenzoru $T^{(E)}_{\mu\nu}$. V odst. II 1,2 jsme viděli, že rovnice (II 14) a (II 12), tj. nynější rovnice (32), obsahují zákony zachování úhrnné energie a hybnosti, ale obecně nikoliv jen pro elektromagnetické pole. V soustavě obsahující elektricky nabité hmotné částice se elektromagnetická energie a hybnost může měnit v energii a hybnost neelektrického původu i obráceně.

Předpokládejme nejprve, že v uvažované soustavě popř. v uvažované části prostoru je trvale $\varrho(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$. Pak máme také $J_\nu \equiv 0$, $\phi_\nu \equiv 0$ a podle (32)

$$\partial_\nu T^{(E)}_{\mu\nu} = 0\,. \tag{32a}$$

Je-li kromě toho tenzor $T^{(E)}_{\mu\nu}$ sám v každém čase t od nuly různý jen uvnitř V, jsou podle věty z odst. V 4,6 objemové integrály

$$\int_V T^{(E)}_{\mu 4}\,\mathrm{d}V \equiv \mathrm{i}cP^{(E)}_\mu \tag{36}$$

nezávislé na t a tvoří čtyřvektor. Reálný čtyřvektor $P^{(E)}_\mu$ má podle (34) složky

$$P^{(E)}_j = \int_V w_j\,\mathrm{d}V = p^{(E)}_j \tag{36a}$$

a

$$P^{(E)}_4 = \mathrm{i}c^{-1}\int_V h\,\mathrm{d}V = \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E}^{(E)} \tag{36b}$$

Vidíme tedy, že elektromagnetická hybnost $\boldsymbol{p}^{(E)}$ a (i/c)-násobná elektromagnetická energie $\mathscr{E}^{(E)}$ *tvoří za uvedených předpokladů* konstantní *čtyřvektor* $P^{(E)}_\mu$, který nazýváme *čtyřhybností* daného elektromagnetického pole. Nadále, dokud se nám nevyskytne energie a hybnost jiného než elektromagnetického původu, budeme index (E) u symbolů $P^{(E)}_\mu$, $\boldsymbol{p}^{(E)}$, $\mathscr{E}^{(E)}$ a $T^{(E)}_{\mu\nu}$ vynechávat.

Elektromagnetické pole, v němž tenzor $T_{\mu\nu}$ splňuje uvedené podmínky, lze vytvořit např. tak, že světlomet, laser nebo radarová antena vyšle krátký signál (vlnové klubko) do prázdného prostoru. Je-li v takovém klubku směr $\mathbf{e}$ hustoty proudu energie $\boldsymbol{S}$ prakticky konstantní (podobně jako v rovinné vlně), platí vztahy $\boldsymbol{S} = c^2\boldsymbol{w} = ch\mathbf{e}$ a $\boldsymbol{p}$ lze vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{p} = c^{-1}\mathscr{E}\mathbf{e}\quad(\mathbf{e}^2 = 1)\,. \tag{37}$$

Čtyřvektor P_μ má pak nulovou velikost a splňuje invariantní rovnici

$$P_\mu P_\mu = 0\,. \tag{38}$$

Tvoří-li veličiny P_μ čtyřvektor, transformují se $(p_j, c^{-2}\mathscr{E})$ stejně jako $(\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}t)$. Při speciální Lorentzově transformaci (11) se pak hybnost a energie transformují takto:

$$p_1' = \gamma(p_1 - vc^{-2}\mathscr{E}), \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = p_3, \quad \mathscr{E}' = \gamma(\mathscr{E} - vp_1). \tag{39}$$

Lze-li $\boldsymbol{p}$ vyjádřit podle (37), platí obdobný výraz i pro $\boldsymbol{p}'$ a rovnice (39) pak vedou na vztahy

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}\gamma(1 - \beta e_1), \tag{39a}$$

$$e_1' = \frac{e_1 - \beta}{1 - \beta e_1}, \quad e_2' = \frac{e_2}{\gamma(1 - \beta e_1)}, \quad e_3' = \frac{e_3}{\gamma(1 - \beta e_1)}. \tag{39b}$$

Je snadné se přesvědčit, že $e_j' e_j' = e_j e_j = 1$.

Vztah (39b) mezi směry $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}'$ postupu světelného signálu v systému S a S′ představuje relativistickou teorii aberace. (Srovnejte (39b) též se vztahy mezi e_j a e_j' z Ú IV 2.) V odst. 4 odvodíme transformační vzorce (39b) ještě jiným způsobem. Také k důležitému vzorci (39a) se ještě vrátíme.

Zcela jiné vlastnosti než energie $\mathscr{E}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ „světelného signálu" má *elektromagnetická* energie a hybnost Lorentzova elektronu. Tyto veličiny jsme si vypočetli pro izolovaný elektron v rovnoměrném translačním pohybu rychlostí $\boldsymbol{u}$ podle Lorentzovy teorie v odst. II 3,2 (viz vzorce (II 43, 44)). Nyní si je odvodíme tím, že použijeme Lorentzovy transformace.

Nechť je S′ klidovým systémem našeho elektronu, takže $p_j' = 0$ a $\mathscr{E}' = \mathscr{E}_0$. V systému S určeném obrácenou Lorentzovou transformací (11) má pak elektron rychlost $\boldsymbol{u} \equiv (v, 0, 0)$. Kdyby veličiny p_j, $\mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E}$ i nyní tvořily čtyřvektor, mohli bychom použít obrácených vzorců (39) a získat tak pro p_j a $\mathscr{E}$ vyjádření

$$p_1 = \gamma v\mathscr{E}_0/c^2, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \mathscr{E} = \gamma\mathscr{E}_0,$$

čili

$$\boldsymbol{p} = (\mathscr{E}/c^2)\,\boldsymbol{u}, \quad \mathscr{E} = \gamma_{(u)}\mathscr{E}_0.$$

Tyto vzorce však *nesouhlasí s Lorentzovými vzorci* (II 44, 43) *a jsou* skutečně nesprávné, poněvadž je nesprávný předpoklad, z něhož byly odvozeny. Veličiny p_j, $\mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E}$ totiž nyní netvoří čtyřvektor z toho důvodu, že tenzor $T_{\mu\nu}$ nyní nesplňuje rovnici (32a). (Uvnitř elektronu je $\varrho \neq 0$, $\phi_\mu \neq 0$.)

Vzorce (II 44, 43) *jsou správné i v teorii relativity* a lze je odvodit užitím transformace složek tenzoru $T_{\mu\nu}$ a objemového elementu $\mathrm{d}V$ takto: Zapíšeme-li obrácenou transformaci (11), tj. transformaci

$$x_1 = \gamma x_1' - \mathrm{i}\beta\gamma x_4', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \mathrm{i}\beta\gamma x_1' + \gamma x_4'$$

ve tvaru $x_\mu = b_{\nu\mu}x_\nu'$, dává odpovídající transformace tenzoru $T_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu}b_{\beta\nu}T_{\alpha\beta}'$ (za předpokladu, že čárkovaný systém je klidovým systémem elektronu) tyto výrazy pro T_{j4} a T_{44}:

$$T_{14} = \mathrm{i}\beta\gamma^2(T_{11}' - T_{44}'), \quad T_{24} = \mathrm{i}\beta\gamma T_{21}', \quad T_{34} = \mathrm{i}\beta\gamma T_{31}', \quad T_{44} = \gamma^2(T_{44}' - \beta^2 T_{11}').$$

Přitom jsme již použili předpokladu, že v klidovém systému S′ je pole Lorentzova elektronu čistě elektrostatické ($\boldsymbol{H}' = 0$), takže $T_{j4}' = T_{4j}' = 0$. Složky T_{jk}' a T_{44}' nezávisí na t'. Veličiny p_j a $\mathscr{E}$ jsou tedy nyní určeny integrály

$$p_1 = -\mathrm{i}c^{-1}\int T_{14}\,\mathrm{d}V = \beta\gamma c^{-1}\int (h' + T_{11}')\,\mathrm{d}V',$$

$$p_2 = -\mathrm{i}c^{-1}\int T_{24}\,\mathrm{d}V = \beta c^{-1}\int T_{21}'\,\mathrm{d}V',$$

$$p_3 = \beta c^{-1}\int T_{31}'\,\mathrm{d}V', \tag{40a}$$

$$\mathscr{E} = -\int T_{44}\,\mathrm{d}V = \gamma\int (h' + \beta^2 T_{11}')\,\mathrm{d}V', \tag{40b}$$

neboť $\mathrm{d}V = \gamma^{-1}\,\mathrm{d}V'$. Integrace v systému S (podle $\mathrm{d}V$) se ovšem vztahují na celý prostor $t = $ konst. Integrace podle elementů $\mathrm{d}V'$ však můžeme vztáhnout na prostor $t' = $ konst, neboť v systému S′ je pole statické a příspěvky elementů $\mathrm{d}V'$ na t' nezávisí.

V kulově symetrickém elektrostatickém poli klidného elektronu dále platí

$$\int E_1'^2\,\mathrm{d}V' = \int E_2'^2\,\mathrm{d}V' = \int E_3'^2\,\mathrm{d}V' = \frac{1}{3}\int \boldsymbol{E}'^2\,\mathrm{d}V',$$

$$\int E_j'E_k'\,\mathrm{d}V' = 0 \quad (j \neq k).$$

Proto máme

$$\int T_{21}'\,\mathrm{d}V' = -(4\pi)^{-1}\int E_2'E_1'\,\mathrm{d}V' = 0,$$

$$\int T_{31}'\,\mathrm{d}V' = 0,$$

$$\int T_{11}'\mathrm{d}V' = (4\pi)^{-1}\int (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}'^2 - E_1'^2)\,\mathrm{d}V' = \tfrac{1}{3}\mathscr{E}_0,$$

neboť

$$\mathscr{E}_0 = \int h'\,\mathrm{d}V' = (8\pi)^{-1}\int \boldsymbol{E}'^2\,\mathrm{d}V'.$$

Po dosazení do (40b) a (40a) tedy dostáváme

$$\mathscr{E} = \gamma(1 + \tfrac{1}{3}\beta^2)\,\mathscr{E}_0\,,$$

$$p_1 = \tfrac{4}{3}\gamma(\mathscr{E}_0/c^2)\,v\,, \quad p_2 = p_3 = 0\,,$$

v souhlase se starými Lorentzovými vzorci (II 43, 44).

3,4. PROBLÉM STABILITY ELEKTRONU. KOHEZNÍ SÍLY A KOHEZNÍ ENERGIE

Z kapitoly II víme, že elektron, na jehož nábojovou substanci by působily jen síly elektromagnetické povahy, by nebyl útvarem stabilním a schopným trvalé existence. Ukážeme si nyní, jak je možno elektron „stabilizovat" zavedením zvláštních „kohezních sil", které také působí na elementy substance elektronu a jsou v rovnováze s odpudivými silami elektrickými. Uvidíme přitom, že těmto silám odpovídá také jistá energie a hybnost elektronu a že úplná (elektromagnetická plus kohezní) hybnost a (i/c)-násobná energie takového stabilizovaného elektronu už automaticky tvoří čtyřvektor.

Podmínku rovnováhy sil působících na elementy substance elektronu je možno vyjádřit invariantní čtyřvektorovou rovnicí

$$\phi_\mu^{(E)} + \phi_\mu^{(K)} = 0\,. \tag{41}$$

Čtyřvektor $\phi_\mu^{(E)}$ je vlastní hustota Lorentzovy čtyřsíly a $\phi_\mu^{(K)}$ je analogická *vlastní hustota kohezní čtyřsíly*. Veličiny $\phi_j^{(K)}$ jsou pak složky *hustoty kohezní síly*. V analogii s vyjádřením (32) pro $\phi_\mu^{(E)}$ předpokládejme, že také $\phi_\mu^{(K)}$ je možno vyjádřit pomocí symetrického tenzoru kohezní energie a hybnosti $T_{\mu\nu}^{(K)}$ ve tvaru

$$\phi_\mu^{(K)} = -\partial_\nu T_{\mu\nu}^{(K)}\,. \tag{42}$$

Dosazením z (32) a (42) do (41) pak dostáváme pro *úplný tenzor energie a hybnosti*

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(E)} + T_{\mu\nu}^{(K)} \tag{43}$$

rovnici

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0\,. \tag{44}$$

Úplná energie $\mathscr{E}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ Lorentzova elektronu (elektromagnetická + kohezní) jsou nyní dány integrály

$$\mathscr{E} = \int(-T_{44})\,\mathrm{d}V \tag{45a}$$

a

$$p_j = -\mathrm{i}c^{-1}\int T_{j4}\,\mathrm{d}V \tag{45b}$$

ze složek úplného tenzoru (43).

Předpokládáme-li, že v klidovém systému S' je $T'_{j4} = T'_{4j} = 0$, a složky T'_{jk}, T'_{44} nezávisí na t', máme

$$p'_j = 0\,, \quad \mathscr{E}' = -\int T'_{44}\,\mathrm{d}V' = \mathscr{E}_0 = \text{konst}\,. \tag{46}$$

V systému S, v němž se elektron pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u} \equiv (v, 0, 0)$, dostaneme v analogii s (40a,b)

$$p_1 = \beta\gamma c^{-1}(\mathscr{E}_0 + \int T'_{11}\,\mathrm{d}V')\,,$$

$$p_2 = \beta c^{-1}\int T'_{21}\,\mathrm{d}V'\,,$$

$$p_3 = \beta c^{-1}\int T'_{31}\,\mathrm{d}V'\,, \tag{47a}$$

$$\mathscr{E} = \gamma\left(\mathscr{E}_0 + \beta^2\int T'_{11}\,\mathrm{d}V'\right). \tag{47b}$$

V klidovém systému elektronu však *nyní platí pro všechny složky* T'_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ rovnice

$$\int T'_{jk}\,\mathrm{d}V' = 0 \tag{48}$$

(tzv. Laueho „podmínky stability"). Integrály v (48) se ovšem vztahují na celý prostor $t' =$ konst, tak jako ve vzorcích (47a,b). Vztahy (48) lze odvodit takto: Jelikož $\partial'_\nu T'_{j\nu} = \partial'_l T'_{jl} = 0$, můžeme psát

$$\int_{V'} T'_{jk}\,\mathrm{d}V' = \int_{V'}(T'_{jk} + x'_k\,\partial'_l T'_{jl})\,\mathrm{d}V' = \int_{V'}\partial'_l(x'_k T'_{jl})\,\mathrm{d}V' = \int_{\sigma'} x'_k T'_{jl} N'_l\,\mathrm{d}\sigma'\,.$$

Uzavřená, v systému S' pevná plocha σ' ohraničuje objem V' a N'_l jsou složky jednotkového vektoru ve směru vnější normály k elementu $\mathrm{d}\sigma'$. Rozšíříme-li integrační obor V' na celý prostor, leží plocha σ' ve všech směrech nekonečně daleko od středu elektronu. *Vně elektronu* je $\phi_\mu^{(K)} = 0$ a můžeme tedy předpokládat rovněž $T_{\mu\nu}^{(K)} = 0$. Při $r' \to \infty$ pak platí odhad $T'_{jk} = T'^{(E)}_{jk} \approx E'_j E'_k \approx r'^{-4}$. Integrál po ploše σ' se tedy blíží k nule a z toho plynou rovnice (48).

Jejich použitím se vzorce (47a,b) zjednodušují a nabývají tvaru

$$\boldsymbol{p} = \gamma_{(u)}(\mathscr{E}_0/c^2)\,\boldsymbol{u}\,, \quad \mathscr{E} = \gamma_{(u)}\mathscr{E}_0\,, \tag{49}$$

$u \equiv (v, 0, 0)$. Stejné vzorce však platí, jsou-li veličiny $P_\mu \equiv (p_j, ic^{-1}\mathscr{E})$ složkami čtyřvektoru. Čtyřvektorový charakter integrálů

$$P_\mu = -ic^{-1} \int T_{\mu 4}\, dV \tag{50}$$

ze složek úplného tenzoru (43) splňujícího rovnice (44) ostatně nyní plyne i z obecné věty z odst. V 4,6, a to i za obecnějších předpokladů než jsou ty, které jsme činili při odvození vzorců (49). Nemusí existovat inerciální systém S′, v němž je elektromagnetické pole elektronu polem čistě elektrostatickým. Použitelný klidový systém S′ je dán tím, že v něm je $p'_j = 0$.

Uvedená teorie stabilního Lorentzova elektronu, kterou poprvé formuloval Poincaré [29], je zatím jen prázdným obecným schématem. Hotová konkrétní teorie totiž musí poskytnout pro tenzor $T^{(K)}_{\mu\nu}$ i pro klidovou hustotu náboje ϱ_0 explicitní vyjádření v jistých veličinách splňujících invariantní diferenciální rovnice; jejich kulově symetrické, statické řešení v klidovém systému S′ určí i konkrétní tvar závislosti hustoty ϱ_0 a velikosti hustoty kohezní síly $\phi'^{(K)}$ na vzdálenosti r' od středu elektronu. S některými návrhy na splnění takového programu (tzv. klasické teorie elektronu) se seznámíme později (viz odst. VII 4,3).

4. ROVINNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA

Invariantní zákony relativistické elektrodynamiky umožňují podat popis dané rovinné elektromagnetické vlny z hlediska různých inerciálních systémů a tím zároveň odvodit přesné relativistické vztahy vyjadřující jev Dopplerův, aberaci světelného paprsku a podobné jevy.

4,1. VLNOVÝ ČRYŘVEKTOR

Mějme rovinnou, lineárně polarizovanou, harmonickou elektromagnetickou vlnu, která vůči inerciálnímu systému S postupuje rychlostí c ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{N} \equiv (N_j)$, a má *v tomto systému* frekvenci ν a vlnovou délku $\lambda = c/\nu$. Intenzity pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vyjádříme vzorci

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin 2\pi\nu[t - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{x}]\,,$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{H}_0 \sin 2\pi\nu[t - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{x}]\,. \tag{51}$$

Z Maxwellových rovnic s $\boldsymbol{J} = 0$, $\varrho = 0$ pak plynou pro konstantní amplitudové vektory $\boldsymbol{E}_0$ a $\boldsymbol{H}_0$ známé podmínky

$$\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{H}_0 = 0\,,$$
$$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{H}_0 = -\boldsymbol{E}_0\,, \quad \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{H}_0\,. \tag{52}$$

Vektory $\boldsymbol{E}_0$ a $\boldsymbol{H}_0$ jsou tedy stejně velké a kolmé k jednotkovému vektoru $\boldsymbol{N}$ i navzájem. V pořadí $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{N}$ tvoří tyto vektory pravotočivý trojhran. Vlnoplochy, tj. plochy konstantní fáze v daném čase t jsou roviny kolmé k vektoru $\boldsymbol{N}$. Směr $\boldsymbol{N}$, kolmý k vlnoplochám, je shodný i se směrem postupu energie ve vlně. (Hustota proudu energie $\boldsymbol{S} = ch\boldsymbol{N}$, takže směr světelného paprsku $\boldsymbol{e} \equiv S^{-1}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}$.)

Přejděme nyní k novému inerciálnímu systému S′ speciální Lorentzovou transformací (11). Utvoříme-li ze složek intenzit E_j, H_j vlny (51) lineární kombinace E'_j, H'_j podle vzorců (9) a pak fázi vlny vyjádříme jako funkci čárkovaných souřadnic tím, že použijeme obrácených formulí (11), dostaneme pro $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}', t')$ a $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}', t')$ výrazy

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_0 \sin 2\pi\nu'[t' - c^{-1}\boldsymbol{N}' \,.\, \boldsymbol{x}']\,,$$
$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}'_0 \sin 2\pi\nu'[t' - c^{-1}\boldsymbol{N}' \,.\, \boldsymbol{x}']\,; \tag{51'}$$

v nich jsou složky vektorů $\boldsymbol{E}'_0$, $\boldsymbol{H}'_0$ utvořeny ze složek vektorů $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ podle vzorců (9), a dále

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \beta N_1)\,, \tag{53a}$$

$$N'_1 = \frac{N_1 - \beta}{1 - \beta N_1}\,, \quad N'_2 = \frac{N_2}{\gamma(1 - \beta N_1)}\,, \quad N'_3 = \frac{N_3}{\gamma(1 - \beta N_1)}\,. \tag{53b}$$

Snadno se ověří, že veličiny N'_j splňují podmínku $\boldsymbol{N}'^2 \equiv N'_j N'_j = N_j N_j = 1$.
Vzorce (53a,b) jsou tvarem shodné se vzorci (39a,b). Lze se také snadno přesvědčit, že mezi vektory $\boldsymbol{E}'_0$, $\boldsymbol{H}'_0$ a $\boldsymbol{N}'$ platí vztahy

$$\boldsymbol{N}' \,.\, \boldsymbol{E}'_0 = \boldsymbol{N}' \,.\, \boldsymbol{H}'_0 = 0\,,$$
$$\boldsymbol{N}' \times \boldsymbol{H}'_0 = -\boldsymbol{E}'_0\,, \quad \boldsymbol{N}' \times \boldsymbol{E}'_0 = \boldsymbol{H}'_0\,, \tag{52'}$$

které mají týž tvar jako (52). Také je $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{N}'$, neboť $\boldsymbol{S}' = ch'\boldsymbol{N}'$.

Formální shoda vztahů (51) a (51′) i (52) a (52′) nepřekvapuje, neboť oba systémy souřadnic jsou fyzikálně rovnocenné. V obou platí Maxwellovy rovnice ve stejném tvaru; a *rovinná, lineárně polarizovaná, harmonická vlna* se musí takovou jevit ve všech inerciálních systémech.

Rovnici

$$2\pi\nu[t - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{x}] = 2\pi\nu'[t' - c^{-1}\boldsymbol{N}' \,.\, \boldsymbol{x}']\,, \tag{54}$$

vyjadřující invarianci fáze naší vlny, lze zapsat ve tvaru

$$k_\alpha x_\alpha = k'_\alpha x'_\alpha \,. \tag{55}$$

Veličiny k_α definované vztahy

$$k_\alpha \equiv \left(\frac{\omega}{c} N_j,\ \frac{\omega}{c}\,\mathrm{i}\right), \quad \omega = 2\pi\nu \,, \tag{56}$$

tvoří tedy čtyřvektor, a to čtyřvektor nulové velikosti, neboť $k_\alpha k_\alpha = 0$. Nazýváme jej *vlnovým čtyřvektorem*. Jeho prostorové složky k_j tvoří obyčejný *vlnový vektor* $\boldsymbol{k} = (\omega/c)\,\boldsymbol{N}$. Veličiny $(k_j, \omega/c^2)$ se transformují stejně jako $(\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}t)$. Z toho a z (56) můžeme znovu snadno odvodit transformační vzorce (53a,b). Jiný příklad na transformaci kinematických parametrů světelné vlny (kulové) viz v Ú 3.

4,2. ABERACE PAPRSKU A DOPPLERŮV JEV

Při rozboru nových vztahů mezi kinematickými parametry naší rovinné světelné vlny v systémech S a S′ bude zajímavé porovnání se starými vztahy, které jsme odvodili v odst. III 1 použitím Galileiho transformace (III 1). Při Galileiho transformaci platily především vztahy (III 5a), tj. směr normály k vlnoplochám byl v obou systémech stejný, nyní máme místo (III 5a) vztahy (53b), tedy $N'_j \neq N_j$. Roviny, v nichž vymizí intenzity pole v čase t = konst, nyní nejsou rovnoběžné s rovinami, v nichž totéž nastane v čase t' = konst. To samozřejmě souvisí s relativností pojmu současnosti.

K vysvětlení jevu aberace při Galileiho transformaci bylo nutno dovolávat se toho, že směr $\boldsymbol{e}'$ proudu světelné energie vůči pohybujícímu se systému S′ nesouhlasí se směrem $\boldsymbol{N}'$ normály k vlnoplochám (viz (III 7)). Nyní je situace jednodušší, neboť ve všech systémech je $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{N}$. Aberace α světelného paprsku je tedy určena vztahy (53b), které se shodují se vztahy (39b) — a ty opět se vztahy mezi vektory $\boldsymbol{e}'$ a $\boldsymbol{e}$ v Ú IV 2, kde jsme z nich také odvodili přesný relativistický vzorec pro tg α.

Při transformaci (III 1) platily dále vztahy (III 6). Fázové rychlosti c' a c byly různé, ale pravá vlnová délka (prakticky ovšem neměřitelná — viz Ú III 9, 17) byla stejná: $\lambda' = c'/\nu' = c/\nu = \lambda$. Zřejmě proto, že současnost a vzdálenost byly pojmy absolutní. Nyní však máme $c' = c$, a podle (53a) pak ovšem

$$\lambda' = c/\nu' = \lambda\gamma^{-1}(1 - \beta N_1)^{-1} \neq \lambda \,. \tag{57}$$

Vzorce (53a) nebo (57) jsou *přesným relativistickým vyjádřením Dopplerova jevu.*

Je-li $\boldsymbol{N} \equiv (1, 0, 0)$, tj. $\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{v} \equiv (v, 0, 0)$, dostáváme z (53a)

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \beta) = \nu[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{\frac{1}{2}} \,.$$

To je přesný relativistický vzorec vyjadřující tzv. longitudinální (podélný) Dopplerův jev. Při $\beta \ll 1$ platí $\nu' \doteq \nu(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2)$.

Je-li $N_1 = 0$, tj. $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{v}$ dává vzorec (53a) $\nu' = \gamma\nu$. Tento vliv (pohybu měřiče na frekvenci vlny), kterému se říká transverzální (příčný) Dopplerův jev, je z hlediska pozorovatele v systému S způsoben dilatací času v systému S′. Pozorovatel v S′, měřící frekvenci ν', se totiž pohybuje kolmo k paprsku $\boldsymbol{N}$ a jeho místem (např. počátkem O') tedy projde za dobu $\Delta t = 1$ s stejný počet vlnoploch určité fáze jako místem pozorovatele v S (např. počátkem O). Je-li přesto frekvence ν' větší než ν, může to být (podle pozorovatele v S) jedině tím, že hodiny umístěné v O' jdou pomaleji než hodiny v systému S. Z hlediska pozorovatele v S′ je výklad toho jevu složitější. Podle (53b) je $N'_1 = -\beta$. Paprsek $\boldsymbol{N}'$ tedy je poněkud skloněn proti směru osy $1'$. Pozorovatel v O se vůči S′ pohybuje také proti směru osy $1'$ a už proto může naměřit frekvenci $\nu < \nu'$. Při přesném výpočtu ν použije ovšem pozorovatel v S′ obrácené formule (53a), která zní

$$\nu = \nu'\gamma(1 + \beta N'_1) \,. \tag{53'a}$$

Dosazením $N'_1 = -\beta$ dostaneme tak správnou hodnotu $\nu = \nu'\gamma(1 - \beta^2) = \nu'\gamma^{-1}$. Hodiny v O se sice vůči hodinám systému S′ zpožďují, ale vliv na frekvenci ν tím způsobený (vyjádřený faktorem γ v (53′a)) je překonán (podélným) vlivem, který je vyjádřen faktorem $(1 + \beta N'_1)$. Čistě transverzální Dopplerův jev (při pohybu kolmo k paprsku) se projevuje i při pokusu s rotující obručí (odst. III 3,2).

Pro srovnání nových vzorců se starými z odst. III 3 si nejprve vzorec (53a) zobecníme pro případ, že se systém $\mathrm{S}' \equiv \mathrm{S}_{(P)}$ pohybuje vůči S rychlostí $\boldsymbol{u}_{(P)}$ *obecného směru*. Podle (IV 64b) platí pak místo (53a) obecně

$$\nu' = \nu\gamma_{(P)}(1 - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{u}_{(P)}) \,. \tag{58}$$

Ve srovnání s odpovídající formulí (III 4a) je v (58) navíc faktor $\gamma_{(P)}$, který souvisí s tím, že frekvence ν' je nyní měřena na hodinách klidných v systému S′, kdežto frekvence ν' ve (III 4a) je vyjádřena v „absolutním čase“, jemuž nyní odpovídá čas v systému S.

Kromě systémů S a S′ mějme dále systém $\mathrm{S}'' \equiv \mathrm{S}_{(Z)}$, který se vůči S pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}_{(Z)}$ v libovolném směru. Frekvence ν'' je tedy určena vztahem

$$\nu'' = \nu\gamma_{(Z)}[1 - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{u}_{(Z)}] \,. \tag{59}$$

Vyloučíme-li z rovnic (58) a (59) frekvenci ν, dostáváme

$$\nu' = \nu''\gamma_{(P)}\gamma_{(Z)}^{-1}[1 - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{u}_{(P)}]\,[1 - c^{-1}\boldsymbol{N} \,.\, \boldsymbol{u}_{(Z)}]^{-1} \,. \tag{60}$$

Je-li zdroj světla s *vlastní frekvencí* $\nu_0^\star$ v klidu vůči S″, máme $\nu'' = \nu_0^\star$, a výraz (60) pro ν' pak úplně souhlasí s výrazem pro $\bar{\nu}_{(P)}$ z Ú III 13. Veličiny ν' a $\nu'' = \nu_0^\star$ v (60) mají stejný význam jako veličiny $\bar{\nu}_{(P)}$ a $\nu_0^\star \equiv \bar{\nu}^\star$ v Ú III 13. Ve vzorci (III 12), v němž chybějí faktory $\gamma_{(P)}$ a $\gamma_{(Z)}^{-1}$ jsou frekvence ν^* a $\nu_{(P)}$ vyjádřeny v „absolutním čase" jako ν' v (III 4a). Připomeňme si znovu, že v odst. III 3 byl systém S absolutně klidný. Nyní to může být libovolný, inerciální nebo prakticky inreciální systém, např. i systém pevně spojený se Zemí, který jsme v odst. III 3 označovali S'. Frekvence, jichž nyní používáme, jsou zásadně definovány ve vlastním čase pozorovatele, popř. zdroje světla, a odpovídají proto frekvencím s pruhem z odst. III 3,3. Stojí za námahu promyslet si znovu (z relativistického stanoviska) význam a oprávněnost různých matematických úprav a aproximací používaných v odst. III 3 a v úlohách III 11 – III 13.

4,3. PLANCKOVY-EINSTEINOVY VZTAHY

Rovinná vlna (51) je ovšem idealizací skutečnosti, neboť její úhrnná energie by při konečných (nenulových) amplitudách E_0, H_0 byla nekonečně veliká. Prakticky realizovatelná rovinná vlna zaujímá vždy konečnou oblast v prostoru a je buď poměrně malým výsekem z rozlehlé vlny se zakřivenými vlnoplochami (např. vlny kulové), nebo je to *příčně i podélně ohraničený* „svazek vln", jaký vysílají např. radarové antény, světlomety nebo lasery. Teoreticky lze takový svazek vln (vlnové klubko) sestrojit jako superpozici nekonečných rovinných vln (51) s frekvencemi ležícími v jistém malém intervalu kolem hodnoty ν a se směry postupu ležícími v jistém malém prostorovém úhlu kolem vektoru $\boldsymbol{N}$. Pak se totiž vlnění vně jisté konečné prostorové oblasti interferencí prakticky ruší. V dalším výkladu nebudeme přihlížet k nepřesné monochromatičnosti a paralelnosti vlnového klubka a budeme je pokládat za prakticky harmonickou rovinnou vlnu konečného rozsahu v prostoru. Budeme jí tedy přisuzovat jak určitou frekvenci ν a určitý vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ (resp. vlnový čtyřvektor k_μ), tak určitou konečnou energii $\mathscr{E}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ (popř. čtyřhybnost P_μ). Poněvadž $\mathbf{e} = \boldsymbol{N}$, plyne z (39a) a (53a)

$$\mathscr{E}'/\nu' = \mathscr{E}/\nu \,. \tag{61}$$

To znamená, že ve všech inerciálních systémech platí vztah

$$\mathscr{E} = K\nu \tag{62a}$$

a podle (37) pak také vztah

$$\boldsymbol{p} = K\nu c^{-1}\mathbf{e} = K\lambda^{-1}\boldsymbol{N} \tag{62b}$$

s *konstantou úměrnosti K nezávislou na volbě systému souřadnic.* Rovnice (62a,b) lze zapsat též ve tvaru čtyřvektorové rovnice

$$P_\mu = (2\pi)^{-1}\, K k_\mu \,. \tag{63}$$

Tyto vztahy mají základní důležitost pro kvantovou teorii záření, podle níž světelná vlna frekvence ν a směru postupu $\boldsymbol{N}$ obsahuje vždy celistvý počet světelných kvant (fotonů) s energií

$$\mathscr{E}^{(f)} = h\nu = \hbar\omega \,, \tag{64a}$$

a hybností

$$\boldsymbol{p}^{(f)} = \hbar\boldsymbol{k} = c^{-1}\mathscr{E}^{(f)}\boldsymbol{N} \,. \tag{64b}$$

Konstanta $h = 2\pi\hbar = 6{,}67 \,.\, 10^{-27}$ erg s je nyní *univerzální konstantou* Planckovou. Z teorie relativity sice neplyne ani existence světelných kvant ani univerzálnost Planckovy konstanty, ale teorie relativity není s tímto postulátem v rozporu. Relativistické transformační zákony pro energii a hybnost i pro frekvenci a vlnový vektor světelné vlny právě zaručují invarianci Planckovy konstanty i Planckových-Einsteinových vztahů (64a,b), které lze zapsat ve čtyřvektorovém tvaru

$$P_\mu^{(f)} = \hbar k_\mu \,, \tag{65}$$

$$P_\mu^{(f)} \equiv (\boldsymbol{p}^{(f)}, \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E}^{(f)}) \,.$$

5. INVARIANTNÍ ZÁPIS LORENTZOVÝCH POHYBOVÝCH ROVNIC ELEKTRONU

5,1. POHYBOVÉ ROVNICE A ROVNICE ENERGIE

Přistupujeme k formulaci zákonů relativistické mechaniky hmotných částic. Vyjdeme při tom z Lorentzových přibližných pohybových rovnic (II 46) pro elektron v daném vnějším elektromagnetickém poli, tj. rovnic

$$\mathrm{d}(mu_j)/\mathrm{d}t = f_j \,, \tag{66}$$

v nichž f_j značí složky vnější Lorentzovy síly dané vzorcem (25). Veličiny $u_j(t) = \mathrm{d}x_j(t)/\mathrm{d}t$ jsou složky rychlosti elektronu v systému S; dále je

$$m = m_0\gamma \,, \quad \gamma \equiv \gamma_{(u)} = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \,.$$

Veličina m_0 *je konstanta* charakteristická pro danou částici (celková klidová setrvačná hmota elektronu).

Ukažme nejprve, z jakých předpokladů lze v rámci teorie relativity vyvodit platnost rovnic (66) v libovolném inerciálním systému. Stačí k tomu předpokládat, že v inerciálním systému S', který je okamžitým klidovým systémem částice, platí v uvažovaném okamžiku t' rovnice Newtonova tvaru

$$m_0 a'_j = eE'_j \,. \tag{67}$$

V systému S, určeném obrácenou transformací (11), má pak naše hmotná částice (v příslušném čase t) rychlost $u_j = (v, 0, 0)$. Složky zrychlení a_j souvisí s a'_j vztahy (IV 63a), jejichž obrácení dává

$$a'_1 = \gamma^3 a_1 , \quad a'_2 = \gamma^2 a_2 , \quad a'_3 = \gamma^2 a_3 .$$

Použijeme-li dále pro E'_j transformačních vzorců (9), dostaneme z rovnic (67) rovnice

$$\begin{aligned} m_0\gamma^3 a_1 &= eE_1 , \\ m_0\gamma a_2 &= e(E_2 - c^{-1}u_1H_3) , \\ m_0\gamma a_3 &= e(E_3 + c^{-1}u_1H_2) . \end{aligned}$$

Stejné rovnice však dostaneme i rozepsáním rovnic (66) při $u_j = (u_1, 0, 0)$ a $dm_0/dt = 0$.

Rovnice Newtonova tvaru (67) jsou samozřejmě důsledkem Lorentzových rovnic (66) při $u_j \to 0$. Vidíme však, že v rámci teorie relativity lze také obráceně rovnice (66) pokládat za důsledek platnosti rovnic (67) v klidovém systému částice.

Nyní je již zřejmé, že rovnice (66) mezi složkami obyčejných vektorů musí být součástí (popř. důsledkem) nějaké širší soustavy rovnic prostoročasově tenzorových. Těmito rovnicemi jsou čtyřvektorové *pohybové rovnice Minkowského*. Abychom je nalezli, stačí znásobit rovnice (66) faktorem $\gamma_{(u)} = dt/d\tau$ a zapsat je ve tvaru

$$d(m_0\gamma u_j)/d\tau = \gamma f_j , \quad \gamma \equiv \gamma_{(u)} ,$$

neboli

$$d(m_0U_j)/d\tau = F_j .$$

Tyto tři rovnice jsou totiž prvními třemi složkami *čtyřvektorové rovnice*

$$d(m_0U_\alpha)/d\tau = F_\alpha . \tag{68}$$

Její čtvrtá složka dává s použitím vzorce (28a) rovnici

$$\gamma\, d(m_0 ic\gamma)/dt = (i/c)\,\gamma \boldsymbol{f} . \boldsymbol{u} ,$$

čili

$$d(mc^2)/dt = \boldsymbol{f} . \boldsymbol{u}. \tag{69}$$

Z významu výrazu na pravé straně této rovnice lze soudit, že její levá strana představuje časovou změnu kinetické energie částice. Skutečně, pro $u \ll c$, dostáváme

$$mc^2 = m_0c^2\gamma_{(u)} \doteq m_0c^2 + \tfrac{1}{2}m_0\boldsymbol{u}^2 ,$$

a při $dm_0/dt = 0$ tedy

$$d(mc^2)/dt \doteq d(\tfrac{1}{2}m_0\boldsymbol{u}^2)/dt .$$

Lorentzův předpoklad o časové konstantnosti klidové hmoty m_0 je už obsažen v Minkowského rovnicích (68). Provedeme-li totiž v (68) naznačenou derivaci podle τ, dostaneme rovnici

$$U_\alpha\, dm_0/d\tau + m_0A_\alpha = F_\alpha ,$$

z níž plyne ihned

$$dm_0/d\tau = 0 , \tag{70}$$

násobíme-li ji U_α a použijeme-li vztahů $U_\alpha U_\alpha = -c^2$, $U_\alpha A_\alpha = 0$, $U_\alpha F_\alpha = 0$.

Minkowského pohybové rovnice (68) pro elektricky nabitou hmotnou částici ve vnějším elektromagnetickém poli lze tedy psát také ve tvaru

$$m_0A_\alpha = F_\alpha . \tag{68a}$$

Je však třeba již na tomto místě poznamenat, že rovnice (70) není obecným fyzikálním zákonem, neboť je vázána na podmínku $F_\alpha U_\alpha = 0$, která je *sice splněna u elektromagnetické* Minkowského čtyřsíly, ale nemusí být obecně (nutně) splněna u všech druhů sil. (Tj. nelze a priori vylučovat existenci sil, jejichž vlivem by se klidová hmota nějaké hmotné částice mohla podél její světočáry měnit.)

Vraťme se nyní k výrazu pro kinetickou energii. Je zřejmé, že Newtonových výrazů $\frac{1}{2}m_0\boldsymbol{u}^2$ (pro kinetickou energii) a $m_0\boldsymbol{u}$ (pro hybnost), lze použít (jako aproximace) pouze při rychlostech $u \ll c$. Při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla je nutno kinetickou energii $\mathscr{E}_{kin}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ vyjádřit přesnými výrazy

$$\mathscr{E}_{kin} = (m - m_0)\, c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) , \tag{71}$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m_0\gamma\boldsymbol{u} , \tag{72}$$

které při $u \to 0$ vymizí, ale při $m_0 > 0$ a $u \to c$ už dávají $\mathscr{E}_{kin} \to \infty$, $p \to \infty$. Elektron proto nikdy nemůže dosáhnout rychlosti světla.

Rovnici (69) sice můžeme s odvoláním na (70) nahradit rovnicí

$$d\mathscr{E}_{kin}/dt = \boldsymbol{f} . \boldsymbol{u} , \tag{69a}$$

ale Minkowského pohybové rovnice (68) ukazují, že v relativistické mechanice je vhodnější operovat s veličinou

$$\mathscr{E} = mc^2 = m_0c^2\gamma = \mathscr{E}_{kin} + m_0c^2 , \tag{73}$$

než s kinetickou energií samotnou. Veličina

$$(i/c)\,\mathscr{E} = m_0 ic\gamma_{(u)} = m_0U_4$$

totiž tvoří se složkami hybnosti $p_j = mu_j = m_0U_j$ čtyřvektor

$$P_\alpha = m_0U_\alpha . \tag{74}$$

Invariantní čtverec jeho velikosti je svázán s klidovou hmotou částice, neboť

$$P_\alpha P_\alpha = m_0^2 U_\alpha U_\alpha = -m_0^2 c^2 \,. \tag{75}$$

Vidíme, že veličina $\mathscr{E}$ vyniká nad kinetickou energií pozoruhodnou a z teoretického hlediska výhodnou formální vlastností. Na druhé straně se ovšem $\mathscr{E}$ liší od $\mathscr{E}_{\text{kin}}$ pouze o „aditivní konstantu". Mohlo by se proto zdát, že z praktického, fyzikálního hlediska není rozdíl mezi $\mathscr{E}$ a $\mathscr{E}_{\text{kin}}$ příliš významný, neboť v Newtonově mechanice byla energie částic vždycky definována jen až na libovolnou aditivní konstantu. Rozhodující a podstatné je však právě to, že „aditivní konstanta" $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$, obsažená v definici (73) relativistické veličiny $\mathscr{E}$, není libovolná, nýbrž je jednoznačně určena klidovou setrvačnou hmotou částice. Kromě toho, jak jsme již poznamenali, není teoretický důvod, aby klidová hmota m_0 nějaké hmotné částice, nebo součet klidových hmot částic tvořících izolovanou mechanickou soustavu, musely být za všech okolností konstantní. Nezná-li klasická, nerelativistická fyzika takové jevy, z toho ještě neplyne, že nejsou možné a neexistují. Je velikou Einsteinovou zásluhou, že opíraje se jen o formální teoretické argumenty, dovedl ve veličině $\mathscr{E}_0$, kterou nazval *klidovou energií volné hmotné částice*, rozpoznat skutečně fyzikálně významnou energii a měl odvahu prohlásit, že musí být možno této „utajené energie" i prakticky využít (tj., že musí být možné proměnit i tuto energii za vhodných experimentálních podmínek v energii jiného druhu, např. v mechanickou práci, nebo kinetickou energii jiné částice, nebo v energii světla apod.). V odst. 8, v němž o této Einsteinově „hypotéze" a předpovědi podrobněji pojednáme, uvidíme, jak vskutku skvěle byla zkušeností potvrzena.

Nyní se ještě vraťme k některým důležitým rovnicím. Ze vzorců (72) a (73) vyplývají mezi $\mathscr{E}$, $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{u}$ velmi důležité a při různých výpočtech často užitečné vztahy

$$\boldsymbol{p} = (\mathscr{E}/c^2)\,\boldsymbol{u}\,, \quad \mathscr{E} = c^2 p/u\,, \quad \boldsymbol{u} = c^2\boldsymbol{p}/\mathscr{E}\,. \tag{76}$$

Z rovnice (75), zapsané v nejobvyklejším tvaru

$$\mathscr{E}^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4\,, \tag{75a}$$

dostáváme pro $\mathscr{E}$, p a m_0 hojně používaná vyjádření

$$\mathscr{E} = c[p^2 + (m_0 c)^2]^{\frac{1}{2}}\,, \tag{77}$$

$$p = c^{-1}[\mathscr{E}^2 - (m_0 c^2)^2]^{\frac{1}{2}}\,, \tag{78}$$

$$m_0 = c^{-2}[\mathscr{E}^2 - (cp)^2]^{\frac{1}{2}} = c^{-1}(-P_\alpha P_\alpha)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{79}$$

Jiné vyjádření pro m_0 získáme, násobíme-li rovnici (74) čtyřrychlostí U_α a užijeme vztahu $U_\alpha U_\alpha = -c^2$:

$$m_0 = -c^{-2} P_\alpha U_\alpha\,. \tag{79a}$$

Je-li $p^2 \ll (m_0 c)^2$, platí přibližně

$$\mathscr{E} \doteq m_0 c^2 + \tfrac{1}{2}p^2/m_0 \tag{77a}$$

a tedy pro kinetickou energii známý nerelativistický výraz $\frac{1}{2}p^2/m_0$. Je-li obráceně $p^2 \gg (m_0 c)^2$, máme

$$\mathscr{E} \doteq cp + \tfrac{1}{2}m_0^2 c^3/p\,. \tag{77b}$$

Ve vztahu (77) můžeme přejít k limitě $m_0 \to 0$ a získat tak speciální vztah $\mathscr{E} = cp$. Ze vzorců (72) a (73) je však vidět, že mají-li v limitě $m_0 \to 0$ zůstat veličiny $\mathscr{E}$ a p konečnými, musí být tento limitní přechod doprovázen limitním přechodem $u \to c$, $\gamma \to \infty$. Hmotná částice s nulovou „klidovou hmotou" ($m_0 = 0$) a s konečnou, nenulovou energií $\mathscr{E}$ i hybností p se tedy musí pohybovat rychlostí světla. Hybnost takové částice můžeme vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{p} = p\mathbf{e} = c^{-1}\mathscr{E}\mathbf{e}\,, \quad \mathbf{e}^2 = 1\,, \tag{80}$$

formálně shodným s vyjádřením (37) hybnosti prakticky jednosměrného světelného signálu popř. vlnového klubka. Výraz (80) se shoduje i s druhým z výrazů (64b) pro hybnost $\boldsymbol{p}^{(f)}$ světelného kvanta (fotonu). *Z hlediska vztahu mezi energií a hybností je tedy foton hmotnou částicí s nulovou „klidovou hmotou"*. Jinou takovou známou elementární částicí je neutrino. Obě tyto částice jsou elektricky neutrální. Není známá žádná hmotná částice s nulovou klidovou hmotou a nenulovým elektrickým nábojem.

Poznamenejme, že *pro částici s nulovou „klidovou hmotou" vlastně neexistuje klidový systém*. Pojem „klidová hmota" pro takovou částici je tedy definován jen čistě formálně na základě porovnání speciálního vztahu $\mathscr{E} = cp$ s obecným vztahem (77). Setrvačnou hmotu m takové částice v libovolném systému S můžeme definovat rovnicí $m = \mathscr{E}/c^2 = p/c$. Podle (71) je při $m_0 = 0$ také $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{kin}}$, tedy celá energie $\mathscr{E}$ je „kinetické povahy".

Nakonec ještě poznámku k *rovnici energie* (69). Víme, že v Newtonově mechanice je rovnice energie (69a) důsledkem pohybových rovnic $m_0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ a předpokladu $\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}t = 0$. Proto nás nepřekvapí, že také rovnici (69) můžeme odvodit z rovnic (66) a (70). Postup odvození je ostatně stejný jako v Newtonově mechanice: Rovnice (66) násobíme u_j a tím získáme rovnici

$$\boldsymbol{u}\,.\,\mathrm{d}(m_0\gamma_{(u)}\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}\,.\,\boldsymbol{u}\,,$$

jejíž pravá strana již souhlasí s pravou stranou (69). Její levou stranu lze pak snadno upravit na tvar levé strany rovnice (69), použijeme-li vztahu (70).

S obecnějším případem, v němž pro Minkowského čtyřsílu F_α neplatí ani vyjádření (28), ani vztah (29), a v němž tedy neplatí ani rovnice (70), se setkáme v odstavcích 6 a 7. Tam také uvidíme, že čtvrtá z Minkowského pohybových rovnic je nutná k určení $\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau$ a má vždy význam rovnice energie. Ale její interpretace je při $\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau \neq 0$ složitější, neboť potom ani časová změna energie $\mathscr{E}$, ani časová změna kinetické energie není dána pouze výkonem síly $\boldsymbol{f}$.

5,2. POINCARÉŮV ELEKTRON VE VNĚJŠÍM POLI

Zavedeme-li do výrazů (72) a (73) místo m_0 veličinu $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$, můžeme je zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{p} = (\mathscr{E}_0/c^2)\,\gamma \boldsymbol{u}\,, \quad \mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \gamma\,,$$

tj. ve tvaru shodném se vzorci (49) pro součet elektromagnetické a kohezní energie a hybnosti Poincaréova elektronu. Z toho sice ještě neplyne, že teoreticky definovaná veličina $\mathscr{E}_0$ ve vzorcích (49) musí být identická s veličinou $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$ určenou z experimentálně nalezené klidové setrvačné hmoty elektronu, ale zřejmě existuje taková možnost, tj. možnost, že veškerá *„setrvačnost elektronu" je určena jeho* elektromagnetickou a kohezní *energií.*

O veličinách P_μ určených integrály (50) jsme si ukázali, že tvoří čtyřvektor – ale zatím jen v případě *volného* Poincaréova elektronu, kdy jsou konstantní. Naproti tomu o veličinách (74) předpokládáme, že tvoří (popř. požadujeme, aby tvořily) čtyřvektor i tehdy, když je uvažovaná, elektricky nabitá hmotná částice ve vnějším elektromagnetickém poli, tj. i když se tyto veličiny mění s vlastním časem částice podle rovnic (68). Vzniká tedy zajímavý a důležitý úkol zobecnit i Poincaréovu teorii pro elektron ve vnějším poli, definovat v takové situaci jeho *vlastní* (elektromagnetickou + kohezní) *energii i hybnost* a vyšetřit vlastnosti těchto veličin.

O vnějším elektromagnetickém poli budeme předpokládat, že je vzbuzeno vzdálenými náboji a proudy a že složky jeho intenzit $F^{(\mathrm{vn})}_{\mu\nu}$ jsou v dostatečně širokém okolí našeho elektronu prakticky konstantní a velmi malé proti maximálním hodnotám, jichž nabývají složky $F^{(\mathrm{vl})}_{\mu\nu}$ intenzit vlastního pole našeho elektronu. (Při povrchu Lorentzova elektronu s $e \doteq 5 \,.\, 10^{-10}$ abs. j., $r_0 = 10^{-13}$ cm, je $|\boldsymbol{E}^{(\mathrm{vl})}| = E^{(\mathrm{vl})}_{\max} \doteq$ $\doteq 1{,}5 \,.\, 10^{18}$ V cm^{-1}.) Pak můžeme očekávat, že zrychlení elektronu bude malé a že vlastní pole elektronu bude v každém okamžiku t prakticky stejné jako pole volného elektronu v *rovnoměrném* translačním pohybu rychlostí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$.

Tenzor $T^{(\mathrm{E})}_{\mu\nu}$, utvořený podle vzorce (33) z tenzoru $F_{\alpha\beta} = F^{(\mathrm{vn})}_{\alpha\beta} + F^{(\mathrm{vl})}_{\alpha\beta}$, lze rozdělit na tři části: Vlastní, vnější a smíšenou, obsahující jen součiny vlastního a vnějšího pole. O tenzoru $T^{(\mathrm{K})}_{\mu\nu}$ kohezní energie a hybnosti, který je nenulový pouze uvnitř elektronů, budeme ovšem předpokládat, že má v dostatečně velkém okolí našeho elektronu pouze vlastní část.

Složky čtyřhybnosti elektronu P_μ bychom podle (50) měli definovat jako integrály z *vlastní* části složek $T_{\mu4} = T^{(\mathrm{E})}_{\mu4} + T^{(\mathrm{K})}_{\mu4}$ po celém prostoru. Ale protože tyto veličiny při $r > r_0$ velmi rychle klesají k nule, můžeme se omezit na vhodně zvolené okolí elektronu. Proto postupujeme takto: Kolem *pevného bodu* $\boldsymbol{x}^*$, jímž prochází střed našeho elektronu v čase t, opíšeme kouli o poloměru R, který je větší než r_0 a tak velký, aby příspěvek od oblasti $r > R$ k integrálům P_μ byl zanedbatelný. Je-li vnější pole slabé proti vlastnímu poli v oblasti $r \approx r_0$, může se poloměr R volit zároveň tak malý, aby integrály z vnější i smíšené části složek tenzoru $T^{(\mathrm{E})}_{\mu4}$ po oblasti $r < R$ byly zanedbatelně malé proti P_μ. Potom je možno psát

$$P_\mu \doteq (\mathrm{i}c)^{-1} \int_{(r \leqq R)} T_{\mu4}\, \mathrm{d}V\,, \tag{81}$$

a za $T_{\mu4}$ v těchto vzorcích vzít *úplný* tenzor energie a hybnosti, který splňuje rovnice (44), tj. rovnice

$$(\mathrm{i}c)^{-1}\, \partial T_{\mu4}/\partial t = -\partial_j T_{\mu j}\,.$$

Integrujeme-li obě strany po objemu naší *pevné* koule a užijeme Gaussovy věty (II 63), dostáváme

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}t = -\int_{\sigma_R} T_{\mu j} N_j\, \mathrm{d}\sigma\,. \tag{82}$$

K plošnému integrálu po povrchu koule σ_R *přispívá podstatně jen smíšená část tenzoru* $T^{(\mathrm{E,s})}_{\mu\nu}$. Vnější část nepřispívá, poněvadž je prakticky konstantní a příspěvek vlastní části lze vhodnou volbou R učinit zanedbatelně malý. Platí tedy přibližné rovnice

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}t \doteq -\int_{\sigma_R} T^{(\mathrm{E,s})}_{\mu j} N_j\, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= -(4\pi)^{-1} \int_{(r \leqq R)} \{F^{(\mathrm{vn})}_{\mu\alpha}\, \partial_j F^{(\mathrm{vl})}_{j\alpha} + F^{(\mathrm{vn})}_{j\alpha}\, \partial_j F^{(\mathrm{vl})}_{\mu\alpha} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu j} F^{(\mathrm{vn})}_{\alpha\beta}\, \partial_j F^{(\mathrm{vl})}_{\alpha\beta}\}\, \mathrm{d}V\,. \tag{82a}$$

Při úpravě plošného integrálu jsme použili obráceně Gaussovy věty (II 63) a konstantnosti tenzoru $F^{(\mathrm{vn})}_{\mu\nu}$ uvnitř koule.

Nyní nahradíme ve všech členech ve svorce latinský sčítací index j řeckým sčítacím indexem ν. Tím přidáme k objemovému integrálu jen členy tvaru

$$-(4\pi \mathrm{i}c)^{-1}\, F^{(\mathrm{vn})}_{..} \int_{(r \leqq R)} (\partial F^{(\mathrm{vl})}_{..}/\partial t)\, \mathrm{d}V,$$

čili

$$-(4\pi \mathrm{i}c)^{-1}\, F^{(\mathrm{vn})}_{..} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{(r \leqq R)} F^{(\mathrm{vl})}_{..}\, \mathrm{d}V\,,$$

které jsou zanedbatelně malé. Integrály

$$\int_{(r \leqq R)} F^{(\mathrm{vl})}_{..}\, \mathrm{d}V$$

jsou samy v čase t nulové (z důvodu symetrie pole elektronu vzhledem ke středu koule) a jejich časové změny jsou zanedbatelné, neboť jsou způsobeny pouze změnami pole v blízkosti povrchu koule, kde pole $F^{(vl)}_{\mu\nu}$ je už velmi slabé. Užijeme-li dále rovnic

$$\partial_\nu F^{(vl)}_{\nu\alpha} = -4\pi c^{-1} J_\alpha$$

a známé úpravy

$$F^{(vn)}_{\nu\alpha}\,\partial_\nu F^{(vl)}_{\mu\alpha} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}F^{(vn)}_{\alpha\beta}\,\partial_\nu F^{(vl)}_{\alpha\beta} = F^{(vn)}_{\beta\alpha}(\partial_\beta F^{(vl)}_{\mu\alpha} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu F^{(vl)}_{\alpha\beta}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}F^{(vn)}_{\beta\alpha}(\partial_\beta F^{(vl)}_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F^{(vl)}_{\beta\mu} + \partial_\mu F^{(vl)}_{\alpha\beta}) = 0\,,$$

dostaneme z (82a) jednodušší rovnice

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}t \doteq c^{-1}F^{(vn)}_{\mu\alpha}\int J_\alpha\,\mathrm{d}V\,. \tag{82b}$$

V posledním integrálu se můžeme omezit na objem vyplněný nábojem elektronu v okamžiku t.

Tento integrál snadno vypočteme, dosadíme-li v něm $J_\alpha = \varrho_0 U_\alpha$ a $\mathrm{d}V = \gamma^{-1}\,\mathrm{d}V_0$. Potom můžeme psát

$$\int J_\alpha\,\mathrm{d}V = \gamma^{-1}U_\alpha\int\varrho_0\,\mathrm{d}V_0 = e\gamma^{-1}U_\alpha\,.$$

Rovnice (82b) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}\tau = ec^{-1}F^{(vn)}_{\mu\alpha}U_\alpha\,, \tag{82c}$$

neboť $\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau$. Veličiny $P_\mu \equiv (\boldsymbol{p}, \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E})$ určené integrály (81) je možno za uvedených předpokladů a v uvažovaném přiblížení vyjádřit opět v podobě (49). Zavedeme-li ještě veličinu $m_0 = \mathscr{E}_0/c^2$, máme $P_\mu \doteq m_0 U_\mu$ a rovnice (82c) nabývají tvaru

$$\mathrm{d}(m_0 U_\mu)/\mathrm{d}\tau = F_\mu\,, \tag{82d}$$

zcela shodného s tvarem rovnic (68).

Vidíme tedy, že vlastní energii $\mathscr{E}$ a hybnost $\boldsymbol{p}$ Poincarého elektronu ve vnějším poli lze teoreticky definovat jen za jistých omezujících předpokladů (o vnějším poli), které jsou ovšem (bohatě) splněny v případech, v nichž se k popisu pohybu elektronu prakticky (a s úspěchem) používá Lorentzových pohybových rovnic (66), popř. Minkowského rovnic (68). Za těch předpokladů pak vhodně definované (viz (81)) veličiny $P_\mu \equiv (\boldsymbol{p}, \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E})$ tvoří (přibližně) čtyřvektor, platí pro ně (přibližné) vyjádření $m_0 U_\mu$ s $m_0 = c^{-2}\mathscr{E}_0$ a „pohybové rovnice" (82d) ≡ (68). K problému „klasické teorie elektronu" (výkladu jeho setrvačné hmoty a odvození pohybových rovnic) se vrátíme ještě v odst. VII 5.

6. ZALOŽENÍ RELATIVISTICKÉ MECHANIKY NEZÁVISLE NA ELEKTRODYNAMICE

6,1. POHYBOVÉ ROVNICE

Invariantních pohybových rovnic ve tvaru (68), které jsme zatím dostatečně zdůvodnili a jejich důsledky prozkoumali v případě elektromagnetické Minkowského čtyřsíly, se dá použít i při působení sil jiného původu. Kromě obecného tvaru rovnic

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}(m_0 U_\mu)/\mathrm{d}\tau = F_\mu \tag{83}$$

i jejich čtyřvektorové povahy, zůstane v obecném případě beze změny vztah mezi složkami síly a Minkowského čtyřsíly, tj.

$$f_j = \gamma^{-1}F_j\,, \tag{84}$$

dále definice hybnosti hmotné částice

$$p_j = P_j = m_0 U_j = m_0\gamma u_j = m u_j\,, \tag{85}$$

a tedy i tvar obyčejné vektorové pohybové rovnice

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{u})/\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}\,. \tag{83a}$$

Beze změny zůstane také definice energie hmotné částice

$$\mathscr{E} = -\mathrm{i}cP_4 = \mathscr{E}_0\gamma = m_0 c^2\gamma = mc^2\,. \tag{86}$$

Čtvrtou z rovnic (83) bude proto obecně možno zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}\mathscr{E}/\mathrm{d}t = -\mathrm{i}c\gamma^{-1}F_4\,, \tag{83b}$$

ale už ne ve speciálním tvaru (69). Pro obecnější Minkowského čtyřsílu nebude už platit ani explicitní vyjádření (28), ani vztah (29), takže složka F_4 nebude dána výrazem (28a).

Nebude-li obecná Minkowského čtyřsíla F_μ ortogonální k čtyřrychlosti U_μ, pak ovšem nebude platit ani rovnice (70). Místo dvou rovnic (29) a (70) budeme obecně mít jen jedinou invariantní rovnici

$$\mathrm{d}(m_0 c^2)/\mathrm{d}\tau = -F_\mu U_\mu\,, \tag{87}$$

kterou snadno odvodíme z rovnic (83) stejným postupem, jakým jsme v odst. 5,1 odvodili rovnici (70) z rovnic (68) a (29). Z rovnice (87) a definice (84) obyčejné síly $\boldsymbol{f}$ dostaneme složku F_4 v obecném vyjádření

$$F_4 = \mathrm{i}c^{-1}\gamma\boldsymbol{f}\,.\,\boldsymbol{u} + \mathrm{i}c^{-1}\,\mathrm{d}(m_0 c^2)/\mathrm{d}t\,. \tag{87a}$$

Obráceně k určení časové změny m_0 je nutné znát nejenom $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{f}$, ale i F_4. Dosazením za F_4 do rovnice (83b) nabývá tato rovnice tvaru

$$d\mathcal{E}/dt = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} + \gamma^{-1}\, d(m_0c^2)/dt\,. \tag{88}$$

Stejnou rovnici lze snadno odvodit i z rovnic (83a) skalárním násobením rychlostí $\boldsymbol{u}$ a úpravou levé strany.

Přestože na pravé straně (88) nestojí pouze výkon síly, je i tato rovnice, jak ještě uvidíme, správnou rovnicí energie. Fyzikální význam druhého členu na pravé straně (88) si podrobně objasníme na konkrétních příkladech v odst. 7.

Poněvadž ani struktura, ani fyzikální interpretace tohoto členu není zcela jednoduchá a samozřejmá, byla pociťována potřeba ospravedlnit vzorce pro setrvačnou hmotu m a energii $\mathcal{E}$ hmotné částice i její pohybovou rovnici (83) také úvahami nezávislými na elektrodynamice. To je možné, jak ukázali Lewis a Tolman, vyjdeme-li z požadavku, že musí platit obecné zákony zachování úhrnné setrvačné hmoty a hybnosti izolované soustavy hmotných těles. Předvedeme si jejich postup ve zjednodušené formě a ukážeme, že vede nejenom ke vzorci $m = m_0\gamma_{(u)}$, ale i k jednoduché závislosti *klidové* hmoty tělesa na jeho *vnitřní energii.*

Co se týká vhodnosti definice (84) „obyčejné síly", při konstantní i při proměnné klidové hmotě částice, o tom podává zajímavé úvahy Kuchař v nové práci [59].

6,2. LEWISOVO-TOLMANOVO ODVOZENÍ ZÁVISLOSTI SETRVAČNÉ HMOTY TĚLESA NA JEHO RYCHLOSTI

Mějme izolovanou soustavu elektricky neutrálních hmotných těles, např. pevných, pružných nebo nepružných koulí, které na sebe působí jen při vzájemných srážkách. Tím prakticky vylučujeme možnost, že by se hybnost nebo energie ze soustavy uvažovaných těles mohla přenést na jiné materiální objekty, na elektromagnetické pole (vlny) apod.

Vyjdeme z postulátu, že při dějích probíhajících v uvažované soustavě zůstává její úhrnná setrvačná hmota a hybnost konstantní, tj. platí pro ně zákony zachování vyjádřené ve zvoleném inerciálním systému S rovnicemi

$$\sum_n m^{(n)} = M = \text{konst}\,, \tag{89}$$

$$\sum_n \boldsymbol{p}^{(n)} = \sum_n m^{(n)}\boldsymbol{u}^{(n)} = \boldsymbol{p} = \text{konst}\,. \tag{90}$$

Uvidíme ihned, že takovéto rovnice mohou platit ve všech systémech, které jsou navzájem spojeny Lorentzovými transformacemi, pouze tehdy, závisí-li hmota tělesa

m na jeho rychlosti u podle vzorce

$$m = m_0\gamma\,, \quad \gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Abychom to ukázali, stačí uvažovat jednoduchou centrální srážku dvou úplně stejných hmotných koulí I, II. Volme nejprve systém S′, v němž se obě koule před srážkou pohybují stejně velkými rychlostmi (proti sobě) po ose $1'$. Pišme tedy $\boldsymbol{u}'^{(I)} \equiv (u', 0, 0)$, $\boldsymbol{u}'^{(II)} \equiv (-u', 0, 0)$. Pak ovšem bude také $m'^{(I)} = m'^{(II)} = m'$ a rovnice (89) žádá

$$m'^{(I)} + m'^{(II)} = 2m' = M' = \text{konst}\,. \tag{89'}$$

Rovnice (90) nabývá v S′ speciálního tvaru

$$m'^{(I)}\boldsymbol{u}'^{(I)} + m'^{(II)}\boldsymbol{u}'^{(II)} = \boldsymbol{p}' = 0\,. \tag{90'}$$

Systém souřadnic, v němž je úhrnná hybnost mechanické soustavy rovná nule, nazýváme *těžišťovým systémem* té soustavy.

Obě koule se v jistém okamžiku srazí a krátce nato se obě zastaví. Jsou-li dokonale nepružné, je tím celý mechanický děj skončen. Koule zůstanou při sobě a budou tvořit jediné *klidné* těleso hmoty $M_0 = M'$. (Budou ovšem poněkud deformovány a zahřáty na vyšší teplotu, než jakou měly před srážkou.) Pružné koule se od sebe zase odrazí (vymění si rychlosti). V každém případě zůstane během celého děje konstantní nejenom úhrnná setrvačná hmota soustavy, ale podle rovnice (89′) i hmota $m' = \frac{1}{2}M'$ každé z obou koulí.

A nyní popišme celý děj ze stanoviska systému S spojeného se systémem S′ transformací (11). V systému S mají koule před srážkou rychlosti

$$\boldsymbol{u}^{(I)} \equiv (u^{(I)}, 0, 0)\,, \quad \boldsymbol{u}^{(II)} \equiv (u^{(II)}, 0, 0)\,,$$

přičemž

$$u^{(I,II)} = (v \pm u')\,(1 \pm vu'/c^2)^{-1}\,. \tag{91}$$

Platí tedy také, podle (IV 23), vztahy

$$\gamma_{(I,II)} = \gamma_{(u')}\gamma_{(v)}(1 \pm vu'/c^2)\,. \tag{92}$$

Koule se srazí a v jistém okamžiku budou vůči sobě navzájem v klidu. V tom okamžiku budou tvořit jediné těleso hmoty M, jehož rychlost vůči systému S bude $\boldsymbol{v} \equiv (v, 0, 0)$. Rovnice (89) a (90) pak dávají

$$m^{(I)} + m^{(II)} = M = \text{konst}\,, \tag{89a}$$

$$m^{(I)}\boldsymbol{u}^{(I)} + m^{(II)}\boldsymbol{u}^{(II)} = M\boldsymbol{v} = \text{konst}\,. \tag{90a}$$

Vztah

$$m^{(I)}(u^{(I)} - v) = m^{(II)}(v - u^{(II)})\,,$$

který z těchto rovnic plyne, převedeme užitím (91) nejprve na tvar

$$m^{(\mathrm{I})}(1 - u'v/c^2) = m^{(\mathrm{II})}(1 + u'v/c^2),$$

a použitím (92) pak na konečný tvar

$$m^{(\mathrm{I})}\gamma_{(\mathrm{I})}^{-1} = m^{(\mathrm{II})}\gamma_{(\mathrm{II})}^{-1}. \tag{93}$$

Poněvadž obě koule jsou stejné, lze rovnice (93) vyložit jedině tak, že hmota tělesa v translačním pohybu závisí na jeho rychlosti podle obecného vzorce

$$m = m_0\gamma_{(u)}. \tag{94}$$

Potom ovšem musí platit také vzorce $m' = m_0\gamma_{(u')}$ a $M = M_0\gamma_{(v)}$. Poslední vzorec skutečně plyne ze vzorců pro hmoty obou koulí a z rovnic (89a), (89'). Použijeme-li vztahů (92), hned totiž dostáváme

$$M = m^{(\mathrm{I})} + m^{(\mathrm{II})} = m_0(\gamma_{(\mathrm{I})} + \gamma_{(\mathrm{II})}) = 2m_0\gamma_{(u')}\gamma_{(v)} = 2m'\gamma_{(v)} = M_0\gamma_{(v)}.$$

Podrobnější rozbor ukazuje, že vzorec (94) pro relativní setrvačnou hmotu umožňuje splnit zákony zachování (89), (90) ve všech inerciálních systémech nejen při centrální srážce dvou stejných koulí, ale i v obecnějším případě necentrální (bočné) srážky dvou různých koulí. Vzorec (94) lze tedy vskutku pokládat za obecně platný vzorec pro setrvačnou hmotu tělesa nebo hmotné částice v translačním pohybu vůči zvolenému systému souřadnic.

Zavedeme-li veličiny

$$P_4^{(n)} \equiv \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E}^{(n)} = \mathrm{i}cm^{(n)}, \quad P_j^{(n)} \equiv p_j^{(n)} = m^{(n)}u_j^{(n)},$$

$$P_4 \equiv \mathrm{i}c^{-1}\mathscr{E} = \mathrm{i}cM, \quad P_j \equiv p_j = Mv_j,$$

můžeme rovnice (89), (90) zapsat souhrnně ve tvaru čtyřvektorové rovnice

$$\sum_n P_\mu^{(n)} = P_\mu = \text{konst}, \tag{95}$$

která vyjadřuje zákon zachování čtyřhybnosti naší izolované mechanické soustavy.

Vraťme se nyní k případu centrální srážky dvou stejných koulí a jeho popisu z hlediska těžišťového systému S'. Spojením obou koulí v okamžiku, kdy se při srážce zastaví, vzniká jedno klidné těleso, které má podle (89') hmotu

$$M_0 = M' = 2m' = 2m_0\gamma_{(u')} > 2m_0. \tag{96}$$

Tento výsledek lze vysvětlit jedině tak, že hmota tělesa v klidu závisí na jeho vnitřním fyzikálním stavu a že se zvětší, jestliže těleso např. zahřejeme, nebo pružné těleso deformujeme.

Veličina m_0 udává klidovou hmotu koule před srážkou, tj. volné nedeformované a nezahřáté koule, kdežto $m' = m_0\gamma_{(u')}$ udává nejenom hmotu volné koule v translačním pohybu rychlostí u', ale také klidovou hmotu elasticky deformované nebo nepružnou deformací zahřáté koule v okamžiku, kdy se při srážce s druhou stejnou koulí zastavila a její kinetická energie $(m' - m_0)c^2 \doteq \frac{1}{2}m_0u'^2$ se proměnila ve vnitřní energii (elastickou deformační energii nebo energii tepelnou). Změna vnitřní energie klidného tělesa o $\Delta\mathscr{E}_0$ má tedy nutně za následek i změnu jeho klidové setrvačné hmoty o $\Delta m_0 = c^{-2}\Delta\mathscr{E}_0$. Přitom zřejmě nezáleží ani na tom, jakým způsobem nebo v jaké formě byla energie $\Delta\mathscr{E}_0$ tělesu dodána, ani na tom, v jaké formě ji těleso uchovává. Objasníme si to ještě na několika klasických příkladech.

6,3. DALŠÍ PŘÍKLADY UKAZUJÍCÍ NUTNOU ZÁVISLOST KLIDOVÉ SETRVAČNÉ HMOTY TĚLESA NA JEHO VNITŘNÍ ENERGII

Nejjednodušším typem nebo modelem makroskopického hmotného „tělesa" je oblak ideálního plynu volně se rozpínajícího v prázdném prostoru. Toto „těleso" je složeno z N hmotných částic (atomů nebo molekul), které na sebe vzájemně vůbec nepůsobí, mají neproměnné klidové hmoty $m_0^{(n)}$ $(n = 1, \dots, N)$ a pohybují se vůči libovolně zvolenému inerciálnímu systému S konstantními rychlostmi $\boldsymbol{u}^{(n)}$. Proto i jejich relativní setrvačné hmoty $m^{(n)}$, energie $\mathscr{E}^{(n)}$ a hybnosti $\boldsymbol{p}^{(n)}$ jsou konstantní.

Vnitřní energií plynového oblaku budeme rozumět jeho úhrnnou *relativistickou energii*

$$\mathscr{E}' = \sum\mathscr{E}'^{(n)} = \sum m'^{(n)}c^2 = M'c^2, \tag{97'}$$

popř. kinetickou energii $\mathscr{E}' - \sum m_0^{(n)}c^2$ *v těžišťovém systému* S', v němž se úhrnná hybnost rovná nule:

$$\boldsymbol{p}' = \sum\boldsymbol{p}'^{(n)} = \sum m'^{(n)}\boldsymbol{u}'^{(n)} = 0. \tag{98'}$$

V tomto systému je náš plynový oblak z makroskopického hlediska v „klidu", neboť jeho „globální rychlost" $\boldsymbol{v}'$, kterou můžeme definovat vztahem

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{p}'/M' = \sum m'^{(n)}\boldsymbol{u}'^{(n)}/\sum m'^{(n)} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}'/\mathrm{d}t',$$

$$\boldsymbol{X}' = M'^{-1}\sum m'^{(n)}\boldsymbol{x}'^{(n)},$$

se rovná nule. Polohový vektor $\boldsymbol{X}'$ určuje v systému S' polohu těžiště (hmotného středu) plynu. Rozumí se, že $\boldsymbol{x}'^{(n)}$ určují z hlediska systému S' současné polohy hmotných částic.

Zvolme si nyní systém S, vůči němuž se těžišťový systém S' pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$. V systému S lze energii a hybnost plynového oblaku vyjádřit jednak stejným způsobem jako (v systému S', tj. vzorci

$$\mathscr{E} = \sum\mathscr{E}^{(n)} = \sum m^{(n)}c^2 = Mc^2, \tag{97}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum\boldsymbol{p}^{(n)} = \sum m^{(n)}\boldsymbol{u}^{(n)}, \tag{98}$$

jednak pomocí vnitřní energie $\mathscr{E}'$ a rychlosti $\boldsymbol{v}$. Veličiny $P'_\mu \equiv (\boldsymbol{p}', ic^{-1}\mathscr{E}')$ a $P_\mu \equiv (\boldsymbol{p}, ic^{-1}\mathscr{E})$ jsou totiž složkami téhož čtyřvektoru, úhrnné čtyřhybnosti plynového oblaku v systému S', popř. S. Při Lorentzově transformaci $S' \to S$ tedy dostáváme, s ohledem na to, že $\boldsymbol{p}' = 0$, $\mathscr{E}' = M'c^2$, tato vyjádření pro $\mathscr{E}$ a $\boldsymbol{p}$:

$$\mathscr{E} = \gamma_{(v)}\mathscr{E}' = M'c^2\gamma_{(v)} = Mc^2\,, \tag{97a}$$

$$\boldsymbol{p} = \gamma_{(v)}c^{-2}\mathscr{E}'\boldsymbol{v} = M'\gamma_{(v)}\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}\,, \tag{98a}$$

Vzorce (97a) a (98a) mají tvar vzorců (86) a (85) pro energii a hybnost hmotného tělesa, které má *klidovou hmotu*

$$M_0 = M' = \sum m'^{(n)} = \sum m_0^{(n)} + c^{-2}\sum \mathscr{E}'^{(n)}_{\mathrm{kin}} \tag{99}$$

a koná translační pohyb rychlostí $\boldsymbol{v}$. Pro jeho relativní setrvačnou hmotu M v systému S lze psát řadu ekvivalentních vyjádření, např.

$$M = M_0\gamma_{(v)} = M_0 + c^{-2}\mathscr{E}^{(M)}_{\mathrm{kin}} = \mathscr{E}/c^2 = \\ = \sum m^{(n)} = \sum m_0^{(n)} + c^{-2}\sum\mathscr{E}^{(n)}_{\mathrm{kin}}\,. \tag{100}$$

Rychlost $\boldsymbol{v}$ a hmotu M_0 lze vyjádřit také vzorci

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/M = c^2\boldsymbol{p}/\mathscr{E}\,, \tag{101}$$

$$M_0 = c^{-2}[\mathscr{E}^2 - (cp)^2]^{\frac{1}{2}}\,, \tag{102}$$

tvarem opět shodnými se vzorci (76) a (79) pro rychlost a klidovou hmotu jedné hmotné částice. Dosadíme-li do (101) za $\boldsymbol{p}$ výraz $\sum m^{(n)}\boldsymbol{u}^{(n)}$ (podle (98)) a přihlédneme-li k tomu, že i relativní hmoty částic $m^{(n)}$ jsou v našem případě konstantní, zjistíme, že pro $\boldsymbol{v}$ můžeme zapsat v podobě

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}/\mathrm{d}t\,, \tag{103}$$

kde

$$\boldsymbol{X}(t) = M^{-1}\sum m^{(n)}\boldsymbol{x}^{(n)}(t)\,. \tag{104}$$

Polohový vektor $\boldsymbol{X}$ určuje těžiště našeho plynového oblaku v systému S, a $\boldsymbol{v}$ je tedy *rychlost těžiště.*

Ze vzorce (99) *vidíme, že ke klidové hmotě makroskopického hmotného tělesa nutně přispívá kromě součtu klidových hmot jeho částic i jejich úhrnná kinetická energie v těžišťovém* (makroskopickém klidovém) *systému tělesa.* Ze vzorce (100) je vidět, že k relativní hmotě $M = M_0\gamma_{(v)}$ v systému S přispívá vnější (makroskopická kinetická energie tělesa $\mathscr{E}^{(M)}_{\mathrm{kin}} \equiv M_0c^2(\gamma_{(v)} - 1)$ stejným způsobem jako u každé hmotné částice. Dosazením za M_0 z (99) do (100) získáme též vztah $\sum\mathscr{E}^{(n)}_{\mathrm{kin}} = \mathscr{E}^{(M)}_{\mathrm{kin}} + \sum\mathscr{E}'^{(n)}_{\mathrm{kin}}$, známý z Newtonovy mechaniky (v newtonovské aproximaci) jako tzv. Königova věta.

Složitější než ideální plyn je soustava hmotných částic, které na sebe vzájemně působí silami a pohybují se obecně zrychleně. V takovém případě vzorce (97) a (98) neplatí, tj. neudávají úhrnnou energii a hybnost soustavy. Rovněž vzorec (100) pro hmotu je nesprávný. Veličiny definované těmito formulemi nejsou pro izolovanou soustavu konstantní. Ani vzorce (101) a (103) pro rychlost těžiště $\boldsymbol{v}$ spolu nesouhlasí, když se hmoty $m^{(n)}$ s časem mění.

Je známo, že Newtonova mechanika, která předpokládá přímé, okamžité a bezprostřední působení do dálky, přidává v takovém případě ke kinetické energii ještě tzv. potenciální energii uvažované soustavy částic; teprve součet obou je veličinou, která se zachovává. Objasníme si, proč i potenciální energie nutně přispívá k setrvačné hmotě celé soustavy.

Podle Maxwellovy-Lorentzovy elektrodynamiky ani podle teorie relativity přímé působení do dálky ovšem neexistuje. Každé vzájemné silové působení vzdálených (tj. nesoumístných) hmotných částic je zprostředkováno nějakým polem existujícím v prostoru mezi nimi. Takové pole, např. elektromagnetické, může existovat také nezávisle, tj. „odtrženě" od hmotných částic (např. jako volná elektromagnetická vlna). *Podle teorie relativity ostatně pole nepotřebuje ani žádného substanciálního „nositele"*, jakým byl v Lorentzově teorii předpokládaný světový éter. Pole samo je materiální povahy, je zvláštním druhem nebo formou materie a je ovšem i „nositelem" řady vlastností společných veškeré materii. Má např. energii, hybnost a setrvačnost (setrvačnou hmotu) a podobné vlastnosti tak jako „obyčejná látka". To jsme viděli na příkladech elektromagnetického pole elektronu (pole vázaného k nabité částici) i pole světelného signálu (volné elektromagnetické vlny.) Už Lebeděv svými známými pokusy s tzv. tlakem záření (působícím na těleso, na něž dopadá) jasně demonstroval, že např. světlo má nejenom energii, ale i hybnost, a tedy setrvačnost. Proto také moderní teorie materie, teorie elementárních částic, zcela právem řadí světelné kvantum (foton) mezi elementární částice materie.

Je tedy zřejmé, že se energie a hybnost pole svázaného se soustavou hmotných částic (např. elektromagnetického pole existujícího v prostoru mezi elektricky nabitými částicemi) musí zahrnout do energie a hybnosti té hmotné soustavy. Uvažujme nyní např. o soustavě elektricky nabitých částic (elektronů), které se pohybují pomalu ($u^{(n)} \ll c$) a s malými zrychleními. V tom případě pole vzbuzené každou z těch částic lze v prostoru vně částice aproximovat polem Coulombovým. Výsledné pole v soustavě částic je dáno superpozicí polí jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{E}(x) = \sum_n \boldsymbol{E}^{(n)}(x)\,, \quad \boldsymbol{H}(x) = 0\,.$$

Utvoříme-li pro výsledné pole tenzor energie a hybnosti $T^{(\mathrm{E})}_{\mu\nu}$, rozpadne se na příspěvky vlastních polí jednotlivých částic a na smíšené členy. V odst. 5,2 jsme viděli, že ty příspěvky k úhrnné energii a hybnosti pole, které pocházejí od vlastních polí jednotlivých částic, jsou už zahrnuty v energiích $\mathscr{E}^{(n)}$ a hybnostech $\boldsymbol{p}^{(n)}$ částic a přispívají i k jejich setrvačným hmotám $m^{(n)} = c^{-2}\mathscr{E}^{(n)}$. Zbývá proto započítat příspěvek (rovnoprávných) smíšených členů v $T^{(E)}_{\mu\nu}$.

V „coulombovské aproximaci" se ovšem hustota hybnosti pole rovná nule. (Od nuly různé složky $T^{(E)}_{j4}$ bychom dostali teprve tehdy, kdybychom přihlíželi i k magnetickému poli vzbuzenému pohybujícími se částicemi.) Z teorie elektrostatického pole je však známo [6], že příspěvek smíšených coulombovských členů k integrálu $\int(-T^{(E)}_{44})\,dV$ dává právě klasickou coulombovskou potenciální energii $\mathscr{E}_{pot}$ soustavy nabitých částic. A tato energie $\mathscr{E}_{pot}$ tedy přispívá (rovnoprávně s energiemi $\mathscr{E}^{(n)}$) i k setrvačné hmotě celé soustavy částic hodnotou $c^{-2}\mathscr{E}_{pot}$.

V napjatém pružném tělese je jeho vnitřní (elastická deformační) energie v podstatě potenciální energií pocházející od vzájemného silového působení mezi molekulami látky toho tělesa. Je tedy pochopitelné, že se vytvořením pnutí v tělese zvětší jeho setrvačná hmota o hodnotu $c^{-2}\mathscr{E}_{elast}$.

Při zahřívání pevného tělesa se v něm přírůstek jeho vnitřní energie „ukládá" z části ve formě kinetické a z části ve formě potenciální (molekuly nebo atomy tělesa kmitají kolem svých rovnovážných poloh).

Nakonec uveďme ještě jeden velmi poučný příklad, který jasně ukazuje, že při ztrátě vnitřní energie ztrácí hmotné těleso nutně i odpovídající část své (klidové) setrvačné hmoty. Mějme opět hmotné těleso, které má klidovou hmotu M_0 a je v klidu v systému S'. Nezáleží na tom, v jaké formě je v něm uložena jeho vnitřní energie. Toto těleso nechť vyšle elektromagnetické záření, např. světelný signál, buď ve dvou opačných směrech, nebo všemi směry (kulovou světelnou vlnu) tak, že se úhrnná hybnost vyslaného záření v systému S' rovná nule: $\boldsymbol{p}'^{(E)} = 0$. Poněvadž před vysláním záření bylo těleso v systému S' v klidu ($\boldsymbol{v}' = 0$), mělo i hybnost nulovou

$$\boldsymbol{p}' = M'\boldsymbol{v}' = M_0\boldsymbol{v}' = 0\,.$$

Podle zákona zachování hybnosti izolované hmotné soustavy, k níž nyní musíme počítat jak hmotné těleso, tak jím emitované záření, má těleso *po vyslání záření opět nulovou hybnost* $\boldsymbol{p}'^{\star} = 0$ (v systému S'). Vyslané záření však má v systému S' nenulovou energii $\mathscr{E}'^{(E)}$, kterou těleso ztrácí, a jak ihned uvidíme, ztrácí tím nutně i jistou setrvačnou hmotu $\Delta M'$. Za normálních okolností je ovšem ztráta hmoty $\Delta M' \ll M'$, takže hmotné těleso po emisi záření bude mít v systému S' opět nenulovou hmotu $M'^{\star} = M' - \Delta M' > 0$. (Ve fyzice elementárních částic se setkáváme i s takovými hmotnými částicemi – např. pionem π_0 – které na emisi elektromagnetického záření spotřebují veškerou zásobu své klidové energie $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$ a samy úplně zmizí ze světa.) Z rovnice $\boldsymbol{p}'^{\star} = M'^{\star}\boldsymbol{v}'^{\star} = 0$ pak plyne, že těleso při emisi záření zůstane v klidu vůči S' : $\boldsymbol{v}'^{\star} = 0$. Můžeme tedy psát

$$M'^{\star} = M_0^{\star} = M' - \Delta M' = M_0 - \Delta M_0\,.$$

K hledanému vztahu mezi ΔM_0 a $\mathscr{E}'^{(E)}$ snadno dospějeme, popíšeme-li celý jev vyslání záření z hlediska systému S určeného jako obvykle obrácenou transformací

(11). Z odst. 3,3 víme, že veličiny $\boldsymbol{p}'^{(E)}$ a $(i/c)\,\mathscr{E}'^{(E)}$ tvoří čtyřvektor $P'^{(E)}_\mu$. Podle obrácených vzorců (39) tedy máme v systému S

$$\mathscr{E}^{(E)} = \gamma\mathscr{E}'^{(E)}\,, \quad \boldsymbol{p}^{(E)} = \gamma\boldsymbol{v}c^{-2}\mathscr{E}'^{(E)} + 0\,. \tag{105}$$

Hmotné těleso mělo v systému S před vysláním záření hybnost

$$\boldsymbol{p} = M_0\gamma\boldsymbol{v}\,, \tag{106}$$

a po vyslání záření má hybnost

$$\boldsymbol{p}^{\star} = M_0^{\star}\gamma\boldsymbol{v}\,, \tag{106*}$$

neboť jeho rychlost $\boldsymbol{v}$ se nezměnila. (Těleso zůstalo v klidu vůči systému S' a tedy v pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči systému S.) Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnice

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{\star} + \boldsymbol{p}^{(E)}\,, \tag{107}$$

a z ní použitím vzorců (105), (106), (106*) vztah

$$M_0 = M_0^{\star} + c^{-2}\mathscr{E}'^{(E)}\,, \tag{108}$$

tj.

$$\Delta M_0 \equiv M_0 - M_0^{\star} = c^{-2}\mathscr{E}'^{(E)}\,. \tag{109}$$

Veličina $c^{-2}\mathscr{E}'^{(E)}$ udává zřejmě *setrvačnou hmotu záření* v jeho „těžišťovém systému" S' (v němž je $\boldsymbol{p}'^{(E)} = 0$). Rovnice (108) pak vyjadřuje v tom systému zachování hmoty při uvažovaném fyzikálním ději.

Násobíme-li rovnici (108) faktorem γ, dostáváme vztah

$$M = M^{\star} + c^{-2}\mathscr{E}^{(E)}\,, \tag{110}$$

který vyjadřuje zachování hmoty při popsaném jevu z hlediska systému S. Veličina $c^{-2}\mathscr{E}^{(E)}$ udává setrvačnou hmotu vyslaného záření v systému S. Násobíme-li nakonec rovnice (108) a (110) faktorem c^2, dostaneme rovnice, které vyjadřují v systému S', popř. S zachování energie naší soustavy při uvažovaném ději. Tyto rovnice lze spojit s rovnicemi vyjadřujícími zachování hybnosti ve čtyřvektorové rovnice

$$P'_\mu = P'^{\star}_\mu + P'^{(E)}_\mu\,, \tag{111'}$$

popř.

$$P_\mu = P^{\star}_\mu + P^{(E)}_\mu\,. \tag{111}$$

Rovnice (108) tedy umožňuje splnit zákon zachování hybnosti, energie i hmoty ve všech inerciálních systémech souřadnic. Za povšimnutí stojí, že zatímco se z hlediska systému S' (klidového) emise záření děje jen na útraty vnitřní energie tělesa, z hlediska systému S probíhá jak na útraty vnitřní (klidové) energie, tak i na útraty vnější (makroskopické) kinetické energie tělesa, neboť rozdíl jeho kinetické energie před emisí a po emisi je

$$c^2(M_0 - M_0^*)(\gamma - 1) = \mathscr{E}'^{(E)}(\gamma - 1) = \mathscr{E}^{(E)}\gamma^{-1}(\gamma - 1) > 0 . \qquad (112)$$

Tento poslední příklad má i historický význam, neboť na jeho základě, popř. zobecněním závěrů z něho plynoucích, dospěl Einstein ke svému obecnému zákonu o „ekvivalenci hmoty a energie", který je prakticky nejdůležitějším přínosem teorie relativity. Otázkou úplné formulace a interpretace tohoto zákona a také experimentálními důkazy jeho obecné platnosti se budeme podrobněji zabývat v odst. 8.

7. PŘÍKLADY SIL, JEJICHŽ PŮSOBENÍ NA HMOTNOU ČÁSTICI MĚNÍ JEJÍ KLIDOVOU HMOTU

7,1. MINKOWSKÉHO ČTYŘSÍLA ČASOVÉHO CHARAKTERU

Vraťme se nyní k pohybovým rovnicím (83) a všimněme si nejprve některých nezvyklých vlastností sil obecnějších, než je Lorentzova síla (25), popř. k ní příslušná Minkowského elektromagnetická čtyřsíla (28).

Z rovnice (87) je vidět, že není-li obecná čtyřsíla F_μ ortogonální k čtyřrychlosti U_μ hmotné částice, mění se klidová hmota částice podél její světočáry. To však znamená, že rovnice (83a) může být při $\boldsymbol{f} \neq 0$ popř. splněna i tak, že $\boldsymbol{u} =$ konst $\neq 0$, $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t = 0$. Pak máme

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \gamma(\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}t)\,\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} . \qquad (113)$$

Při $\boldsymbol{u} \neq 0$ tedy působení nenulové síly $\boldsymbol{f}$ nemusí nutně vyvolávat zrychlený pohyb částice. Je-li zrychlení částice (v daném světobodě na její světočáře) nulové v inerciálním systému S, je nulové ve všech inerciálních systémech. (Viz odst. IV 6,2.) To znamená, že v inerciálním systému S', který je okamžitým klidovým systémem částice, naše síla vymizí, neboť v něm je $\boldsymbol{u}' = 0$, $\boldsymbol{a}' = 0$, takže čárkovaná rovnice (113) dává

$$\boldsymbol{f}' = \mathrm{d}\boldsymbol{p}'/\mathrm{d}t' = 0 . \qquad (113')$$

Uvažovaná síla $\boldsymbol{f}$ tedy není pojem „absolutní" v tom smyslu jako je Lorentzova síla nebo pravé síly v Newtonově mechanice, které vymizí buď ve všech systémech, nebo nevymizí v žádném. *Absolutním zůstává obecně pouze pojem Minkowského čtyřsíly*, která je čtyřvektorem a vymizí-li v jednom systému, vymizí ve všech a naopak. Poněvadž ve (113) je podle předpokladu $\boldsymbol{f} \neq 0$, ale ve (113') je $\boldsymbol{f}' = 0$, musí být v systému S' alespoň $F'_4 \neq 0$. Jinak by bylo $F'_\mu = 0$, tedy i $F_\mu = 0$ a podle (84) také $f_j = 0$. Čtyřvektor F_μ je tedy v uvažovaném případě čtyřvektorem časového

charakteru (na rozdíl od elektromagnetické čtyřsíly, která je čtyřvektorem prostorového charakteru).

V systému S' rovnice (83b) dává (při $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{a}' = 0$, $\gamma_{(u')} = 1$)

$$\mathrm{d}\mathscr{E}'/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathscr{E}_0/\mathrm{d}\tau = c^2\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau = -\mathrm{i}cF'_4 .$$

Je tedy vskutku

$$F'_4 = \mathrm{i}c\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau \neq 0 \quad F'_j = f'_j = 0$$

a

$$F'_\mu F'_\mu = (F'_4)^2 = -c^2(\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau)^2 < 0.$$

Systém S' se pohybuje vůči systému S rychlostí $\boldsymbol{u}$. Veličiny $(F_j, (\mathrm{i}c)^{-1}F_4)$ se transformují stejně jako $(\mathrm{d}x_j, \mathrm{d}t)$, a proto z transformace (IV 64$^+$a,b) dostáváme

$$F_j = \gamma_{(u)}u_j(\mathrm{i}c)^{-1}F'_4 = \gamma_{(u)}u_j\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau , \qquad (114)$$

a dále

$$f_j = \gamma_{(u)}^{-1}F_j = (\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau)\,u_j \qquad (114a)$$

v souhlase se (113); platí tedy vztah $\boldsymbol{f} . \boldsymbol{u} = u^2\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau$. Konečně F_4 dostane vyjádření

$$F_4 = \gamma_{(u)}F'_4 = \mathrm{i}c\gamma_{(u)}\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau = \mathrm{i}c\gamma_{(u)}u^{-2}\boldsymbol{f} . \boldsymbol{u} , \qquad (115)$$

a platí tedy vztahy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathscr{E}/\mathrm{d}t &= \mathrm{d}(\gamma_{(u)}m_0c^2)/\mathrm{d}t = \gamma_{(u)}c^2\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}t = \\ &= c^2\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau = (c^2/u^2)\boldsymbol{f} . \boldsymbol{u} = -\mathrm{i}c\gamma_{(u)}^{-1}F_4 ,\end{aligned}$$

v souhlase s (83b). (Použili jsme toho, že $\boldsymbol{a} = 0$, tedy $\mathrm{d}\gamma_{(u)}/\mathrm{d}t = 0$.) S výrazy (114) a (115) se snadno přesvědčíme, že $F_\mu F_\mu = F'_\mu F'_\mu < 0$ a $F_\mu U_\mu = -c^2\,\mathrm{d}m_0/\mathrm{d}\tau$ v souhlase s (87). Snadno rovněž zjistíme, že složky obyčejné síly (114a) splňují rovnici (88).

Zbývá otázka, zda je vůbec možno (a popř. jak) sílu $\boldsymbol{f}$ nebo čtyřsílu F_μ právě popsaných zvláštních vlastností prakticky realizovat. Odpověď je kladná a realizace síly velmi prostá: Taková síla působí např. na těleso uvažované v posledním příkladě předchozího odstavce, tj. na těleso emitující (nebo absorbující) izotropně z hlediska svého klidového systému S' elektromagnetické záření. Můžeme si je představit např. jako rozžhavené těleso sálající tepelné záření a (tím se ochlazující), nebo jako chladné, černé těleso v prostoru vyplněném z hlediska klidového systému izotropním zářením, které absorbuje (a tím se ohřívá).

Na povrch tělesa sice působí všestranný tlak záření, ale výsledná síla $\boldsymbol{f}'$ je nulová a těleso zůstává v systému S' v klidu. Pro jednoduchost předpokládejme, že objem tělesa je konstantní, takže i práce tlakem záření vykonaná se rovná nule. Nechť $\mathrm{d}Q' \equiv \mathrm{d}Q_0$ znamená množství tepla dodaného tělesu z hlediska klidového systému

S' za dobu $dt' \equiv d\tau$. (Při vyzařování je $dQ' = -d\mathscr{E}'^{(E)} < 0$.) Toto teplo se věnuje na zvýšení vnitřní energie tělesa. Platí tedy rovnice

$$d\mathscr{E}' \equiv d\mathscr{E}_0 = c^2\, dm_0 = dQ' \equiv dQ_0\,, \tag{116'}$$

$$dm_0/d\tau = c^{-2}\, dQ_0/d\tau\,. \tag{117}$$

Rovnice energie (116') se shoduje s rovnicí vyjadřující první větu termodynamickou ve speciálním případě, kdy se práce na soustavě vykonaná rovná nule.

Dosadíme-li ze (117) za $dm_0/d\tau$ do vzorců (114a), dostaneme očekávané vyjádření složek síly pomocí „vnějšího vlivu" na těleso. V běžných případech je to síla velmi malá. Názorný, fyzikální důvod, proč je $\boldsymbol{f} \neq 0$, je zřejmě v tom, že z hlediska systému S není emise, popř. absorpce záření izotropní. Emitované záření má od nuly různou hybnost $\boldsymbol{p}^{(E)}$, o niž se mění hybnost tělesa ($d\boldsymbol{p}/dt = -d\boldsymbol{p}^{(E)}/dt = \boldsymbol{f}$).

Nakonec si všimněme rovnice energie (88): po násobení dt a dosazení ze (116') můžeme ji psát ve tvaru

$$d\mathscr{E} = dW + dQ\,, \tag{116}$$

zavedeme-li označení

$$dW = \boldsymbol{f}\,.\,\boldsymbol{u}\,dt = \boldsymbol{f}\,.\,d\boldsymbol{x}$$

a

$$dQ = \gamma_{(u)}^{-1}\, dQ_0\,. \tag{118}$$

Rovnice (116) odpovídá tedy první větě termodynamické v systému S, a (118) je transformační vzorec pro množství dodaného tepla. Vidíme, že dodané teplo se při Lorentzově transformaci od klidového systému S' k systému S transformuje jinak než přírůstek energie $d\mathscr{E}$, neboť $d\mathscr{E} = \gamma_{(u)}\, d\mathscr{E}_0$. Zároveň jsme si na konkrétním příkladě objasnili fyzikální význam druhého členu na pravé straně rovnice energie (88) i jeho zvláštní tvar.

7,2. NUKLEON VE VNĚJŠÍM SKALÁRNÍM MEZICKÉM POLI

Čtyřsíla F_μ, jejíž působení mění klidovou hmotu částice, nemusí být nutně čtyřvektorem časového charakteru. Pro ilustraci nezvyklých „možností", které existují v relativistické dynamice, si stručně všimneme ještě jednoho prostého příkladu. Jde v něm o přitažlivou sílu, jež poutá nukleony (protony i neutrony) v atomových jádrech.

Vzájemné působení mezi nukleony sice dosud přesně neznáme, ale víme, že je zprostředkováno několika druhy tzv. mezických polí buzených „mezickým nábojem" nukleonů, podobně jako je elektromagnetické pole buzeno elektrickým nábojem elektronu nebo protonu. Omezíme se na nejjednodušší (Yukawův) typ takového pole.

To je popsáno jediným *reálným skalárním potenciálem* $\psi(x)$, který splňuje invariantní rovnici

$$\Box\psi(x) - \varkappa^2\, \psi(x) = 4\pi\, \eta_0(x)\,; \tag{119}$$

v ní $\varkappa > 0$ je konstanta charakteristická pro uvažované mezické pole a $\eta_0(x)$ je klidová hustota mezického náboje nukleonů.

V kap. VII ukážeme, že Minkowského čtyřsíla F_μ, jíž dané vnější Yukawovo pole $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ působí *na bodový mezický náboj* g nesený nukleonem (v čase t v místě $\boldsymbol{x}$), je dána vzorcem

$$F_\mu = -g\, \partial_\mu \psi\,. \tag{120}$$

Se čtyřsílou (120) dává rovnice (87) vztah

$$d(m_0 c^2)/d\tau = (g\, \partial_\mu \psi)\, dx_\mu/d\tau = g\, d\psi(x(\tau))/d\tau\,.$$

Předpokládáme-li, že mezický náboj g se při pohybu částice zachovává (podobně jako elektrický náboj e), dostáváme integrací předchozí rovnice ihned

$$m_0(\tau) = \overline{m}_0 + gc^{-2}\, \psi(x(\tau))\,. \tag{121}$$

Integrační konstanta $\overline{m}_0$ udává klidovou kmotu nukleonu v tom světobodě na jeho světočáře, kde je $\psi = 0$. V analogii s interpretací rovnice (117) si můžeme změny klidové hmoty m_0 „názorně" vyložit jako „ochlazování" nebo „oteplování" nukleonu vnějším mezickým polem podle toho, jak přichází z „míst" vyššího potenciálu do nižšího, nebo naopak.

Omezme se dále na jednoduchý *případ statického pole* $\psi(\boldsymbol{x})$, v němž je podle (120) $F_4 \equiv 0$ a čtyřsíla F_μ tedy čtyřvektorem prostorového charakteru. Takové pole budí např. konstantní, bodový mezický náboj g, umístěný v počátku $\boldsymbol{x} = 0$ ($\eta_0 = g\, \delta(\boldsymbol{x})$). Rovnice (119) pak dává pro potenciál $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(r)$ řešení

$$\psi(r) = -gr^{-1} \exp(-\varkappa r)\,, \tag{122}$$

což je tzv. Yukawův potenciál.

Z rovnice (121) s potenciálem (122) dostáváme $m_0 = \overline{m}_0$, je-li $r(\tau) = \infty$. Konstanta $\overline{m}_0$ je pak klidová hmota *volného* nukleonu.

Z rovnice (83b) plyne, že pro nukleon ve statickém vnějším Yukawově poli platí

$$d\mathscr{E}/dt = 0\,, \tag{123}$$

a tedy

$$\mathscr{E} = \gamma\mathscr{E}_0 = \gamma\,.\,(\overline{m}_0 c^2 + g\psi) = \text{konst}\,. \tag{124}$$

Energie $\mathscr{E}$ je konstantní, ačkoliv na nukleon působí nenulová síla $\boldsymbol{f} = -g\gamma^{-1}$ grad ψ. V poli (122) je to centrální síla přitažlivá. Ve smyslu „analogie" se (116) znamená rovnice (123), že v statickém poli se práce na nukleonu vykonaná a dodané „teplo" právě kompensují (ruší).

Popišme nakonec průběh přímočarého radiálního pohybu nukleonu v poli popsaném Yukawovým potenciálem (122). Z rovnice (124) dostáváme jeho rychlost vyjádřenu takto:

$$u(r) = c\{1 - [(\overline{m}_0 c^2 + g\,\psi(r))/\mathscr{E}]^2\}^{\frac{1}{2}}\,. \tag{125}$$

Aby se nukleon mohl vzdálit až do nekonečna, musí být $\mathscr{E} \geqq \overline{m}_0 c^2$; jinak by se zastavil v konečné vzdálenosti $r_{\max}$ určené rovnicí

$$\overline{m}_0 c^2 + g\,\psi(r_{\max}) = \mathscr{E}\,.$$

Nechť se nyní nukleon blíží k centru síly z velké vzdálenosti. Podle (122) je $g\,\psi(r)$ všude záporné a klesá k $-\infty$ při $r \to 0$. Rychlost u nejprve vzrůstá až k hodnotě c a klidová hmota m_0 klesá k nule. Těchto hodnot se dosáhne ve vzdálenosti r_c určené rovnicí

$$\overline{m}_0 c^2 + g\,\psi(r_c) = 0\,.$$

Energie $\mathscr{E}$ zůstává konstantní, ale ve vzdálenosti r_c se stane energií čistě kinetické povahy (neboť klidová energie $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$ vymizí). Při dalším přibližování k centru rychlost u klesá a nukleon se zastaví ve vzdálenosti $r_{\min} < r_c$ určené rovnicí

$$\overline{m}_0 c^2 + g\,\psi(r_{\min}) = -\mathscr{E}\,.$$

Aby i mezi r_c a $r_{\min}$, kde $\mathscr{E}_0$ dále klesá až k hodnotě $-\mathscr{E}$, zůstala energie $\mathscr{E} = \gamma \mathscr{E}_0$ kladnou, musíme zde volit znaménko součinitele γ záporné. Ve vzdálenosti $r_{\min}$ se směr pohybu obrací a nukleon se od centra síly vzdaluje stejným způsobem, jakým se přibližoval.

Není snad ani třeba připomínat, že popsaný pohyb nukleonu je pouze ilustrativní, idealizovaný příklad. Prakticky jej nelze realizovat především proto, že nelze realizovat předpokládané, ve zvoleném inerciálním systému zcela nepohyblivé, bodové silové centrum. Kromě toho při velikém zrychlení nukleonu jednoduché pohybové rovnice tvaru (83) už neplatí z podobných důvodů, z jakých v takovém případě neplatí pohybové rovnice (68) popř. (82d) pro elektron.

Podrobnější rozbor problému lze nalézt v práci [40].

8. EINSTEINŮV ZÁKON O EKVIVALENCI HMOTY A ENERGIE

Nerelativistická fyzika neznala žádný univerzální vztah mezi setrvačnou hmotou a energií hmotného tělesa. Platily v ní také dva zcela samostatné zákony zachování, hmoty a energie. Podle Einsteinovy teorie jsou si hmota M a energie $\mathscr{E}$ každého materiálního objektu vzájemně úměrné; platí mezi nimi vztah $\mathscr{E} = Mc^2$.

Experimentální potvrzení tohoto vztahu nebylo snadné a podařilo se, jak uvidíme, úplně teprve v oblasti fyziky elementárních částic s velikou kinetickou energií. Snadno se dá pochopit, proč se např. nepodařilo experimentálně objevit vztah úměrnosti mezi energií a hmotou hmotných těles v oboru makrofyzikálních a chemických (molekulárních) jevů: Energie $\Delta\mathscr{E}$, kterou je možno běžnými způsoby (např. elastickým napínáním, uvedením do rychlého pohybu, zahříváním, endotermní chemickou reakcí apod.) makroskopickému hmotnému tělesu dodat a v něm akumulovat, je poměrně malá a jí odpovídající hmota $\Delta M = c^{-2}\,\Delta\mathscr{E}$ je tak nepatrná ve srovnání s celkovou hmotou tělesa M, že se změny hmoty tělesa při takových pokusech nedají zjistit. Energii jednoho ergu odpovídá hmota $9\,.\,10^{-20}$ gramu! Jede-li např. železniční vagon o hmotě 20 tun rychlostí 30 m s^{-1}, je jeho hmota jen o 10^{-7} g větší než když byl v klidu. Nebo zahřátím 1 kg vody z 0° na 100 °C se zvýší její hmota přibližně jen o $5\,.\,10^{-9}$ g. Proto mohl Lavoisier formulovat (i experimentálně „potvrdit") zákon zachování hmoty nezávisle na zákonu zachování energie.

Ty *formy energie*, které je možno „snadno" měnit z jedné v druhou a převádět z jednoho materiálního objektu na jiný, označíme podle Foka za *aktivní*. Takovými formami energie jsou zejména kinetická energie hmotného tělesa (např. roztočeného setrvačníku), elastická deformační energie hmotného tělesa (např. napjatého hodinového pera), dále vnitřní energie plynu nebo vnitřní energie zahřátého tělesa, energie chemická a samozřejmě energie elektromagnetická (nabitého kondenzátoru, světla ap.) i energie gravitační. Nerelativistický zákon zachování energie je právě zákonem zachování úhrnné energie všech aktivních forem.

Takovou *formu energie*, kterou v určité etapě rozvoje techniky (s daným experimentálně-technickým vybavením) nedovedeme přeměnit v energii jiné formy, označíme za *pasivní*. (Této energie pak nemůžeme využít a v energetické bilanci realizovatelných dějů není k ní třeba přihlížet.) Rozdělení forem energie na aktivní a pasivní je ovšem podmíněné a konvenční. Tak např. veliká vnitřní energie „utajená" v těžkých atomových jádrech byla až do nedávné doby *pasivní formou* energie. Teprve štěpení jader atomů v atomových reaktorech umožnilo měnit ji v „klasicky aktivní" formy energie (kinetickou energii „odštěpků" jádra a elektromagnetickou energii).

Nejpasivnější formou energie je vnitřní, *klidová energie stabilních elementárních částic, elektronů a protonů*. Její přeměna na jiné formy je velmi obtížná a potřebuje, jak uvidíme, zcela speciální „experimentální podmínky". Na druhé straně však právě atomová jádra a elementární částice jsou těmi materiálními objekty, na nichž je možno a nutno prokázat správnost Einsteinovych vztahů

$$M = c^{-2}\mathscr{E} = M_0 + c^{-2}\mathscr{E}_{\text{kin}}\,, \quad \mathscr{E}_0 = M_0 c^2\,.$$

Zaprvé je dnes technicky možné *nahromadit* na *jednotlivých* elektronech a protonech *takové množství energie* (v aktivní formě *energie kinetické*), že jí odpovídající hmota $c^{-2}\mathscr{E}_{\text{kin}}$ je nejenom srovnatelná s klidovou hmotou částice, ale dokonce ji o mnoho řádů převyšuje. Klidová energie elektronu (s klidovou hmotou $m_0 \doteq 9 \cdot 10^{-28}$ g), popř. protonu (s klidovou hmotou $m_0^{(p)} \doteq 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g) činí zhruba 0,51 MeV, popř. 938,2 MeV. (1 MeV $\doteq 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ ergu.) V moderních elektromagnetických urychlovačích se již podařilo urychlit elektrony na rychlost tak blízkou rychlosti světla, že jejich kinetická energie dosahuje hodnoty 20 GeV $= 20 \cdot 10^3$ MeV $\doteq 4 \cdot 10^4 m_0c^2$. V dohledné době budou postaveny urychlovače dodávající elektrony s energií 40 GeV. Největší dnešní urychlovač protonů poskytuje protony s kinetickou energií 70 GeV $\doteq 75 m_0^{(p)}c^2$, a projektují se protonové urychlovače na energii 10^3 GeV.

Pokusy s elektromagnetickým urychlováním elektronů a protonů prokazují dvě základní fakta v plném souhlase s teorií relativity:

a) Rychlost částice u vzrůstá s energií W dodanou částici při jejím urychlování podle vztahu

$$\gamma_{(u)} = \frac{m_0c^2 + W}{m_0c^2} = \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0},$$

a proto na žádném urychlovači *nelze dosáhnout rychlosti* $u \geqq c$.

b) Setrvačná hmota částice m závisí na její rychlosti u podle vzorce

$$m = m_0\gamma_{(u)} = m_0\, \mathscr{E}/\mathscr{E}_0\,.$$

U elektronů je tato formule prověřena s velikou přesností ($\delta m \lesssim 10^{-4}m$) až do nejvyšších dosažených energií $\mathscr{E}$.

Pro úplnost experimentálního ověření Einsteinova zákona o ekvivalenci hmoty a energie zbývá prokázat, jednak že zmenšení klidové energie $\mathscr{E}_0$ volné hmotné částice odebráním energie $\Delta\mathscr{E}_0$ (v aktivní formě) vede vskutku ke zmenšení její klidové hmoty M_0 o $\Delta M_0 = c^{-2}\,\Delta\mathscr{E}_0$, jednak že celou klidovou energii stabilní elementární částice (elektronu, protonu) vypočtenou z experimentální hodnoty klidové hmoty lze úplně proměnit v energii běžné aktivní formy.

První prakticky použitelnou možnost experimentálního prověření vztahu $\Delta M_0 = c^{-2}\,\Delta\mathscr{E}_0$ poskytla jaderná fyzika. Je známo, že atomové jádro je složeno z jistého počtu protonů a neutronů, ale že klidové hmoty jader jsou vždy menší než součet klidových hmot příslušného počtu volných protonů a neutronů. Rozdíl δM_0 se nazývá „hmotový defekt“ a veličina $\varepsilon_0 = c^2\,\delta M_0$ pak vazbová energie atomového jádra. Např. u deuteronu je

$$\varepsilon_0^{(D)} = c^2[m_0^{(p)} + m_0^{(n)} - M_0^{(D)}] = 2{,}2\ \text{MeV}\,.$$

A skutečně se pozoruje, že při tvoření deuteria záchytem velmi pomalých neutronů ve vodíku, tj. při sloučení neutronu s protonem na deuteron, se pokaždé „uvolní“ energie 2,2 MeV v aktivní formě elektromagnetické energie vznikajícího záření γ a kinetické energie vytvořeného atomu deuteria.

Jiným příkladem takové *jaderné reakce* je *záchyt neutronů v bóru*; při něm vzniká lithium a helium. Symbolicky se zapisuje takto:

$$n_1 + B_{10} \to Li_7 + He_4 + Q\,. \tag{126}$$

Veličina Q je „reakční teplo“ uvolněné při uvažované (exotermní) jaderné reakci. Je nyní definováno jako rozdíl součtu kinetických energií částic z reakce vystupujících a částic do reakce vstupujících, tj. je dáno vzorcem

$$Q = \mathscr{E}_{kin}(\text{Li}) + \mathscr{E}_{kin}(\text{He}) - \mathscr{E}_{kin}(\text{B}) - \mathscr{E}_{kin}(\text{n})\,. \tag{127}$$

Z rovnice

$$\mathscr{E}(\text{n}) + \mathscr{E}(\text{B}) = \mathscr{E}(\text{Li}) + \mathscr{E}(\text{He})\,, \tag{128}$$

která vyjadřuje zachování úhrnné energie při uvažované reakci a podle Einsteinova vztahu $\mathscr{E} = Mc^2$ zároveň vyjadřuje i zachování úhrnné hmoty, dostaneme dosazením $\mathscr{E} = M_0c^2 + \mathscr{E}_{kin}$ a použitím definice (127) rovnici

$$c^2(m_0^{(n)} + M_0^{(B)}) = c^2(M_0^{(Li)} + M_0^{(He)}) + Q\,. \tag{128a}$$

Energie Q tedy vzniká na útraty součtu *klidových* energií atomových jader. Tato energie je při reakci (126) sice nevelká, $Q = 2{,}83$ MeV, ale správnost rovnice (128a) lze dosazením známých atomových hmot vskutku potvrdit.

Podstatně větší aktivní energie Q se uvolňuje při štěpení „těžkých“ atomových jader. Např. v reakci

$$n_1 + U_{235} \to Kr_{97} + Ba_{137} + 2n_1 + Q \tag{129}$$

je $Q \doteq 200$ MeV. I při této reakci se však uvolňuje (aktivuje) jen poměrně nevelká část ($\approx 0{,}1\%$) z celé klidové energie atomového jádra U_{235}.

Úplně, stoprocentně se přemění veškerá klidová energie stabilní hmotné částice na energii aktivní formy, když se setká elektron s tzv. pozitronem (antielektronem), který má stejnou klidovou hmotu jako elektron, ale náboj opačného znaménka. Obě částice při tom zmizí a místo nich vznikne záření γ (dva nebo nebo tři fotony), jejichž úhrnná energie je vždy $\geqq 1{,}02$ MeV. Energie záření γ však již patří mezi klasické aktivní formy energie. (Fotony mají nulové „klidové“ hmoty a tedy jen energii „kinetické povahy“.) „Anihilaci páru“ (dvojice elektron + pozitron) přeměnou na fotony je možno také obrátit: Z čistého záření γ, při „srážce“ dvou fotonů nebo srážce fotonu s elektronem může vzniknout nová dvojice elektron + pozitron (tzv. „produkce párů“).

Dojde-li k setkání elektronu a pozitronu v blízkosti jiných částic (elektronů a nukleonů), nemusí při „anihilaci páru“ vzniknout záření γ, nýbrž veškerá energie „páru“ se může přenést na ty okolní částice ve formě kinetické energie.

V zásadě jsou stejné děje možné i při setkání protonu s tzv. antiprotonem. Ve skutečnosti však vzájemná „anihilace" protonu a antiprotonu probíhá nejčastěji složitějším způsobem. Vzniká nejprve několik nových částic (mezonů) s klidovými hmotami sice menšími, než je klidová hmota protonu, ale nenulovými. Mezony jsou nestálé a postupně se dále rozpadají až na elektrony, pozitrony, fotony a neutrina. Nicméně je možno říci, že Einsteinova hypotéza, že člen m_0c^2 ve výraze $\mathscr{E} = m_0c^2 + \mathscr{E}_{\text{kin}}$ pro energii $\mathscr{E}$ volné hmotné částice představuje skutečně fyzikálně významnou a v zásadě i prakticky využitelnou energii, je dnes experimentálně v plném rozsahu potvrzena.

Jevy způsobené interakcemi elementárních částic (transmutační reakce a děje vedoucí ke vzniku nových částic) se pozorují a zkoumají při uměle vyvolaných srážkách částic, které mají velikou kinetickou energii, s prakticky klidnými elektrony, protony a neutrony v terčíku. Při analýze takových dějů se musí vycházet z relativistických zákonů zachování energie a hybnosti; mohou se zapsat ve tvaru čtyřvektorové rovnice

$$\sum_n P_\mu^{(n)} = \sum_{n^*} P_\mu^{*(n^*)}, \tag{130}$$

jejíž levá (pravá) strana odpovídá soustavě částic před procesem (po procesu).

Jevy, při nichž by nebylo možno splnit vztah (130), nebyly nikdy pozorovány. (Přesněji řečeno, takové jevy, při nichž byla (zdánlivě) rovnost (130) porušena, byly nakonec vždy vysvětleny tím, že jistá částice v koncovém stavu unikla detekci.) O možnosti určitého konkrétního transmutačního děje nerozhoduje ovšem pouze možnost splnit zákon zachování čtyřhybnosti. Musí být splněny i jiné, další zákony zachování, např. zákon zachování momentu hybnosti (o jehož relativistické formulaci pojednáme v odst. 9), zákon zachování elektrického náboje, zákony zachování tzv. baryonového a leptonového čísla apod. Příklady na použití rovnic (130) při teoretickém rozboru některých jednoduchých transmutačních reakcí mezi elementárními částicemi lze nalézt v úlohách (Ú 9–12).

Einsteinovu vztahu $\mathscr{E} = mc^2$ *mezi energií a hmotou* se obvykle říká „ekvivalence", tj. rovnocennost těchto dvou, z hlediska experimentální fyziky kvalitativně různorodých charakteristik materiálního objektu. Z teoretického hlediska je přirozené pokládat jednu z těch charakteristik za primární a druhou za odvozenou z té první. V moderní nemechanistické teorii materie je ovšem vhodnější odvozovat „mechanické veličiny", hmotu m a rychlost $\boldsymbol{u}$, z energie a hybnosti podle vztahů $m = c^{-2}\mathscr{E}$, $\boldsymbol{u} = c^2\boldsymbol{p}/\mathscr{E}$. Viděli jsme to už při Poincaréově teorii elektronu, v níž se veličiny $P_\mu \equiv (\boldsymbol{p}, ic^{-1}\mathscr{E})$ určují přímo ze složek tenzoru $T_{\mu\nu}$, nikoliv z fenomenologických veličin m a $\boldsymbol{u}$. K problému konstrukce tenzoru $T_{\mu\nu}$ různých materiálních objektů se ještě vrátíme v kap. VII.

9. RELATIVISTICKÝ TENZOR MOMENTU HYBNOSTI

9,1. TENZOR MOMENTU HYBNOSTI VOLNÉ ČÁSTICE A SOUSTAVY VOLNÝCH ČÁSTIC

V Newtonově mechanice se momentem hybnosti hmotné částice (vzhledem k libovolně zvolenému počátku O inerciálního systému S) rozumí axiální vektor $\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{p}(t)$, nebo k němu duální antisymetrický tenzor

$$L_{jk} = x_j p_k - x_k p_j . \tag{131}$$

Pro volnou částici je $\mathrm{d}L_{jk}/\mathrm{d}t = 0$, neboť $p_j = mu_j$ a $\mathrm{d}p_j/\mathrm{d}t = 0$.

V teorii relativity popisujeme pohyb hmotné částice tak, že souřadnice x_μ světobodu na její světočáře vyjadřujeme jako funkce jejího vlastního času τ. Kromě toho hybnost $p_j = m_0U_j$ doplňujeme na čtyřhybnost $P_\mu = m_0U_\mu$. Je tedy přirozené zobecnit obyčejný prostorový tenzor $L_{jk}(t)$ na prostoročasový tenzor

$$L_{\mu\nu}(\tau) = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu , \tag{132}$$

tj. na moment čtyřhybnosti částice vzhledem k Minkowského počátku souřadnic x_μ. U volné částice je čtyřhybnost konstantní a proto je

$$\mathrm{d}L_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = U_\mu P_\nu - U_\nu P_\mu = m_0(U_\mu U_\nu - U_\nu U_\mu) = 0 .$$

Složky tenzoru (132) s indexy $\mu = j$, $\nu = k$ tvoří obyčejný moment hybnosti L_{jk}. Při názorné fyzikální interpretaci složek $L_{jk}(\tau)$ vyjádříme ovšem souřadnice $x_j(\tau)$ hmotné částice jako funkce času $t = (ic)^{-1}\, x_4(\tau)$ a veličiny $L_{jk}(t)$ interpretujeme jako složky momentu hybnosti částice (v čase t) vzhledem k Lorentzově počátku systému S.

Složky L_{j4} dostaneme v podobě

$$L_{j4}(t) = icm(x_j(t) - u_j t) .$$

Rovnice L_{j4} = konst vyjadřují tedy pouze rovnoměrný přímočarý pohyb částice, neboť u_j a $m = m_0\gamma_{(u)}$ jsou konstanty. To plyne z rovnic $P_\mu \equiv (m\boldsymbol{u}, icm)$ = konst.

Bude snad vhodné upozornit na to, že veličiny definované tenzorovými transformačními vzorci $L'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}L_{\alpha\beta}$ mají v systému S′ *stejný fyzikální význam* jako veličiny $L_{\mu\nu}$ v systému S *jenom tehdy*, jsou-li souřadnice x'_μ určeny *homogenní* Lorentzovou transformací. Jen v tom případě lze totiž složky $L'_{\mu\nu}$ vyjádřit v systému S′ vzorci $L'_{\mu\nu}(\tau) = x'_\mu(\tau)\, P'_\nu - x'_\nu(\tau)\, P'_\mu$ (tvarem shodnými se vzorci (132)) a veličiny $L'_{jk}(t')$ pak interpretovat jako *složky momentu hybnosti* částice v čase t', v Lorentzových osách $1'$, $2'$, $3'$ a *vzhledem k Lorentzově počátku systému* S′. Při nehomogenní Lorentzově transformaci $x'_\mu - x'_\mu(O) = b_{\mu\nu}x_\nu$ budou veličiny $L'_{\mu\nu}$, určené uvedenými tenzorovými transformačními vzorci, v systému S′ vyjádřeny výrazy

$$L'_{\mu\nu}(\tau) = (x'_\mu - x'_\mu(O))\, P'_\nu - (x'_\nu - x'_\nu(O))\, P'_\mu ,$$

v nichž $x'_\mu = x'_\mu(\tau)$ jsou souřadnice světobodů na světočáře částice a $x'_\mu(O)$ jsou konstanty (souřadnice Minkowského počátku systému S v systému S′). *Poněvadž* $x'_j(O)$

jsou konstanty, lze nyní veličiny $L'_{jk}(t')$ interpretovat jako složky momentu hybnosti částice v čase t', v Lorentzových osách $1', 2', 3'$, ale vzhledem k „pevnému bodu" o souřadnicích $x'_j(O) = \text{konst} \neq 0$.

Zobecnění nerelativistického tenzoru (131) *pro soustavu volných hmotných bodů je zcela jednoduché*: Úhrnný moment hybnosti je dán výrazem

$$L_{jk} = \sum_n L^{(n)}_{jk}(t)\,. \tag{131a}$$

Zobecnění prostoročasového, relativistického tenzoru (132) *pro takový případ je trochu složitější*, protože každá z hmotných částic soustavy má svůj vlastní čas $\tau^{(n)}$. Obecně lze tenzor $L_{\mu\nu}$ definovat výrazem

$$L_{\mu\nu} = \sum_n L^{(n)}_{\mu\nu}(\tau^{(n)}) = \sum_n \{x^{(n)}_\mu(\tau^{(n)})\, P^{(n)}_\nu - x^{(n)}_\nu(\tau^{(n)})\, P^{(n)}_\mu\}\,. \tag{132a}$$

Abychom i nyní pro všecky složky tenzoru (132a) ve zvoleném systému S měli prostou fyzikální interpretaci, musíme *hodnoty vlastních časů* $\tau^{(n)}$ *volit tak, aby platilo* $x^{(n)}_4(\tau^{(n)}) = ict$ *pro všecka n*. Prostorové souřadnice $x^{(n)}_j(\tau^{(n)})$ pak určují v systému S *současné polohy* všech částic uvažované soustavy. Konstantnost složek $L_{\mu\nu}$ plyne z rovnic $\mathrm{d}L^{(n)}_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau^{(n)} = 0$, neboť platí

$$\mathrm{d}L_{\mu\nu}/\mathrm{d}t = \sum_n (\mathrm{d}L^{(n)}_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau^{(n)})\, \mathrm{d}\tau^{(n)}/\mathrm{d}t = 0\,.$$

Složky $L_{\mu\nu}$ $(\mu = j,\ \nu = k)$ mají pak opět význam obyčejného úhrnného momentu hybnosti soustavy částic a také složky L_{j4} lze zapsat jednoduchými výrazy i prostě vyložit:

$$L_{j4} = -L_{4j} = \mathrm{i}c\,\{\sum_n x^{(n)}_j m^{(n)} - t\sum_n m^{(n)} u^{(n)}_j\} = \mathrm{i}c\, M(X_j - V_j t)\,,$$

$$M = \sum_n m^{(n)}\,, \quad X_j = M^{-1}\sum_n m^{(n)} x^{(n)}_j\,,$$

$$V_j = M^{-1}\sum_n m^{(n)} u^{(n)}_j = \mathrm{d}X_j/\mathrm{d}t\,.$$

Rovnice $L_{j4} = \text{konst}$ tedy vyjadřují jen rovnoměrný přímočarý pohyb těžiště soustavy volných částic vůči inerciálnímu systému S. Je-li Lorentzův počátek inerciálního systému S zvolen přímo v těžišti, máme $X_j = 0$, $V_j = 0$, a tedy $L_{j4} = 0$.

9,2. MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY INTERAGUJÍCÍCH ČÁSTIC A POLE

V Newtonově mechanice platí pro soustavu hmotných bodů podrobených působení sil (vnějších i vnitřních, pocházejících od přímého působení mezi hmotnými body uvažované soustavy) pohybové rovnice

$$\mathrm{d}p^{(n)}_j/\mathrm{d}t = m^{(n)}\, \mathrm{d}u^{(n)}_j/\mathrm{d}t = f^{(n)}_j\,.$$

K časovým změnám úhrnné hybnosti p_j *a úhrnného momentu* L_{jk} *přispívají jen vnější síly*, neboť vnitřní splňují princip akce a reakce a jsou centrální. Nepůsobí-li na hmotné body vnější síly (je-li soustava izolovaná), pak je $p_j = \text{konst}$, $L_{jk} = \text{konst}$.

Kdybychom v relativistické mechanice zůstali při definici

$$P_\mu = \sum_n P^{(n)}_\mu = \sum_n m^{(n)}_0 U^{(n)}_\mu \tag{133}$$

a definici (132a) i pro soustavu interagujících částic, dostali bychom užitím pohybových rovnic (83), tj. rovnic

$$\mathrm{d}P^{(n)}_\mu/\mathrm{d}\tau^{(n)} = F^{(n)}_\mu\,,$$

pro časové změny veličin p_j a L_{jk} výrazy

$$\mathrm{d}p_j/\mathrm{d}t = \sum_n (\mathrm{d}P^{(n)}_j/\mathrm{d}\tau^{(n)})\, \mathrm{d}\tau^{(n)}/\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_n F^{(n)}_j \gamma^{-1}_{(n)} = \sum_n f^{(n)}_j\,,$$

a podobně

$$\mathrm{d}L_{jk}/\mathrm{d}t = \sum_n (x^{(n)}_j f^{(n)}_k - x^{(n)}_k f^{(n)}_j)\,.$$

Tyto výrazy však u izolované soustavy nevymizí, neboť „vnitřní síly" nyní nejsou obecně ani centrální, ani pro ně neplatí princip akce a reakce. Síly působící na částice izolované soustavy v daném čase t nejsou obecně ani určeny současnými polohami a rychlostmi částic, neboť jsou zprostředkovány (přenášeny s jistým zpožděním) nějakým polem existujícím v prostoru mezi částicemi.

Definice (133) a (132a) jsou proto vhodné pouze pro soustavu částic, které na sebe navzájem prakticky nepůsobí a jsou buď úplně volné, nebo jsou podrobeny *pouze* působení *vnějších* sil (všecky se pohybují v daném vnějším poli). Příkladem druhé soustavy je shluk (oblak) protonů pohybujících se v synchrocyklotronu. Tyto částice netvoří izolovanou soustavu a jejich úhrnná hybnost ani moment hybnosti nejsou ovšem konstantní.

Abychom i u izolované soustavy *interagujících* částic, nebo vůbec u libovolného izolovaného materiálního objektu dospěli ke správné definici úhrnného momentu hybnosti, který pak bude časově konstantní, musíme postupovat podobně jako při definici úhrnné energie a hybnosti (popř. čtyřhybnosti): Musíme totiž započítat i moment hybnosti polí patřících k té soustavě.

Formálně lze to provést takto: Pro každou materiální soustavu (příkladem zde může být opět soustava Poincaréových elektronů a elektromagnetického záření) je v relativistické teorii materie definován *úplný* tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}(x)$, který je symetrický, splňuje všude rovnice

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0\,, \tag{134}$$

a sám vymizí vně jisté světové trubice. (Stačí také, když při t = konst a $r \to \infty$ složky $T_{\mu\nu}$ klesají dostatečně rychle k nule.)

Úhrnná, časově konstantní čtyřhybnost té soustavy je pak dána integrály (50). Pro vyjádření tenzoru celkového momentu hybnosti si nejprve sestrojíme tenzor

$$\chi_{\mu\nu\varrho}(x) = x_\mu T_{\nu\varrho} - x_\nu T_{\mu\varrho}\,, \tag{135}$$

který je antisymetrický v prvních dvou indexech a splňuje rovnice

$$\begin{aligned}\partial_\varrho \chi_{\mu\nu\varrho} &= \delta_{\mu\varrho} T_{\nu\varrho} - \delta_{\nu\varrho} T_{\mu\varrho} + x_\mu \partial_\varrho T_{\nu\varrho} - x_\nu\, \partial_\varrho T_{\mu\varrho} = \\ &= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} = 0\,.\end{aligned} \tag{136}$$

Kromě toho $\chi_{\mu\nu\varrho}$ vymizí vně jisté světové trubice, tak jako $T_{\mu\nu}$. Antisymetrický tenzor úhrnného momentu hybnosti, který nyní podle obecného zvyku označíme $J_{\mu\nu}$, definujeme integrály

$$J_{\mu\nu}(t) = (\mathrm{i}c)^{-1} \int_V \chi_{\mu\nu4}(\boldsymbol{x}, t)\, \mathrm{d}V = (\mathrm{i}c)^{-1} \int_V (x_\mu T_{\nu4} - x_\nu T_{\mu4})\, \mathrm{d}V\,. \tag{137}$$

Podle obecné věty z odst. V 4,6 tvoří integrály $J_{\mu\nu}$ tenzor a jsou nezávislé na t.

Skládá-li se uvažovaná soustava jen z hmotných částic, které na sebe prakticky nepůsobí, je tenzor $T_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t)$ znatelně od nuly různý jen v jistých velmi malých oblastech $V^{(n)}$ uvnitř prostorové oblasti V. V tom případě dávají výrazy (137) zásadně totéž co (132a) při $x_4^{(n)}(\tau^{(n)}) = \mathrm{i}ct$. Vzorců (137) lze použít i na výpočet momentu hybnosti elektromagnetické vlny (světelného signálu, vlnového klůbka). Lze jimi definovat konstantní moment hybnosti i u izolované materiální soustavy, jejíž „složení" se s časem mění; tak je tomu např. při prudkých srážkách elementárních částic: při nich vzniká brzdné záření, zanikají původní a tvoří se nové částice atp. (viz příklady v Ú 9, 11, 12).

9,3. SPIN ČÁSTICE A POHYBOVÉ ROVNICE ČÁSTICE SE SPINEM

Dosud jsme předpokládali, že hmotná částice, např. elektron apod. má ve svém klidovém popř. těžišťovém systému obyčejný moment hybnosti J_{jk} nulový. Ve skutečnosti tomu tak není. Elektron, stejně jako proton a jiné podobné částice, má totiž kromě „orbitálního" momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ také ještě „vnitřní" moment hybnosti $\boldsymbol{s}$, který jako by svědčil o „rotaci elektronu" kolem osy procházející jeho „středem". *Tento vnitřní moment hybnosti částice se nazývá* spinový moment, nebo prostě *spin.*

Spin $\boldsymbol{s}$, stejně jako orbitální moment $\boldsymbol{L}$, *je axiální prostorový vektor*, s nímž je duálně sdružen antisymetrický prostorový tenzor $s_{jk} = \varepsilon_{jkl} s_l$. Pro relativistický popis

spinu je zase nutno zobecnit (doplnit) prostorový tenzor s_{jk} na prostoročasový *antisymetrický tenzor* $s_{\mu\nu}$. Spinový tenzor se sčítá s orbitálním tenzorem $L_{\mu\nu}$ na výsledný tenzor $J_{\mu\nu}$ úhrnného momentu hybnosti:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} \tag{138}$$

Na rozdíl od tenzoru $L_{\mu\nu}(\tau)$, který je dán vzorcem (132), nelze tenzor $s_{\mu\nu}(\tau)$ vyjádřit dynamickými proměnnými $x_\alpha(\tau)$ a $P_\alpha(\tau)$. *Složky spinového tenzoru jsou nové (další) dynamické proměnné charakterizující částici*, a musí být určeny přímo jako funkce času (nebo vlastního času částice) přímo z pohybových rovnic, v nichž vystupují rovnoprávně s veličinami x_α a P_α.

Tyto rovnice pro částici ve vnějším poli je možno v daném inerciálním systému S zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}P_\mu/\mathrm{d}\tau = F_\mu\,, \tag{139}$$

$$\mathrm{d}J_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = x_\mu F_\nu - x_\nu F_\mu + d_{\mu\nu}\,. \tag{140}$$

Čtyřvektor F_μ je vnější Minkowského čtyřsíla ovlivňující translační pohyb částice a tenzor $d_{\mu\nu} = -d_{\nu\mu}$ je otáčivý moment ovlivňující spin částice. Pro „elektron" ve vnějším elektromagnetickém poli lze veličiny F_μ i $d_{\mu\nu}$ vyjádřit intenzitami pole, ale tím se podrobněji zabývat nebudeme, protože kvantitativně správný popis spinu elektronu lze podat teprve v rámci kvantové teorie (Diracovy kvantové mechaniky elektronu).

Rovnice (139) a (140) jsou „přirozeným" zobecněním rovnic platných pro částici bez spinu. Pro volnou částici ($F_\mu = 0$, $d_{\mu\nu} = 0$) vedou k zákonům zachování čtyřhybnosti P_μ a úhrnného momentu hybnosti částice $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}$.

Z rovnic (138)–(140) se snadno odvodí rovnice

$$\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = d_{\mu\nu} + (P_\mu U_\nu - P_\nu U_\mu)\,, \tag{140a}$$

$$\mathrm{d}L_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = x_\mu F_\nu - x_\nu F_\mu - (P_\mu U_\nu - P_\nu U_\mu)\,, \tag{140b}$$

v nichž $U_\mu = \mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\tau$ je čtyřrychlost částice *Kdyby i pro částici se spinem platil vztah* $P_\mu = m_0 U_\mu$, bylo by možno rovnice (140a) dále zjednodušit na $\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = d_{\mu\nu}$. Pro volnou částici bychom pak měli také $s_{\mu\nu}$ = konst a $L_{\mu\nu}$ = konst.

Ale čtyřhybnost P_μ částice se spinem není obecně rovnoběžná s její čtyřrychlostí U_μ, a proto $P_\mu U_\nu \neq P_\nu U_\mu$. I v tom případě je však podle rovnic (140a) správné toto tvrzení: Je-li inerciální systém S zvolen tak, že pro určitou hodnotu τ je buď $P_j(\tau) = 0$ nebo $U_j(\tau) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$, a je-li vnější pole takové, že je zároveň $d_{jk}(\tau) = 0$, pak je také $\mathrm{d}s_{jk}/\mathrm{d}\tau = 0$, i když je při tom $F_\mu \neq 0$. V udané situaci je tedy v daném okamžiku τ spinový vektor $s_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl} s_{kl}$ v systému S stacionární:

$$\mathrm{d}s_j/\mathrm{d}\tau = \gamma_{(u)}\, \mathrm{d}s_j/\mathrm{d}t = 0\,.$$

To je tvrzení, na němž jsme se odvolávali při výkladu o Thomasově precesi v odst. IV 8,2.

Naznačenému dynamickému popisu hmotné částice se spinem se obvykle říká „klasická“ (tj. nekvantová) relativistická teorie částice se spinem. Nebudeme zde tuto teorii dále rozvíjet, protože je to problém povahy akademické. Kdo by se o ni více zajímal, nalezne podrobnosti v pojednáních [41]. (Viz též Ú 13.) Poznamenejme pouze, že i v Diracově kvantové mechanice elektronu platí pro časovou změnu spinu *volného elektronu* rovnice $\dot{s}_{jk} = p_j u_k - p_k u_j \neq 0$. Rovněž je $p_j \neq m u_j$, a proto může být $\dot{p}_j = 0$ i při $\dot{u}_j = \ddot{x}_j \neq 0$. Odvození je podáno např. v [42].

10. ZÁKLADNÍ ROVNICE ELEKTRODYNAMIKY A MECHANIKY V REÁLNÝCH PROSTOROČASOVÝCH SOUŘADNICÍCH

V literatuře o speciální teorii relativity se hojně používá i reálné tenzorové symboliky z odst. V 6. Proto zde podáme stručný přehled základních vzorců a rovnic relativistické elektrodynamiky a mechaniky vyjádřených invariantním způsobem v systémech reálných pseudokartézských souřadnic $x^\mu \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4) \equiv (\boldsymbol{x}, ct)$. Uvidíme, že nové definice rozličných tenzorů i tvary vzorců a rovnic pro něplatných se celkem málo liší od těch, které jsme si zavedli a odvodili v předchozích odstavcích. Pozměněný význam čtvrté souřadnice (chybějící faktor i) se ovšem projeví v příslušných změnách významu některých složek důležitých fyzikálních tenzorů.

Užíváme-li k určení světobodu reálných prostoročasových souřadnic x^μ, musíme především rozeznávat kontravariantní a kovariantní složky čtyřvektorů. Veličiny $\mathrm{d}x^\mu \equiv (\mathrm{d}\boldsymbol{x}, c\,\mathrm{d}t)$ představují *kontravariantní* složky čtyřvektoru *prostoročasového posuvu* a operátory

$$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu \equiv (\mathrm{grad}, c^{-}\,\partial/\partial t)$$

kovariantní složky *čtyřgradientu*.

Jsou-li souřadnice $x^\mu(\tau)$ světobodů na světočáře hmotného bodu dány jako funkce vlastního času τ, jehož přírůstek

$$\mathrm{d}\tau = \gamma_{(u)}^{-1}\,\mathrm{d}t = \pm c^{-1}(-\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu)^{\frac{1}{2}}$$

je při ortochronních Lorentzových transformacích invariantní, pak veličiny

$$U^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau \equiv (\gamma\boldsymbol{u}, c\gamma)$$

představují *kontravariantní* složky *čtyřrychlosti*. Čtyřrychlost splňuje nyní invariantní rovnici

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\mu U_\mu = -c^2 .$$

Kovariantní složky čtyřrychlosti U_μ mají tento význam:

$$U_\mu \equiv (\gamma\boldsymbol{u}, -c\gamma) .$$

Vidíme, že kontravariantní (popř. kovariantní) složky čtyřvektoru podle nové definice dostaneme ze složek příslušného čtyřvektoru podle dřívější definice tím, že od čtvrté složky „odštěpíme“ faktor i (popř. $-$i).

Přistupme zase nejprve k invariantnímu zápisu základních rovnic Maxwellovy-Lorentzovy teorie elektromagnetického pole v reálných prostoročasových souřadnicích. Má-li být Lorentzova podmínka (II 7) pro potenciály $\boldsymbol{A}$ a φ invariantní, musíme ji psát ve tvaru

$$\partial_\mu \varphi^\mu = 0 . \tag{141}$$

Složky vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$ a potenciál φ se tedy musí transformovat jako *kontravariantní* složky čtyřvektoru: $\varphi^\mu \equiv (\boldsymbol{A}, \varphi)$.

Vlnové rovnice pro φ^μ zapíšeme nyní ve tvaru

$$\Box\varphi^\mu = -(4\pi/c)\, J^\mu . \tag{142}$$

Veličiny

$$J^\mu = \varrho_0 U^\mu \equiv (\varrho_0\gamma\boldsymbol{u}, c\varrho_0\gamma) \equiv (\varrho\boldsymbol{u}, c\varrho) ,$$

jsou *kontravariantní* složky *čtyřproudu* a $\Box \equiv \eta^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\alpha\partial^\alpha$ je invariantní operátor d'Alembertův. Ze (142) a (141) plyne pro J^μ rovnice kontinuity

$$\partial_\mu J^\mu = 0 . \tag{143}$$

Je ovšem možné a často vhodné užívat i kovariantních složek čtyřpotenciálu $\varphi_\mu \equiv (\boldsymbol{A}, -\varphi)$ a čtyřproudu $J_\mu = \varrho_0 U_\mu \equiv (\varrho\boldsymbol{u}, -c\varrho)$. Definujeme-li antisymetrický tenzor intenzit pole rovnicemi

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu , \tag{144}$$

souvisí jeho složky s obyčejnými složkami intenzit $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vztahy

$$\boldsymbol{E} \equiv (F_{14}, F_{24}, F_{34}) \equiv (F^{41}, F^{42}, F^{43}) , \tag{144a}$$

$$\boldsymbol{H} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \equiv (F^{23}, F^{31}, F^{12}) . \tag{144b}$$

Na základě definice (144) platí opět rovnice

$$\partial_\mu F_{\nu\varrho} + \partial_\varrho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\varrho\mu} = 0 , \tag{145}$$

které představují invariantní zápis druhé série Maxwellových-Lorentzových rovnic. První sérii lze pak zapsat v invariantním tvaru takto:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = (4\pi/c)\, J^\mu . \tag{146}$$

Kovariantní složky vlastní hustoty Lorentzovy čtyřsíly ϕ_μ jsou nyní určeny vzorci

$$\phi_\mu = c^{-1} F_{\mu\nu} J^\nu . \tag{147}$$

Splňují invariantní rovnici $\phi_\mu J^\mu = 0$ a mají tento význam:

$$\phi_\mu \equiv (\phi, -c^{-1}\,\phi\,.\,\boldsymbol{u})\,.$$

Definujeme-li konečně „smíšené" složky tenzoru energie a hybnosti elektromagnetického pole T^μ_ν vzorci

$$T^\nu_\mu = (4\pi)^{-1}\,(F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4}\delta^\nu_\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\,, \tag{148}$$

snadno se přesvědčíme, že splňují na základě rovnic (145), (146) a definice (147) invariantní rovnice

$$\partial_\nu T^\nu_\mu = -\phi_\mu\,. \tag{149}$$

Složky tenzoru T^ν_μ mají tento fyzikální význam:

$$(T^1_4, T^2_4, T^3_4) \equiv -c^{-1}\boldsymbol{S}\,,$$
$$(T^4_1, T^4_2, T^4_3) \equiv c\boldsymbol{w}\,,$$
$$T^4_4 = -h\,, \quad T^k_j = T_{jk}\,.$$

Veličiny h, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{w}$, T_{jk} jsou opět určeny vzorci (II 13). Rovnice (149) pak dávají rovnice (II 12, 14).

Vzhledem k tomu, že pro kovariantní složky $T_{\mu\nu}$ platí vztahy symetrie $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, můžeme ve smíšených složkách T^ν_μ psát indexy přímo nad sebe. Mezi složkami T^4_j a T^j_4 platí ovšem vztahy $T^4_j = -T^j_4$, neboť při zvedání (snižování) indexu 4 se znaménko složky tenzoru mění.

Úhrnný elektrický náboj izolované materiální soustavy je dán invariantním integrálem

$$e = c^{-1}\int_V J^4\,\mathrm{d}V\,, \tag{150}$$

a kovariantní složky Lorentzovy čtyřsíly F_μ jsou určeny výrazy

$$F_\mu = ec^{-1}F_{\mu\nu}U^\nu \equiv (\gamma\boldsymbol{f}, -c^{-1}\gamma\boldsymbol{f}\,.\,\boldsymbol{u})\,, \tag{151}$$

v nichž $\boldsymbol{f}$ je zase obyčejná Lorentzova síla.

Kovariantní složky *čtyřhybnosti* elektromagnetické vlny (světelného signálu) jsou dány integrály

$$P^{(\mathrm{E})}_\mu = c^{-1}\int T^4_\mu\,\mathrm{d}V \equiv (\boldsymbol{p}^{(\mathrm{E})}, -c^{-1}\mathscr{E}^{(\mathrm{E})})\,. \tag{152}$$

V pseudokartézských systémech souřadnic x^μ můžeme ovšem stejně dobře používat i *kontravariantních* složek *čtyřhybnosti* $P^\mu = \eta^{\mu\nu}P_\nu \equiv (\boldsymbol{p}, c^{-1}\mathscr{E})$ a *čtyřsíly* F^μ. Pohybové rovnice hmotné částice lze pak zapsat v invariantním tvaru

$$\mathrm{d}P^\mu/\mathrm{d}\tau = F^\mu \tag{153}$$

$$P^\mu = m_0U^\mu\,, \quad m_0 = c^{-1}(-P_\mu P^\mu)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{154}$$

Kontravariantní složky tenzoru momentu hybnosti hmotné částice bez spinu jsou vyjádřeny vztahem

$$L^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu\,, \tag{155}$$

a obecnější tenzor $J^{\mu\nu}$ momentu hybnosti libovolné izolované materiální soustavy vzorcem

$$J^{\mu\nu} = c^{-1}\int_V (x^\mu T^{\nu 4} - x^\nu T^{\mu 4})\,\mathrm{d}V\,, \tag{156}$$

v němž ovšem $T^{\mu\nu}$ je úplný tenzor energie a hybnosti.

Tento druhý zápis rovnic relativistické fyziky se rovněž musí znát. Použijeme ho v kap. IX. V kapitolách VII a VIII se ještě přidržíme jednodušší symboliky, která používá imaginární souřadnice $x_4 = ict$.

ÚLOHY

1. Odvoďte vzorce (II 25a,b) ze vzorců $\varphi' = e/r'$, $\boldsymbol{A}' = 0$, které platí v klidovém systému S′ náboje e, tím, že použijete transformace (11).

2. Udejte transformaci hustoty proudu $\boldsymbol{J}$ a hustoty náboje ϱ při Lorentzově transformaci (IV 64a,b) a ukažte, že $\varrho^+\gamma^{-1}_{(u^+)} = \varrho\gamma^{-1}_{(u)} = \varrho_0$.

3. V počátku O' systému S′ je bodový zdroj světla vlastní frekvence $\nu^\star_0$. Kulová světelná vlna má v místě $\boldsymbol{x}'$ v čase t' (ve světobodě P) fázi $F(P) = 2\pi\nu^\star_0(t' - r'/c)$, $r' = |\boldsymbol{x}'|$. Použijte invariance fáze vlny a obrácené transformace (11) a ukažte, že v systému S je fáze $F(P)$ dána výrazem

$$2\pi\nu^\star\{t - c^{-1}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\star(t^\star)|\}\,,$$

v němž $\nu^\star = \gamma^{-1}\nu^\star_0$, $\boldsymbol{x}^\star(t^\star) = \boldsymbol{v}t^\star$, $\boldsymbol{v} \equiv (v, 0, 0)$ a $t^\star$ je určeno vztahem

$$t - t^\star = c^{-1}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\star(t^\star)|\,.$$

4. V elektromagnetické vlně popsané vzorci (51) si zvolíme vlnoplochy fáze 0 a 2π. Do nich položíme základny přímého válce. Jeho površky tedy mají směr $\boldsymbol{N}$, jeho výška v systému S se rovná λ a celý válec se pohybuje ve směru své výšky rychlostí c. Vypočtěte energii $\mathscr{E}^{(\mathrm{E})}$ obsaženou ve válci z hlediska systému S a energii $\mathscr{E}'^{(\mathrm{E})}$ obsaženou v něm z hlediska systému S′ určeného transformací (11). Udejte vztah mezi $\mathscr{E}^{(\mathrm{E})}$ a $\mathscr{E}'^{(\mathrm{E})}$.

5. V systému S se šíří jedna rovinná světelná vlna o frekvenci $\nu_{(1)}$ ve směru $\boldsymbol{N}^{(1)}$ a druhá o frekvenci $\nu_{(2)}$ ve směru $\boldsymbol{N}^{(2)}$. Trojhran prostorových os systému S je už natočen tak, že máme

$$N_1^{(1)} = N_1^{(2)} > 0\,,\quad N_2^{(1)} = -N_2^{(2)} > 0\,,\quad N_3^{(1)} = N_3^{(2)} = 0\,.$$

Udejte systém S″, v němž obě vlny postupují proti sobě (první ve směru osy $2''$, druhá v opačném směru) a mají stejnou frekvenci $\nu''_{(1)} = \nu''_{(2)} = \nu''$. Vypočtěte ν''.

6. V systému S′ postupuje rovinná světelná vlna o frekvenci $\nu'_{(1)}$ ve směru $\boldsymbol{N}'^{(1)} \equiv (N_1'^{(1)} < 0, N_2'^{(1)} > 0, N_3'^{(1)} = 0)$ a odráží se na klidném zrcadle ležícím a) v rovině $(1', 3')$, b) v rovině $(2', 3')$. V systému S′ platí obyčejný zákon odrazu: úhel odrazu se rovná úhlu dopadu, frekvence se nemění. Transformací směrů šíření a frekvencí vln do systému S určeného obrácenou transformací (11) určete zákon odrazu na pohybujícím se zrcadle a výsledky srovnejte s výsledky Ú III 6 a Ú III 11.

7. Integrujte pohybové rovnice (66), (69) pro elektron v homogenním elektrickém poli.

8. Integrujte pohybové rovnice (66), (69) pro kladně elektricky nabitou částici v homogenním magnetickém poli intenzity $\boldsymbol{H} \equiv (0, 0, H = \text{konst})$ s počátečními podmínkami $\boldsymbol{x}(0) = 0$, $\boldsymbol{u}(0) \equiv (u, 0, 0,)$.

9. Částice I (pion) s klidovou energií $\mathscr{E}_0^{(I)} = m_0^{(I)}c^2 \doteq 140$ MeV se rozpadá na částici II (mion) s klidovou energií $\mathscr{E}_0^{(II)} = m_0^{(II)}c^2 \doteq 100$ MeV a částici III (neutrino) s nulovou klidovou energií $\mathscr{E}_0^{(III)} = 0\,(m_0^{(III)} = 0)$. Vypočtěte kinetickou energii mionu i energii neutrina v klidovém systému pionu.

10. O „účinku" srážky dvou částic I, II rozhoduje jejich úhrnná energie $\mathscr{E}'$ v jejich *těžišťovém* systému S′. V laboratorním systému S je částice I (terčíková) před srážkou v klidu, kdežto částice II (střela) má hybnost $\boldsymbol{p}^{(II)}$. Odvoďte vzorce pro a) rychlost $\boldsymbol{v}$ těžišťového systému S′ vůči S; b) energii $\mathscr{E}'$ (zejména též v případě $m_0^{(I)} = m_0^{(II)} = m_0$ a $\mathscr{E}^{(II)} \gg m_0c^2$); c) rychlosti obou částic v S i v S′.

11. Na elektron I, který je v laboratorním systému S v klidu, dopadá elektron II. Výsledkem srážky je vznik nového „páru" (elektron + pozitron), takže v koncovém stavu máme čtyři volné částice s klidovou hmotou m_0. Udejte minimální laboratorní kinetickou energii elektronu II, při níž tento jev ještě může nastat.

12. Foton s hybností $\boldsymbol{p}^{(f)}$ se srazí s elektronem, který byl původně v klidu ($\boldsymbol{p} = 0$). Může přitom dojít ke dvěma jevům: a) Foton se odrazí s hybností $\boldsymbol{p}^{*(f)}$, ve směru svírajícím s $\boldsymbol{p}^{(f)}$ úhel ϑ a elektron se dostane do pohybu s hybností $\boldsymbol{p}^*$ ve směru svírajícím s $\boldsymbol{p}^{(f)}$ úhel ψ. Vyjádřete $p^{*(f)}$, p^* a ψ pomocí $p^{(f)}$ a ϑ. b) Foton se absorbuje (zmizí) a místo něho vznikne „pár" (elektron + pozitron), takže v koncovém stavu jsou tři volné částice s klidovou hmotou m_0. Udejte minimální energii fotonu, při níž je možný i tento děj.

13. Pro volnou částici se spinem platí rovnice $P_\mu = \text{konst}$, $\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = P_\mu U_\nu - P_\nu U_\mu$. Spin omezíme ještě vedlejší podmínkou $s_{\mu\nu}U_\nu = 0$, která stanoví že v okamžitém klidovém systému částice jsou složky $s_{j4} = -s_{j4} = 0$. Užitím vztahu $U_\mu U_\mu = -c^2$ a definic $m_0^2 = -c^{-2}P_\mu P_\mu$, $\overline{m}_0 = -c^{-2}P_\mu U_\mu$ odvoďte z pohybových rovnic spinu vztahy

$$P_\mu = \overline{m}_0 U_\mu - c^{-2}U_\nu\,\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau\,,$$

$$m_0^2 = \overline{m}_0^2 + \tfrac{1}{2}c^{-4}(\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}s_{\mu\nu}/\mathrm{d}\tau = \text{konst.}\,,$$

$$\overline{m}_0 = \text{konst}\,,$$

$$s_0^2 = \tfrac{1}{2}s_{\mu\nu}s_{\mu\nu} = \text{konst}\,,$$

a vyložte význam invariantní veličiny s_0^2. Určete pohyb částice v systému, v němž je $\boldsymbol{p} = 0 (P_4 = \mathrm{i}cm_0)$ a $u_3 = 0$.